УДК 511.36, 517.5

В.В. Зудилин

Формулы рамануджанова типа и меры иррациональности некоторых кратных π

С помощью явной конструкции совместных приближений Паде для обобщенных гипергеометрических рядов и формул для чисел $\pi\sqrt{d}$, $d \in \{1, 2, 3, 10005\}$, в терминах этих рядов доказываются оценки меры иррациональности указанных кратных π. Обсуждаются также другие возможные приложения.

Библиография: 14 названий.

Введение

Важную роль в истории числа π – архимедовой постоянной – играют формулы, позволяющие вычислять это число с высокой степенью точности (в настоящее время речь идет о миллиардах цифр после запятой). К одному классу таких формул относятся представления, полученные Рамануджаном [1] в 1914г., среди которых следует прежде всего отметить два примера:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_\nu (1/2)_\nu (3/4)_\nu}{\nu!^3} (21460\nu + 1123) \cdot \frac{(-1)^\nu}{882^{2\nu+1}} = \frac{4}{\pi}, \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_\nu (1/2)_\nu (3/4)_\nu}{\nu!^3} (26390\nu + 1103) \cdot \frac{1}{99^{4\nu+2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}; \tag{2}$$

как обычно, $(a)_\nu = \Gamma(a+\nu)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+\nu-1)$ при $\nu \geqslant 1$ и $(a)_0 = 1$ – символ Похгаммера (сдвинутый факториал); здесь и всюду в дальнейшем ‘пустые’ произведения считаем равными 1. Строгие обоснования этих равенств были получены совсем недавно, и до сих пор новые формулы рамануджанова типа возникают в связи с модулярной параметризацией решений дифференциальных уравнений [2] и алгоритмами для гипергеометрических рядов [3]. В качестве примеров приведем еще две формулы, которые будут использованы в настоящей работе:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/3)_\nu (1/2)_\nu (2/3)_\nu}{\nu!^3} (14151\nu + 827) \cdot \frac{(-1)^\nu}{500^{2\nu+1}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \tag{3}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/6)_\nu (1/2)_\nu (5/6)_\nu}{\nu!^3} (545140134\nu + 13591409) \cdot \frac{(-1)^\nu}{53360^{3\nu+2}} = \frac{3}{2\pi\sqrt{10005}}; \tag{4}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

формула (3) установлена в [2, формула (1.19)], а формула (4) – знаменитая формула Чудновских [4], с помощью которой на протяжении 1989–94гг. они удерживали рекорд в вычислении числа π.

В правой части каждой из формул (1)–(4) написан обобщенный гипергеометрический ряд

$$f(z) = {}_mF_{m-1}\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_2, \dots, b_m \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_\nu (a_2)_\nu \cdots (a_m)_\nu}{(b_2)_\nu \cdots (b_m)_\nu} \frac{z^\nu}{\nu!}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \frac{a(0)a(1)\cdots a(\nu-1)}{b(0)b(1)\cdots b(\nu-1)},$$

где

$$a(x) = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_m), \qquad b(x) = (x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_m), \quad b_1 = 1. \tag{5}$$

Хорошо известно, что функция $f(z)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению порядка m, так что совокупность функций

$$f_i(z) = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^i f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^i z^\nu \frac{a(0)a(1)\cdots a(\nu-1)}{b(0)b(1)\cdots b(\nu-1)}, \qquad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

доставляет решение некоторой системы m линейных дифференцильных уравнений первого порядка. В работе [5] была предъявлена явная конструкция совместных приближений Паде для системы функций 1 , $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{m-1}(z)$, а также указаны (без деталей) арифметические приложения для значений этих функций. Цель настоящей работы – получить оценки меры иррациональности чисел, стоящих в правых частях формул (1)–(4). Эти оценки формулируются в виде верхних границ для показателя иррациональности. Напомним, что *показателем иррациональности* вещественного иррационального числа α называется величина

$$\mu = \mu(\alpha) := \inf\{c \in \mathbb{R} : \text{неравенство } |\alpha - p/q| \leqslant |q|^{-c} \text{ имеет}$$
$$\text{конечное число решений в } p, q \in \mathbb{Z}\}.$$

Отметим также равенство $\mu(\alpha) = \mu(\alpha^{-1})$, непосредственно вытекающее из этого определения.

Теорема. *Имеют место следующие оценки для показателей иррациональности*:

$$\mu(\pi) \leqslant 57.53011083\dots, \tag{6}$$
$$\mu(\pi\sqrt{2}) \leqslant 13.93477619\dots, \tag{7}$$
$$\mu(\pi\sqrt{3}) \leqslant 44.12528464\dots, \tag{8}$$
$$\mu(\pi\sqrt{10005}) \leqslant 10.02136339\dots. \tag{9}$$

По существу программа, которой мы придерживаемся далее, была анонсирована Чудновскими в [4], [6], где в качестве приложений приводились (без детальных доказательств) оценки меры иррациональности чисел $\pi\sqrt{2}$ и $\pi\sqrt{640320} =$

$8\pi\sqrt{10005}$, худшие, чем оценки (7) и (9). Мы упрощаем аналитическое и арифметическое изложения конструкции из [5], что дает возможность компактно доказать теорему, уточнив результаты из [4], [6].

Следует отметить, что для получения оценок меры иррациональности числа π и некоторых его кратных существуют и другие методы, дающие лучшие результаты. Так, наши оценки (6) и (8) хуже оценок

$$\mu(\pi) \leqslant 8.01604539\ldots, \qquad \mu(\pi\sqrt{3}) \leqslant 4.60157912\ldots,$$

полученных Хатой в [7]. В общем случае для чисел вида $\pi\sqrt{d}$, где d – натуральное число, справедлива оценка

$$\mu(\pi\sqrt{d}) \leqslant 10.88248501\ldots,$$

вытекающая из результата $\mu(\pi^2) \leqslant 5.44124250\ldots$ Рина и Виолы [8]. Поэтому оценка (7) также не улучшает известную, и лишь оценка (9) в случае $d = 10005$ ее усиливает. Подчеркнем, однако, что в условиях постоянного появления новых формул рамануджанова типа методы данной работы могут найти дальнейшие теоретико-числовые приложения.

