ГЛАВА II
Мера иррациональности значений G-функций

§ 1. Градуированные приближения Паде

Докажем прежде всего два вспомогательных утверждения: об оценке сверху высоты произведения произвольных многочленов и об оценке сверху степеней и высот многочленов $T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j, l = 1, \ldots, m$, $n \in \mathbb{N}$ (тот факт, что эти функции являются многочленами непосредственно следует из выбора многочлена $T_*(z)$ и того, что он делит $T(z)$ согласно (0.12)).

Лемма 1.1. *Пусть $w_1(z), \ldots, w_N(z)$ – произвольный набор многочленов с вещественными коэффициентами, а степень многочлена $w(z) = w_1(z) \cdots w_N(z)$ не выше n. Тогда*

$$H(w) \leqslant (n+1)^N H(w_1) \cdots H(w_N).$$

Доказательство. Если коэффициенты формальных степенных рядов

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu, \quad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu z^\nu$$

удовлетворяют условиям $|f_\nu| \leqslant F_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, то условимся обозначать $f(z) \ll F(z)$. Как следует из определения высоты многочлена,

$$w_i(z) \ll H(w_i) \sum_{\nu=0}^{\deg w_i} z^\nu \ll H(w_i)(1 + z + \cdots + z^n), \quad i = 1, \ldots, N,$$

откуда

$$w(z) \ll H(w_1)\cdots H(w_N)(1+z+\cdots+z^n)^N.$$

Поскольку высота многочлена с неотрицательными вещественными коэффициентами не превосходит сумму всех его коэффициентов, равную значению многочлена в точке $z=1$, получаем требуемое утверждение.

Лемма 1.2. *Справедливы оценки*:

$$\deg T^n S_{jl}^{[n]} \leqslant tn, \quad H(T^n S_{jl}^{[n]}) \leqslant C_1\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^n n!,$$
$$C_1 = C_1(m,t) > 0, \quad j,l = 1,\ldots,m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Воспользуемся рекуррентными соотношениями (0.14), в которых $T_*(z)$ заменено на $T(z)$. Из них непосредственно вытекает, что $\deg T^n S_{jl}^{[n]} \leqslant tn$, $j,l=1,\ldots,m$, $n\in\mathbb{N}$. Кроме того, полагая

$$H_n = \max_{1\leqslant j,l\leqslant m}\bigl\{H(T^n S_{jl}^{[n]})\bigr\}, \quad n\in\mathbb{N},$$

получаем:

$$\begin{aligned} T(z)\frac{d}{dz}\bigl(T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z)\bigr) &\ll H\sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu \cdot H_n\frac{d}{dz}\sum_{\mu=0}^{tn} z^\mu \\ &\ll H\sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu \cdot tnH_n\sum_{\mu=0}^{tn-1} z^\mu \\ &\ll (t+2)H\cdot tnH_n\sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \quad j,l=1,\ldots,m; \end{aligned}$$

$$T^n(z)S_{ji}^{[n]}(z)\cdot T(z)S_{il}(z) \ll H_n \sum_{\nu=0}^{tn} z^\nu \cdot H \sum_{\mu=0}^{t} z^\mu$$

$$\ll H_n\cdot(t+1)H\sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \quad j,i,l=1,\dots,m;$$

$$nT'(z)T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z) \ll nH\frac{d}{dz}\sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu \cdot H_n \sum_{\mu=0}^{tn} z^\mu$$

$$\ll (t+1)nH\sum_{\nu=0}^{t} z^\nu \cdot H_n \sum_{\mu=0}^{tn} z^\mu$$

$$\ll (t+1)^2 nH\cdot H_n \sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \quad j,l=1,\dots,m,$$

$$n\in\mathbb{N},$$

откуда и из рекуррентных соотношений имеем:

$$T^{n+1}(z)S_{jl}^{[n+1]}(z)$$

$$\ll \big(t(t+2)nHH_n+(t+1)mHH_n+(t+1)^2nHH_n\big)\sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu$$

