ГЛАВА I

Мера иррациональности значений E-функций

§ 1. Конструкция рациональных приближений к числу $f_{l^*}(\alpha)$

Договоримся сразу представление функции $f(z)$ в виде ряда (0.4) называть *нормальным разложением функции в степенной ряд* (или просто *нормальным разложением*), а числа $\{f_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ – *коэффициентами в нормальном разложении.* При этом в случае $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ будет считаться, что $f_\nu = 0$ для $\nu > \deg f$.

Положим

$$N = \left[(\log M)^{1/(m+1)}\right], \quad \varepsilon = \frac{1}{3(N+m-1)}, \tag{1.1}$$

при этом будем считать натуральный параметр M достаточно большим, т.е. $M > M_*(f_1, \ldots, f_m)$. Буквы C с индексами будем использовать для обозначения положительных постоянных, зависящих от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и числа α.

Лемма 1.1. *Для натурального* $M > M_*$ *и выбранных согласно* (1.1) *числам* N *и* ε *существуют многочлены* $P_{\bar\kappa}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $\bar\kappa \in \Omega$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *не все они тождественно равны нулю*;
2) $\deg P_{\bar\kappa} < M$ *для всех* $\bar\kappa \in \Omega$;
3) *коэффициенты в нормальном разложении этих многочленов являются целыми числами, ограниченными по модулю величиной* $C_0^{\omega M/\varepsilon}$;

4) *порядок нуля в точке* $z = 0$ *каждой из линейных функционaльных форм* (0.21) *не ниже*

$$K = \left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right] = \left[\left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right].$$

Доказательство. Рассмотрим нормальное разложение требуемых многочленов:

$$P_{\bar\kappa}(z) = \sum_{\nu=0}^{M-1} \frac{P_{\bar\kappa,\nu}}{\nu!} z^\nu, \quad \bar\kappa \in \Omega, \tag{1.2}$$

и будем искать нужную совокупность целых чисел $P_{\bar\kappa,\nu}$, $\bar\kappa \in \Omega$, $\nu = 0, 1, \ldots, M-1$, общее количество которых ωM.

Пользуясь определением E-функции одновременно для функций

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_{j,\nu}}{\nu!} z^\nu, \quad j = 1, \ldots, m,$$

получим некоторую положительную константу C и последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$|\varphi_K f_{j,\nu}| < C^{2K}, \quad \varphi_K f_{j,\nu} \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \nu = 0, 1, \ldots, K-1. \tag{1.3}$$

Запишем искомые формы в виде

$$R_{\bar s}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{R_{\bar s,\mu}}{\mu!} z^\mu, \quad \bar s \in \Theta,$$

где, согласно формулам (0.21),

$$R_{\bar s,\mu} = P_{\bar s,\mu} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{0 \leqslant \nu \leqslant \mu \\ \mu-\nu<M}} \binom{\mu}{\nu} P_{\bar s-\bar e_j,\mu-\nu} f_{j,\nu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Домножая каждое из этих равенств на φ_K, мы получим, согласно условию

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geqslant K, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

в точности $\theta K \leqslant (\omega - \varepsilon)M$ линейных уравнений

$$\varphi_K R_{\bar{s},\mu} = 0, \quad \bar{s} \in \Theta, \quad \mu = 0, 1, \ldots, K-1,$$

относительно $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, $\nu = 0, 1, \ldots, M-1$, целые коэффициенты которых в силу (1.3) и того, что

$$\binom{\mu}{\nu} < 2^K, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, K-1,$$

ограничены по модулю величиной $2^K C^{2K}$. Осталось воспользоваться леммой Зигеля (см. лемму 11 [20, гл. 3]), согласно которой существует нетривиальный набор многочленов (1.2) с целыми коэффициентами в нормальном разложении, ограниченными по модулю величиной

$$\left(\Psi 2^K C^{2K}\right)^{\Upsilon/(\Psi-\Upsilon)} < \left(\omega M 2^{2M} C^{4M}\right)^{\omega/\varepsilon}.$$

Учитывая, что $\omega < M$ согласно (1.1), получаем требуемое.

Докажем теперь указанное выше свойство (0.23) дифференциального оператора (0.22):

$$\begin{aligned}
D\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z) &= \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\mathrm{f}_j}{\mathrm{z}}(z) - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} Q_{lj}(z) a_l\right) f_j(z) \\
&= \sum_{l=1}^{m} a_l \frac{\mathrm{f}_l}{\mathrm{z}}(z) - \sum_{l=1}^{m} a_l \sum_{j=1}^{m} Q_{lj}(z) f_j(z) \\
&= \sum_{l=1}^{m} a_l \left(f_l'(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_{lj}(z) f_j(z)\right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} a_l Q_{l0}(z).
\end{aligned}$$

Положим

$$P_{\bar\kappa}^{[0]}(z) = P_{\bar\kappa}(z), \quad \bar\kappa \in \Omega;$$

$$R_{\bar s}^{[0]}(z) = R_{\bar s}(z), \quad \bar s \in \Theta,$$

где $P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa \in \Omega$, и $R_{\bar s}(z)$, $\bar s \in \Theta$, – построенные в лемме 1.1 многочлены и отвечающие им линейные формы (0.21);

$$R^{[0]}(z;\bar a) = \sum_{\bar s \in \Theta} \bar a^{\bar s} R_{\bar s}^{[0]}(z).$$

Тогда функциональные формы

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \bigl(T(z)D\bigr)^n R^{[0]}(z;\bar a), \quad n \geqslant 0,$$

будут иметь вид

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z), \quad n \geqslant 0,$$

и входящие в них многочлены от z удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$P_{\bar\kappa}^{[n+1]}(z) = T(z)\Biggl(\frac{d}{dz} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) - \sum_{l,j=1}^{m} (\kappa_j - \delta_{lj} + 1) Q_{lj}(z) P_{\bar\kappa - \bar e_l + \bar e_j}^{[n]}(z) + \bigl(|\bar\kappa| - N + 1\bigr) \sum_{l=1}^{m} Q_{l0}(z) P_{\bar\kappa - \bar e_l}^{[n]}(z)\Biggr), \quad \bar\kappa \in \Omega, \quad n \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и отвечающие каждой функциональной форме

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar s \in \Theta} \bar a^{\bar s} R_{\bar s}^{[n]}(z), \quad n \geqslant 0,$$

линейные формы $R_{\bar s}^{[n]}(z)$, $\bar s \in \Theta$, $n \geqslant 0$, от функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$:

$$R_{\bar s}^{[n+1]}(z) = T(z)\left(\frac{d}{dz}R_{\bar s}^{[n]}(z) - \sum_{l,j=1}^{m}(s_j - \delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)R^{[n]}_{\bar s-\bar e_l+\bar e_j}(z)\right),$$
$$\bar s \in \Theta, \quad n \geqslant 0. \quad (1.5)$$

Если ввести обозначение

$$t = \max\Bigl\{\deg T, \max_{l,j}\{\deg TQ_{lj}\}\Bigr\},$$

то из леммы 1.1 и соотношений (1.4), (1.5) имеем:

$$\deg P_{\bar\kappa}^{[n]} < M + tn, \quad \bar\kappa \in \Omega, \quad n \geqslant 0; \quad (1.6)$$

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar s}^{[n]} \geqslant K - n, \quad \bar s \in \Theta, \quad n \geqslant 0. \quad (1.7)$$

Лемма 1.2. *Для многочлена*

$$g(z) = \sum_{\nu}\frac{g_\nu}{\nu!}z^\nu, \quad g_\nu \in \mathbb{C},$$

положим

$$\|g(z)\| = \max_{\nu}\{|g_\nu|\}.$$

Тогда

а) $\|g'(z)\| \leqslant \|g(z)\|$;

б) $\|g_1(z)+g_2(z)\| \leqslant \|g_1(z)\| + \|g_2(z)\|$;

в) $\|g_1(z)g_2(z)\| \leqslant \binom{\deg g_1(z) + \deg g_2(z)}{\deg g_1(z)}\|g_1(z)\|\cdot\|g_2(z)\|$.

Доказательство свойств а) и б) тривиально.

в) Пусть

$$g_i(z)=\sum_{\nu=0}^{n_i}\frac{g_{i,\nu}}{\nu!}z^{\nu},\quad i=1,2;\quad h(z)=g_1(z)g_2(z)=\sum_{\eta=0}^{n_1+n_2}\frac{h_\eta}{\eta!}z^{\eta}.$$

Тогда

$$h(z)=\sum_{\nu=0}^{n_1}\sum_{\mu=0}^{n_2}\frac{g_{1,\nu}}{\nu!}\frac{g_{2,\mu}}{\mu!}z^{\nu+\mu}=\sum_{\eta=0}^{n_1+n_2}\sum_{(\nu,\mu)\in\mathrm{S}_\eta}\binom{\eta}{\nu}g_{1,\nu}g_{2,\mu}\frac{z^{\eta}}{\eta!},$$

$$\mathrm{S}_\eta=\bigl\{(\nu,\mu):0\leqslant\nu\leqslant n_1,\ 0\leqslant\mu\leqslant n_2,\ \nu+\mu=\eta\bigr\},$$

$$\eta=0,1,\ldots,n_1+n_2,$$

откуда

$$|h_\eta|=\left|\sum_{(\nu,\mu)\in\mathrm{S}_\eta}\binom{\eta}{\nu}g_{1,\nu}g_{2,\mu}\right|\leqslant\|g_1(z)\|\cdot\|g_2(z)\|\sum_{(\nu,\mu)\in\mathrm{S}_\eta}\binom{\eta}{\nu},$$

$$\eta=0,1,\ldots,n_1+n_2.\qquad(1.8)$$

Имеем:

$$\sum_{(\nu,\mu)\in\mathrm{S}_\eta}\binom{\eta}{\nu}\leqslant\sum_{(\nu,\mu)\in\mathrm{S}_\eta}\binom{n_1+n_2-\eta}{n_1-\nu}\binom{\eta}{\nu}$$

$$=\frac{(n_1+n_2-\eta)!\eta!}{n_1!n_2!}\sum_{(\nu,\mu)\in\mathrm{S}_\eta}\binom{n_1}{\nu}\binom{n_2}{\mu},$$

$$\eta=0,1,\ldots,n_1+n_2.\qquad(1.9)$$

Воспользуемся формулой для бинома Ньютона:

$$(1+z)^{n_1} = \sum_{\nu=0}^{n_1} \binom{n_1}{\nu} z^{\nu}; \quad (1+z)^{n_2} = \sum_{\mu=0}^{n_2} \binom{n_2}{\mu} z^{\mu},$$

откуда

$$\begin{aligned}(1+z)^{n_1+n_2} &= \sum_{\nu=0}^{n_1} \binom{n_1}{\nu} z^{\nu} \sum_{\mu=0}^{n_2} \binom{n_2}{\mu} z^{\mu} \\ &= \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu}\binom{n_2}{\mu} z^{\eta},\end{aligned} \tag{1.10}$$

а с другой стороны,

$$(1+z)^{n_1+n_2} = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{\eta} z^{\eta}. \tag{1.11}$$

