УДК 511.9

Представление рациональных чисел конечными цепными дробями и множества, свободные от арифметических прогрессий

Н. Г. Мощевитин

Доказано, что рациональные числа с ограниченными неполными частными разложения в конечную цепную дробь не могут образовывать слишком длинных арифметических прогрессий.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Формулировки результатов и краткий обзор

Пусть $q \geqslant 2$ — натуральное число, $(a,q)=1$. Через $b_\nu(a)$ мы будем обозначать неполные частные разложения числа a/q в цепную дробь:

$$\frac{a}{q} = [b_0(a); b_1(a), \dots, b_s(a)].$$

Хорошо известно, что для простого q всегда найдется целое a, $(a,q)=1$, для которого

$$\max_\nu b_\nu(a) \ll \log q. \tag{1}$$

Это утверждение весьма просто доказывается методом усреднения (см. [1], [2], [3], [4], а также общую теорему Минковского–Главки [5], [6]). Оценка (1) справедлива и для составного q (см., например, [7] и более слабое неравенство в [8]). В [9] вычислены асимптотики для сумм вида

$$\sum_{a \pmod q} \sum_\nu b_\nu(a) \quad \text{при} \quad q \to \infty.$$

Н. М. Коробовым, а также другими авторами [3], [7], [8] неоднократно высказывалось предположение, что для любого натурального q найдется

a, $(a,q)=1$, такое, что для всех ν выполнено $b_\nu \ll 1$. Эта гипотеза до сих пор не доказана. Известно лишь, что она справедлива в некоторых частных случаях [10], например, если $q=2^\alpha$ или $q=3^\alpha$.

В настоящей заметке мы решаем в каком-то смысле обратную задачу. Мы показываем, что числа с ограниченными неполными частными не могут быть распределены слишком регулярно. Именно, они не могут образовывать длинных арифметических прогрессий.

Теорема. *Пусть натуральные числа* $a_0,\dots,a_l$, $l\geqslant 3$, *обладают следующими свойствами*:

1) $1\leqslant a_0<a_1<\dots<a_l$;
2) $(a_i,q)=1$, $i=0,\dots,l$;
3) $a_i-a_{i-1}=a_j-a_{j-1}$ *для всех* $i,j=1,\dots,l$ (*числа образуют арифметическую прогрессию*).

Положим $a_\nu/q=[b_{\nu,1},\dots,b_{\nu,s(\nu)}]$. *Тогда найдутся значения индексов*

$$0\leqslant \nu_0\leqslant l,\quad 1\leqslant \mu_0\leqslant s(\nu_0),$$

такие, что

$$b_{\nu_0,\mu_0}>l^{1/3}-2.$$

Доказательство теоремы будет изложено в § 2. Оно использует общеизвестную геометрическую интерпретацию цепных дробей в виде полигонов Клейна (см. [12] и [11, с. 101]).

Как известно, метод усреднения [1], [2] позволяет строить множества рациональных чисел с ограниченными в совокупности неполными частными. Такие множества, согласно сформулированной выше теореме, не могут содержать длинных арифметических прогрессий. Нетрудно, применяя многократно процедуру усреднения, доказать следующее

Предложение 1. *Для любого натурального* $r<\varphi(q)$ ($\varphi(q)$ — *функция Эйлера*) *найдутся различные натуральные числа* $a_1,\dots,a_r$ *из интервала* $1\leqslant a_j\leqslant q$ *такие, что для любого* j *выполнено* $(a_j,q)=1$ *и у всех чисел* a_j/q *все неполные частные ограничены величиной*

$$k=k(r)=\frac{4q\log q}{\varphi(q)-r}. \tag{2}$$

Предложение 1 мы докажем в § 3.