$$\ll 2(t+1)^2(n+1)\Big(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(n+1)}\Big)HH_n\sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu,$$

$$j,l=1,\dots,m, \quad n\in\mathbb{N},$$

или

$$H_{n+1}\leqslant 2(t+1)^2(n+1)\Big(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(n+1)}\Big)HH_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Так как $H_1\leqslant H$, получаем:

$$H_{n+1}\leqslant 2^n(t+1)^{2n}H^{n+1}(n+1)!\prod_{i=1}^{n}\Big(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\Big),$$

$$n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку

$$1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\geqslant 1 \quad \text{при}\quad i\leqslant m(t+1)-1;$$
$$1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\leqslant 1 \quad \text{при}\quad i\geqslant m(t+1)-1,$$

для любого натурального n выполнено неравенство

$$\prod_{i=1}^{n}\Bigl(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\Bigr)$$
$$\leqslant C_1=\prod_{i=1}^{m(t+1)-1}\Bigl(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\Bigr),$$

которое и завершает доказательство леммы.

Перейдем теперь к построению систем приближающих линейных форм.

Лемма 1.3. *Пусть совокупность функций* $f_1(z),\dots,f_m(z)$ *принадлежит классу* $\mathrm{G}(C,\Phi)$. *Тогда для любых натуральных чисел* N *и* M *существуют многочлены* $P_{\bar\kappa}(z)\in\mathbb{Q}[z]$, $\bar\kappa\in\Omega$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *не все они тождественно равны нулю*;
2) $\deg P_{\bar\kappa}<M$ *для всех* $\bar\kappa\in\Omega$;
3) $P_{\bar\kappa}(z)\in\mathbb{Z}[z]$, $\bar\kappa\in\Omega\setminus\Theta$, *и для произвольного* $\varepsilon_1>0$ *при* $M>M_1(N,\varepsilon_1)$ *высота многочленов удовлетворяет неравенству*

$$H(P_{\bar\kappa})<C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M},\quad \bar\kappa\in\Omega\setminus\Theta,$$
$$C_2=(C\Phi)^{\omega(\omega-\theta)/(\varepsilon\theta)}=(C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{m-1}{N+m-1}\right)\binom{N+m-2}{m-1}};$$

4) *порядок нуля в точке* $z = 0$ *каждой из линейных функциональных форм* (0.21) *не ниже*

$$K = \left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right] = \left[\left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right].$$

Доказательство. Рассмотрим разложение в степенной ряд требуемых многочленов:

$$P_{\bar\kappa}(z) = \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar\kappa,\nu} z^\nu, \quad \bar\kappa \in \Omega,$$

Имеем:

$$\sum_{j=1}^{m} P_{\bar s-\bar e_j}(z) f_j(z) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\min\{\mu,M-1\}} P_{\bar s-\bar e_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} z^\mu, \quad \bar s \in \Theta.$$

Будем искать совокупность целых чисел $P_{\bar\kappa,\nu}$, $\bar\kappa \in \Omega\setminus\Theta$, $\nu = 0, 1, \ldots, M-1$, таких, что

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar s-\bar e_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} = 0, \quad \mu = M, M+1, \ldots, K-1, \quad \bar s \in \Theta. \quad (1.1)$$

Тогда, полагая

$$P_{\bar s,\mu} = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\mu} P_{\bar s-\bar e_j,\nu} f_{j,\mu-\nu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, M-1, \quad \bar s \in \Theta,$$