Сравнивая коэффициенты при z^η, $\eta = 0, 1, \ldots, n_1+n_2$, в соотношениях (1.10) и (1.11), заключаем:

$$\sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu}\binom{n_2}{\mu} = \binom{n_1+n_2}{\eta}, \quad \eta = 0, 1, \ldots, n_1+n_2. \tag{1.12}$$

Осталось подставить полученное тождество (1.12) в неравенство (1.9) и продолжить оценку (1.8):

$$\begin{aligned}|h_\eta| &\leqslant \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \frac{(n_1+n_2-\eta)!\eta!}{n_1!n_2!} \binom{n_1+n_2}{\eta} \\ &= \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \binom{n_1+n_2}{n_1}, \quad \eta = 0, 1, \ldots, n_1+n_2,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.3. а) *Коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)$, $\bar\kappa \in \Omega$, $n \geqslant 0$, являются целыми числами и при $n < C_1\varepsilon M$ имеет место оценка*

$$\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\} < C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M}. \tag{1.13}$$

б) *При $n < C_1\varepsilon M$ справедлива оценка*

$$\bigl|R_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha)\bigr| < C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M} C_3^M M^{-K}, \quad \bar s^* = N\bar e_{l^*}. \tag{1.14}$$

Доказательство. а) Первая часть утверждения вытекает из соотношений (1.4) и выбора (0.6) многочлена $T(z)$. Положим

$$C_4 = \max\Bigl\{\|T\|, \max_{l,j}\bigl\{\|TQ_{lj}\|\bigr\}\Bigr\}$$

и воспользуемся рекуррентными соотношениями (1.4) и неравенствами леммы 1.2:

$$\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\} \leqslant (m^2+m+1)N\binom{M+tn-1}{t}\cdot C_4 \times \max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n-1]}(z)\|\bigr\}, \quad n \geqslant 1,$$

откуда простая индукция по n дает оценку

$$\begin{aligned}\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\} &\leqslant \bigl((m^2+m+1)N\bigr)^n\cdot\left(\frac{1}{t!}\right)^n\frac{(M+tn-1)!}{(M-1)!}\cdot C_4^n \\ &\quad\times \max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[0]}(z)\|\bigr\} \\ &< \left(\frac{C_4(m^2+m+1)N}{t!}\right)^n (2M)^{tn} C_0^{\omega M/\varepsilon}, \quad n \geqslant 0.\end{aligned}$$

Осталось вспомнить, что $n < C_1\varepsilon M$.

б) Пусть $P^{[n]}_{\bar{s}^*,\nu}$, $P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*,\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P^{[n]}_{\bar{s}^*}(z)$, $P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(z)$, $n \geqslant 0$, соответственно, $\bar{\kappa}^* = \bar{s}^* - \bar{e}_{l^*}$; $R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}$, $\mu \in \mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении линейных форм $R^{[n]}_{\bar{s}^*}(z)$, $n \geqslant 0$. Тогда согласно формуле (0.21)

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*}(z) = P^{[n]}_{\bar{s}^*}(z) + P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(z) f_{l^*}(z), \quad n \geqslant 0, \tag{1.15}$$

и значит,

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu} = P^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu} + \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*,\nu} f_{l^*,\mu-\nu}, \quad \mu \in \mathbb{Z}^+, \quad n \geqslant 0. \tag{1.16}$$

При этом

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu} = 0, \quad \mu < K - n, \quad n < C_1\varepsilon M.$$

Поэтому, если в соотношении (1.16) воспользоваться оценкой (1.13) и определением E-функции для $f_{l^*}(z)$, то мы получим (для $\mu \geqslant K - n$):

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}| \leqslant 2 \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \max_{\bar{\kappa}\in\Omega} \{\|P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)\|\} C^{\mu+1} < (2C)^{\mu+1} C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M},$$

откуда

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)| = \left| \sum_{\mu \geqslant K-n} \frac{R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}}{\mu!} \alpha^\mu \right| < C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M} \sum_{\mu \geqslant K-n} \frac{|\alpha|^\mu}{\mu!} (2C)^{\mu+1}.$$

Пользуясь неравенством

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{|\alpha|^\mu}{\mu!}(2C)^{\mu+1} &\leqslant \frac{|\alpha|^{K-n}(2C)^{K-n+1}}{(K-n)!}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{\bigl(2C|\alpha|\bigr)^{\mu-K+n}}{(\mu-K+n)!}\\
&= \frac{|\alpha|^{K-n}(2C)^{K-n+1}}{(K-n)!}e^{2C|\alpha|}\\
&< \bigl(2C|\alpha|\bigr)^{2M}\left(\frac{e}{K-n}\right)^{K-n}e^{2C|\alpha|}\\
&< \bigl(2C|\alpha|\bigr)^{2M}\left(\frac{e}{M}\right)^{K}e^{2C|\alpha|}\\
&< e^{2C|\alpha|}\bigl(2C|\alpha|e\bigr)^{2M}M^{-K},
\end{aligned}$$

поскольку $M < K-n \leqslant K < 2M$, получаем:

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)| < C_0^{\omega M/\varepsilon}M^{C_2\varepsilon M}e^{2C|\alpha|}\bigl(2C|\alpha|e\bigr)^{2M}M^{-K},$$

что и дает (1.14).

Лемма 1.3 и равенство (1.15) означают, что рациональное число $-P^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)/P^{[n]}_{\bar{s}^*-\bar{e}_{l^*}}(\alpha)$ для любого не слишком большого n будет достаточно хорошим приближением к числу $f_{l^*}(\alpha)$.

§ 2. Алгебраическая природа переходной матрицы

Рассмотрим матрицу

$$(x_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega;\bar{s}\in\Theta}, \tag{2.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
x_{\bar{\kappa},\bar{s}} &= \delta_{\bar{\kappa},\bar{s}}, && \text{если } |\bar{\kappa}| = N;\\
x_{\bar{\kappa},\bar{s}} &= \sum_{j=1}^{m}\delta_{\bar{\kappa}+\bar{e}_j,\bar{s}}y_j, && \text{если } |\bar{\kappa}| = N-1,
\end{aligned}\right\}\ \bar{s}\in\Theta, \tag{2.2}$$

переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ независимы. При подстановке $y_j = f_j(z)$, $j = 1, \ldots, m$, матрица (2.1) согласно формуле (0.20) является матрицей перехода от строки $\big(P_{\bar\kappa}(z)\big)_{\bar\kappa\in\Omega}$ к строке $\big(R_{\bar s}(z)\big)_{\bar s\in\Theta}$.

Пусть задано непустое множество $\widetilde\Omega \subset \Omega$ и функции

$$\begin{aligned} &D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \in \mathbb{C}(z), \\ &D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \equiv 0, \quad \bar\kappa' \prec \bar\kappa, \end{aligned} \qquad \bar\kappa \in \widetilde\Omega, \quad \bar\kappa' \in \Omega \setminus \widetilde\Omega, \tag{2.3}$$

определяют элементы матрицы

$$(\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega;\bar s\in\Theta} \tag{2.4}$$

по формуле

$$\begin{aligned} \widetilde x_{\bar\kappa,\bar s} &= x_{\bar\kappa,\bar s} + \sum_{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega} D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} x_{\bar\kappa',\bar s} \\ &= x_{\bar\kappa,\bar s} + \sum_{\substack{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega \\ \bar\kappa'\succ\bar\kappa}} D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} x_{\bar\kappa',\bar s}, \quad \bar\kappa \in \widetilde\Omega, \quad \bar s \in \Theta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Целью этого параграфа будет доказательство оценки снизу ранга матрицы (2.4), содержащейся в следующем утверждении.

Предложение 2.1. *Для любого непустого множества* $\widetilde\Omega \subset \Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde\Omega = \widetilde\omega$, *существуют множества* $\Omega_1 \subset \widetilde\Omega$ *и* $\Theta_1 \subset \Theta$, $\operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1 = \widetilde\theta$, *зависящие только от множества* $\widetilde\Omega$ *и не зависящие от рациональных функций* (2.3), *такие, что минор* $\det(\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$ *матрицы* (2.4) *отличен от нуля и*

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde\omega}{\widetilde\theta} \leqslant \dfrac{\omega}{\theta} - \dfrac{1}{(N+m-1)\theta}, & \text{\textit{если} } \widetilde\Omega \neq \Omega; \\[2ex] \dfrac{\widetilde\omega}{\widetilde\theta} = \dfrac{\omega}{\theta}, & \text{\textit{если} } \widetilde\Omega = \Omega. \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Пусть произвольные подмножества* $\Omega_1 \subset \Omega$ *и* $\Theta_1 \subset \Theta$ *выбраны так, что* $\operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1$. *Тогда определитель*

$$\det(x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$$

как многочлен от переменных $y_1,\dots,y_m$ *является мономом мультистепени*

$$\bar r = \bar r(\Omega_1,\Theta_1) = \sum_{\bar s\in\Theta_1}\bar s - \sum_{\bar\kappa\in\Omega_1}\bar\kappa$$

или равен нулю.

Доказательство. Требуемый определитель представляет собой сумму всевозможных произведений вида

$$\pm\prod_{\bar\kappa\in\Omega_1} x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)},$$

где σ – произвольное биективное отображение множества Ω_1 на множество Θ_1. Поэтому достаточно показать, что каждое такое ненулевое произведение в точности равно $\pm\bar y^{\bar r}$. Из определения (2.2) элементов матрицы (2.1) следует, что если $x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)} \neq 0$ для всех $\bar\kappa \in \Omega_1$, то для каждого $\bar\kappa \in \Omega_1$ либо $\sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa$ (и тогда $x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)} = 1$, $|\bar\kappa| = N$) либо существует $j = j(\bar\kappa,\sigma)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, такой, что $\sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j$ (и тогда $x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)} = y_j$, $|\bar\kappa| = N-1$). Поэтому

$$\prod_{\bar\kappa\in\Omega_1} x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)} = \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ |\bar\kappa|=N-1}} y_{j(\bar\kappa,\sigma)}, \tag{2.6}$$

где произведение в правой части в случае $\Omega_1 \subset \Theta$ считаем равным 1. Сложим равенства

$$\sigma(\bar\kappa) = \begin{cases} \bar\kappa, & \text{если } |\bar\kappa| = N; \\ \bar\kappa + \bar e_{j(\bar\kappa,\sigma)}, & \text{если } |\bar\kappa| = N-1, \end{cases} \qquad \bar\kappa \in \Omega_1, \tag{2.7}$$

по всевозможным $\bar\kappa \in \Omega_1$ и воспользуемся тем, что $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ есть биекция:

$$\sum_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ |\bar\kappa|=N-1}} \bar e_{j(\bar\kappa,\sigma)} = \sum_{\bar\kappa\in\Omega_1} \sigma(\bar\kappa) - \sum_{\bar\kappa\in\Omega_1} \bar\kappa = \sum_{\bar s\in\Theta_1} \bar s - \sum_{\bar\kappa\in\Omega_1} \bar\kappa = \bar r,$$

а это означает, что

$$\prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ |\bar\kappa|=N-1}} y_{j(\bar\kappa,\sigma)} = \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ |\bar\kappa|=N-1}} \bar y^{\bar e_{j(\bar\kappa,\sigma)}} = \bar y^{\bar r}.$$

Сопоставляя это равенство с (2.6), получаем требуемое утверждение.

