Введение

Одним из направлений теории трансцендентных чисел является исследование поведения величины

$$|h_0 + h_1\xi_1 + \cdots + h_m\xi_m|, \quad h_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \tag{0.1}$$

для заданных действительных $\xi_1, \ldots, \xi_m$, $m \geqslant 1$, и ее оценка снизу в зависимости от

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant m} \bigl\{|h_j|\bigr\}.$$

Как следует из теоремы Дирихле [20, § 2 гл. 1], *для любого действительного $H \geqslant 1$ существуют целые числа $h_0, h_1, \ldots, h_m$ такие, что*

$$|h_0 + h_1\xi_1 + \cdots + h_m\xi_m| < H^{-m}, \quad 0 < \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \bigl\{|h_j|\bigr\} \leqslant H.$$

Тем самым, теорема Дирихле отвечает на вопрос, сколь малым может быть величина (0.1), в общем случае, не принимая во внимание конкретную структуру чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Из метрических соображений (см. теорему 12 [16, § 5 гл. I]) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для почти всех (в смысле меры Лебега) точек $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ существует постоянная $C = C(\bar{\xi}, \varepsilon) > 0$ такая, что для произвольных целых $h_0, h_1, \ldots, h_m$, не равных нулю одновременно, справедливо неравенство

$$|h_0 + h_1\xi_1 + \cdots + h_m\xi_m| > CH^{-m}(\log H)^{-1-\varepsilon}, \tag{0.2}$$

$$H = \max\Bigl\{e, \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \bigl\{|h_j|\bigr\}\Bigr\}.$$

Методы теории трансцендентных чисел позволяют получать оценки снизу величины (0.1), близкие по порядку к оценкам (0.2), при специальном выборе $\bar{\xi}$.

В качестве чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$ можно рассматривать значения в рациональной точке $\alpha \neq 0$ аналитических функций

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{j,\nu} z^{\nu}, \quad f_{j,\nu} \in \mathbb{Q}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \nu \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{0.3}$$

При получении оценок снизу величины (0.1) возникает вопрос о линейной независимости чисел $1, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$. В случае, когда функции (0.3) линейно зависимы с единицей над $\mathbb{C}(z)$, как легко показать (см. лемму 2 [20, § 2 гл. 3]), существует уравнение вида

$$P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j(z) f_j(z) \equiv 0, \quad P_j \in \mathbb{Q}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

связывающее функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$. При этом можно считать, что многочлены $P_0(z), P_1(z), \dots, P_m(z)$ в совокупности взаимно просты и, следовательно, хотя бы одно из чисел $P_1(\alpha), \dots, P_m(\alpha)$ отлично от нуля. Но это означает, что числа $1, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Таким образом, *необходимым условием линейной независимости чисел* $1, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ *над* $\mathbb{Q}$ *является линейная независимость функций* $1, f_1(z), \dots, f_m(z)$ *над полем* $\mathbb{C}(z)$.

В работе К. Л. Зигеля [26] был предложен метод исследования арифметических свойств значений некоторых аналитических функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений, в алгебраической точке α. Оформив свой метод в виде общей теоремы, К. Л. Зигель [27] указал некоторые достаточные условия, которым должны удовлетворять такие функции для того, чтобы числа

$1, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ были однородно алгебраически и, в частности, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Правда, эта теорема относилась только к значениям E-функций, а развитие метода применительно к классу G-функций так и осталось на уровне замечания о его возможности в статье [26].

Метод Зигеля был существенно обобщен в работах А. Б. Шидловского, который доказал критерий алгебраической независимости значений E-функций. Подробную историю этого вопроса можно найти в его монографии [20]. Сразу отметим, что приводимые ниже результаты затрагивают только *линейную* независимость над $\mathbb{Q}$ значений E- и G-функций, имеющих *рациональные* коэффициенты рядов Тейлора ($\mathbb{Q}$E-функций в смысле [20] и $\mathbb{Q}$G-функций в духе [20]).

Определение 1. Функция

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu}{\nu!} z^\nu \tag{0.4}$$

называется E-*функцией*, если выполнены следующие условия:

1) $f_\nu \in \mathbb{Q}$ для $\nu \in \mathbb{Z}^+$;
2) для некоторой положительной константы C справедливо неравенство $|f_\nu| < C^{\nu+1}$ при $\nu \in \mathbb{Z}^+$;
3) существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ такая, что $\varphi_n f_\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi_n < C^n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Данное определение E-функции было введено С. Ленгом [25] для функции с алгебраическими коэффициентами ряда Тейлора и несколько отличается от классического определения Зигеля. Однако, все известные E-функции (в смысле Зигеля) с рациональными коэффициентами рядов Тейлора, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяют определению 1. В частности, это относится ко всем гипергеометрическим функциям с рациональными параметрами (см. [20, § 1 гл. 5]).

