СОВЕРШЕННО УРАВНОВЕШЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В. В. Зудилин

Цель данной заметки – установить связь между двумя объектами: совершенно уравновешенными гипергеометрическими рядами

$$F_k(\boldsymbol{h})=F_k(h_0;h_1,\dots,h_k):=\sum_{\mu=0}^{\infty}(h_0+2\mu)\frac{\prod_{j=0}^{k}\Gamma(h_j+\mu)}{\prod_{j=0}^{k}\Gamma(1+h_0-h_j+\mu)}(-1)^{(k+1)\mu}$$
$$=\frac{\Gamma(1+h_0)\prod_{j=1}^{k}\Gamma(h_j)}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(1+h_0-h_j)}\,{}_{k+2}F_{k+1}\left(\begin{matrix}h_0,1+\frac12h_0, & h_1, & \dots, & h_k\\ \frac12h_0, & 1+h_0-h_1,&\dots,&1+h_0-h_k\end{matrix}\,\middle|\,(-1)^{k+1}\right) \tag{1}$$

и кратными интегралами

$$J_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=J_k\left(\begin{matrix}a_0,a_1,\dots,a_k\\ b_1,\dots,b_k\end{matrix}\right)$$
$$:=\int\cdots\int_{[0,1]^k}\frac{\prod_{j=1}^{k}x_j^{a_j-1}(1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-(1-(\cdots(1-(1-x_k)x_{k-1})\cdots)x_2)x_1)^{a_0}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть $k\geqslant1$ и параметры $h_0,h_1,\dots,h_{k+2}\in\mathbb{C}$ удовлетворяют условиям*

$$1+\operatorname{Re}h_0>\frac{2}{k+1}\cdot\sum_{j=1}^{k+2}\operatorname{Re}h_j,\qquad \operatorname{Re}(1+h_0-h_{j+1})>\operatorname{Re}h_j>0\quad \text{для } j=2,\dots,k+1$$

и $h_1,h_{k+2}\ne0,-1,-2,\dots$. Тогда имеет место тождество

$$\frac{\prod_{j=1}^{k+1}\Gamma(1+h_0-h_j-h_{j+1})}{\Gamma(h_1)\,\Gamma(h_{k+2})}\cdot F_{k+2}(h_0;h_1,\dots,h_{k+2})$$
$$=J_k\left(\begin{matrix}h_1, & h_2, & h_3, & \dots, & h_{k+1}\\ & 1+h_0-h_3, & 1+h_0-h_4, & \dots, & 1+h_0-h_{k+2}\end{matrix}\right). \tag{3}$$

Доказательство проводится методом математической индукции. Для $k=1$ утверждение теоремы следует из предельного случая теоремы Дугалла [1, § 4.4, формула (1)]. Для $k\geqslant2$, полагая $\varepsilon_k=0$ при k четном и $\varepsilon_k=1$ или -1 при k нечетном, мы пользуемся соотношением

$$J_k\left(\begin{matrix}a_0,a_1,\dots,a_{k-1},a_k\\ b_1,\dots,b_{k-1},b_k\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(b_k-a_k)}{\Gamma(a_0)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-t_0-i\infty}^{-t_0+i\infty}\frac{\Gamma(a_0+t)\,\Gamma(a_k+t)\,\Gamma(-t)}{\Gamma(b_k+t)}\,e^{\varepsilon_k\pi i t}$$
$$\times J_{k-1}\left(\begin{matrix}a_0+t,a_1+t,\dots,a_{k-1}+t\\ b_1+t,\dots,b_{k-1}+t\end{matrix}\right)\mathrm{d}t, \tag{4}$$

где $t_0\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}a_0>t_0>0$, $\operatorname{Re}a_k>t_0>0$, $\operatorname{Re}b_k>\operatorname{Re}a_0+\operatorname{Re}a_k$ и интеграл в левой части (4) сходится. Представляя гипергеометрический ряд (1) в виде контурного интеграла Барнса и применяя к подынтегральному выражению в правой части (4) индукционное предположение, мы получаем требуемое тождество (3).

Отметим, что ряд в правой части (3) допускает 'менее экономичное' представление в виде эйлерова кратного интеграла по кубу $[0,1]^{k+2}$ (см. [2, лемма 1]). Из приведенной теоремы и недавних результатов С. А. Злобина [3], [4] вытекает также представление совершенно уравновешенного гипергеометрического ряда (1) в виде кратного интеграла, предложенного в работах В. Н. Сорокина [5], [6].