§ 1. Совместные приближения Паде

Параметрами следующей далее конструкции будут целые числа M и N, связанные условием

$$M < N \leqslant \left(1 + \frac{1}{m}\right)M - 1. \tag{10}$$

Определяя многочлен

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{\mu=0}^{M} (-1)^\mu \binom{M}{\mu} \frac{b(N-M)b(N-M+1)\cdots b(N-M+\mu-1)}{a(0)a(1)\cdots a(\mu-1)} x^\mu \\ &= {}_{m+1}F_m\left(\left. \begin{matrix} -M, N-M+b_1, N-M+b_2, \ldots, N-M+b_m \\ a_1, \qquad a_2, \qquad \ldots, \qquad a_m \end{matrix} \right| x \right), \end{aligned} \tag{11}$$

находим

$$\begin{aligned} Q(z^{-1})f_i(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} z^{l-M} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \geqslant M-l}}^{M} (-1)^\mu \binom{M}{\mu} (\mu+l-M)^i \\ &\quad \times \frac{b(N-M)\cdots b(N-M+\mu-1)}{a(0)\cdots a(\mu-1)} \, \frac{a(0)a(1)\cdots a(\mu+l-M-1)}{b(0)b(1)\cdots b(\mu+l-M-1)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} c_{l,i} z^{l-M}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{12}$$

Для удобства запишем получающиеся формулы для коэффициентов $c_{l,i}$ в (12) отдельно на каждом из следующих промежутков:

а) при $0 \leqslant l < M$

$$c_{l,i} = \sum_{\mu=M-l}^{M} (-1)^{\mu} \binom{M}{\mu} (\mu + l - M)^i \\ \times \frac{b(N-M)b(N-M+1)\cdots b(N-M+\mu-1)}{a(\mu+l-M)\cdots a(\mu-1)\cdot b(0)\cdots b(\mu+l-M-1)}; \tag{13}$$

б) при $M \leqslant l \leqslant N$

$$c_{l,i} = \frac{1}{b(0)b(1)\cdots b(N-M-1)} \sum_{\mu=0}^{M} (-1)^{\mu} \binom{M}{\mu} (\mu + l - M)^i \\ \times a(\mu)\cdots a(\mu+l-M-1)\cdot b(\mu-M+l)\cdots b(\mu-M+N-1); \tag{14}$$

в) при $l > N$

$$c_{l,i} = \sum_{\mu=0}^{M} (-1)^{\mu} \binom{M}{\mu} (\mu + l - M)^i \\ \times \frac{a(\mu)\cdots a(\mu+l-M-1)}{b(0)\cdots b(N-M-1)\cdot b(\mu-M+N)\cdots b(\mu-M+l-1)}. \tag{15}$$

Следующее утверждение доказывается в [5] чрезвычайно непросто. Идея элементарного доказательства заимствована нами из [9].

Лемма 1. *Для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$ и целых l из промежутка $M \leqslant l \leqslant N$ выполнено $c_{l,i} = 0$.*

Доказательство. Функция

$$(\mu + l - M)^i \cdot a(\mu)\cdots a(\mu+l-M-1)\cdot b(\mu-M+l)\cdots b(\mu-M+N-1)$$

является многочленом от μ степени не выше

$$i + m(l-M) + m(N-l) \leqslant (m-1) + m(N-M) \leqslant -1 + M$$

(в последней оценке мы воспользовались условием (10)). С другой стороны, для любого многочлена $P(x)$ степени меньше M выполнено

$$\sum_{\mu=0}^{M} (-1)^{\mu} \binom{M}{\mu} P(\mu) = 0,$$

поскольку любая производная многочлена

$$\sum_{\mu=0}^{M}(-1)^{\mu}\binom{M}{\mu}x^{\mu}=(1-x)^{M}$$

порядка меньшего M обращается в точке $x=1$ в нуль. С учетом формул (14) это дает требуемое утверждение.

Как следствие, мы получаем, что система

$$R_i(z)=\sum_{l=N+1}^{\infty}c_{l,i}z^{l-M}=Q(z^{-1})f_i(z)-P_i(z^{-1}),\qquad i=0,1,\dots,m-1, \tag{16}$$
$$P_i(x)=\sum_{l=0}^{M-1}c_{l,i}x^{M-l},\qquad i=0,1,\dots,m-1,$$

реализует совместные приближения (Паде в случае $N+1=(1+1/m)M$) к совокупности функций $1\,, f_0(z),\dots,f_{m-1}(z)$. Поскольку приведенная конструкция зависит от натуральных параметров M,N, в ряде ситуаций будет важно указывать эту зависимость в явном виде: мы будем писать

$$Q(x;M,N)=Q(x),$$
$$P_i(x;M,N)=P_i(x),\quad R_i(z;M,N)=R_i(z),\qquad i=0,1,\dots,m-1.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая тривиальная оценка остатков приближений (16).