Определение 2. Функция

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu$$

называется G-*функцией*, если для нее выполнены условия 1)–3) определения 1.

Заметим, что рассматриваемые в методе Зигеля–Шидловского аналитические функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ должны удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz} y_l = Q_{l0} + \sum_{j=1}^{m} Q_{lj} y_j, \quad l = 1, \dots, m; \\ Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m, \end{gathered} \tag{0.5}$$

первого порядка. Если известно, что эти функции вместе с единицей линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то, как вытекает из леммы 3 [20, § 2 гл. 3], все $Q_{lj}(z) \in \mathbb{Q}(z)$ и можно выбрать многочлен $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ так, что

$$T(z) Q_{lj}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m. \tag{0.6}$$

В 1955 г. А. Б. Шидловский доказал, что *условие линейной независимости* E-*функций* $f_1(z), \dots, f_m(z)$, *удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений* (0.5), *с единицей над* $\mathbb{C}(z)$ *является не только необходимым, но и достаточным условием линейной независимости чисел* $1, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ *над* $\mathbb{Q}$ *для рациональной точки* α, *отличной от нуля и полюсов коэффициентов системы* (0.5) (иными словами, для точки $\alpha \in \mathbb{Q}$ такой, что $\alpha T(\alpha) \neq 0$).

Тем самым, применение метода Зигеля к линейной независимости значений E-функций с рациональными коэффициентами было доведено до его естественных границ.

Как и большинство методов теории трансцендентных чисел, метод Зигеля–Шидловского позволил получить не только качественные, но и количественные характеристики арифметических свойств значений заданных функций в точке α. Сам К. Л. Зигель в статье [26] указывал (без доказательства), что для значений функции Бесселя

$$J_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}$$

и ее производной в рациональной точке $\alpha \neq 0$ справедливо неравенство

$$|h_0 + h_1 J_0(\alpha) + h_2 J_0'(\alpha)| > CH^{-2-\delta}, \quad \delta > 0,$$
$$h_j \in \mathbb{Z}, \quad H = \max_{0 \leqslant j \leqslant 2} \{|h_j|\} > 0, \quad C = C(\alpha, \delta) > 0.$$

Развитие метода в работах А. Б. Шидловского позволило в 1967 г. установить следующий общий результат [17]:

Пусть совокупность E-*функций* $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqslant 1$, *линейно независима над* $\mathbb{C}(z)$ *с единицей и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений* (0.5), *а* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ – *произвольная неособая точка этой системы. Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует постоянная* $C = C(f_1, \ldots, f_m; \alpha, \delta) > 0$ *такая, что*

$$|h_0 + h_1 f_1(\alpha) + \cdots + h_m f_m(\alpha)| > CH^{-m-\delta},$$
$$h_j \in \mathbb{Z}, \quad H = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \{|h_j|\} > 0.$$

В этом же году в заметке [18] были аннонсированы, а в 1979 г. в статье [19] опубликованы доказательства оценок, уточняющих остаточный член в показателе неравенства, а именно, что в условиях сформулированной теоремы *существует постоянная* $\gamma = \gamma(f_1, \dots, f_m; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $H \geqslant H_*(f_1, \dots, f_m; \alpha)$ *выполнено*

$$|h_0 + h_1 f_1(\alpha) + \cdots + h_m f_m(\alpha)| > H^{-m-\gamma(\log\log H)^{-1/2}}. \tag{0.7}$$

Из (0.7) вытекает оценка для рациональных приближений значений любой из участвующих E-функций:

$$\begin{gathered} \left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-m-1-\gamma(\log\log|q|)^{-1/2}}, \quad l = 1, \dots, m, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \\ |q| \geqslant q_*(f_1, \dots, f_m; \alpha), \quad \gamma = \gamma(f_1, \dots, f_m; \alpha). \end{gathered} \tag{0.8}$$

В 1984 г. Г. В. Чудновский в статье [23] предложил оригинальную конструкцию, позволяющую получать оценки снизу линейных форм от значений E-функций, каждая из которых удовлетворяет своему линейному однородному дифференциальному уравнению произвольного порядка. При этом на совокупность этих уравнений накладывалось очень жесткое ограничительное условие, схожее с условием Зигеля [27]. Кроме этого, Чудновскому не удалось корректно осуществить переход от линейных приближающих функциональных форм, названных им *градуированными приближениями Паде*, к линейным числовым формам. В целом, метод Чудновского являлся непосредственным развитием метода Зигеля–Шидловского.