Замечание. Из доказательства леммы 2.2 вытекает, что величина

$$\mathrm{Card}\bigl\{\bar\kappa \in \Omega_1 : \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j\bigr\} = r_j$$

зависит только от множеств Ω_1, Θ_1, и не зависит от биективного отображения $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ вида (2.7).

Лемма 2.3. *Пусть заданы множество $\widetilde\Omega \subset \Omega$, рациональные функции* (2.3); *произвольные множества $\Omega_1 \subset \widetilde\Omega$ и $\Theta_1 \subset \Theta$ таковы, что $\mathrm{Card}\,\Omega_1 = \mathrm{Card}\,\Theta_1$. Тогда если $\det(x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1} \not\equiv 0$, то и $\det(\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1} \not\equiv 0$.*

Доказательство. Перепишем соотношение (2.5) в виде

$$(\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega;\bar s\in\Theta} = (\widetilde D_{\bar\kappa,\bar\kappa'})_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega;\bar\kappa'\in\Omega}(x_{\bar\kappa',\bar s})_{\bar\kappa'\in\Omega;\bar s\in\Theta},$$

где

$$\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = \begin{cases} \delta_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}, & \text{если } \bar{\kappa}' \in \widetilde{\Omega}; \\ D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}, & \text{если } \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \end{cases} \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \tag{2.8}$$

и воспользуемся формулой Бине–Коши [4, с. 17]:

$$\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} = \sum_{\substack{\Omega'\subset\Omega \\ \operatorname{Card}\Omega'=\operatorname{Card}\Omega_1}} \det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} \det(x_{\bar{\kappa}',\bar{s}})_{\bar{\kappa}'\in\Omega';\bar{s}\in\Theta_1}. \tag{2.9}$$

Согласно лемме 2.2 каждый определитель $\det(x_{\bar{\kappa}',\bar{s}})_{\bar{\kappa}'\in\Omega';\bar{s}\in\Theta_1}$, отличный от нуля, является произведением степеней переменных $y_1,\dots,y_m$. Покажем, что определитель, отвечающий множеству $\Omega' = \Omega_1$ (отличный от нуля по условию), имеет наибольшую мультистепень среди всех других ненулевых определителей такого вида, а коэффициент при нем в сумме (2.9) равен 1. Отсюда и будет следовать утверждение леммы 2.3.

Рассмотрим каждое ненулевое слагаемое суммы (2.9). Пусть Ω' – произвольное подмножество Ω, $\operatorname{Card}\Omega' = \operatorname{Card}\Omega_1$, такое, что $\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} \neq 0$.

Если $\Omega' = \Omega_1$, то

$$\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} = \det(\delta_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega_1} = 1.$$

Если же $\Omega' \neq \Omega_1$, то $\widetilde{\Omega}' = \Omega' \cap \widetilde{\Omega} \subset \Omega_1$. Действительно, в противном случае существует мультииндекс $\bar{\kappa}' \in \widetilde{\Omega}' \subset \widetilde{\Omega}$ такой, что $\bar{\kappa}' \notin \Omega_1$. Тогда для любого $\bar{\kappa} \in \Omega_1$ имеем $\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = \delta_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = 0$, и значит, $\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} = 0$. Итак, $\widetilde{\Omega}' \subset \Omega_1$.

Раскладывая определитель матрицы $(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'}$ последовательно по строкам с номерами $\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}'\subset\widetilde{\Omega}$, согласно (2.8) получим с точностью до знака определитель

$$\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar{\kappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'} = \det(D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar{\kappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}.$$

Поскольку $\Omega'\neq\Omega_1$, имеем $\mu=\mathrm{Card}(\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}')=\mathrm{Card}(\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}')\geqslant 1$. Упорядочим элементы множеств в лексикографическом порядке:

$$\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}'=\{\bar{\kappa}^{(1)},\dots,\bar{\kappa}^{(\mu)}\},\quad \bar{\kappa}^{(1)}\prec\cdots\prec\bar{\kappa}^{(\mu)};$$
$$\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'=\{\bar{r}^{(1)},\dots,\bar{r}^{(\mu)}\},\quad \bar{r}^{(1)}\prec\cdots\prec\bar{r}^{(\mu)}.$$

Если для некоторого ν, $1\leqslant\nu\leqslant\mu$, выполнено $\bar{r}^{(\nu)}\prec\bar{\kappa}^{(\nu)}$, то согласно (2.3)

$$D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}=0,\quad \bar{\kappa}\in\{\bar{\kappa}^{(\nu)},\dots,\bar{\kappa}^{(\mu)}\},\quad \bar{\kappa}'\in\{\bar{r}^{(1)},\dots,\bar{r}^{(\nu)}\}.$$

Это означает, что первые ν столбцов матрицы $(D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar{\kappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}$ линейно зависимы, что невозможно ввиду условия

$$\det(D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar{\kappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}=\pm\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'}\neq 0.$$

Поэтому $\bar{r}^{(\nu)}\succ\bar{\kappa}^{(\nu)}$ для всех $\nu=1,\dots,\mu$, и, в частности,

$$\sum_{\nu=1}^{\mu}\bar{r}^{(\nu)}\succ\sum_{\nu=1}^{\mu}\bar{\kappa}^{(\nu)},$$

или

$$\sum_{\bar{\kappa}\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'} \bar{\kappa} \succ \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}'} \bar{\kappa}.$$

Таким образом, любому ненулевому слагаемому в сумме (2.9), соответствует либо множество $\Omega' = \Omega_1$ либо множество Ω', для которого

$$\sum_{\bar{\kappa}\in\Omega'} \bar{\kappa} \succ \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1} \bar{\kappa}.$$

Но последнее условие согласно лемме 2.2 означает, что мультистепень соответствующего множествам Ω', Θ_1 монома младше мультистепени монома, соответствующего множествам Ω_1, Θ_1. Следовательно, в многочлене $\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1}$ от переменных $y_1,\ldots,y_m$ присутствует по крайней мере один моном с ненулевым коэффициентом. Это завершает доказательство.

Будем рассматривать пары (Ω_1,σ), где $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\operatorname{Card}\sigma(\Omega_1) = \operatorname{Card}\Omega_1$, т.е. σ – биекция множеств Ω_1 и $\sigma(\Omega_1)$;
2) отображение $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$ имеет вид (2.7);
3) если $\bar{\kappa} \in \Omega_1$ и $\bar{\kappa}+\bar{e}_j \prec \sigma(\bar{\kappa})$, то $\bar{\kappa}+\bar{e}_j \in \sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\bar{\kappa}+\bar{e}_j) \succ \bar{\kappa}$.

Лемма 2.4. *Если* $\widetilde{\Omega} \neq \varnothing$, *то пары* (Ω_1,σ), *удовлетворяющие условиям* 1)–3), *существуют.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи, когда $\widetilde{\Omega}\cap\Theta \neq \varnothing$ и когда $\widetilde{\Omega}\cap\Theta = \varnothing$. В первом возьмем произвольный элемент $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}\cap\Theta$ и положим $\sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa}$, во втором – произвольный элемент $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}$ и положим $\sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_m \in \Theta$. Тогда пара $(\{\bar{\kappa}\},\sigma)$, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2). Кроме того, не существует j, $1 \leqslant j \leqslant m$, такого, что $\bar{\kappa} + \bar{e}_j \prec \sigma(\bar{\kappa})$. Поэтому условие 3) также выполнено для указанной пары.

Лемма 2.5. *Пусть множество $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ вместе с отображением $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$ удовлетворяют условиям 1)–3). Тогда любое биективное отображение множества Ω_1 в $\sigma(\Omega_1)$ вида (2.7) совпадает с σ.*

Доказательство. Пусть σ' – произвольная биекция множества Ω_1 в $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$ вида (2.7). Тогда если $\bar{\kappa} \in \Omega_1 \cap \Theta$, то $\sigma'(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} = \sigma(\bar{\kappa})$. Поэтому, если $\sigma'(\bar{\kappa}) \neq \sigma(\bar{\kappa})$, то $\bar{\kappa} \in \Omega_1 \setminus \Theta$. Предположим, что существуют элементы $\bar{\kappa} \in \Omega_1$, для которых $\sigma'(\bar{\kappa}) \neq \sigma(\bar{\kappa})$. Пусть j', $1 \leqslant j' \leqslant m$, – наибольший номер, для которого существует $\bar{\kappa}' \in \Omega_1$ с условием $\sigma'(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'} \neq \sigma(\bar{\kappa}')$. Как было отмечено в замечании к лемме 2.2,

$$\operatorname{Card}\{\bar{\kappa} \in \Omega_1 : \sigma'(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_j\} = \operatorname{Card}\{\bar{\kappa} \in \Omega_1 : \sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_j\}.$$

Из условия $\sigma'(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_j$, $j' < j \leqslant m$, в силу выбора j' вытекает, что $\sigma'(\bar{\kappa}) = \sigma(\bar{\kappa})$. Так что множества $\{\bar{\kappa} \in \Omega_1 : \sigma'(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_j\}$ и $\{\bar{\kappa} \in \Omega_1 : \sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_j\}$, $j' < j \leqslant m$, совпадают, и значит, если $\sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_j$ при $j' < j \leqslant m$, то $\sigma(\bar{\kappa}) = \sigma'(\bar{\kappa})$. Поэтому из условия $\sigma'(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'} \neq \sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}' + \bar{e}_{j_1}$, вытекает, что $j_1 < j'$. Кроме того, если $\bar{r} \in \Omega_1$ таково, что $\sigma'(\bar{\kappa}') = \sigma(\bar{r}) = \bar{r} + \bar{e}_{j_2}$, то $j_2 < j'$. В противном случае $\sigma(\bar{r}) = \sigma'(\bar{r})$ и поскольку σ' – биекция, имеем $\bar{\kappa}' = \bar{r}$ и $\sigma'(\bar{\kappa}') = \sigma(\bar{\kappa}')$, что противоречит выбору элемента $\bar{\kappa}' \in \Omega_1$. Воспользуемся тем, что $\bar{e}_{j'} \prec \bar{e}_{j_1}$ и $\bar{e}_{j'} \prec \bar{e}_{j_2}$:

$$\bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'} \prec \bar{\kappa}' + \bar{e}_{j_1} = \sigma(\bar{\kappa}');$$

$$\sigma^{-1}(\bar{\kappa} + \bar{e}_{j'}) = \sigma^{-1}\big(\sigma'(\bar{\kappa}')\big) = \bar{r} = \sigma'(\bar{\kappa}') - \bar{e}_{j_2} = \bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'} - \bar{e}_{j_2} \prec \bar{\kappa}',$$

а это противоречит условию 3), справедливому для пары (Ω_1, σ) при $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}'$. Полученное противоречие доказывает, что $\sigma'(\bar{\kappa}) = \sigma(\bar{\kappa})$ для всех $\bar{\kappa} \in \Omega_1$.