Лемма 2. *Пусть* $N=(1+1/m)M-1$, *числа* a_j,b_j *в разложениях* (5) *положительны, причем* $b_j\geqslant 1$, $j=1,\dots,m$. *Тогда при* $|z|<1/2^m$

$$\varlimsup_{M\to\infty}\frac{\log|R_i(z;M,N)|}{M}\leqslant\frac{\log|z|}{m}+(m+2)\log 2 \quad \text{для каждого}\quad i=0,1,\dots,m-1. \tag{17}$$

В частности, при $|z|<1/2^{m(m+2)}$

$$\varlimsup_{M\to\infty}\frac{\log|R_i(z;M,N)|}{M}<0\qquad\text{для каждого}\quad i=0,1,\dots,m-1. \tag{18}$$

Доказательство. Оценим коэффициенты (15). Считая $a_j\leqslant A$ для некоторого целого $A\geqslant 1$, $j=1,\dots,m$, при $l>N$ находим

$$\begin{aligned}|c_{l,i}|&\leqslant\sum_{\mu=0}^{M}\binom{M}{\mu}l^{i}\cdot\frac{a(M)a(M+1)\cdots a(l-1)}{b(0)b(1)\cdots b(l-M-1)}\\&\leqslant 2^{M}l^{m-1}\cdot\left(\frac{(A+M)(A+M+1)\cdots(A+l-1)}{(l-M)!}\right)^{m}\\&=2^{M}\binom{A+l-1}{l-M}^{m}l^{m-1}\leqslant 2^{M+m(A+l-1)}l^{m-1},\qquad i=0,1,\dots,m-1.\end{aligned}$$

Поэтому при $|z|<1/2^m$

$$
\begin{aligned}
|R_i(z)| &\leqslant \sum_{l=N+1}^{\infty}|z|^{l-M}|c_{l,i}| \leqslant 2^{M+m(A-1)}|z|^{-M}\sum_{l=N+1}^{\infty} l^{m-1}(2^m|z|)^l \\
&< 2^{M+m(A-1)}|z|^{-M}\cdot\frac{(N+m)^m(2^m|z|)^{N+1}}{(1-2^m|z|)^m}, \qquad i=0,1,\dots,m-1,
\end{aligned}
$$

откуда (ввиду $N=(1+1/m)M-1$) и следует предельное соотношение (17).

Замечание. Аргументы z у гипергеометрических рядов, стоящих в левых частях формул (1)–(4), удовлетворяют неравенству $|z|<1/2^{m(m+2)}$ с $m=3$.

§ 2. Арифметические аспекты

Наш дальнейший выбор будет связан с гипергеометрическими рядами в (1)–(4); поэтому будем считать

$$
m=3, \qquad M=3n, \quad N=4n-1,
$$

где n – растущий натуральный параметр. Положим также

$$
\begin{gathered}
Q_n(x)=Q(x;M,N), \\
P_{i,n}(x)=P_i(x;M,N), \quad R_{i,n}(z)=R_i(z;M,N), \qquad i=0,1,\dots,m-1.
\end{gathered}
$$

Кроме того, многочлен $b(x)$ в (5) будет всегда равен $(x+1)^3$, в то время как для многочлена $a(x)$ будут рассматриваться следующие возможности:

(I) $a(x)=(x+1/4)(x+1/2)(x+3/4)$;
(II) $a(x)=(x+1/3)(x+1/2)(x+2/3)$.
(III) $a(x)=(x+1/6)(x+1/2)(x+5/6)$;

Для каждого $n=1,2,\dots$ обозначим через D_n наименьший общий знаменатель коэффициентов многочлена $Q_n(x)$. При рассмотрении приведенных случаев будет также показано, что

$$
D_nP_{i,n}(x)\in\mathbb{Z}[x], \qquad i=0,1,\dots,m-1, \quad n=1,2,\dots .
$$

(I) В этом случае подстановка в формулу (11) дает

$$
Q_n(x)=\sum_{\mu=0}^{M}(-1)^\mu 4^{4\mu}x^\mu\frac{M!\,(N-M+\mu)!^3}{(M-\mu)!\,(N-M)!^3(4\mu)!}
$$

и согласно формуле (13) для коэффициентов многочленов $P_{i,n}(x)$ имеем

$$
c_{l,i}=4^{4(M-l)}\sum_{\mu=M-l}^{M}(-1)^\mu(\mu+l-M)^i\frac{(4(\mu+l-M))!}{(\mu+l-M)!^4}\cdot\frac{M!\,(N-M+\mu)!^3}{(M-\mu)!\,(N-M)!^3(4\mu)!}.
$$

Множители

$$
(\mu+l-M)^i\frac{(4(\mu+l-M))!}{(\mu+l-M)!^4}
$$

в последнем выражении являются целыми, так что элементы требуемой последовательности $D_n = D_n^{(\mathrm{I})}$ при каждом n являются наименьшими общими знаменателями чисел

$$\frac{M!\,(N-M+\mu)!^3}{(M-\mu)!\,(N-M)!^3(4\mu)!} = \frac{(3n)!\,(n+\mu)!^3}{(3n-\mu)!\,n!^3(4\mu)!}\cdot\left(\frac{n}{n+\mu}\right)^3, \qquad \mu = 0,1,\ldots,3n.$$

Определим целозначную функцию

$$\varphi(x,y) = \lfloor 3x-y\rfloor + 3\lfloor x\rfloor + \lfloor 4y\rfloor - \lfloor 3x\rfloor - 3\lfloor x+y\rfloor + 3\lambda(x+y) - 3\lambda(x), \tag{19}$$

где

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{x\}=0,\\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

а $\lfloor\cdot\rfloor$ и $\{\cdot\}$ – соответственно целая и дробная части числа. Поскольку для любого простого числа p и любого целого положительного N

$$\operatorname{ord}_p N! = \left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{N}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{N}{p^3}\right\rfloor + \cdots, \qquad \operatorname{ord}_p N = \lambda\left(\frac{N}{p}\right) + \lambda\left(\frac{N}{p^2}\right) + \lambda\left(\frac{N}{p^3}\right) + \cdots,$$