В первой главе настоящей диссертации с помощью некоторого усовершенствования конструкции Чудновского доказывается усиление оценки (0.8), близкое по порядку к неравенствам (0.2) при $m = 1$. Этот результат формулируется в виде двух отдельных теорем по следующей причине: в случае $m = 2$ условие, накладываемое на функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$, является более слабым, чем в случае произвольного $m \geqslant 2$, что дает возможность указать более сильные следствия. Заметим только, что это условие в обеих теоремах существенно слабее соответствующего условия работы [23]. Случай $m = 1$ полностью исчерпывается результатом А. Б. Шидловского (0.8).

Теорема 1. *Пусть алгебраически независимые над $\mathbb{C}(z)$ E-функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$, $m \geqslant 2$, составляют решение системы* (0.5). *Пусть, кроме того, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Тогда существует постоянная $\gamma = \gamma(f_1, \dots, f_m; \alpha) > 0$ такая, что для всех $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f_1, \dots, f_m; \alpha)$, справедливы неравенства*

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}}, \quad l = 1, \dots, m,$$

каково бы ни было целое p.

Следствие 1. *Пусть E-функция $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$A_m y^{(m)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = B, \quad m \geqslant 2,$$
$$A_j = A_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad B = B(z) \in \mathbb{C}[z],$$

порядка m и алгебраически независима над $\mathbb{C}(z)$ со своими производными $f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$; рациональная точка α такова, что $\alpha A_m(\alpha) \neq 0$. Тогда существует постоянная $\gamma = \gamma(f; \alpha) > 0$ такая, что для всех $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f; \alpha)$, справедливо неравенство

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство этого следствия вытекает из того факта, что совокупность m E-функций $f_l(z) = f^{(l-1)}(z)$, $l = 1, \ldots, m$, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Это дает возможность применить к ней утверждение теоремы 1, из которого и следует требуемое неравенство.

Следствие 2. *Пусть t, l – неотрицательные целые числа, t нечетно, $t+l > 1$ и параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+l}; \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{Q}\backslash\{-1, -2, \ldots\}$ функции*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_\nu \cdots (\beta_l)_\nu}{(\lambda_1 + 1)_\nu \cdots (\lambda_{t+l} + 1)_\nu} \left(\frac{z}{t}\right)^{t\nu},$$

где

$$(\beta)_0 = 1, \quad (\beta)_\nu = \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + \nu - 1), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lambda_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ *для всех* $i = 1, \ldots, t + l$, $j = 1, \ldots, l$;
2) *не существует общего делителя $d > 1$ чисел t, l такого, что*

$$(\lambda_1 + 1/d, \ldots, \lambda_{t+l} + 1/d) \sim (\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+l}),$$
$$(\beta_1 + 1/d, \ldots, \beta_l + 1/d) \sim (\beta_1, \ldots, \beta_l)$$

(запись $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m) \sim (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ означает, что для некоторой перестановки $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$, отличной от тождественной, при всех $j = 1, \ldots, m$ выполнено $\beta'_j - \beta_{\sigma(j)} \in \mathbb{Z}$). Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ существует постоянная $\gamma = \gamma(\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+l};$

$\beta_1, \ldots, \beta_l; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+l};$ $\beta_1, \ldots, \beta_l; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(t+l+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Действительно, обобщенная гипергеометрическая функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\left(z\frac{d}{dz} + t\lambda_1\right) \cdots \left(z\frac{d}{dz} + t\lambda_{t+l}\right) - z^t\left(z\frac{d}{dz} + t\beta_1\right) \cdots \left(z\frac{d}{dz} + t\beta_l\right)\right)y$$
$$= t^{t+l}\lambda_1 \cdots \lambda_{t+l},$$

а алгебраическая независимость функций $f(z), f'(z), \ldots, f^{(t+l-1)}(z)$ вытекает из теоремы 1.I работы В. Х. Салихова [15].

Если воспользоваться теоремой 1.II [15], то можно получить аналогичный результат и в случае четного t.

В случае $l = 0$ условие следствия 2 можно упростить.

Следствие 3. *Пусть целое* $t > 1$ *нечетно или* $t = 2$ *и параметры* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ *функции*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_\nu \cdots (\lambda_t + 1)_\nu} \left(\frac{z}{t}\right)^{t\nu}$$

не удовлетворяют следующему условию: числа $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_t$ *являются целыми и образуют полную систему вычетов по* $\operatorname{mod} t$.

Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *существует постоянная* $\gamma = \gamma(\lambda_1, \ldots, \lambda_t; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda_1, \ldots, \lambda_t; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(t+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство алгебраической независимости функций $f(z), f'(z), \ldots, f^{(t-1)}(z)$ в случае нечетного t получено в работе В. Х. Салихова [14] при доказательстве теоремы 2; при $t = 2$ этот результат вытекает из теоремы 4 статьи В. А. Олейникова [13].

Теорема 2. *Пусть* E*-функции* $f_1(z), f_2(z)$ *составляют решение системы*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz} y_l = Q_{l0} + Q_{l1} y_1 + Q_{l2} y_2, \quad l = 1, 2; \\ Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad l = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \end{gathered} \tag{0.9}$$

и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ *с единицей;* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *– неособая точка системы* (0.9). *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(f_1, f_2; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f_1, f_2; \alpha)$, *справедливы неравенства*

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}}, \quad l = 1, 2,$$

каково бы ни было целое p.

В случае $m = 2$ справедлив аналог следствия 1 из теоремы 1, в котором полностью отсутствует условие независимости функции $f(z)$ и ее производной.

Следствие 1. *Пусть* E*-функция* $f(z)$ *является решением дифференциального уравнения*

$$A_2(z)y'' + A_1(z)y' + A_0(z)y = B(z), \quad A_2, A_1, A_0, B \in \mathbb{C}[z],$$

и $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha A_2(\alpha) \neq 0$. *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(f;\alpha) > 0$ *такая, что для любых целых* p, q, $|q| \geqslant q_*(f;\alpha)$, *либо* $f(\alpha) = p/q$ *либо*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}}.$$

В двух следующих утверждениях полностью решается вопрос об оценке снизу рациональных приближений значений гипергеометрических функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка.

Следствие 2. *Пусть*

$$K_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\lambda+1)_\nu(\mu+1)_\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

и $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(\lambda, \mu; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda, \mu; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| K_{\lambda,\mu}(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}},$$

каково бы ни было целое p.

Следствие 3. *Пусть*

$$A_{\lambda,\mu,\beta}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta+1)_\nu}{(\lambda+1)_\nu(\mu+1)_\nu} z^\nu, \quad \lambda,\mu,\beta \in \mathbb{Q} \setminus \{-1,-2,\dots\},$$

$$\beta-\lambda, \beta-\mu \notin \mathbb{N},$$

и $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(\lambda,\mu,\beta;\alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda,\mu,\beta;\alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| A_{\lambda,\mu,\beta}(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}},$$

каково бы ни было целое p.

В первых работах, связанных с применением метода Зигеля–Шидловского к классу G-функций (см. [11], [12]), были получены оценки линейных форм и многочленов от значений этих функций в алгебраических точках. При этом, однако, величина этих точек зависела от высоты рассматриваемых форм. В 1974 г., воспользовавшись указанием Зигеля в работе [26] о сокращении коэффициентов линейных приближающих форм ("сокращении факториалов"), А. И. Галочкин [1] получил для одного подкласса G-функций оценки модулей многочленов от значений в точках, не зависящих от высоты многочленов. Там же была сформулирована теорема об эффективной оценке линейной формы от G-функций из одного класса, доказательство которой опубликовано в работе [2]. В 1985 г. Д. В. Чудновский и Г. В. Чудновский [22] доказали, что условие "сокращения факториалов", сформулированное в работе [1], выполняется для однородных систем линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют G-функции. Несложное усовершенствование схемы Чудновских позволило в работе [21] получить этот результат и для неоднородных систем. Таким образом, применение метода Зигеля–Шидловского к классу G-функций было расширено до естественных границ. Отметим, что использование приближений Паде второго рода дает возможность получать оценки линейных форм от значений G-функций без условия "сокращения факториалов" (см. [22]).

Отметим, прежде всего, что для получения оценок снизу линейных форм от значений G-функций требуется более тщательный учет постоянных, чем в аналогичной задаче для E-функций. Именно поэтому, необходимо следующее уточняющее определение для элементов $f_1(z), \ldots,$ $f_m(z)$ класса G-функций.