получим:

$$R_{\bar{s}}(z) = P_{\bar{s}}(z) + \sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z) = \sum_{\mu=K}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} z^{\mu},$$

$$\bar{s} \in \Theta,$$

иными словами, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geqslant K, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Возьмем последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ из определения класса $\mathrm{G}(C,\Phi)$ и умножим уравнения (1.1) на φ_K:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu}\varphi_{\bar{s}izeK} f_{j,\mu-\nu} = 0, \quad \mu = M, M+1, \ldots, K-1, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Получившиеся $\theta(K-M)$ уравнений относительно $(\omega-\theta)M$ неизвестных $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, $\nu = 0, 1, \ldots, M-1$, имеют целочисленные коэффициенты, ограниченные по модулю величиной $\gamma^2 (C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/4)K}$, где постоянная γ зависит только от $\varepsilon_1 > 0$. Согласно лемме Зигеля (см. лемму 11 [20, гл. 3]) существует нетривиальный набор многочленов $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, высота каждого из которых не превосходит

$$\bigl((\omega-\theta)M\gamma^2(C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/4)K}\bigr)^{\theta(K-M)/((\omega-\theta)M-\theta(K-M))}$$

$$\leqslant \bigl((C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/2)\omega M/\theta}\bigr)^{(\omega-\theta)/\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$ и произвольных N, $M > M_1(N, \varepsilon_1)$. Утверждение леммы доказано.

Положим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^{[n]}(z;\bar a) &= \sum_{\bar s:|\bar s|=N} \bar a^{\bar s}\mathcal{R}^{[n]}_{\bar s}(z)\\
&= \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z)\\
&= D^n\biggl(\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa}P_{\bar\kappa}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa}P_{\bar\kappa}(z)\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z)\biggr)\\
&= D^n\biggl(\sum_{\bar s:|\bar s|=N} \bar a^{\bar s}R_{\bar s}(z)\biggr), \quad n=0,1,2,\dots, \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

где $P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa\in\Omega$, и $R_{\bar s}(z)$, $\bar s\in\Theta$, – построенные в лемме 1.3 многочлены и отвечающие им линейные формы (0.21).

Лемма 1.4. *Для элементов последовательности функциональных форм* (1.2) *справедливы рекуррентные соотношения*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{[n+1]}_{\bar\kappa}(z) &= \frac{d}{dz}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z) - \sum_{l,j=1}^{m}(\kappa_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l+\bar e_j}(z)\\
&\quad+\bigl(|\bar\kappa|-N+1\bigr)\sum_{l=1}^{m}Q_{l0}(z)\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l}(z), \quad \bar\kappa\in\Omega, \quad n\geqslant 0;
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^{[n+1]}_{\bar s}(z) &= \frac{d}{dz}\mathcal{R}^{[n]}_{\bar s}(z) - \sum_{l,j=1}^{m}(s_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)\mathcal{R}^{[n]}_{\bar s-\bar e_l+\bar e_j}(z),\\
&\qquad \bar s\in\Theta, \quad n\geqslant 0.
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

Отсюда, в частности:

а) *функции*

$$
P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) = \frac{T^n(z)}{n!}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z), \quad \bar\kappa\in\Omega, \quad n=0,1,2,\dots, \qquad (1.5)
$$

являются многочленами степени не выше $M + tn - 1$;

б) *порядок нуля в точке* $z = 0$ *функциональных линейных форм*

$$R_{\bar{s}}^{[n]}(z) = \frac{T^n(z)}{n!}\mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n]}(z), \quad \bar{s} \in \Theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.6}$$

не ниже $K - n$.

Доказательство. Требуемые рекуррентные формулы (1.3), (1.4) вытекают из соотношения

$$\mathcal{R}^{[n+1]}(z; \bar{a}) = D\mathcal{R}^{[n]}(z; \bar{a}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и определения (0.22) оператора D.