в соответствии с определением функции $\varphi(x,y)$ заключаем, что при каждом $\mu = 0,1,\ldots,3n$ имеет место следующее равенство:

$$\prod_p p^{-\varphi(n/p,\mu/p)-\varphi(n/p^2,\mu/p^2)-\cdots} = \frac{(3n)!\,(n+\mu)!^3}{(3n-\mu)!\,n!^3(4\mu)!}\cdot\left(\frac{n}{n+\mu}\right)^3. \tag{20}$$

Поэтому, определяя

$$\varphi_0(x) = \max_{0\leqslant y\leqslant 3x}\varphi(x,y), \tag{21}$$

согласно (20) мы получаем требуемый знаменатель D_n в виде

$$D_n = \prod_p p^{\varphi_0(n/p)+\varphi_0(n/p^2)+\varphi_0(n/p^3)+\cdots}.$$

Функция (19) является 1-периодической по каждому аргументу; следовательно, в соответствии с асимптотическим законом распределения простых чисел простые $p \leqslant \sqrt{3n}$ дают вклад порядка $O(e^{\mathrm{const}\,\sqrt{n}})$ в асимптотику D_n при $n\to\infty$. Это, в частности, означает, что можно рассматривать другую последовательность

$$\widetilde{D}_n = \prod_{p>\sqrt{3n}} p^{\varphi_0(n/p)},$$

причем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\widetilde{D}_n}{n}.$$

Определим теперь еще одну вспомогательную функцию

$$\varphi_1(x) = \max_{y\in\mathbb{R}}\varphi(x,y) = \max_{0\leqslant y<1}\varphi(x,y),$$

которая, в отличие от функции (21), является 1-периодической, что позволяет явно ее вычислить:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } \{x\} \in \left[\frac{1}{4}\right], \\ 2, & \text{если } \{x\} \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}\right], \\ 1, & \text{если } \{x\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{4}\right], \\ 0, & \text{если } \{x\} \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}$$

(через $[x]$ обозначено множество, состоящее из одного элемента x). В то же время, при $x \geqslant 1/3$ мы, очевидно, имеем $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$. Поэтому нам остается подсчитать функцию (21) на множестве $0 \leqslant x < 1/3$:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{4}\right], \\ 2, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \\ 1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right), \\ 0, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{12}\right). \end{cases}$$

Таким образом, для вычисления асимптотического поведения величины

$$\widetilde{D}_n = \prod_{p>3n} p^{\varphi_0(n/p)} \cdot \prod_{\sqrt{3n}<p\leqslant 3n} p^{\varphi_1(n/p)}$$

при $n \to \infty$ остается вновь воспользоваться асимптотическим законом распределения простых чисел:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \widetilde{D}_n}{n} &= \int_0^{1/3} \varphi_0(x)\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right) + \int_0^{1/3} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}\left(\psi(x) + \frac{1}{x}\right) \\ &\quad + \int_{1/3}^{1} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}\psi(x) \\ &= 18 + 2\gamma + \psi\left(\frac{1}{3}\right) + \psi\left(\frac{2}{3}\right) = 18 - 3\log 3 = 14.70416313\ldots, \end{aligned}$$

где $\psi(\,\cdot\,)$ обозначает логарифмическую производную гамма-функции и $\gamma = -\psi(1)$ – постоянная Эйлера.

Подытоживая проделанную работу, сформулируем следующий окончательный результат.

Лемма 3. *Асимптотическое поведение наименьших общих знаменателей $D_n = D_n^{(\mathrm{I})}$ многочленов $Q_n(x)$ и $P_{i,n}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, в случае* (I) *определяется предельным соотношением*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log D_n^{(\mathrm{I})}}{n} = 18 - 3\log 3 = 14.70416313\ldots.$$

(II) Реализуя вычисления в соответствии с формулами (11) и (13), получаем, что в этом случае $D_n = D_n^{(\mathrm{II})}$ является наименьшим общим знаменателем чисел

$$\frac{M!\,(N-M+\mu)!^3\mu!}{(M-\mu)!\,(N-M)!^3(2\mu)!\,(3\mu)!} = \frac{(3n)!\,(n+\mu)!^3\mu!}{(3n-\mu)!\,n!^3(2\mu)!\,(3\mu)!} \cdot \left(\frac{n}{n+\mu}\right)^3, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, 3n.$$

Поэтому вспомогательная функция $\varphi(x,y)$ имеет вид

$$\varphi(x,y)=\lfloor 3x-y\rfloor+3\lfloor x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor+\lfloor 3y\rfloor-\lfloor 3x\rfloor-3\lfloor x+y\rfloor-\lfloor y\rfloor+3\lambda(x+y)-3\lambda(x),$$

и вычисление соответствующих $\varphi_0(x)$ (при $0\leqslant x<1/3$) и $\varphi_1(x)$ дает следующий результат:

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}3, & \text{если } x\in\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right),\\ 2, & \text{если } x\in\left[\frac{1}{6},\frac{2}{9}\right),\\ 1, & \text{если } x\in\left[\frac{1}{9},\frac{1}{6}\right),\\ 0, & \text{если } x\in\left[0,\frac{1}{9}\right),\end{cases}$$
$$\varphi_1(x)=\begin{cases}3, & \text{если } \{x\}\in\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right),\\ 2, & \text{если } \{x\}\in\left[0,\frac{2}{9}\right)\cup\left[\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2}\right],\\ 1, & \text{если } \{x\}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right),\\ 0, & \text{если } \{x\}\in\left[\frac{2}{3},1\right).\end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\int_0^{1/3}\varphi_0(x)\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)+\int_0^{1/3}\varphi_1(x)\,\mathrm{d}\left(\psi(x)+\frac{1}{x}\right)+\int_{1/3}^{1}\varphi_1(x)\,\mathrm{d}\psi(x)\\&\quad=15+2\gamma-\psi\left(\frac{2}{9}\right)+2\psi\left(\frac{1}{3}\right)+\psi\left(\frac{2}{3}\right)\\&\quad=15-\frac{9}{2}\log 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\gamma-\psi\left(\frac{2}{9}\right)=13.33336442\ldots,\end{aligned}$$

и мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Асимптотическое поведение знаменателей $D_n=D_n^{(\mathrm{II})}$ определяется предельным соотношением*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_n^{(\mathrm{II})}}{n}=15-\frac{9}{2}\log 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\gamma-\psi\left(\frac{2}{9}\right)=13.33336442\ldots.$$

Замечание. Известная формула Гаусса (см., например, [10, с. 19]) позволяет вычислить значения функции $\psi(x)$ в терминах элементарных функций. Однако подобные выражение достаточно громоздки, к примеру

$$\begin{aligned}-\psi\left(\frac{2}{9}\right)&=\gamma+\frac{5}{2}\log 3+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{9}+2\cos\frac{\pi}{9}\,\log\left(2\sin\frac{2\pi}{9}\right)\\&\quad-2\cos\frac{2\pi}{9}\,\log\left(2\sin\frac{4\pi}{9}\right)-2\cos\frac{4\pi}{9}\,\log\left(2\sin\frac{\pi}{9}\right).\end{aligned}$$

(III) Рассуждая, как и в предыдущих случаях, заключаем, что для каждого n число $D_n=D_n^{(\mathrm{III})}$ является наименьшим общим знаменателем чисел

$$\frac{M!\,(N-M+\mu)!^3(3\mu)!}{(M-\mu)!\,(N-M)!^3\mu!\,(6\mu)!}=\frac{(3n)!\,(n+\mu)!^3(3\mu)!}{(3n-\mu)!\,n!^3\mu!\,(6\mu)!}\cdot\left(\frac{n}{n+\mu}\right)^3,$$
$$\mu=0,1,\ldots,3n.$$

Поэтому

$$\varphi(x,y)=\lfloor 3x-y\rfloor+3\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor 6y\rfloor-\lfloor 3x\rfloor-3\lfloor x+y\rfloor-\lfloor 3y\rfloor+3\lambda(x+y)-3\lambda(x),$$

откуда

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} 2, & \text{если } x\in\bigl[\frac16,\frac13\bigr),\\ 1, & \text{если } x\in\bigl[\frac1{18},\frac16\bigr), \qquad 0\leqslant x<\dfrac13,\\ 0, & \text{если } x\in\bigl[0,\frac1{18}\bigr),\end{cases}$$
$$\varphi_1(x)=\begin{cases} 2, & \text{если } \{x\}\in\bigl[0,\frac13\bigr)\cup\bigl[\frac12\bigr],\\ 1, & \text{если } \{x\}\in\bigl[\frac13,\frac12\bigr)\cup\bigl(\frac12,\frac23\bigr)\cup\bigl[\frac{13}{18},\frac56\bigr],\\ 0, & \text{если } \{x\}\in\bigl[\frac23,\frac{13}{18}\bigr)\cup\bigl(\frac56,1\bigr),\end{cases}$$

значит

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3}\varphi_0(x)\,\mathrm{d}\biggl(-\frac1x\biggr)&+\int_0^{1/3}\varphi_1(x)\,\mathrm{d}\biggl(\psi(x)+\frac1x\biggr)+\int_{1/3}^1\varphi_1(x)\,\mathrm{d}\psi(x)\\ &=24+2\gamma+\psi\biggl(\frac13\biggr)+\psi\biggl(\frac23\biggr)+\psi\biggl(\frac56\biggr)-\psi\biggl(\frac{13}{18}\biggr)\\ &=24-3\log 3+\psi\biggl(\frac56\biggr)-\psi\biggl(\frac{13}{18}\biggr)=20.97202138\dots,\end{aligned}$$

и мы получаем следующий результат.

Лемма 5. *Асимптотическое поведение знаменателей $D_n=D_n^{(\mathrm{III})}$ определяется предельным соотношением*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_n^{(\mathrm{III})}}{n}=24-3\log 3+\psi\biggl(\frac56\biggr)-\psi\biggl(\frac{13}{18}\biggr)=20.97202138\dots.$$

§ 3. Асимптотика приближений

Сразу отметим, что в оригинальной работе [5] предложены конструктивные методы вычисления асимптотического поведения многочленов $Q_n(z^{-1})$ и приближений $R_{i,n}(z)$ при $n\to\infty$. Однако, как собственно и получилось в [5], детальное обоснование эмпирических соображений остается за пределами любой статьи среднего объема, так что мы приводим далее иной способ решения указанной проблемы.

Согласно общей теории Уильфа–Цайльбергера все построенные нами объекты – многочлены $Q_n(x)$, $P_{i,n}(x)$ и линейные формы $R_{i,n}(z)$ – удовлетворяют разностным уравнениям относительно натурального параметра n. Наиболее ‘удобными’ (по крайней мере, с алгоритмической точки зрения) являются многочлены $Q_n(x)$, поскольку они допускают простое представление (11) в виде гипергеометрического ряда. Следующее утверждение фактически является частным случаем теоремы 4.4.1 в [11]. Через $\mathcal{N}$ мы обозначаем оператор сдвига по переменной n.