Определение 3. Будем говорить, что *совокупность функций* (0.3) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(C, \Phi)$, где $C \geqslant 1$ и $\Phi \geqslant 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ, зависящая только от ε и функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, такая, что:

1) $|f_{j,\nu}| < \gamma C^{(1+\varepsilon)\nu}$, $j = 1, \ldots, m$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$;
2) существуют натуральные числа $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что все числа $\varphi_n f_{j,\nu} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, m$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi_n < \gamma \Phi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Для совокупности G-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, линейно независимой над $\mathbb{C}(z)$ с единицей, наряду с системой (0.5) будем рассматривать сопряженную к ее однородной части систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} a_j = \sum_{l=1}^{m} S_{jl} a_l, \quad j = 1, \ldots, m;$$
$$S_{jl}(z) = -Q_{lj}(z) \in \mathbb{Q}(z), \quad j, l = 1, \ldots, m. \tag{0.10}$$

Из (0.10) следует, что для производных порядка n, $n = 1, 2, \ldots,$ имеют место соотношения

$$\frac{d^n}{dz^n}a_j = \sum_{l=1}^{m} S_{jl}^{[n]} a_l, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{0.11}$$

где все $S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}(z)$, $j, l = 1, \ldots, m$. Обозначим через $T_*(z) \in \mathbb{Z}[z]$ наименьший общий знаменатель функций $S_{jl} = -Q_{lj}$, $j, l = 1, \ldots, m$, т.е. такой многочлен, что

$$T_*(z) S_{lj}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad j, l = 1, \ldots, m.$$

Согласно выбору (0.6) многочлена $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ получаем, что

$$T(z)\big/T_*(z) \in \mathbb{Z}[z]. \tag{0.12}$$

Несложные выкладки показывают справедливость следующих рекуррентных соотношений для коэффициентов систем (0.11):

$$S_{jl}^{[n+1]}(z) = \frac{d}{dz} S_{jl}^{[n]}(z) + \sum_{i=1}^{m} S_{ji}^{[n]}(z) \cdot S_{il}(z),$$

$$j, l = 1, \ldots, m, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.13}$$

и значит,

$$\begin{aligned} T_*^{n+1}(z) S_{jl}^{[n+1]}(z) &= T_*(z) \frac{d}{dz}\bigl(T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z)\bigr) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} T_*^n(z) S_{ji}^{[n]}(z) \cdot T_*(z) S_{il}(z) - n T_*'(z) T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z), \end{aligned}$$

$$j, l = 1, \ldots, m, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.14}$$

Отсюда, в частности, следует, что $T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j, l = 1, \ldots, m$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Будем говорить, что *система линейных дифференциальных уравнений* (0.10) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(\Psi)$ (удовлетворяет условию "сокращения факториалов" с постоянной Ψ), где $\Psi \geqslant 1$, если существуют натуральные числа $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что все функции

$$\frac{\psi_n}{i!} T_*^i(z) S_{jl}^{[i]} \in \mathbb{Z}[z], \quad j,l = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ', зависящая только от ε и системы (0.10), такая, что $\psi_n < \gamma' \Psi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Теперь сформулируем основные результаты второй главы – теорему 3 и следствия из нее. В отличие от случая E-функций, случай $m = 2$ представлен в теореме 3 отдельным пунктом. Через $H(\cdot)$ мы обозначаем высоту многочлена из $\mathbb{C}[z]$ (максимум модулей его коэффициентов).

Теорема 3. *Пусть совокупность функций* $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqslant 2$, *из класса* $\mathrm{G}(C, \Phi)$

а) *линейно независима над* $\mathbb{C}(z)$ *с единицей в случае* $m = 2$;

б) *алгебраически независима над* $\mathbb{C}(z)$ *в случае* $m > 2$,

и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (0.5), *для которой система* (0.10) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(\Psi)$. *Пусть, кроме того,* $\alpha = a/b$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условию* $\alpha T(\alpha) \neq 0$; $\varepsilon < \frac{1}{m+t+1}$ – *произвольная положительная постоянная. Положим* $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - m + 1$,

$$t = \max\Big\{\deg T - 1, \max_{l,j}\{\deg TQ_{lj}\}\Big\},$$

$$H = \max\Big\{H(T), \max_{l,j}\{H(TQ_{lj})\}\Big\},$$

$$C_0 = e^{\varepsilon(1-\log\varepsilon)}\big(2(t+1)^2 H\Psi\big)^{\varepsilon(1+\log N)}\Phi^{1+t\varepsilon}(C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{m-1}{N+m-1}\right)\binom{N+m-2}{m-1}},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_0}{(1-(m+t+1)\varepsilon)\log b - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon)\log(C|a|)}.$$

Если для заданного α выполнено условие $\eta_0 > 0$, иными словами, если

$$b^{1-(m+t+1)\varepsilon} > C_0 \cdot \big(C|a|\big)^{2-(m+1)\varepsilon}, \tag{0.15}$$