Согласно сформулированной нами теореме из предложения 1 немедленно следует

Предложение 2. *В множестве $A_r = \{ a_1, \dots, a_r \}$ натуральных чисел, существование которых устанавливается предложением* 1, *не содержится арифметических прогрессий длины*

$$\geqslant l = \left(\frac{4q \log q}{\varphi(q) - r} + 2 \right)^3.$$

Сделаем краткий обзор результатов о множествах, свободных от арифметических прогрессий. Положим $\mathscr{R}_q = \{ 1, \dots, q \}$, $l \geqslant 3$, и определим

$$r_l(q) = \max(\operatorname{card} A),$$

где максимум берется по всем $A \subset \mathscr{R}_q$, которые не содержат ни одной арифметической прогрессии длины l. Известно [13], что $r_l(q) = o(q)$, $q \to \infty$, для любого фиксированного значения l. Известны также оценки сверху для величины $r_l(q)$ при малых фиксированных значениях l (см. [14, гл. 10], более сильный результат в [15], [16]). В работе [17] при фиксированном l были получены оценки снизу величины $r_l(q)$ вида

$$r_l(q) > q\omega(q) \quad \text{при} \quad q > q_0(l),$$

где $\omega(q) \to 0$, $q \to \infty$. (Точная формула достаточно громоздка и мы ее не приводим.) Небольшой обзор имеется в главе 17 книги [11].

Отметим, что как сообщил автору С. В. Конягин, можно легко получить любопытные оценки снизу для величины $r_l(q)$ в том случае, когда l растет вместе с ростом q:

$$r_l(q) \gg q \quad \text{при} \quad l \gg \frac{\log q}{\log \log q}. \tag{3}$$

Доказательство соотношения (3) основано на использовании представления натуральных чисел в m-ичной системе исчисления при надлежащем выборе основания m в зависимости от q.

Из сформулированных выше предложений 1 и 2 следует оценка

$$r_l(q) > q \left(\frac{\varphi(q)}{q} - \frac{4 \log q}{l^{1/3} - 2} \right),$$

которая тривиальна при условии $\varphi(q)/q > (4 \log q)/(l^{1/3} - 2)$, а в остальных случаях несколько слабее оценки (3). (Например, из нашего предложения 2 следует, что если q — простое число, то

$$r_l(q) \gg_\varepsilon q \quad \text{при} \quad l > (64 + \varepsilon) \log^3 q, \quad \varepsilon > 0,$$

что слабее (3).)

§ 2. Доказательство теоремы

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$, отнесенную к координатам (x, y) и целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $(q; a) \in \mathbb{Z}^2$ — примитивная точка, т.е. $(q, a) = 1$, и пусть $q, a > 0$. Рассмотрим углы φ_+ и φ_-, определяемые условиями

$$\varphi_+ = \left\{ Z = (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant \frac{a}{q} x \right\},$$
$$\varphi_- = \left\{ Z = (x; y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{a}{q} x \right\}.$$

Полигонами Клейна $\mathscr{K}_+(a, q)$ и $\mathscr{K}_-(a, q)$ будем называть те куски бесконечных ломаных $\partial\big(\mathrm{conv}(\varphi_+ \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}))\big)$ и $\partial\big(\mathrm{conv}(\varphi_- \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}))\big)$ соответственно, которые состоят из конечных отрезков (см. рис. 1). (Здесь и в дальнейшем $\mathrm{conv}(\Omega)$ обозначает выпуклую оболочку множества Ω.) Определим область $\Delta(a, q)$, расположенную между $\mathscr{K}_+(a, q)$ и $\mathscr{K}_-(a, q)$:

$$\Delta(a, q) = \big\{ Z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0,$$
$$Z \notin \mathrm{conv}\big(\varphi_+ \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})\big),\ Z \notin \mathrm{conv}\big(\varphi_- \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})\big) \big\}.$$

Рис. 1. Полигоны Клейна $\mathscr{K}_-(a, q)$ и $\mathscr{K}_+(a, q)$ (при $q = 8$, $a = 5$)

Следующее утверждение представляет собой хорошо известное следствие теории цепных дробей (см. [18], [12] и [11, с. 101]). Мы приведем его без доказательства.

