В. В. Зудилин (Москва)

О МЕРЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассматриваются последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющие рекуррентному уравнению

$$(n+1)u_{n+1} - 2b(2n+1)u_n + 2(2n-1)u_{n-2} = 0, \quad b \in \mathbb{N}, \qquad n = 2, 3, \dots,$$

третьего порядка с начальными условиями

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2b,\ u_2 = 6b^2, \qquad v_0 = 0,\ v_1 = 1,\ v_2 = 3b,$$
$$w_0 = 0,\ w_1 = 0,\ w_2 = \tfrac{1}{2},$$

соответственно. Если $z_1 < 0 < z_2 < z_3$ – корни многочлена $4z^3 - 4bz + 1$, то в случае $b \geqslant 8$ можно оценить меру иррациональности чисел

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - 4bz + 1}},$$
$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{u_n} = \int_0^{z_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 - 4bz + 1}}.$$

Теорема. *Пусть A, B – произвольные не равные одновременно нулю целые числа и*

$$\mu = 1 - \frac{1 - \log z_2}{1 - \log z_3}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $q_* = q_*(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|(A\alpha + B\beta) - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$$

для всех целых $q \geqslant q_*$ и для всех $p \in \mathbb{Z}$.

Если $\wp(\,\cdot\,)$ – функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = 4b$ и $g_3 = -1$, то число α есть расстояние от центра основного параллелограмма периодов до одного из ближайших нулей этой функции. Соответствующее значение μ выражает меру иррациональности такого числа α.

E-mail: wadim@ipsun.ras.ru