то числа $f_l(\alpha)$, $l = 1, \ldots, m$, иррациональны. Более того, для любого $\eta > \eta_0$ и произвольных $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(f_1, \ldots, f_m; \alpha, \varepsilon, \eta)$, справедливы оценки

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}, \quad l = 1, \ldots, m.$$

В предыдущих работах (см., например, [2], [22]) доказана иррациональность значений G-функций, удовлетворяющих системе (0.5), в рациональных точках $\alpha = a/b$, для которых выполнено условие типа

$$b > C_0'|a|^{m+1+\delta}, \quad \delta > 0.$$

Поэтому неравенство (0.15) теоремы 3 расширяет класс известных иррациональных значений таких G-функций.

Следующее утверждение можно считать более "практичным" по сравнению с теоремой 3, поскольку в его формулировке полностью отсутствует условие "сокращения факториалов" и вспомогательный параметр N.

Следствие 1. *Пусть функция $f(z) \in \mathrm{G}(C, \Phi)$ является решением линейного дифференциального уравнения*

$$A_m y^{(m)} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = B, \quad m \geqslant 2,$$

$$A_j = A_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \ldots, m, \quad B = B(z) \in \mathbb{C}[z],$$

порядка m и не удовлетворяет никакому

а) *линейному в случае $m = 2$,*

б) *алгебраическому в случае $m > 2$*

дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ *меньшего порядка. Пусть, кроме того,* $\alpha = a/b$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условию* $\alpha A_m(\alpha) \neq 0$; $\varepsilon < \frac{1}{m+t+1}$ – *произвольная положительная постоянная. Обозначим через* $d \in \mathbb{N}$ *наименьший общий знаменатель коэффициентов многочленов* $B, A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{Q}[z]$ *и положим*

$$t = \max\Big\{\deg A_m - 1, \max_{0 \leqslant j < m}\{\deg A_j\}, \deg B\Big\},$$

$$H = d\max\Big\{H(B), \max_{0 \leqslant j \leqslant m}\{H(A_j)\}\Big\},$$

$$\Psi = \big(C\Phi\big)^{6(m+1)^2(t+1)(1+\log m)},$$

$$C_0 = \big(2e(t+1)^2 H\Psi\big)^{\varepsilon(1-\log\varepsilon)}\Phi^{1+t\varepsilon}\big(C\Phi\big)^{\frac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m(m-1)!}},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_0}{(1-(m+t+1)\varepsilon)\log b - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon)\log(C|a|)}.$$

Если для заданного α *выполнено условие* (0.15), *то число* $f(\alpha)$ *иррационально и для любого* $\eta > \eta_0$ *и произвольных* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(f; \alpha, \varepsilon, \eta)$ *справедливы оценки*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

Вывод этого утверждения из теоремы 3 проводится по следующей схеме. Функции $f_l(z) = f^{(l-1)}(z)$, $l = 1, \ldots, m$, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y_l' = y_{l+1}, \quad l = 1, \ldots, m-1, \quad y_m' = \frac{B}{A_m} - \frac{A_0}{A_m}y_1 - \cdots - \frac{A_{m-1}}{A_m}y_{m-1},$$

и принадлежат классу $\mathrm{G}(C,\Phi)$. Как следует из теоремы [21, § 4 гл. VI] сокращение факториалов для системы (0.5) происходит с постоянной, не большей $(C\Phi)^{6(m+1)^2(t+1)}$, а согласно утверждению [21, § 5.5 гл. IV] для системы (0.10), сопряженной к (0.5), эту постоянную необходимо еще возвести в степень $1+\log m$. Кроме того, для $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-m+1\geqslant 1$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\log N<\log(N+m-1)\leqslant-\log\varepsilon,\quad \frac{m-1}{N+m-1}\geqslant(m-1)\varepsilon,\\ \binom{N+m-2}{m-1}<\frac{(N+m-1)^{m-1}}{(m-1)!}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^{m-1}(m-1)!}.\end{gathered}\tag{0.16}$$

Результат следствия получается теперь из основной теоремы прямой подстановкой.