Лемма 6. *Существует разностный оператор*

$$\Delta = F_0(x,n) + F_1(x,n)\mathcal{N} + \dots + F_s(x,n)\mathcal{N}^s \in \mathbb{Z}[x,n][\mathcal{N}]$$

такой, что

$$\Delta Q_n(x) = F_0(x,n)Q_n(x) + F_1(x,n)Q_{n+1}(x) + \dots + F_s(x,n)Q_{n+s}(x) = 0, \\ n = 1, 2, \dots .$$

Лемма 7. *Пусть* $\Delta = \Delta(x,n,\mathcal{N})$ *– разностный оператор из утверждения леммы* 6. *Тогда для всех натуральных* $n \geqslant n_0$ *и каждого* $i = 0, 1, \dots, m-1$ *выполнено*

$$\Delta(x,n,\mathcal{N})P_{i,n}(x) = 0, \qquad \Delta(z^{-1},n,\mathcal{N})R_{i,n}(z) = 0.$$

Иными словами, последовательности остатков приближений удовлетворяют тому же разностному уравнению, что и последовательность знаменателей $Q_n(x)$ *приближений.*

Доказательство. Для каждого n положим

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{i,n}(x) &= \Delta(x,n,\mathcal{N})P_{i,n}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{s} F_j(x,n)P_{i,n+j}(x) \in \mathbb{Q}[x], \qquad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{i,n}(z^{-1}) &= \Delta(z^{-1},n,\mathcal{N})P_{i,n}(z^{-1}) \\ &= \Delta(z^{-1},n,\mathcal{N})\bigl(Q_n(z^{-1})f_i(z) - R_{i,n}(z)\bigr) = -\Delta(z^{-1},n,\mathcal{N})R_{i,n}(z) \\ &= -\sum_{j=0}^{s} F_j(z^{-1},n)R_{i,n+j}(z), \qquad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{23}$$

Степени многочленов $F_j(x,n)$ по совокупности переменных ограниченны некоторой абсолютной постоянной. Поэтому, применяя в области $|z| < 1/2^m = 1/2^3$ оценки для $R_{i,n+j}(z)$, $j = 0, 1, \dots, s$, вытекающие из предельного соотношения (17) леммы 2, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такое, что

$$\frac{\log|\widetilde{P}_{i,n}(z^{-1})|}{n} < \log|z| + 3 \cdot 5 \log 2 + \varepsilon \tag{24}$$

при всех $n \geqslant n_1(\varepsilon)$. Выберем $\varepsilon = \log 2$ и проведем дальнейшую часть рассуждений для каждого $n \geqslant n_0 = n_1(\log 2)$ и $i = 0, 1, \dots, m-1$. Подставляя вместо $x = z^{-1}$ целые числа $q > 2^3$, согласно (24) (с $\varepsilon = \log 2$) находим, что

$$|\widetilde{P}_{i,n}(q)| < 2^{16n} q^{-n}. \tag{25}$$

В то же время многочлен (22) имеет фиксированный знаменатель, при умножении на который числа в левой части (25) становятся целыми. Это означает, что $\widetilde{P}_{i,n}(q) = 0$ для всех $q \geqslant q_0$. Таким образом, многочлен $\widetilde{P}_{i,n}(x)$ принимает нулевые значения в бесконечном числе точек, откуда $\widetilde{P}_{i,n}(x) \equiv 0$ для любого $n \geqslant n_0$ и $i = 0, 1, \dots, m-1$. С учетом определения (22) многочлена $\widetilde{P}_{i,n}(x)$ и соотношений (23) мы получаем требуемое утверждение.

На самом деле, для вычисления разностного оператора из формулировки леммы 6 существует алгоритм Госпера–Цайльбергера созидательного телескопирования [11, гл. 6]. Применяя его, в случае (I) мы находим (в явном, но очень громоздком виде) разностный оператор $\Delta = \Delta^{(\mathrm{I})}(x, n, \mathcal{N})$ такой, что

$$\deg_x \Delta^{(\mathrm{I})} = 6, \qquad \deg_n \Delta^{(\mathrm{I})} = 33, \qquad \deg_{\mathcal{N}} \Delta^{(\mathrm{I})} = 4.$$

Наиболее ценная для вычисления асимптотики информация содержится в характеристическом многочлене этого разностного оперетора:

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{N}) = \chi^{(\mathrm{I})}(\mathcal{N}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^{(\mathrm{I})}(x, n, \mathcal{N})}{n^{33}} \\ &= 2^{31}3^3(2048x - 243)\big(3^9(524288x^2 - 248832x - 59049)(\mathcal{N}^4 + 1) \\ &\quad + 2^2(524288x^2 - 248832x - 59049) \\ &\qquad \times (4194304x^3 - 5308416x^2 + 1399680x - 19683)\mathcal{N}^3 \\ &\quad + 2\cdot 3^4(32768x^2 + 55296x + 729)(524288x^2 - 248832x - 59049)\mathcal{N}^2 \\ &\quad + 2^2 3^7(64x - 9)(524288x^2 - 248832x - 59049)\mathcal{N}\big). \end{aligned} \tag{26}$$

В случае (II) соответствующий разностный оператор $\Delta = \Delta^{(\mathrm{II})}(x, n, \mathcal{N})$ таков, что

$$\deg_x \Delta^{(\mathrm{II})} = 6, \qquad \deg_n \Delta^{(\mathrm{II})} = 41, \qquad \deg_{\mathcal{N}} \Delta^{(\mathrm{II})} = 4;$$

при этом его характеристический многочлен отличается от $\chi^{(\mathrm{I})}(\mathcal{N})$ умножением на постоянный множитель:

$$\chi^{(\mathrm{II})}(\mathcal{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^{(\mathrm{II})}(x, n, \mathcal{N})}{n^{41}} = \frac{3^{15}}{2^{18}} \chi^{(\mathrm{I})}(\mathcal{N})$$

(что, впрочем, неудивительно).