а) Из рекуррентных соотношений (1.3) и поскольку

$$T^{n+1}(z)\frac{d}{dz}\mathcal{P}(z) = T(z)\frac{d}{dz}\big(T^n(z)\mathcal{P}(z)\big) - nT'(z)T^n(z)\mathcal{P}(z),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

для любой функции $\mathcal{P}(z)$, имеем:

$$T^{n+1}(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n+1]}(z) = T(z)\frac{d}{dz}\big(T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\big) - nT'(z)T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)$$
$$- \sum_{l,j=1}^{m}(\kappa_j - \delta_{lj} + 1)T(z)Q_{lj}(z) \cdot T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}-\bar{e}_l+\bar{e}_j}^{[n]}(z)$$
$$+ \big(|\bar{\kappa}| - N + 1\big)\sum_{l=1}^{m}T(z)Q_{l0}(z) \cdot T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}-\bar{e}_l}^{[n]}(z),$$
$$\bar{\kappa} \in \Omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

При $n = 0$ функции $\mathcal{P}^{[0]}_{\bar\kappa}(z) = P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa \in \Omega$, являются многочленами степени не выше $M-1$ согласно лемме 1.3. Простой индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ убеждаемся, что функции (1.5) также являются многочленами и имеют степень не выше $M + tn - 1$. Отсюда следует утверждение пункта а).

б) Из рекуррентных соотношений (1.4) и ввиду того, что функции $\mathcal{R}^{[0]}_{\bar s}(z) = R_{\bar s}(z)$, $\bar s \in \Theta$, имеют в точке $z = 0$ порядок нуля не ниже K, индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ заключаем, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \mathcal{R}^{[n]}_{\bar s}(z) \geqslant K - n, \quad \bar s \in \Theta.$$

Отсюда следует оценка снизу порядка нуля линейных форм (1.6).

В дальнейшем будем пользоваться символами $\bar\kappa^*$ и $\bar s^*$ для обозначения мультииндексов $(N-1)\bar e_{l^*}$ и $N\bar e_{l^*}$ соответственно. Через ψ'_n обозначим наименьший общий знаменатель коэффициентов многочлена $P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Лемма 1.5. *Пусть $\varepsilon_1 > 0$ выбрано в соответствии с пунктом 3) леммы 1.3. Тогда для натуральных чисел ψ'_n, многочленов $P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(z)$ и форм $R^{[n]}_{\bar s^*}(z)$ при $M > M_2(N, \varepsilon_1) \geqslant M_1(N, \varepsilon_1)$, $n < (K - M)/(t+1)$ и $|\alpha| < 1/(2C)$ справедливы оценки*

$$\psi'_n \leqslant C_3 \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)n(1+\log N)},$$

$$\bigl|P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)\bigr| \leqslant C_4 \binom{M}{n} \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M},$$

$$\bigl|R^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)\bigr| \leqslant C_5 \binom{M}{n} \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M} \bigl(C|\alpha|\bigr)^{K-n},$$

$$C_3 = C_3(N, \varepsilon_1) > 0, \quad C_4 = C_4(N) > 0, \quad C_5 = C_5(N) > 0.$$

Кроме того, если выполнено неравенство $n < (K - M)/(t+1)$, то многочлен $\varphi_{M+tn} \psi'_n P^{[n]}_{\bar s^*}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Доказательство. Из соотношений (1.2), (1.3) и свойства (0.23) следует, что

$$\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) = \frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \left(\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому многочлен $P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z)$ является коэффициентом при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в функциональной форме

$$\frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \left(\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \right).$$

Для его нахождения определим сначала коэффициент при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в выражении $D^n(\bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z))$ для каждого $\bar{\kappa}$, $|\bar{\kappa}| = N-1$.

Пусть элемент $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$ фиксирован. Рассмотрим произвольное решение $a_1(z), \ldots, a_m(z)$ системы (0.10). Для него выполнено

$$D^n \big(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z) \big) = \frac{d^n}{dz^n} \big(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z) \big).$$