Пусть

$$\widetilde{\theta} = \max_{(\Omega_1,\sigma)} \{\operatorname{Card}\Omega_1\},$$

где максимум берется по всевозможным парам (Ω_1, σ), $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$, удовлетворяющим условиям 1)–3). Среди всех таких пар (Ω_1, σ), $\operatorname{Card}\Omega_1 = \widetilde{\theta}$, выберем ту, для которой величина

$$\sum_{\bar\kappa\in\Omega_1} \big(\sigma(\bar\kappa) - \bar\kappa\big)$$

минимальна (в смысле лексикографического порядка), и зафиксируем ее. Для выбранной таким образом пары (Ω_1, σ) положим $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$, $\Omega_2 = \widetilde{\Omega} \setminus \Omega_1$.

Лемма 2.6. *Справедливо следующее вложение*:

$$\bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar e_j) \subset \Theta_1.$$

(Здесь мы полагаем $\Omega_2 + \bar e_j = \{\bar\kappa + \bar e_j : \bar\kappa \in \Omega_2\}$, $j = 1, \ldots, m$.)

Доказательство. Прежде всего докажем, что $\Omega_2 \cap \Theta = \varnothing$, точнее, что если $\bar\kappa \in \widetilde{\Omega} \cap \Theta$, то $\bar\kappa \in \Omega_1$. Если это не выполнено, т.е. некоторый элемент $\bar\kappa^* \in \widetilde{\Omega} \cap \Theta$ не лежит в Ω_1, то существует пара (Ω_1^*, σ^*), где $\Omega_1^* = \Omega_1 \cup \{\bar\kappa^*\}$,

$$\sigma^*(\bar\kappa) = \begin{cases} \sigma(\bar\kappa), & \text{если } \bar\kappa \in \Omega_1; \\ \bar\kappa^*, & \text{если } \bar\kappa = \bar\kappa^*, \end{cases}$$

удовлетворяющая условиям 1)–3), но $\operatorname{Card}\Omega_1^* > \operatorname{Card}\Omega_1$. Это противоречит выбору пары (Ω_1, σ). Поэтому $\Omega_2 \cap \Theta = \varnothing$ и, значит,

$$\bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar e_j) \subset \Theta.$$

Предположим теперь существование j, $1 \leqslant j \leqslant m$, такого, что $\Omega_2 + \bar{e}_j \not\subset \Theta_1$, и среди всех таких j выберем максимальное j^*. Это означает, что для некоторого $\bar{\kappa}^* \in \Omega_2$ выполнено $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*} \notin \Theta_1$. Кроме того, $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \in \Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$ для всех j, $j^* < j \leqslant m$, т.е. для таких j, что $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \prec \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}$. Покажем, что $\sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \succ \bar{\kappa}^*$ для всех таких j.

Если это не так, то выберем максимальное j такое, что $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \prec \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}$ и $\bar{\kappa}' = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \prec \bar{\kappa}^*$. Если $\sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'}$, то

$$\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j - \bar{e}_{j'} = \bar{\kappa}' = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \prec \bar{\kappa}^*,$$

откуда $\bar{e}_j \prec \bar{e}_{j'}$. Рассмотрим пару (Ω_1^*, σ^*), где $\Omega_1^* = (\Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}) \cup \{\bar{\kappa}^*\}$ и

$$\sigma^*(\bar{\kappa}) = \begin{cases} \sigma(\bar{\kappa}), & \text{если } \bar{\kappa} \in \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\} = \Omega_1^* \setminus \{\bar{\kappa}^*\}; \\ \bar{\kappa}^* + \bar{e}_j = \sigma(\bar{\kappa}'), & \text{если } \bar{\kappa} = \bar{\kappa}^*. \end{cases}$$

Для нее, очевидно, справедливы условия 1), 2). В силу выбора j условие 3) выполнено при $\bar{\kappa}^* \in \Omega_1^*$. Поскольку $\sigma(\Omega_1) = \sigma^*(\Omega_1^*)$ и

$$(\sigma^*)^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) = \bar{\kappa}^* \succ \bar{\kappa}' = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'}),$$

то условие 3) справедливо и при любом $\bar{\kappa} \in \Omega_1^* \setminus \{\bar{\kappa}^*\} = \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}$. Итак, пара (Ω_1^*, σ^*) удовлетворяет условиям 1)–3) и

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1^*} \big(\sigma^*(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1^* \setminus \{\bar{\kappa}^*\}} \big(\sigma^*(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) + \big(\sigma^*(\bar{\kappa}^*) - \bar{\kappa}^*\big) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}} \big(\sigma(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) + \bar{e}_j \\ &\prec \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}} \big(\sigma(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) + \bar{e}_{j'} \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1} \big(\sigma(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big), \end{aligned}$$

а это противоречит выбору пары (Ω_1, σ).

Таким образом, мы получили, что $\bar{\kappa}^* \notin \Omega_1$, $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*} \notin \sigma(\Omega_1)$ и если $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \prec \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}$, то $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \in \sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \succ \bar{\kappa}^*$. Поэтому пара (Ω_1^*, σ^*), где $\Omega_1^* = \Omega_1 \cup \{\bar{\kappa}^*\}$,

$$\sigma^*(\bar{\kappa}) = \begin{cases} \sigma(\bar{\kappa}), & \text{если } \bar{\kappa} \in \Omega_1; \\ \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}, & \text{если } \bar{\kappa} = \bar{\kappa}^*, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1)–3), в то время как $\operatorname{Card} \Omega_1^* > \operatorname{Card} \Omega_1$. Это противоречит выбору пары (Ω_1, σ). Следовательно, $\Omega_2 + \bar{e}_j \subset \Theta_1$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.7. *Для произвольных множеств A, B и любого вещественного β, $0 < \beta < 1$, имеет место неравенство*

$$\operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \beta \operatorname{Card} A + (1 - \beta) \operatorname{Card} B;$$

оно превращается в равенство тогда и только тогда, когда множества A и B совпадают.

Доказательство. Если умножить первое из очевидных неравенств

$$\operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \operatorname{Card} A, \quad \operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \operatorname{Card} B, \tag{2.10}$$

на β, а второе – на $(1 - \beta)$ и сложить, то получим требуемое неравенство. Неравенства (2.10) превращаются в равенства только в случае $A \cup B = A$ и $A \cup B = B$.

Лемма 2.8. *Для натуральных чисел $m \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ пусть Ω_2 – произвольное подмножество $\{\bar{\kappa} : \kappa_1 + \dots + \kappa_m = N-1\}$ и*

$$\Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar{e}_j) \subset \{\bar{\kappa} : \kappa_1 + \dots + \kappa_m = N\}.$$

Тогда

$$\operatorname{Card} \Theta_2 \geqslant \frac{N+m-1}{N} \operatorname{Card} \Omega_2, \tag{2.11}$$

причем равенство имеет место лишь в одном из трех случаев: $m = 1$, $\Omega_2 = \varnothing$ *или* $\Omega_2 = \{\bar{\kappa} : \kappa_1 + \dots + \kappa_m = N-1\}$.

Доказательство. В случае $m = 1$ имеем очевидное равенство $\operatorname{Card} \Theta_2 = \operatorname{Card} \Omega_2$. Поэтому пусть $m \geqslant 2$ и для $m-1$ утверждение леммы доказано. Разобьем множество Ω_2 (даже если оно пустое) на непересекающиеся подмножества

$$\Omega_2^{(\nu)} = \{\bar{\kappa} \in \Omega_2 : \kappa_1 + \dots + \kappa_{m-1} = \nu\}, \quad \nu = 0, 1, \dots, N-1, \tag{2.12}$$

и положим

$$\Theta_2^{(\nu)} = \bigcup_{j=1}^{m-1} (\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, N-1. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar{e}_j) = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{\nu=0}^{N-1} (\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_j) = \bigcup_{\nu=0}^{N-1} \big(\Theta_2^{(\nu)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_m)\big)$$

$$= \big[\Omega_2^{(0)} + \bar{e}_m\big] \cup \bigcup_{\nu=1}^{N-1} \big[\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_m)\big] \cup \big[\Theta_2^{(N-1)}\big].$$

Множества в квадратных скобках не пересекаются, так как каждое из них характеризуется своей суммой первых $m-1$ координат входящих мультииндексов. Поэтому

$$\operatorname{Card}\Theta_2 = \operatorname{Card}\Omega_2^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \operatorname{Card}\bigl(\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_m)\bigr) + \operatorname{Card}\Theta_2^{(N-1)}. \tag{2.14}$$

Согласно лемме 2.7 имеем:

$$\operatorname{Card}\bigl(\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_m)\bigr) \geqslant \frac{\nu}{N}\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu-1)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.15}$$

что дает возможность переписать (2.14) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Theta_2 &\geqslant \operatorname{Card}\Omega_2^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{N-1}\left(\frac{\nu}{N}\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu-1)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}\right) \\ &\qquad + \operatorname{Card}\Theta_2^{(N-1)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1}\left(\frac{\nu+1}{N}\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Осталось воспользоваться индукционным предположением для множеств (2.12)–(2.13):

$$\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu)} \geqslant \frac{\nu+m-1}{\nu+1}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, N-1,$$

и неравенство (2.16) примет требуемый вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Theta_2 &\geqslant \sum_{\nu=0}^{N-1}\left(\frac{\nu+1}{N}\cdot\frac{\nu+m-1}{\nu+1}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}\right) \\ &= \frac{N+m-1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)} = \frac{N+m-1}{N}\operatorname{Card}\Omega_2. \end{aligned}$$

Это неравенство становится равенством, если каждое из неравенств (2.15) превращается в равенство, т.е. если

$$\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_m = \Theta_2^{(\nu-1)} = \bigcup_{j=1}^{m-1} (\Omega_2^{(\nu-1)} + \bar{e}_j), \quad \nu = 1, \ldots, N-1. \quad (2.17)$$

Если $\Omega_2^{(0)} \neq \varnothing$, т.е. $\Omega_2^{(0)} = \{(0, \ldots, 0, N-1)\}$, то индукцией по $\nu = 1, \ldots, N-1$ с помощью (2.17) легко устанавливаем равество $\Omega_2^{(\nu)} = \{\bar{\kappa} : \kappa_1 + \cdots + \kappa_{m-1} = \nu\}$. Если же $\Omega_2^{(0)} = \varnothing$, то индукцией по $\nu = 1, \ldots, N-1$ с помощью (2.17) устанавливаем, что $\Omega_2^{(\nu)} = \varnothing$. Поэтому (2.11) становится при $m \geqslant 2$ равенством только в случае, когда Ω_2, являющееся объединением множеств (2.12), либо совпадает с $\{\bar{\kappa} : \kappa_1 + \cdots + \kappa_m = N-1\}$ либо пусто.

Доказательство предложения 2.1. Выберем множество $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и отображение $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$, как это было проделано перед леммой 2.6, и положим

$$\Theta_1 = \sigma(\Omega_1), \quad \Omega_2 = \widetilde{\Omega} \setminus \Omega_1, \quad \Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar{e}_j).$$

Поскольку $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ – единственное биективное отображение множества Ω_1 во множество Θ_1, то $\det(x_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0$, откуда и из леммы 2.3 $\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0$.