Лемма 1. 1) *Вершинами* $\mathscr{K}_-(a,q)$, *отличными от точки* $(q;a)$, *являются целые точки* $(q_{2\mu},p_{2\mu})$, *где* $q_{2\mu}$ *и* $p_{2\mu}$ *суть знаменатель и числитель подходящей к* a/q *дроби с четным номером* 2μ.

2) *Вершинами* $\mathscr{K}_+(a,q)$, *отличными от точки* $(q;a)$, *являются целые точки* $(q_{2\nu+1},p_{2\nu+1})$, *где* $q_{2\nu+1}$ *и* $p_{2\nu+1}$ *суть знаменатель и числитель подходящей к* a/q *дроби с нечетным номером* $2\nu+1$.

3) *Если* $(u;v)\in\big(\mathscr{K}_+(a,q)\cup\mathscr{K}_-(a,q)\big)\cap\mathbb{Z}^2$ — *целая точка, то* u *и* v *суть знаменатель и числитель либо подходящей, либо промежуточной дроби для* a/q.

4) $\Delta(a,q)\cap\mathbb{Z}^2=\varnothing$.

Лемма 2. *Пусть* $a/q=[b_0(a);b_1(a),\dots,b_s(a)]$ — *разложение числа* a/q *в конечную цепную дробь. Пусть* $k<q^{1/2}-2$ *и все неполные частные* b_j *ограничены величиной* k:

$$b_j\leqslant k,\quad j=0,1,\dots,s.$$

Тогда для произвольного λ *из интервала*

$$1\leqslant\lambda\leqslant\frac{q}{(k+2)^2}$$

найдутся целые точки

$$Z_+=(x_+,y_+)\in\mathscr{K}_+(a,q)\cap\mathbb{Z}^2$$

и

$$Z_-=(x_-,y_-)\in\mathscr{K}_-(a,q)\cap\mathbb{Z}^2,$$

отличные от точки (q,a) *такие, что*

$$\lambda\leqslant x_+,x_-<\lambda(k+2).$$

Доказательство. Знаменатели подходящих дробей с четными номерами и знаменатели находящихся между ними промежуточных дробей имеют вид

$$q_0,q_0+q_1,\dots,q_2=q_0+b_2q_1,q_2+q_3,\dots,q_4=q_2+b_4q_3,\dots,q_{2\mu},\quad(4)$$

а знаменатели подходящих дробей с нечетными номерами и знаменатели находящихся между ними промежуточных дробей имеют вид

$$q_1,q_1+q_2,\dots,q_3=q_1+b_3q_2,q_3+q_4,\dots,q_5=q_3+b_5q_4,\dots,q_{2\nu+1},\quad(5)$$

В силу условия $b_j<k$ каждый последующий член последовательностей (4), (5) меньше соответствующего предыдущего, умноженного на $k+2$. Следовательно, при $1\leqslant\lambda\leqslant q/(k+2)$ в любом интервале от λ до $\lambda(k+2)$ найдутся по крайней мере одно число из последовательности (4) и одно

Рис. 2. Область $\Omega(a,q;\sigma)$

число из последовательности (5). Обозначим эти числа через x_+ и x_- соответственно. В силу неравенства $\lambda(k+2) < q/(k+2)$ имеем $x_+, x_- < q$. Обозначая через y_+ и y_- числители соответствующих промежуточных или подходящих дробей и используя лемму 1, мы получаем утверждение леммы 2. Лемма доказана.