Наконец, в случае (III) для разностного оператора $\Delta = \Delta^{(\mathrm{III})}(x, n, \mathcal{N})$ получаем

$$\deg_x \Delta^{(\mathrm{III})} = 6, \qquad \deg_n \Delta^{(\mathrm{III})} = 41, \qquad \deg_{\mathcal{N}} \Delta^{(\mathrm{III})} = 4$$

и

$$\chi^{(\mathrm{III})}(\mathcal{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^{(\mathrm{III})}(x, n, \mathcal{N})}{n^{41}} = \frac{3^{15}}{2^2} \chi^{(\mathrm{I})}(\mathcal{N}).$$

Таким образом, асимптотическое поведение построенных приближений (многочленов и линейных форм) при каждом фиксированном $z = 1/x$ из области $0 < |z| < 1$ полностью определяется нулями характеристического многочлена $\chi(\mathcal{N})$. Это факт следует из лемм 6, 7 и следующего обобщения теоремы Пуанкаре (см. [12, теорема 1]).

Лемма 8. *Пусть последовательность u_n, $n = n_0, n_0+1, \dots$, является нетривиальным решением невырожденного линейного разностного уравнения с характеристическим многочленом $\chi(\mathcal{N})$, $\chi(0) \neq 0$. Тогда верхний предел $\overline{\lim}_{n\to\infty} |u_n|^{1/n}$ существует и равен модулю $|\mathcal{N}_0|$ одного из нулей $\chi(\mathcal{N})$. Более того, если модули остальных нулей многочлена $\chi(N)$ отличны от $|\mathcal{N}_0|$, то верхний предел можно заменить на обычный.*

§ 4. Меры иррациональности

Для получения оценок меры иррациональности нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [13, предложение 3.3] (см. также [7, замечание 2.1] по поводу уточнения формулировки).

Лемма 9. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ иррационально. Предположим, что последовательность линейных форм $q_n x - p_n$ с целыми коэффициентами из поля рациональных чисел или мнимого квадратичного поля удовлетворяет соотношениям*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|q_n|}{n} = C_1, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|q_n\alpha - p_n|}{n} \leqslant -C_0,$$

где C_0 и C_1 — некоторые положительные вещественные числа. Тогда $\mu(\alpha) \leqslant 1 + C_1/C_0$.

Доказательство теоремы. Остановимся подробно на выводе оценки (6). Для этого в случае (I) определим при каждом $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 21460P_{1,n}(x) + 1123P_{0,n}(x), \\ R_n(z) &= 21460R_{1,n}(z) + 1123R_{0,n}(z) \\ &= Q_n(z^{-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_\nu (1/2)_\nu (3/4)_\nu}{\nu!^3} (21460\nu + 1123) z^\nu - P_n(z^{-1}) \end{aligned}$$

и рассмотрим соответствующие числовые формы, получающиеся при подстановке $z = -1/882^2$ и домножении на общий знаменатель $D_n = D_n^{(\mathrm{I})}$ коэффициентов многочленов $Q_n(x)$ и $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} r_n &= D_n R_n(-882^{-2}) = D_n Q_n(-882^2) \cdot \frac{4\cdot 882}{\pi} - D_n P_n(-882^2) \\ &= q_n \cdot \frac{1}{\pi} - p_n \in \mathbb{Z}\frac{1}{\pi} + \mathbb{Z}, \qquad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \tag{27}$$

именно здесь мы применили формулу (1). Последовательности $Q_n(-882^2)$ и $R_n(-1/882^2)$, начиная с некоторого номера n, удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению с оператором $\Delta^{(\mathrm{I})}(-882^2, n, \mathcal{N})$. При этом первая последовательность нетривиальна, что также выполнено и для второй ввиду (27) и иррациональности числа $1/\pi$. Согласно лемме 8 асимптотическое поведение этих последовательностей определяется некоторыми нулями $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ характеристического многочлена (26) при $x = -882^2$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|Q_n(-882^2)|}{n} = \log|\mathcal{N}_1|, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|R_n(-1/882^2)|}{n} \leqslant \log|\mathcal{N}_2|.$$

После сокращения на числовой множитель характеристический многочлен принимает вид

$$\mathcal{N}^4 - 4012738149162334556620\mathcal{N}^3 + 163210109239302\mathcal{N}^2 - 22127620\mathcal{N} + 1$$

и для его нулей (два из которых вещественны, а два комплексно сопряжены) имеем

$$\log|\mathcal{N}_1| = 47.44117569\dots,$$
$$\log|\mathcal{N}_2| = \log|\mathcal{N}_2'| = -15.80349476\dots, \qquad \log|\mathcal{N}_2''| = -15.83418617\dots.$$

При выборе нуля, мажорирующего асимптотику последовательности $R_n(-1/882^2)$, мы воспользовались тривиальной оценкой (18) леммы 2. Теперь для вычисления асимптотики линейных форм (27) с целыми коэффициентами остается воспользоваться леммой 3. В обозначениях леммы 9 имеем

$$C_0 = -\log|\mathcal{N}_2| - (18 - 3\log 3) = 1.09933162\dots,$$
$$C_1 = \log|\mathcal{N}_1| + (18 - 3\log 3) = 62.14533883\dots,$$

откуда

$$\mu(\pi^{-1}) \leqslant 1 + \frac{C_1}{C_0} = 57.53011083\dots.$$

С учетом равенства $\mu(\pi) = \mu(\pi^{-1})$ это дает нам требуюмую оценку (6).

Для вывода оценки (7) мы пользуемся формулой (2). В этом случае асимптотика последовательности D_n при $n \to \infty$ также определяется леммой 3, а соответствующий характеристический многочлен (26) при $z = 1/99^4$ равен (с точностью до умножения на числовой множитель)

$$\mathcal{N}^4 + 755528641771136725636176380\mathcal{N}^3$$
$$+ 2488600714253930502\mathcal{N}^2 + 2732361980\mathcal{N} + 1.$$

Отсюда находим

$$C_0 = 20.62568987\dots - 14.70416313\dots = 5.92152673\dots,$$
$$C_1 = 61.88945992\dots + 14.70416313\dots = 76.59362305\dots$$

и получаем оценку

$$\mu\left(\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\right) \leqslant 1 + \frac{C_1}{C_0} = 13.93477619\dots,$$

из которой собственно и следует (7).