Если $\Omega_2 = \varnothing$ или $\Omega_1 = \widetilde{\Omega}$, то

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \frac{\operatorname{Card} \widetilde{\Omega}}{\operatorname{Card} \Theta_1} = \frac{\operatorname{Card} \Omega_1}{\operatorname{Card} \Theta_1} = 1 < 1 + \frac{N}{N+m-1}.$$

Если же $\Omega_2 \neq \varnothing$, то $\Theta_2 \neq \varnothing$, и значит, $\operatorname{Card}\Theta_2 > 0$. В силу леммы 2.6 имеем $\Theta_2 \subset \Theta_1$, откуда $\operatorname{Card}\Theta_2 \leqslant \operatorname{Card}\Theta_1$. Согласно лемме 2.8 получаем:

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \frac{\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}}{\operatorname{Card}\Theta_1} = \frac{\operatorname{Card}\Omega_1 + \operatorname{Card}\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} = \frac{\operatorname{Card}\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} + \frac{\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1}$$
$$= 1 + \frac{\operatorname{Card}\Omega_2}{\operatorname{Card}\Theta_1} \leqslant 1 + \frac{\operatorname{Card}\Omega_2}{\operatorname{Card}\Theta_2} \leqslant 1 + \frac{N}{N+m-1},$$

причем

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = 1 + \frac{N}{N+m-1} = \frac{\omega}{\theta}$$

только в случае $\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1 = \Omega_2 = \{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| = N-1\}$, т.е. $\Omega_1 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ или $\widetilde{\Omega} = \Omega = \big\{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| \in \{N-1, N\}\big\}$.

Таким образом, если $\widetilde{\Omega} \neq \Omega$, то

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} < 1 + \frac{N}{N+m-1} = \frac{2N+m-1}{N+m-1} = \frac{\omega}{\theta}.$$

Последнее означает, что $(2N+m-1)\widetilde{\theta} - (N+m-1)\widetilde{\omega} \geqslant 1$, и поскольку $\widetilde{\theta} \leqslant \operatorname{Card}\Theta = \theta$, имеем:

$$\frac{\omega}{\theta} - \frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \frac{(2N+m-1)\widetilde{\theta} - (N+m-1)\widetilde{\omega}}{(N+m-1)\widetilde{\theta}} \geqslant \frac{1}{(N+m-1)\theta}.$$

Предложение 2.1 доказано полностью.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $a_1, \dots, a_m$ – произвольное решение системы (0.10); $y_1, \dots, y_m$ – произвольное решение системы (0.5). Тогда набор функций

$$x_{\bar\kappa} = \bar a^{\bar\kappa}(1 + a_1y_1 + \dots + a_my_m)^{N-|\bar\kappa|}, \quad \bar\kappa \in \Omega,$$

удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}x_{\bar\kappa} = -\sum_{l,j=1}^{m}\kappa_jQ_{lj}x_{\bar\kappa-\bar e_j+\bar e_l} + \bigl(N-|\bar\kappa|\bigr)\sum_{l=1}^{m}Q_{l0}x_{\bar\kappa+\bar e_l}, \quad \bar\kappa \in \Omega, \tag{3.1}$$

порядка ω. Через $\beta \in \mathbb{C}$ обозначим точку, отличную от полюсов рациональных функций Q_{lj}, $l = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$ (поскольку $Q_{lj} \in \mathbb{Q}(z)$, $l = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$, в качестве β можно взять любое трансцендентное число, например, $\beta = e$). Согласно теореме существования для дифференциальных уравнений найдется фундаментальная матрица решений $(\varphi_{lj})_{l,j=1,\dots,m}$ однородной системы (0.10) и частное решение $(\gamma_l)_{l=1,\dots,m}$ неоднородной системы (0.5) такие, что

$$\varphi_{lj}\big|_{z=\beta} = \delta_{lj}, \quad \gamma_l\big|_{z=\beta} = 1, \quad l, j = 1, \dots, m.$$

Положим, кроме того,

$$\psi_j = \sum_{l=1}^{m}\varphi_{lj}\gamma_l, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\psi_j\big|_{z=\beta} = \sum_{l=1}^{m}\varphi_{lj}\big|_{z=\beta}\cdot\gamma_l\big|_{z=\beta} = 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Лемма 3.1. *Элементы произвольной фундаментальной матрицы решений системы* (3.1) *являются многочленами от*

$$\varphi_{lj}, \ \psi_j, \quad l, j = 1, \dots, m, \tag{3.2}$$

степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$.

Доказательство достаточно провести для одной фундаментальной матрицы решений, так как любая другая выражается через нее умножением на матрицу с элементами из $\mathbb{C}$.

Общее решение $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ системы (0.10) может быть представлено в виде

$$a_l = \rho_1 \varphi_{l1} + \cdots + \rho_m \varphi_{lm}, \quad l = 1, \ldots, m,$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_m$ – произвольные числа из $\mathbb{C}$. Тогда

$$a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m = \sum_{l,j=1}^{m} \rho_j \varphi_{lj} \gamma_l = \rho_1 \psi_1 + \cdots + \rho_m \psi_m$$

и набор функций

$$\begin{aligned} \bar{a}^{\bar{\kappa}} (1 + a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m)^{N-|\bar{\kappa}|} &= \prod_{l=1}^{m} (\rho_1 \varphi_{l1} + \cdots + \rho_m \varphi_{lm})^{\kappa_l} \\ &\quad \times (1 + \rho_1\psi_1 + \cdots + \rho_m\psi_m)^{N-|\bar{\kappa}|} \\ &= \sum_{\bar{r} \in \Omega} \bar{\rho}^{\bar{r}} u_{\bar{\kappa},\bar{r}}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \end{aligned}$$

при любых значениях $\rho_1, \ldots, \rho_m$ составляет решение системы (3.1). Это означает, что для каждого $\bar{r} \in \Omega$ вектор $(u_{\bar{\kappa},\bar{r}})_{\bar{\kappa}\in\Omega}$ размерности ω удовлетворяет системе (3.1). Тем самым мы получили ω решений этой системы.

Покажем, что $\det(u_{\bar{\kappa},\bar{r}})_{\bar{\kappa},\bar{r}\in\Omega} \not\equiv 0$. Для этого посчитаем значение этого определителя в точке $z = \beta$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{r}\in\Omega} \bar{\rho}^{\bar{r}} u_{\bar{\kappa},\bar{r}}\big|_{z=\beta} &= \prod_{l=1}^{m} \big(\rho_1 \varphi_{l1}\big|_{z=\beta} + \cdots + \rho_m \varphi_{lm}\big|_{z=\beta}\big)^{\kappa_l} \\ &\quad \times \big(1 + \rho_1\psi_1\big|_{z=\beta} + \cdots + \rho_m\psi_m\big|_{z=\beta}\big)^{N-|\bar{\kappa}|} \\ &= \bar{\rho}^{\bar{\kappa}} (1 + \rho_1 + \cdots + \rho_m)^{N-|\bar{\kappa}|}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega. \end{aligned}$$

Поэтому для всех $\bar{r} \prec \bar{\kappa}$ выполнено $u_{\bar{\kappa},\bar{r}}\big|_{z=\beta} = 0$, а кроме того, имеем $u_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}}\big|_{z=\beta} = 1$, $\bar{\kappa} \in \Omega$. Таким образом, числовая матрица $(u_{\bar{\kappa},\bar{r}}\big|_{z=\beta})_{\bar{\kappa},\bar{r}\in\Omega}$ имеет треугольный вид, причем на ее диагонали стоят единицы. Следовательно, ее определитель $\det(u_{\bar{\kappa},\bar{r}})_{\bar{\kappa},\bar{r}\in\Omega}\big|_{z=\beta} = 1$. Но отсюда вытекает, что матрица $(u_{\bar{\kappa},\bar{r}})_{\bar{\kappa},\bar{r}\in\Omega}$ является фундаментальной матрицей решений системы (3.1). Ее элементы $u_{\bar{\kappa},\bar{r}}$, $\bar{\kappa},\bar{r} \in \Omega$, являются многочленами от функций (3.2) степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi_1(z),\ldots,\varphi_W(z)$ – совокупность функций, аналитических в некоторой области; функции $\lambda_0(z) \not\equiv 0, \lambda_1(z),\ldots,$ $\lambda_L(z)$ являются многочленами от $\varphi_1,\ldots,\varphi_W$ степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{C}$, причем*

$$D_l(z) = \frac{\lambda_l(z)}{\lambda_0(z)} \in \mathbb{C}(z), \quad l = 1,\ldots,L. \tag{3.3}$$

Тогда для рациональных функций (3.3) справедливо представление

$$D_l(z) = \frac{B_l(z)}{B_0(z)}, \quad l = 1,\ldots,L;$$

$$B_l \in \mathbb{C}[z], \quad \deg B_l \leqslant C_5 n, \quad l = 0,1,\ldots,L,$$

где постоянная C_5 зависит только от функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_W$.

Доказательство. Рассмотрим кольцо $\mathbb{C}(z)[\varphi_1,\ldots,\varphi_W]$ и выберем в нем максимальное количество алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ элементов $\xi_1,\ldots,\xi_w$ и обозначим буквой d степень алгебраического расширения $\mathbb{C}(z,\varphi_1,\ldots,\varphi_W) \supset \mathbb{C}(z,\xi_1,\ldots,\xi_w)$. Через $\mu_1,\ldots,\mu_d$ обозначим базис поля $\mathbb{C}(z,\varphi_1,\ldots,\varphi_W)$ над $\mathbb{C}(z,\xi_1,\ldots,\xi_w)$. Повторяя рассуждения работы [9, с. 274–275], представим функции $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_L$ в виде

$$\lambda_l = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{li}\mu_i}{a^n}, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

$$b_{li} \in \mathbb{C}[z, \xi_1, \ldots, \xi_w], \quad \deg_z b_{li} \leqslant C_5 n, \quad i = 1, \ldots, d, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

где многочлен $a \in \mathbb{C}[z, \xi_1, \ldots, \xi_w]$ и постоянная C_5 зависят только от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_W$. Тогда

$$D_l = \frac{a^n\lambda_l}{a^n\lambda_0} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{li}\mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{0i}\mu_i}, \quad l = 1, \ldots, L,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{d} \mu_i(D_l b_{0i} - b_{li}) = 0, \quad l = 1, \ldots, L,$$

или

$$D_l b_{0i} - b_{li} = 0, \quad i = 1, \ldots, d, \quad l = 1, \ldots, L,$$

ввиду линейной независимости $\mu_1, \ldots, \mu_d$ над $\mathbb{C}(z, \xi_1, \ldots, \xi_w)$. Поскольку $\lambda_0 \neq 0$, для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant d$, выполнено $b_{0i} \neq 0$. Не ограничивая общности можно считать, что $b_{01} \neq 0$. Как вытекает из последнего равенства,

$$D_l = \frac{b_{l1}}{b_{01}}, \quad l = 1, \ldots, L.$$

Многочлены b_{l1}, $l = 0, 1, \ldots, L$, являются линейными комбинациями произведений степеней $\xi_1, \ldots, \xi_w$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и, поскольку

$\xi_1, \ldots, \xi_w$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, а $D_1, \ldots, D_L \in \mathbb{C}(z)$, функции (3.3) запишутся в требуемом виде

$$D_l = \frac{B_l}{B_0}, \quad l = 1, \ldots, L,$$

где $B_l \in \mathbb{C}[z]$ – некоторые коэффициенты многочленов b_{l1}, $l = 0, 1, \ldots, L$, и значит,

$$\deg B_l \leqslant \deg_z b_{l1} \leqslant C_5 n, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

что завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. *Определитель*

$$\det\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\omega-1;\bar\kappa\in\Omega} \tag{3.4}$$

отличен от нуля.