Определим теперь область $\Omega(a,q;\sigma)$ для взаимно простых a, q и $\sigma > 0$ следующим образом (см. рис. 2):

$$\Omega(a,q;\sigma) = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x \leqslant q-1,\ \left| y - \frac{a}{q}x \right| \leqslant \frac{1}{\sigma x} \right\}$$
$$\cup \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ \left(\frac{a}{q} - \frac{1}{\sigma}\right)x \leqslant y \leqslant \left(\frac{a}{q} + \frac{1}{\sigma}\right)x \right\}.$$

Хорошо известно, что если для разложения $a/q = [b_0; \ldots, b_s]$ выполнено $b_j < k$, $j = 1, \ldots, s$, то $\Omega(a,q;k+2) \cap \mathbb{Z}^2 = \varnothing$. (Верно и обратное: если $\Omega(a,q;\sigma) \cap \mathbb{Z}^2 = \varnothing$, то $b_j(a) < \sigma$ для всех j.) Эти утверждения доказываются элементарно [18].

Пусть $i < j$ — целые числа и $t > 0$. Определим треугольник $\tau(i,j;t)$ из соотношения

$$\tau(i,j;t) = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < t,\ \frac{ix}{q} < y < \frac{jx}{q} \right\}.$$

Лемма 3. *Пусть числа $a_0, \ldots, a_l$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d > 0$:*

$$a_\nu = a_0 + \nu d, \quad \nu = 0, \ldots, l.$$

Тогда

$$\tau(a_0, a_l; t^*) \subset \bigcup_{\nu=0}^{l} \Omega(a_\nu, q; k+2),$$

где

$$t^* = \left(\frac{q}{d(k+2)}\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Достаточно установить соотношение

$$\tau(a, a+d; t^*) \subset \Omega(a, q; k+2) \cup \Omega(a+d, q; k+2),$$

которое проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть*

$$1 \leqslant k \leqslant q^{1/3} - 2, \quad 1 \leqslant d \leqslant \frac{q}{(k+2)^3}, \tag{6}$$

и неполные частные несократимой дроби a/q ограничены величиной k. Тогда найдутся целые точки

$$Z_\pm = (x_\pm, y_\pm) \in \mathscr{K}_\pm(a, q) \cap \mathbb{Z}^2$$

такие, что

$$\left(\frac{q}{(k+2)^3}\right)^{1/2} \leqslant x_+, x_- < \left(\frac{q}{d(k+2)}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $\lambda = \left(\frac{q}{d(k+2)^3}\right)^{1/2}$. В силу (6) выполнено $1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{q}{(k+2)^2}$. Остается применить лемму 2. Лемма доказана.

Пусть натуральные числа $a_0, \ldots, a_l$, каждое из которых удовлетворяет условию леммы 4, образуют арифметическую прогрессию

$$a_\nu = a_0 + \nu d, \quad d > 0. \tag{8}$$

Применяя лемму 4 к полигону $\mathscr{K}_+(a_l, q)$, получим точку

$$Z_1 = (x_1, y_1) \in \mathscr{K}_+(a_l, q) \cap \mathbb{Z}^2,$$

а, применяя лемму 4 к полигону $\mathscr{K}_-(a_0, q)$, получим точку

$$Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathscr{K}_-(a_0, q) \cap \mathbb{Z}^2,$$

для которых выполнено

$$\left(\frac{q}{(k+2)^3}\right)^{1/2} \leqslant x_1, x_2 < \left(\frac{q}{d(k+2)}\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Лемма 4 гарантирует существование по крайней мере одной точки Z_1 и одной точки Z_2, для которых выполнено соотношение (9). Мы будем считать, что точки Z_1, Z_2 выбраны так, что их координаты x_1, x_2, соответственно, являются максимально возможными. Обозначим через T треугольник с вершинами в целых точках $0, Z_1, Z_2$:

$$T = \operatorname{conv}\{\, 0; Z_1; Z_2 \,\}.$$

Лемма 5. *Пусть* k, d *и каждое из чисел* $a_0, \dots, a_l$, *образующих арифметическую прогрессию* (8), *удовлетворяют условию леммы* 4. *Тогда треугольник* T *не содержит целых точек, отличных от вершин.*