Наконец, утверждение следствия 2, приводимого ниже, относится к значениям так называемых обобщенных полилогарифмических функций. Для его формулировки нам потребуются вспомогательные обозначения. Под $\operatorname{den}\lambda\in\mathbb{N}$ будем понимать знаменатель несократимой дроби λ. Введем в рассмотрение следующие функции натурального аргумента:

$$\begin{gathered}\rho(b)=\frac{b}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant b\\(i,b)=1}}\frac{1}{i},\quad \chi(b)=\sum_{p\,|\,b}\frac{\log p}{p-1},\\ \varphi(b)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant b\\(i,b)=1}}1 - \text{функция Эйлера},\quad b\in\mathbb{N}.\end{gathered}\tag{0.17}$$

Так, например, $\rho(1)=1$, $\chi(1)=0$; $\rho(2)=2$, $\chi(2)=\log 2$; $\rho(3)=\frac{9}{4}$, $\chi(3)=\frac{1}{2}\log 3$; $\rho(4)=\frac{8}{3}$, $\chi(4)=\log 2$ и т.д.

Следствие 2. *Рассмотрим функцию*

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^m},\quad m\geqslant 2,\quad \lambda\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}.$$

Пусть $\alpha = a/b \neq 0$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *и пусть* $\varepsilon < \frac{1}{m+2}$ *– произвольная положительная постоянная. Положим* $\rho = \rho(\operatorname{den}\lambda)$, $\chi = \chi(\operatorname{den}\lambda)$, $H = \operatorname{den}\lambda \cdot \max\{1, |\lambda|\}$,

$$C_0 = \exp\Big\{ \big(\log(8H) + \chi + m\big)\varepsilon(1 - \log\varepsilon) + m\rho\big(1 + \varepsilon + \tfrac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}\big) \Big\},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+\varepsilon)\log b + \log C_0}{(1-(m+2)\varepsilon)\log b - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon)\log|a|}.$$

Если для заданного α *выполнено условие*

$$b^{1-(m+2)\varepsilon} > C_0 \cdot |a|^{2-(m+1)\varepsilon},$$

то число $f(\alpha)$ *иррационально и для любого* $\eta > \eta_0$ *и произвольных* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(\lambda, \alpha, \varepsilon, \eta)$ *справедливы оценки*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

В частном случае, при $\lambda = 0$, *имеем:*

$$C_0 = \exp\Big\{ (m + \log 8)\varepsilon(1 - \log\varepsilon) + m\big(1 + \varepsilon + \tfrac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}\big) \Big\}.$$

Опишем теперь коротко метод настоящей диссертации для исследования арифметических свойств значений E- и G-функций, названный Г. В. Чудновским методом “градуированных приближений Паде”.

В конструкции Зигеля–Шидловского строится (с помощью принципа

Дирихле) одна линейная приближающая функциональная форма

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j(z) f_j(z), \quad P_j \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

а остальные формы (такого же вида) получаются из нее дифференцированием по z с последующим домножением на определенный выше многочлен $T(z)$. Именно в этом месте используется тот факт, что совокупность функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений (0.5). Арифметические свойства коэффициентов-многочленов получающихся линейных функциональных форм, зависящие от свойств числовых коэффициентов в рядах Тейлора рассматриваемых функций, вместе с невырожденностью определителя, составленного из этих многочленов, позволяют перейти к линейным приближающим формам от чисел $1, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$. В применении к G-функциям метод Зигеля–Шидловского позволяет получать арифметические результаты только в точках, достаточно малых по модулю. Это обстоятельство связано с тем, что в числовых линейных приближающих формах от значений G-функций, построенных с помощью этого метода, малость форм достигается не за счет множителя $1/\nu!$ в общем члене ряда, как в случае E-функций, а за счет $|\alpha|^\nu$. Конструкции "градуированных приближений Паде" как потомку метода Зигеля–Шидловского не удается преодолеть этот недостаток. Поэтому в результатах второй главы появляется условие (0.15) на число α.

Параметрами описываемой ниже конструкции являются натуральные числа M, N и (достаточно малое) вещественное $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ – набор вспомогательных переменных. В дальнейшем будут встречаться суммы, слагаемые которых нумеруются мультииндексами $\bar{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m) \in \mathbb{Z}^m$. При этом если в некоторой сумме по $\bar{\kappa}$ встретится слагаемое хотя бы с одной компонентой $\kappa_j < 0$, то будем считать это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Через $\bar{e}_j$ обозначим мультииндекс, у которого на месте с номером j стоит единица, а на остальных местах – нули. Для экономии места в формулах будем писать:

$$\bar{a}^{\bar{\kappa}} = \prod_{j=1}^{m} a_j^{\kappa_j}; \quad |\bar{\kappa}| = \sum_{j=1}^{m} \kappa_j.$$