Доказательство. Предположим, что определитель (3.4) тождественно равен нулю, и значит, ранг совокупности форм $R^{[0]}(z;\bar a)$, $R^{[1]}(z;\bar a)$, $R^{[2]}(z;\bar a), \ldots$ равен $\widetilde\omega$, где $\widetilde\omega < \omega$. Так как $R^{[0]}(z;\bar a) \not\equiv 0$, то $\widetilde\omega \geqslant 1$. По лемме 6 [20, гл. 3] функциональные формы

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z),$$
$$n = 0, 1, \ldots, \widetilde\omega - 1,$$

линейно независимы. Поэтому ранг матрицы

$$\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde\omega-1;\bar\kappa\in\Omega}$$

равен $\widetilde{\omega}$, и в ней можно выбрать $\widetilde{\omega}$ линейно независимых столбцов. Будем делать такой выбор "слева направо", т.е. столбец с номером $\bar{\kappa} \in \Omega$ выбирается в том и только том случае, когда он линейно не выражается через столбцы с номерами, меньшими $\bar{\kappa}$. Тогда базисные столбцы будут иметь номера из некоторого множества $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, причем с некоторыми рациональными функциями (2.3) будут справедливы равенства

$$P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) = \sum_{\substack{\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega} \\ \bar{\kappa} \prec \bar{\kappa}'}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z),$$

$$n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \Delta(z) = \det\bigl(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde{\omega}-1; \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}} \not\equiv 0,$$

и согласно оценке (1.6) находим, что

$$\deg \Delta < \widetilde{\omega} M + \frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega} - 1)}{2} t < \widetilde{\omega} M + \omega^2 t.$$

Для произвольного решения $a_1, \ldots, a_m$ системы (0.10) набор функций

$$x_{\bar{\kappa}} = \begin{cases} \bar{a}^{\bar{\kappa}}, & \text{если } |\bar{\kappa}| = N; \\ \bar{a}^{\bar{\kappa}}(a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m), & \text{если } |\bar{\kappa}| = N - 1, \end{cases}$$

составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (3.1) порядка ω. В доказательстве леммы 8 [20, гл. 3, с. 102–103] рациональные функции $D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}$, $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, были представлены в виде

$$D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = -\frac{\lambda_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}}{\lambda}, \quad \lambda \not\equiv 0, \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \tag{3.5}$$

где λ и $\lambda_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}$ – миноры порядка $(\omega - \widetilde{\omega})$ некоторой фундаментальной матрицы решений системы (3.1). По лемме 3.1 элементы этой фундаментальной матрицы решений есть многочлены от функций (3.2) степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Поэтому миноры λ, $\lambda_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}$, $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, порядка $(\omega - \widetilde{\omega})$ являются многочленами от функций (3.2) степени не выше $(\omega-\widetilde{\omega})N \leqslant \omega N$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Как следует из леммы 3.2, для рациональных функций (3.5) существует представление

$$\begin{gathered} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) = \frac{B_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)}{B(z)}, \quad B, B_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} \in \mathbb{C}[z], \quad B \not\equiv 0, \\ \deg B \leqslant C_5\omega N, \quad \deg B_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} \leqslant C_5\omega N, \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где постоянная C_5 зависит только от совокупности функций (3.2), которые, в свою очередь, однозначно определяются системой (0.5) (точка β не зависит ни от чего). Но из леммы 3 [20, гл. 3] следует, что система (0.5) полностью задается набором линейно независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций $1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Поэтому $C_5 = C_5(f_1, \ldots, f_m)$.

Для произвольного многочлена $v \in \mathbb{C}(z)[y_1, \ldots, y_m]$ через $v(\bar{f})$ обозначим результат подстановки в него функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ вместо переменных $y_1, \ldots, y_m$ соответственно. Тогда подобно (0.20)

$$R_{\bar{s}}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

и

$$\begin{aligned} R_{\bar s}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f) + \sum_{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa'}^{[n]}(z)x_{\bar\kappa',\bar s}(\bar f) \\ &= \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\Biggl(x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f) + \sum_{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega} D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z)x_{\bar\kappa',\bar s}(\bar f)\Biggr) \\ &= \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f), \quad n=0,1,\dots,\widetilde\omega-1, \quad \bar s\in\Theta, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где многочлены $x_{\bar\kappa,\bar s}\in\mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]$, $\bar\kappa\in\Omega$, $\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}\in\mathbb{C}(z)[y_1,\dots,y_m]$, $\bar\kappa\in\widetilde\Omega$, $\bar s\in\Theta$, определяются согласно формулам (2.2) и (2.5).

Выберем по заданному множеству $\widetilde\Omega\subset\Omega$ в соответствии с предложением 2.1 множества $\Omega_1\subset\widetilde\Omega$ и $\Theta_1\subset\Theta$, $\operatorname{Card}\Omega_1=\operatorname{Card}\Theta_1=\widetilde\theta$. Тогда определитель $\chi=\chi(z)$ матрицы

$$\bigl(B(z)\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)\mid \delta_{\bar\kappa,\bar r}\bigr)_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega;\bar s\in\Theta_1,\bar r\in\widetilde\Omega\setminus\Omega_1}, \tag{3.8}$$

с точностью до знака равный

$$B^{\widetilde\theta}\cdot\det\bigl(\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)\bigr)_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1},$$

является невырожденным многочленом от функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$ и не равен нулю тождественно ввиду их алгебраической независимости. С другой стороны, $B(z)\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)$, $\bar\kappa\in\widetilde\Omega$, $\bar s\in\Theta_1$, есть некоторые линейные формы от функций $1,f_1(z),\dots,f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и оценкой $C_5\omega N$ на степени этих коэффициентов согласно (3.6). Поэтому χ как многочлен от $z,f_1,\dots,f_m$ имеет степень не выше $\widetilde\theta\cdot C_5\omega N$ по z

и не выше $\widetilde{\theta}$ по группе $f_1, \ldots, f_m$. По теореме 1 [10] порядок нуля этого определителя в точке $z = 0$ не превосходит

$$C_6(C_5\widetilde{\theta}\omega N + 1)\widetilde{\theta}^m < 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

где $C_6 = C_6(f_1, \ldots, f_m)$.

Если умножить матрицу

$$\bigl(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde{\omega}-1;\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}},$$

определитель которой равен Δ, справа на матрицу (3.8), то согласно соотношениям (3.7) получим матрицу

$$\bigl(B(z)R_{\bar{s}}^{[n]}(z) \bigm| P_{\bar{r}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde{\omega}-1;\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}.$$

Ее определитель равен $\Delta\chi \not\equiv 0$. В первых $\widetilde{\theta}$ столбцах этой матрицы стоят линейные функциональные формы, порядок нуля которых в точке $z = 0$ в соответствии с оценками (1.7) не ниже $K - \widetilde{\omega}$. Поэтому

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta\chi \geqslant \widetilde{\theta}(K - \widetilde{\omega}) > \widetilde{\theta}K - \theta\omega.$$

С другой стороны,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta\chi = \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta + \operatorname*{ord}_{z=0} \chi \leqslant \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

откуда

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta > \widetilde{\theta}K - \theta\omega - 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

и значит,

$$0 \leqslant \deg\Delta - \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta < \widetilde{\omega}M - \widetilde{\theta}K + \omega^2 t + \theta\omega + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N. \quad (3.9)$$

Выбираем $M_* = M_*(f_1, \ldots, f_m)$ так, чтобы для всех $M > M_*$ выполнялось

$$\omega^2 t + \theta\omega + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N < \frac{\varepsilon}{\theta}M, \quad (3.10)$$

и тогда

$$K < \Big(\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} + \frac{\varepsilon}{\theta\widetilde{\theta}}\Big)M \leqslant \Big(\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} + \frac{\varepsilon}{\theta}\Big)M.$$

Осталось воспользоваться оценкой предложения 2.1:

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} \leqslant \frac{\omega}{\theta} - \frac{1}{(N+m-1)\theta} = \frac{\omega - 3\varepsilon}{\theta},$$

откуда

$$K < \frac{\omega - 2\varepsilon}{\theta}M,$$

что противоречит выбору K в условии леммы 1.1. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.4. *Справедливо равенство*

$$\Delta(z) = \det\big(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\big)_{n=0,1,\ldots,\omega-1;\bar{\kappa}\in\Omega} = z^{\operatorname{ord}_{z=0}\Delta}\Delta_0(z),$$

где $\Delta_0(z)$ – *многочлен*, $\Delta_0 \not\equiv 0$ *и* $\deg\Delta_0 < 2\varepsilon M$.

Доказательство. Согласно оценке (3.9) с $\widetilde{\omega} = \omega$ и $\widetilde{\theta} = \theta$ имеем:

$$\deg \Delta - \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta < \omega M - \theta K + \omega^2 t + \theta\omega + 2C_5 C_6 \theta^{m+1} \omega N < 2\varepsilon M,$$

что и требовалось.

Теперь мы подготовлены для перехода к числовым линейным формам.

Лемма 3.5. *Ранг числовой матрицы*

$$\left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(\alpha)\right)_{n=0,1,\ldots,\omega+[2\varepsilon M];\bar{\kappa}\in\Omega}$$

равен в точности ω.