Доказательство. Так как все неполные частные разложений чисел a_ν/q в конечные цепные дроби ограничены величиной k, то

$$\Omega(a_\nu, q; k+2) \cap \mathbb{Z}^2 = \varnothing, \quad \nu = 0, \dots, l.$$

Применяя лемму 3, имеем

$$\tau(a_0, a_l; t^*) \cap \mathbb{Z}^2 = \varnothing.$$

В силу (9) выполняется $t^* > x_1, x_2$. Кроме того, из пункта 4) леммы 1 следует, что в области, ограниченной полигоном Клейна $\mathscr{K}_+(a_l, q)$, прямой $y = a_l x/q$ и прямой $x = 0$, а также в области, ограниченной полигоном $\mathscr{K}_-(a_0, q)$, прямой $y = a_0 x/q$ и прямой $y = 0$, нет целых точек. Поскольку треугольник T содержится в объединении треугольника $\tau(a_0, a_l; t^*)$ с двумя указанными областями (см. рис. 3), то $T \cap \mathbb{Z}^2 = \{ 0; Z_1; Z_2 \}$. Лемма доказана.

Рис. 3. Треугольник T (заштрихован треугольник $\tau\big(a_0, a_l; t^*/(k+2)\big)$)

Следствие. *Выполнено*

$$\operatorname{Area} T = 1/2.$$

Лемма 6. *Справедливо следующее неравенство*:

$$\operatorname{Area} T > \frac{l}{2(k+2)^3}.$$

Доказательство. Поскольку согласно (9) выполнено неравенство

$$x_1, x_2 \geqslant t^*/(k+2),$$

то $\tau(a_0, a_l; t^*/(k+2)) \subset T$ (см. рис. 3), а

$$\operatorname{Area} \tau\bigl(a_0, a_l; t^*/(k+2)\bigr) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ld}{q}\left(\frac{t^*}{k+2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{(k+2)^3}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Предположим противное: $b_{\nu,\mu} \leqslant k = l^{1/3} - 2$ для любых μ, ν. Из условия теоремы следует, что $ld < q$, откуда получаем $k \leqslant q^{1/3} - 2$ и $d < q/l = q/(k+2)^3$. Следовательно, мы можем воспользоваться следствием леммы 5 и леммой 6, доказанными в предположении леммы 4. Имеем неравенство

$$\frac{1}{2} = \operatorname{Area} T > \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{(k+2)^3} = \frac{1}{2},$$

что есть противоречие. Теорема доказана.

В заключении параграфа отметим, что в условии леммы 3 можно потребовать

$$t^* = \left(\frac{2q}{d(k+2)}\right)^{1/2},$$

что повлечет за собой незначительное улучшение теоремы. Именно, можно гарантировать существование такого $b_{\nu,\mu}$, что $b_{\nu,\mu} > 2l^{1/3} - c$ с некоторой константой $c > 0$.

§ 3. Доказательство предложения 1

Положим для целых a, q и положительного t

$$S_{q,t}(a) = \sum_{\substack{1 \leqslant x < q \\ 1 \leqslant |y| \leqslant q \\ x|y| \leqslant q/t}} \delta_q(ax - q),$$

где

$$\delta_q(b) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad q|b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 7. *Пусть* $(a,q)=1$. *Равенство* $S_{q,t}(a)=0$ *выполняется в том и только том случае, когда*

$$\Omega(a,q;t)\cap\mathbb{Z}^2=\varnothing.$$

Рассмотрим среднее значение

$$S_{q,t}=\sum_{a=1}^{q}S_{q,t}(a).$$

Лемма 8. *Справедливо следующее неравенство*:

$$S_{q,t}<\frac{4q\log q}{t}.$$

Доказательство леммы 8 основывается на стандартных рассуждениях, связанных с процедурой усреднения, и мы его не приводим.