Оценки (8) и (9) отвечают применению формул (3) (случай (II)) и (4) (случай (III)) соответственно. При $z = -1/500^2$ характеристический многочлен имеет вид

$$19683\mathcal{N}^4 - 262145327105399680078732\mathcal{N}^3$$
$$+ 331773760512118098\mathcal{N}^2 - 139968078732\mathcal{N} + 19683,$$

так что в случае (II)

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 14.66365222\ldots - 13.33336442\ldots = 1.33028779\ldots, \\
C_1 &= 44.03567538\ldots + 13.33336442\ldots = 57.36903981\ldots,
\end{aligned}
$$

откуда с помощью леммы 9 мы получаем оценку (8). Наконец, при $z = -1/53360^3$ характеристический многочлен равен

$$
\begin{aligned}
19683\mathcal{N}^4 &- 5883859369943039642314742722176624792604639239873 2\,\mathcal{N}^3 \\
&+ 122534920953081108757902878834806098\,\mathcal{N}^2 \\
&- 85062121695608910732\mathcal{N} + 19683;
\end{aligned}
$$

поэтому в случае (III)

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 34.90377291\ldots - 20.97202138\ldots = 13.93175152\ldots, \\
C_1 &= 104.71137186\ldots + 20.97202138\ldots = 125.68339324\ldots,
\end{aligned}
$$

и мы приходим к оценке (9). Теорема доказана полностью.

§ 5. Заключительные замечания

Конечно же, можно было рассмотреть и случай другого выбора параметров M и N. Однако мы обнаружили, что во всех рассмотренных случаях приведенный выбор параметров оптимален. Кроме того, вычисление асимптотики коэффициентов и приближающих форм в общем случае становится существенно сложнее не только с технической, но и с обосновательной точки зрения. Отметим также, что разностные уравнения для последовательностей многочленов $P_{i,n}(x)$ и форм $R_{i,n}(z)$ могут быть получены непосредственно, поскольку каждый из этих объектов является двойным гипергеометрическим рядом, к которому применима соответствующая версия алгоритма созидательного телескопирования. Правда, техническая реализация подобной затеи требует огромных временны́х ресурсов.

Относительно других приложений методов настоящей работы нам представляется важным наблюдение Гиллеры [14]. Он отмечает, что формулы рамануджанова типа тесно связаны с быстро сходящимися рядами для логарифмов алгебраических чисел и других интересных математических постоянных. Именно, рассматривая в [14] ряды типа

$$
F(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4+k)_\nu (1/2+k)_\nu (3/4+k)_\nu}{(1+k)_\nu^3} (21460(\nu+k)+1123) \cdot \frac{(-1)^\nu}{882^{2(\nu+k)+1}}
$$

(ср. с (1)), он обнаруживает, что их значения не только при $k=0$, но и при $k=1/2$ допускают элементарные выражения. Так, в приведенном примере

$$
F(0) = \frac{4}{\pi}, \qquad F\left(\frac{1}{2}\right) = 4\log\left(\frac{2\cdot 3^{10}}{7^6}\right)
$$

(первое равенство согласно (1)). Множество других рядов из списка в [14] позволяет предположить существование широкого класса формул для математических постоянных, к которому методы настоящей работы могут успешно применяться. К сожалению, нам неизвестна сколь-нибудь систематическая теория по этому поводу; полученные примеры следует отнести скорее к приятным случайностям.

Список литературы

1. Ramanujan S. Modular equations and approximations to π // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2 1914. V. 45. P. 350–372; // Collected Papers of Srinivasa Ramanujan / ed. G.H. Hardy, P.V. Sechu Aiyar, B.M. Wilson. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. P. 23–39; 2nd reprinted edition. New York: Chelsea Publ., 1962.
2. Heng Huat Chan, Wen-Chin Liaw, Tan V. Ramanujan's class invariant λ_n and a new class of series for $1/\pi$ // J. London Math. Soc. (2) 2001. V. 64. №1. P. 93–106.
3. Guillera J. Some binomial series obtained by the WZ-method // Adv. Appl. Math. 2002. V. 29. P. 599–603.
4. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan // Ramanujan revisited (Urbana-Champaign, Ill., 1987). Boston, MA: Academic Press, 1988. P. 375–472.
5. Chudnovsky G.V. Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I // J. Math. Pures Appl. (9) 1979. V. 58. №4. P. 445–476.
6. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Transcendental methods and theta-functions // Theta functions (Bowdoin 1987). Part 2. Proc. Symposia Pure Math.. V. 49. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989. P. 167–232.
7. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. V. 63. №4. P. 335–349.
8. Rhin G., Viola C. On a permutation group related to $\zeta(2)$ // Acta Arith. 1996. V. 77. №1. P. 23–56.
9. Hata M., Huttner M. Padé approximation to the logarithmic derivative of the Gauss hypergeometric function // Analytic number theory / ed. C. Jia, K. Matsumoto. Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 2002. P. 157–172.
10. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. V. 1. New York: McGraw-Hill, 1953.
11. Petkovšek M., Wilf H.S., Zeilberger D. $A = B$. Wellesley, M.A.: A.K. Peters, Ltd., 1996.
12. Буслаев В.И. Соотношения для коэффициентов и особые точки функции // Матем. сб. 1986. Т. 131 (173). №3 (11). С. 357–384.
13. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 407. №1. P. 99–125.
14. Guillera J. Series closely related to Ramanujan formulas for π // Unpublished manuscript, 8 pages (December 2003).

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Последние исправления: 17 августа 2004 г.