Доказательство этого факта использует ставшие уже стандартными рассуждения Зигеля, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 10 [20, гл. 3], и опирается на результат леммы 3.4. Очевидным следствием из этой леммы является следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Ранг числовой матрицы*

$$\left(P_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha) \quad P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)\right)_{n=0,1,\ldots,\omega+[2\varepsilon M]},$$

где $\bar{s}^* = N\bar{e}_{l^*}$, $\bar{\kappa}^* = (N-1)\bar{e}_{l^*}$, *равен двум.*

Доказательство теоремы 1. Для произвольного $M > M_*$, где M_* определяется согласно неравенству (3.10), воспользуемся результатом леммы 3.6 и выберем целые числа n_1, n_2, $0 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant \omega + 2\varepsilon M < 3\varepsilon M$, такие, что числовая матрица

$$\begin{pmatrix} P_{\bar{s}^*}^{[n_1]}(\alpha) & P_{\bar{s}^*-\bar{e}_{l^*}}^{[n_1]}(\alpha) \\ P_{\bar{s}^*}^{[n_2]}(\alpha) & P_{\bar{s}^*-\bar{e}_{l^*}}^{[n_2]}(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где $\bar{s}^* = N\bar{e}_{l^*}$, $\bar{\kappa}^* = (N-1)\bar{e}_{l^*}$, невырождена. Пусть $\alpha = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{aligned} q_j &= b^{M+tn_j}(M+tn_j)!P^{[n_j]}_{\bar{s}^*-\bar{e}_{l^*}}(\alpha) \in \mathbb{Z}; \\ p_j &= -b^{M+tn_j}(M+tn_j)!P^{[n_j]}_{\bar{s}^*}(\alpha) \in \mathbb{Z}; \qquad\qquad j = 1, 2. \\ r_j &= b^{M+tn_j}(M+tn_j)!R^{[n_j]}_{\bar{s}^*}(\alpha) = q_j f_{l^*}(\alpha) - p_j, \end{aligned}$$

Поскольку $n_j < 3\varepsilon M$, можно воспользоваться оценками леммы 1.3 для целых чисел q_j и линейных форм r_j, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} |q_j| &< b^{M+tn_j}(M+tn_j)! \sum_{\nu=0}^{M+tn_j} \frac{C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2 \varepsilon M}}{\nu!} \alpha^\nu \\ &\leqslant C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{M + C_7 \varepsilon M} \leqslant M^M C_8^{M(\log M)^{m/(m+1)}}; \\ |r_j| &< b^{M+tn_j}(M+tn_j)! C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2 \varepsilon M} C_3^M M^{-K} \\ &\leqslant M^{-M + C_9 \varepsilon M + M(m-1)/(N+m-1)} C_0^{\omega M/\varepsilon} \leqslant M^{-M} C_{10}^{M(\log M)^{m/(m+1)}}, \end{aligned}$$
$$j = 1, 2. \qquad (3.12)$$

Выберем $q_* = \frac{1}{2} M_*^{M_*} C_{10}^{-M_*(\log M_*)^{m/(m+1)}}$ и пусть p, q – произвольные целые числа, $|q| \geqslant q_*$. Возьмем наименьшее целое M такое, что

$$M^{-M} C_{10}^{M(\log M)^{m/(m+1)}} \leqslant \tfrac{1}{2}|q|^{-1}, \qquad (3.13)$$

при этом выполнено $M > M_*$. Тогда

$$\begin{aligned} M^M C_8^{M(\log M)^{m/(m+1)}} &\leqslant (M-1)^{M-1}(2C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}} \\ &\leqslant 2|q|(2C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}} \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}|q|(4C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}}. \qquad (3.14) \end{aligned}$$

Из выбора (3.13) вытекает, что

$$C_{11}\log M < \log\log|q| < C_{12}\log M,$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}(4C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}} &\leqslant (M^M)^{C_{13}(\log M)^{-1/(m+1)}}\\ &\leqslant |q|^{\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}}, \quad \gamma > 0. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Оценки (3.12) согласно неравенствам (3.14), (3.15) и (3.13) соответственно перепишутся в виде:

$$|q_j| < \tfrac{1}{2}|q|^{1+\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}}, \quad |r_j| < \tfrac{1}{2}|q|^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

невырождена в виду невырожденности (3.11). Поэтому, по крайней мере, одна из линейно независимых над $\mathbb{C}$ линейных форм r_1, r_2 должна быть линейно независимой с $r = qf_{l^*}(\alpha) - p$. Пусть для определенности это будет форма r_1, т.е.

$$\lambda = \det\begin{pmatrix} q & p \\ q_1 & p_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} q & -r \\ q_1 & -r_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поскольку все входящие в левый определитель числа являются целыми, то и $\lambda \in \mathbb{Z}$, иными словами, $|\lambda| \geqslant 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}1 \leqslant |\lambda| = |rq_1 - qr_1| &\leqslant |r|\cdot|q_1| + |q|\cdot|r_1|\\ &< \tfrac{1}{2}|r|\cdot|q|^{1+\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}} + \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

откуда

$$|r| > |q|^{-1-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}},$$

что завершает доказательство теоремы 1.

§ 4. Доказательство теоремы 2 и следствий из нее

Изложенная выше конструкция существенно использует условие алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ рассматриваемых E-функций. Однако, в случае $m = 2$ удается уточнить предложение 2.1 и тем самым ослабить это условие.

Лемма 4.1. *Пусть множество* $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ *и отображение* $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$ *удовлетворяют свойствам* 1)–3), *описанным перед леммой* 2.4. *Тогда минор* $\det(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$, $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$, *матрицы* (2.4) *равен*

$$\pm \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_2}} \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2} \cdot \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \bar\kappa-\bar e_2\in\Omega_1}} \det\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} & \widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa} \\ \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Переставим в матрице $(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$ столбцы таким образом, чтобы на главной диагонали получившейся матрицы X стояли элементы $\widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)}$, $\bar\kappa \in \Omega_1$, и покажем, что матрица X имеет “почти треугольный” вид.

Прежде всего отметим, что

$$\bar s \prec \bar\kappa,\ \bar s \in \Theta,\ \bar\kappa \in \widetilde{\Omega} \implies \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s} = 0 \qquad (4.2)$$

согласно определению (2.5), так как в этом случае $\bar s \prec \bar\kappa$, $\bar s - \bar e_2 \prec \bar\kappa$ и $\bar s - \bar e_1 \prec \bar\kappa$. Пусть $\bar\kappa$ – произвольный мультииндекс из Ω_1. Рассмотрим отдельно две возможности.

а) $\underline{|\bar\kappa| = N - 1.}$ Докажем, что в этом случае в строке с номером $\bar\kappa$ матрицы X левее главной диагонали расположены нулевые элементы. Для этого в силу (4.2) достаточно показать, что из условий $\bar\kappa' \prec \bar\kappa$, $\bar\kappa' \in \Omega_1$ следует $\sigma(\bar\kappa') \prec \bar\kappa$.

Если $|\bar{\kappa}'| = N$, то $\sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa}$.

Если $|\bar{\kappa}'| = N-1$, то $\bar{\kappa}' \preccurlyeq \bar{\kappa}-\bar{e}_1+\bar{e}_2$, откуда $\sigma(\bar{\kappa}') \preccurlyeq \bar{\kappa}'+\bar{e}_1 \preccurlyeq \bar{\kappa}+\bar{e}_2$. Равенство $\sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}+\bar{e}_2$ возможно лишь в случае $\bar{\kappa}' = \bar{\kappa}-\bar{e}_1+\bar{e}_2$, и тогда $\sigma(\bar{\kappa}) \neq \sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}+\bar{e}_2$, т.е. $\sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa}+\bar{e}_1$. Из условия 3) и того, что $\bar{\kappa}+\bar{e}_2 \prec \bar{\kappa}+\bar{e}_1 = \sigma(\bar{\kappa})$ вытекает, что $\bar{\kappa}' = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}+\bar{e}_2) \succ \bar{\kappa}$, что противоречит предпосылке $\bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa}$. Следовательно, $\sigma(\bar{\kappa}') \neq \bar{\kappa}+\bar{e}_2$ и $\sigma(\bar{\kappa}') \prec \bar{\kappa}+\bar{e}_2$. Отсюда $\sigma(\bar{\kappa}') \preccurlyeq \bar{\kappa}$, и в то же время $\sigma(\bar{\kappa}') \neq \bar{\kappa}$, поскольку $|\sigma(\bar{\kappa}')| = N,\ |\bar{\kappa}| = N-1$.

Окончательно, $\sigma(\bar{\kappa}') \prec \bar{\kappa}$. Воспользовавшись утверждением (4.2), получаем:

$$\bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa},\ \bar{\kappa}' \in \Omega_1 \implies \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\sigma(\bar{\kappa}')} = 0. \tag{4.3}$$

б) $\underline{|\bar{\kappa}| = N}$. Покажем, что если $\bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa}-\bar{e}_2$, $\bar{\kappa}' \in \Omega_1$, то $\sigma(\bar{\kappa}') \prec \bar{\kappa}$. Поскольку мультииндексы $\bar{\kappa}-\bar{e}_2, \bar{\kappa}$ соседние во множестве Ω, это будет означать, что в строке с номером $\bar{\kappa}$ матрицы X левее главной диагонали стоят нулевые элементы, кроме, быть может, элемента $\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\sigma(\bar{\kappa}-\bar{e}_2)}$, предшествующего $\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\sigma(\bar{\kappa})}$, в случае $\bar{\kappa}-\bar{e}_2 \in \Omega_1$.

Если $|\bar{\kappa}'| = N$, то $\sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa}-\bar{e}_2 \prec \bar{\kappa}$.

Если $|\bar{\kappa}'| = N-1$, то $\bar{\kappa}' \preccurlyeq \bar{\kappa}-\bar{e}_1$ и $\sigma(\bar{\kappa}') \preccurlyeq \bar{\kappa}'+\bar{e}_1 \preccurlyeq \bar{\kappa}$. Равенство $\sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}$ невозможно, так как $\sigma^{-1}(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa}$. Поэтому $\sigma(\bar{\kappa}') \prec \bar{\kappa}$.

Воспользовавшись утверждением (4.2), в случае б) получаем:

$$\bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa},\ \bar{\kappa}' \in \Omega_1 \implies \begin{cases} \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\sigma(\bar{\kappa}')} = 0, & \text{если } \bar{\kappa}' \prec \bar{\kappa}-\bar{e}_2; \\ \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\sigma(\bar{\kappa}')} = \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\sigma(\bar{\kappa}-\bar{e}_2)}, & \text{если } \bar{\kappa}' = \bar{\kappa}-\bar{e}_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Если $\bar{\kappa}-\bar{e}_2 \in \Omega_1$, то $\sigma(\bar{\kappa}-\bar{e}_2) = \bar{\kappa}-\bar{e}_2+\bar{e}_1$, поскольку $\sigma(\bar{\kappa}-\bar{e}_2) \neq (\bar{\kappa}-\bar{e}_2)+\bar{e}_2 = \bar{\kappa} = \sigma(\bar{\kappa})$. С другой стороны, если $\sigma(\bar{r}) = \bar{r}+\bar{e}_1,\ \bar{r} \in \Omega_1$, то согласно условию 3) выполнено $\bar{r}+\bar{e}_2 \in \sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\bar{r}+\bar{e}_2) \succ \bar{r}$, т.е. $\sigma^{-1}(\bar{r}+\bar{e}_2) = \bar{r}+\bar{e}_2$ и $\bar{r}+\bar{e}_2 \in \Omega_1$.

Согласно утверждениям (4.4) и (4.3) вдоль главной диагонали матрицы X стоят одномерные блоки

$$(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}}), \quad \bar{\kappa} \in \Omega_1,\ \sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa},\ \bar{\kappa} - \bar{e}_2 \notin \Omega_1,$$

или

$$(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}+\bar{e}_2}), \quad \bar{\kappa} \in \Omega_1,\ \sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_2,$$

или двумерные блоки

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{\bar{\kappa}-\bar{e}_2,\bar{\kappa}-\bar{e}_2+\bar{e}_1} & \widetilde{x}_{\bar{\kappa}-\bar{e}_2,\bar{\kappa}} \\ \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}-\bar{e}_2+\bar{e}_1} & \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega_1,\ \sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa},\ \bar{\kappa} - \bar{e}_2 \in \Omega_1,$$

а в левее и ниже этих блоков расположены нули. Поэтому и с учетом того, что $\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\sigma(\bar{\kappa})} = 1$ в случае $\sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa}$ согласно формуле (2.5), определитель $\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} = \pm\det X$ равен (4.1), что и требовалось.