Предложение 1 легко выводится из леммы 8. Действительно, достаточно провести индукцию по r. Основание индукции получается из леммы 8 сразу. Шаг индукции осуществляется следующим образом. Если уже выбраны числа $a_1,\ldots,a_\lambda$, то следующее число $a_{\lambda+1}$ выбирается при помощи рассмотрения среднего значения

$$\rho=\frac{1}{\varphi(q)-\lambda}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q,\ (a,q)=1\\ a\neq a_j,\ j=1,\ldots,\lambda}}S_{q,k(\lambda)},$$

(где $k(\lambda)$ определено согласно (2)), для которого сразу получается неравенство $\rho<1$. Последнее гарантирует существование числа $a_{\lambda+1}$, обладающего требуемыми свойствами. Предложение 1 доказано.

В заключении параграфа отметим, что, по-видимому, предложения 1 и 2 можно несколько усилить, заменив в предложении 1 величину

$$k=k(r)=\frac{4q\log q}{\varphi(q)-r}$$

на меньшую величину порядка

$$\frac{\varphi(q)\log q}{\varphi(q)-r},$$

и, соответственно, в предложении 2 величину

$$l=\left(\frac{4q\log q}{\varphi(q)-r}+2\right)^3$$

на величину порядка

$$\left(\frac{\varphi(q)\log q}{\varphi(q)-r}+2\right)^3.$$

Возможность последних улучшений оценок связана с наличием результатов типа (1) для составных q, которые обусловлены рассмотрением среднего значения

$$S^*_{q,t} = \sum_{1 \leqslant a \leqslant q,\ (a,q)=1} S_{q,t}(a).$$

Однако, что касается приложения такого рода оценок к построению множеств, свободных от арифметических прогрессий, то они не представляют значительного интереса в свете наличия неравенства (3).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Коробов Н. М.* Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
[2] *Коробов Н. М.* О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22. №3. С. 83–118.
[3] *Zaremba S. K.* La methode des “bons treillis” pour le calcul des integrales multiples // Appl. of Number Theory to Numerical Analysis / ed. S. K. Zaremba. N. Y., 1972. P. 39–119.
[4] *Hua Loo Keng, Wang Yuan.* Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer Verlag, 1981.
[5] *Касселс Дж.* Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1959.
[6] *Gruber P. M., Lekkerkerker C. G.* Geometry of Numbers. 2-nd edition. Amsterdam, 1987.
[7] *Cusick T. W.* Zaremba's conjecture and sums of the divisor functions // Math. Comp. 1993. V. 61. №203. P. 171–176.
[8] *Cusick T. W.* Products of simultaneous approximations of rational numbers // Arch. Math. 1989. V. 53. P. 154–158.
[9] *Попов В. Н.* Асимптотика сумм элементов непрерывных дробей вида a/p // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 91. С. 81–93.
[10] *Niedderreiter H.* Dyadic fractions with small partial quontiens // Monatsh. Math. 1986. V. 101. P. 309–315.
[11] *Erdos P., Gruber P. M., Hammer J.* Lattice Points: Longman Scientific & Technical, 1989.
[12] *Делоне Б. Н.* Алгорифм разделенных параллелограммов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. №6. С. 505–538.
[13] *Szemeredi E.* On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression // Acta Arith. 1975. V. XXVII. P. 199–245.
[14] *Вон Р.* Метод Харди–Литтлвуда. М.: Мир, 1985.
[15] *Szemeredi E.* Integer sets containing no arithmetic progressions // Acta Math. Hung. 1990. V. 56. №1–2. P. 155–158.
[15] *Heath-Brown D. R.* Integer sets containing no arithmetic progressions // J. London Math. Soc. 1987. V. 35. P. 385–394.
[17] *Rankin R. A.* Sets of integers containing not more than a given number of terms in arithmetical progressions // Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sec. A. 1959–60. V. 65. Part III P. 332–344.
[18] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Наука, 1978.