Несмотря на аналитический характер теоремы, тождество (3) мотивировано арифметическими результатами для значений дзета-функции Римана (*дзета-значений*) в целых положительных точках [5]–[13]. Известно [13], что в случае целочисленных параметров $\boldsymbol{h}$ совершенно уравновешенный гипергеометрический ряд (1) является $\mathbb{Q}$-линейной формой от четных или нечетных дзета-значений в зависимости от четности $k \geqslant 4$. Поэтому если целые положительные параметры $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ удовлетворяют дополнительному условию

$$b_1 + a_2 = b_2 + a_3 = \cdots = b_{k-1} + a_k, \tag{5}$$

то интеграл (2) является $\mathbb{Q}$-линейной формой от дзета-значений одинаковой четности. Специализация $a_j = n+1$, $b_j = 2n+2$ приводит к совпадению кратных интегралов и совершенно уравновешенных гипергеометрических рядов, высказанному нами в качестве гипотезы в [13, § 9]; обозначая соответствующие интегралы (2) через $J_{k,n}$ и применяя арифметические результаты из [12, леммы 4.2–4.4], мы заключаем, что

$$D_n^{k+1}\Phi_n^{-1} \cdot J_{k,n} \in \mathbb{Z}\zeta(k) + \mathbb{Z}\zeta(k-2) + \cdots + \mathbb{Z}\zeta(3) + \mathbb{Z} \quad \text{для нечетного } k, \tag{6}$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$, а Φ_n – произведение простых чисел $p < n$, для которых $2/3 \leqslant \{n/p\} < 1$ ($\{\,\cdot\,\}$ – дробная часть числа). Включения (6) (с множителем D_n^k вместо $D_n^{k+1}\Phi_n^{-1}$) были предположены Д. Васильевым [14] (см. также [11, комментарий к теореме 2]) и доказаны им для $k=5$ (случай $k=3$ разобран в [7]). Таким образом, мы даем частичный ответ к гипотезе Васильева. Выбор $a_j = rn+1$, $b_j = (r+1)n+2$ в (2) (или, эквивалентно, $h_0 = (2r+1)n+2$ и $h_j = rn+1$ для $j = 1, \ldots, k+2$ в (1)) с целым $r \geqslant 1$, зависящим от заданного нечетного k, приводит к почти тем же линейным формам от нечетных дзета-значений, рассмотренным Т. Ривоалем [10] в доказательстве его замечательного результата о бесконечности множества иррациональных чисел среди $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$.

Кроме того, следует отметить очевидную инвариантность в предположении (5) величины

$$\frac{F_{k+2}(h_0; h_1, \ldots, h_{k+2})}{\prod_{j=1}^{k+2}\Gamma(h_j)} = \frac{J_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(a_j) \cdot \Gamma(b_1 + a_2 - a_0 - a_1) \cdot \prod_{j=1}^{k}\Gamma(b_j - a_j)}$$

под действием ($\boldsymbol{h}$-тривиальной) группы $\mathfrak{G}$ порядка $(k+2)!$, состоящей из всех перестановок параметров $h_1, \ldots, h_{k+2}$. Этот результат также имеет теоретико-числовые приложения. В случаях $k=2$ и $k=3$ замена переменных $(x_{k-1}, x_k) \mapsto (1-x_k, 1-x_{k-1})$ в (2) реализует дополнительное преобразование $\mathfrak{c}$ как интеграла (2), так и ряда (1); для $k \geqslant 4$ это преобразование недоступно, поскольку нарушается условие (5). Группы $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{c} \rangle$ порядков 120 и 1920 для $k=2$ и $k=3$ соответственно известны [8], [9]; Дж. Рин и К. Виола применяют их, чтобы получить хорошие оценки мер иррациональности чисел $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$. В случае $k \geqslant 4$ группа $\mathfrak{G}$ допускает естественную интерпретацию как группа перестановок параметров $e_{0l} = h_l - 1$, $1 \leqslant l \leqslant k+2$, и $e_{jl} = h_0 - h_j - h_l$, $1 \leqslant j < l \leqslant k+2$ (детали см. в [13, § 9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] W. N. Bailey. Generalized hypergeometric series. New York: Stechert-Hafner, 1964. (Cambridge Math. Tracts. V. 32.) [**2**] T. Rivoal, W. Zudilin // Prépubl. de l'Institut de Math. de Jussieu № 315 (janvier 2002). Paris, 2002. [**3**] С. А. Злобин // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787. [**4**] С. А. Злобин // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 153–154. [**5**] В. Н. Сорокин // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120. [**6**] В. Н. Сорокин // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 48–52. [**7**] F. Beukers // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. № 3. P. 268–272. [**8**] G. Rhin, C. Viola // Acta Arith. 1996. V. 77. № 1. P. 23–56. [**9**] G. Rhin, C. Viola // Acta Arith. 2001. V. 97. № 3. P. 269–293. [**10**] T. Rivoal // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270. [**11**] Д. В. Васильев // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 5. С. 36–40. [**12**] В. В. Зудилин // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 3. С. 49–102. [**13**] W. Zudilin // E-print `math.NT/0206176` (August 2001). [**14**] D. V. Vasilyev // Preprint no. 1 (558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Принято редколлегией
03.06.2002