Доказательство теоремы 2. Функции $f_1(z), f_2(z)$ не являются многочленами, поскольку каждая из них линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ с единицей. Как целые функции, отличные от многочленов, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются трансцендентными функциями. Покажем, что для некоторого $l \in \{1, 2\}$ функции $1, f_1(z), f_2(z), f_l^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Предположим, что это не так. Тогда

$$\begin{gathered} f_l^2(z) = E_{l0}(z) + E_{l1}(z)f_1(z) + E_{l2}(z)f_2(z), \quad l = 1, 2; \\ E_{lj} \in \mathbb{C}(z), \quad l = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \end{gathered} \tag{4.5}$$

поскольку функции $1, f_1(z), f_2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Если $E_{12} \equiv 0$, то трансцендентная функция $f_1(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $y^2 - E_{11}y - E_{10} = 0$, что невозможно. Поэтому

$$f_2(z) = \frac{f_1^2(z) - E_{11}(z)f_1(z) - E_{10}(z)}{E_{12}(z)}, \quad E_{12} \not\equiv 0,$$

и после подстановки этого выражения в уравнение (4.5) при $l = 2$ заключаем, что трансцендентная функция $f_1(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$(y^2 - E_{11}y - E_{10})^2 - E_{22}E_{12}(y^2 - E_{11}y - E_{10}) - E_{21}E_{12}^2 y - E_{20}E_{12}^2 = 0,$$

что опять же невозможно. Полученное противоречие показывает, что по крайней мере одна из функций $f_l^2(z)$, $l \in \{1, 2\}$, не выражается линейно с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ через функции $1, f_1(z), f_2(z)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $l = 2$, т.е. что функции $1, f_1(z)$, $f_2(z), f_2^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Пусть множества Ω_1 и Θ_1 выбраны по заданному $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ в соответствии с предложением 2.1 и рациональные функции (2.3) представлены в виде (3.6). Обозначим через $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ такое биективное отображение, что пара (Ω_1, σ) удовлетворяет условиям 1)–3). Согласно формуле (2.5) имеем:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2} &= y_2 + D_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2}, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_2;\\
\widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} &= y_1 + D_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1} y_2\\
&\quad + D_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa,\ \bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1;\\
\widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa} &= y_2, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa,\ \bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1;\\
\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} &= D_{\bar\kappa,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1} y_2\\
&\quad + D_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa,\ \bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1,
\end{aligned}$$

откуда, если воспользоваться леммой 4.1,

$$\chi = \pm \det\bigl(B(z)\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)\bigr)_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$$
$$= \pm \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa\\ \bar\kappa-\bar e_2\notin\Omega_1}} B(z)\cdot \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_2}} \bigl\{B(z)f_2(z)+B_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2}(z)\bigr\}$$
$$\times \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \bar\kappa-\bar e_2\in\Omega_1}} B(z)\bigl\{-B_{\bar\kappa,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1}(z)f_2^2(z)+B(z)f_1(z)$$
$$+\bigl(B_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1}(z)-B_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}(z)\bigr)f_2(z)+B_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}(z)\bigr\}.$$

Поскольку $B(z)\not\equiv 0$ и функции $1, f_1(z), f_2(z), f_2^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, последнее произведение отлично от нуля. Выражения в фигурных скобках можно рассматривать как многочлены от $z, f_1(z), f_2(z)$ степени не выше $C_5\omega N$ по z и не выше 2 по группе f_1, f_2. Согласно следствию из теоремы 1 [8] порядок нуля каждого такого выражения в точке $z=0$ не выше

$$C_{14}(C_5\omega N+1)2^{3^3}\leqslant C_{15}\omega N,$$

где постоянная C_{14}, а следовательно, и C_{15}, зависит только от функций $f_1(z), f_2(z)$. Кроме того,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} B(z)\leqslant \deg B(z)\leqslant C_5\omega N\leqslant C_{15}\omega N.$$

Поэтому

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\chi\leqslant \sum_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa\\ \bar\kappa-\bar e_2\notin\Omega_1}} C_{15}\omega N+\sum_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_2}} C_{15}\omega N$$
$$+\sum_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \bar\kappa-\bar e_2\in\Omega_1}}(C_{15}\omega N+C_{15}\omega N)$$
$$=\operatorname{Card}\Omega_1\cdot C_{15}\omega N\leqslant C_{15}\omega^2 N.$$

Осталось в доказательстве леммы 3.3 выбрать $M_* = M_*(f_1, f_2)$ так, чтобы для всех $M > M_*$ выполнялось неравенство

$$\omega^2 t + \theta\omega + C_{15}\omega^2 N < \frac{\varepsilon}{\theta} M.$$

Все остальные рассуждения остаются без изменений. Это завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство следствия 1. Если функции $1, f(z), f'(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то справедливость неравенства

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}} \tag{4.6}$$

вытекает из теоремы 2. В противном случае функция $f(z)$ либо линейно зависима с единицей и, как целая функция, является многочленом, либо удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$E_1(z)y' + E_0(z)y = F(z), \quad E_1, E_0, F \in \mathbb{C}[z],$$

в котором многочлены E_1, E_0, F взаимно просты, а кроме того, E_1, E_0, $F \in \mathbb{Q}[z]$ согласно лемме 3 [20, гл. 3]. В первом случае $f(\alpha)$ является рациональным числом, поскольку $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$. Во втором случае, если $E_1(\alpha) \neq 0$, то справедливость неравенства (4.6) следует из результата (0.7) А. Б. Шидловского при $m = 1$. Если же $E_1(\alpha) = 0$, то $E_0(\alpha)f(\alpha) = F(\alpha)$, откуда $f(\alpha) = F(\alpha)/E_0(\alpha) \in \mathbb{Q}$, так как равенство $E_0(\alpha) = 0$ невозможно ввиду взаимной простоты многочленов E_1, E_0, F. Тем самым мы доказали (4.6) в случае, когда $f(\alpha)$ не является рациональным числом. Если $f(\alpha) = a/b \in \mathbb{Q}$, то для всех $p, q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant |b|$, либо $f(\alpha) = p/q$ либо

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{|bq|} \geqslant \frac{1}{|bq|} \geqslant \frac{1}{q^2},$$

откуда следует неравенство (4.6). Утверждение доказано полностью.

Доказательство следствия 2. Докажем, что при любых значениях параметров $\lambda, \mu \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ функции $1, K_{\lambda,\mu}(z), K'_{\lambda,\mu}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Предположим, что это не так, и для некоторой пары λ, μ эти функции связаны уравнением

$$P_0(z) + P_1(z)K_{\lambda,\mu}(z) + P_2(z)K'_{\lambda,\mu}(z) = 0, \quad P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}[z], \quad (4.7)$$

где $P_0(z) + P_1(z)y_1 + P_2(z)y_2 \in \mathbb{C}[z, y_1, y_2]$ – неприводимый многочлен. Заменяя в уравнении (4.7) z на $-z$ и пользуясь тем, что $K_{\lambda,\mu}(z)$ и $K'_{\lambda,\mu}(z)$ являются соответственно четной и нечетной функциями, получим

$$P_0(-z) + P_1(-z)K_{\lambda,\mu}(z) - P_2(-z)K'_{\lambda,\mu}(z) = 0.$$

Поскольку функция $K_{\lambda,\mu}(z)$ линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ с единицей, многочлен $P_0(-z)+P_1(-z)y_1-P_2(-z)y_2$ делится на многочлен $P_0(z)+P_1(z)y_1 + P_2(z)y_2$ в кольце $\mathbb{C}[z, y_1, y_2]$. Это возможно лишь в одном из двух случаев:

$$P_0(-z) \equiv P_0(z), \quad P_1(-z) \equiv P_1(z), \quad P_2(-z) \equiv -P_2(z),$$

или

$$P_0(-z) \equiv -P_0(z), \quad P_1(-z) \equiv -P_1(z), \quad P_2(-z) \equiv P_2(z).$$

Следовательно, функции $1, K_{\lambda,\mu}(z), K'_{\lambda,\mu}(z)/z$ связаны линейным уравнением с коэффициентами из $\mathbb{C}[z^2]$. В первом случае это уравнение

$$P_0(z) + P_1(z)K_{\lambda,\mu}(z) + \big(zP_2(z)\big)\frac{K'_{\lambda,\mu}(z)}{z} = 0,$$

во втором –

$$\frac{P_0(z)}{z} + \frac{P_1(z)}{z} K_{\lambda,\mu}(z) + P_2(z) \frac{K'_{\lambda,\mu}(z)}{z} = 0.$$

Поэтому функции $1, \psi(z), \psi'(z)$, где

$$K_{\lambda,\mu}(z) = \psi(z^2), \quad K'_{\lambda,\mu}(z) = 2z\psi'(z^2),$$

линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$. С другой стороны,

$$\psi(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)}, \quad b(x) = -4(x+\lambda)(x+\mu),$$

и по теореме 2 работы [3] функции $1, \psi(z), \psi'(z)$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость над $\mathbb{C}(z)$ функций $1, K_{\lambda,\mu}(z), K'_{\lambda,\mu}(z)$ при любых значениях параметров $\lambda, \mu \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$. Функция $K_{\lambda,\mu}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{2\lambda + 2\mu + 1}{z} y' + \left(1 + \frac{4\lambda\mu}{z^2}\right) y = \frac{4\lambda\mu}{z^2}.$$

Осталось воспользоваться утверждением теоремы 2.

Доказательство следствия 3. Функция $A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y'' + \left(\frac{\lambda + \mu + 1}{z} - 1\right) y' + \frac{\lambda\mu - (\beta + 1)z}{z^2} y = \frac{\lambda\mu}{z^2}$$

и представима в виде

$$A_{\lambda,\mu,\beta}(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad a(x) = x + \beta, \quad b(x) = (x+\lambda)(x+\mu).$$

Согласно теореме 2 [3] при любых значениях параметров $\lambda, \mu, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ таких, что $\beta - \lambda, \beta - \mu \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, функции $1, A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$, $A'_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и поэтому можно воспользоваться теоремой 2 настоящей работы. Если $\beta - \lambda = 0$, то функция $A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y' + \left(\frac{\mu}{z} - 1\right) y = \frac{\mu}{z}$$

и для нее можно воспользоваться результатом (0.7) при $m = 1$. Аналогично рассматривается случай $\beta - \mu = 0$. Утверждение доказано полностью.

Замечание. Если $\beta - \lambda \in \mathbb{N}$, то для некоторых $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ число $A_{\lambda,\mu,\beta}(\alpha)$ может быть рациональным. Так, например,

$$A_{\lambda,\mu,\lambda+1}(\mu - \lambda - 1) = \frac{\mu}{\lambda + 1}.$$