Положим

$$\begin{aligned} b_1(z) = \cdots = b_{\kappa_1}(z) &= a_1(z); \\ b_{\kappa_1+1}(z) = \cdots = b_{\kappa_1+\kappa_2}(z) &= a_2(z); \\ \ldots\ldots\ldots&; \\ b_{\kappa_1+\cdots+\kappa_{m-1}+1}(z) = \cdots = b_{N-1}(z) &= a_m(z); \\ b_N(z) &= P_{\bar{\kappa}}(z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}\big(\bar{a}^{\bar\kappa}(z)P_{\bar\kappa}(z)\big) &= \frac{d^n}{dz^n}\big(b_1(z)\cdots b_N(z)\big)\\ &= \sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant 0\\ n_1+\dots+n_N=n}} \frac{n!}{n_1!\cdots n_N!} b_1^{(n_1)}(z)\cdots b_N^{(n_N)}(z).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Если $b_i(z)=a_j(z)$ для некоторого j, $1\leqslant j\leqslant m$, то

$$b_i^{(n_i)}(z)=\sum_{l=1}^{m} S_{jl}^{[n_i]}(z)a_l(z)$$

согласно уравнениям (0.11). Поэтому вклад каждого такого множителя из (1.7) в коэффициент при $\bar{a}^{\bar\kappa^*}(z)$, где $\bar\kappa^*=(N-1)\bar{e}_{l^*}$, будет в точности равен $S_{jl^*}^{[n_i]}(z)$, и, следовательно, этот коэффициент будет равен

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant 0\\ n_1+\dots+n_N=n}} \frac{n!}{n_1!\cdots n_N!} S_{1l^*}^{[n_1]}(z)\cdots S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z)\cdots S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z)\cdots\\ \times S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z)\cdots S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z)P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z)=\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1}\ \sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant 0\\ n_1+\dots+n_N=n}} w(\bar\kappa;n_1,\dots,n_N), \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned}w(\bar\kappa;n_1,\dots,n_N) &= \frac{T^{n_1}(z)S_{1l^*}^{[n_1]}(z)}{n_1!}\cdots\frac{T^{n_{\kappa_1}}(z)S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z)}{n_{\kappa_1}!}\\ &\times\frac{T^{n_{\kappa_1+1}}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+1}!}\cdots\frac{T^{n_{\kappa_1+\kappa_2}}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z)}{n_{\kappa_1+\kappa_2}!}\cdots\\ \times\frac{T^{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}}(z)S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}!}&\cdots\frac{T^{n_{N-1}}(z)S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z)}{n_{N-1}!}\\ &\times T^{n_N}(z)\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!}.\end{aligned}$$

Упорядочим числа $n_1, n_2, \ldots, n_N$ в порядке убывания: $n_{i_1} \geqslant n_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant n_{i_N}$. Тогда, поскольку $n_1 + n_2 + \cdots + n_N = n$, выполнены неравенства

$$n_{i_1} \leqslant n,\ n_{i_2} \leqslant \left[\tfrac{n}{2}\right],\ \ldots,\ n_{i_N} \leqslant \left[\tfrac{n}{N}\right].$$

Следовательно,

$$H\left(\frac{T^{n_{i_j}}(z) S_{.l^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!}\right) \leqslant C_1\bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n/j}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad i_j \neq N,$$

согласно лемме 1.2 и

$$H\bigl(T^{n_{i_j}}(z)\bigr) \leqslant \bigl((t+2)H\bigr)^{n_{i_j}} \leqslant C_1\bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n/j}, \quad i_j = N.$$

Кроме того, для последовательности $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из определения 2 ввиду (0.12) выполнено

$$\psi_{[n/j]} \frac{T^{n_{i_j}}(z) S_{.l^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!} \in \mathbb{Z}[z], \quad j = 1, \ldots, N, \quad i_j \neq N.$$

Поэтому и с учетом того, что

$$H\left(\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!}\right) \leqslant \binom{M}{n_N} H(P_{\bar\kappa}) \leqslant \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M},$$

$$\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!} \in \mathbb{Z}[z], \quad T^{n_N}(z) \in \mathbb{Z}[z],$$

$$n_N \leqslant n < M/2, \quad M > M_1(N, \varepsilon_1),$$

получаем:

$$\prod_{j=1}^{N} \psi_{[n/j]} \cdot w(\bar\kappa; n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}[z],$$

$$\bar\kappa \in \Omega \setminus \Theta, \quad n_1, \dots, n_N \geqslant 0, \quad n_1 + \dots + n_N = n < M/2,$$