Введем, наконец, следующие множества мультииндексов:

$$\Omega = \Omega(m,N) = \big\{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| \in \{N-1, N\}\big\}, \quad \Theta = \Theta(m,N) = \big\{\bar{s} : |\bar{s}| = N\big\};$$

$$\omega = \operatorname{Card}\Omega = \binom{N+m-2}{m-1} + \binom{N+m-1}{m-1},$$

$$\theta = \operatorname{Card}\Theta = \binom{N+m-1}{m-1}$$

(результаты о количествах элементов в этих множествах следуют, например, из леммы 7 [20, § 7 гл. 2]). Упорядочим элементы множеств Ω и Θ в лексикографическом порядке, т.е. будем говорить, что мультииндекс $\bar{\kappa}$ меньше мультииндекса $\bar{\kappa}'$ (запись $\bar{\kappa} \prec \bar{\kappa}'$), если $\kappa_1 = \kappa_1'$, $\kappa_2 = \kappa_2', \ldots, \kappa_{j-1} = \kappa_{j-1}'$, но $\kappa_j < \kappa_j'$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Под $\delta_{\bar{s}',\bar{s}}$, $\bar{s}', \bar{s} \in \Theta$, будем понимать “обобщенный” символ Кронекера множества Θ, а именно,

$$\delta_{\bar{s}',\bar{s}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{s}' = \bar{s}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассматриваются формы от переменных $a_1, \ldots, a_m$ с функциональными коэффициентами вида

$$R(z;\bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z),$$

$$P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Q}[z]. \quad (0.18)$$

Поскольку такие формы однородны и имеют степень N, их можно представить в виде

$$R(z;\bar{a}) = \sum_{\bar{s}\in\Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z). \tag{0.19}$$

Сравнивая коэффициенты при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s}\in\Theta$, в (0.18) и (0.19), выразим элементы строки $\big(R_{\bar{s}}(z)\big)_{\bar{s}\in\Theta}$ через элементы строки $\big(P_{\bar{\kappa}}(z)\big)_{\bar{\kappa}\in\Omega}$.

$$R_{\bar{s}}(z) = \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N} P_{\bar{\kappa}}(z)\delta_{\bar{\kappa},\bar{s}} + \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} P_{\bar{\kappa}}(z)\sum_{j=1}^{m}\delta_{\bar{\kappa}+\bar{e}_j,\bar{s}} f_j(z), \quad \bar{s}\in\Theta, \tag{0.20}$$

или

$$R_{\bar{s}}(z) = P_{\bar{s}}(z) + \sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z), \quad \bar{s}\in\Theta. \tag{0.21}$$

Также, как и в методе Зигеля–Шидловского, с помощью принципа Дирихле удается построить совокупность линейных функциональных форм (0.21) с оценкой

$$\deg P_{\bar{\kappa}} < M, \quad \bar{\kappa}\in\Omega,$$

на степени входящих в них многочленов (и, кроме того, с некоторой оценкой их высот) такую, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geqslant \left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right] = \left[\left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right], \quad \bar{s}\in\Theta.$$

Теперь применение к формам вида (0.18) дифференциального оператора

$$D = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} Q_{lj}(z) a_l\right)\frac{\partial}{\partial a_j}, \tag{0.22}$$

связанного с системой дифференциальных уравнений (0.10), с последующим домножением на многочлен $T(z)$ переводит их в формы того же вида с другими коэффициентами-многочленами $P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$. Это обстоятельство связано со следующим простым свойством оператора D:

$$D \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z) = \sum_{l=1}^{m} a_l Q_{l0}(z). \tag{0.23}$$

Таким образом, по одной построенной форме вида (0.18) удается построить целый набор таких форм. Наиболее трудным моментом метода является доказательство невырожденности функционального определителя, составленного из коэффициентов-многочленов этих форм. Для его преодоления исследуются свойства матрицы перехода от строки многочленов $\big(P_{\bar{\kappa}}(z)\big)_{\bar{\kappa}\in\Omega}$ к строке линейных форм $\big(R_{\bar{s}}(z)\big)_{\bar{s}\in\Theta}$, а также используется технический аппарат для оценки порядка нуля многочленов от $z, f_1(z), \ldots, f_m(z)$, разработанный Ю. В. Нестеренко в [9], [10] и других работах. Заключительная часть доказательств теорем 1 и 3 проводится по двум различным схемам: традиционной схеме метода Зигеля–Шидловского (см., например, лемму 17 [20, § 11 гл. 3]) и использованию приближений Паде второго рода.

Отметим, что доказательство теорем 1–3 проводятся для фиксированного $l = l^*$, $1 \leqslant l^* \leqslant m$.

Основные результаты этой диссертации опубликованы в работах [5], [6].

Автор выражает глубокую признательность Ю. В. Нестеренко за интересную тему и большое внимание, оказанное настоящей работе.