и согласно леммам 1.2 и 1.1

$$\begin{aligned} \deg w(\bar\kappa; n_1, \dots, n_N) &\leqslant t(n_1 + \dots + n_{N-1}) \\ &\qquad + (t+1)n_N + (M + tn_N - 1) \\ &\leqslant M + (2t+1)n - 1, \\ H\bigl(w(\bar\kappa; n_1, \dots, n_N)\bigr) &\leqslant \bigl(M + (2t+1)n\bigr)^{N+1} \cdot C_1^N \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{ng_N} \\ &\qquad \times \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \end{aligned}$$

$$\bar\kappa \in \Omega \setminus \Theta, \quad n_1, \dots, n_N \geqslant 0, \quad n_1 + \dots + n_N = n < M/2,$$

где

$$g_N = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \tfrac{1}{N} \leqslant 1 + \log N.$$

Пользуясь представлением (1.8), находим, что для заданного $\varepsilon_1 > 0$

$$\psi'_n \leqslant \prod_{j=1}^{N} \psi_{[n/j]} \leqslant (\gamma')^N \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)ng_N} \leqslant C_3 \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)n(1+\log N)},$$

$$n < M/2,$$

с некоторой постоянной C_3, зависящей только от N и ε_1,

$$
\begin{aligned}
H(P_{\bar\kappa^*}^{[n]}) &\leqslant \binom{N+m-2}{N-1}\binom{n+N-1}{n}\cdot\bigl(M+(2t+1)n\bigr)^{N+1} \\
&\qquad\times C_1^N\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{ng_N}\cdot\binom{M}{n}C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M} \\
&\leqslant C_6(3M)^{2N}\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{n(1+\log N)}\cdot\binom{M}{n}C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \\
&\qquad\qquad C_6=C_6(N)>0,\quad n<M/2,
\end{aligned}
$$

и для $|\alpha|<1$, $M>M_2'(N,\varepsilon_1)$ выполнено

$$
\begin{aligned}
\bigl|P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(\alpha)\bigr| &\leqslant (M+tn)H(P_{\bar\kappa^*}^{[n]}) \\
&\leqslant C_4\binom{M}{n}\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{n(1+\log N)}C_2^{(1+\varepsilon_1)M},\quad n<M/2,
\end{aligned}
$$

с некоторой положительной постоянной $C_4=C_4(N)$.

Если положить

$$
P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z)=\sum_{\nu=0}^{M+tn-1}P_{\bar\kappa^*,\nu}^{[n]}z^\nu,\quad n\in\mathbb{Z}^+,
$$

то

$$
R_{\bar s^*}^{[n]}(z)-P_{\bar s^*}^{[n]}(z)=P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z)f_{l^*}(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\min\{\mu,M+tn-1\}}P_{\bar\kappa^*,\nu}^{[n]}f_{l^*,\mu-\nu}z^\mu,
$$

$$
n\in\mathbb{Z}^+.
$$

Поскольку

$$\deg P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) \leqslant M + tn - 1 < K - n \leqslant \operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z), \quad n < \frac{K-M}{t+1},$$

имеем:

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) &= \sum_{\mu=K-n}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{M+tn-1} P_{\bar{\kappa}^*,\nu}^{[n]} f_{l^*,\mu-\nu} z^\mu; \\ P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) &= -\sum_{\mu=0}^{M+tn-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} P_{\bar{\kappa}^*,\nu}^{[n]} f_{l^*,\mu-\nu} z^\mu, \end{aligned} \qquad n < \frac{K-M}{t+1}.$$

Отсюда для $M > M_2''(N, \varepsilon_1)$, $|\alpha| < 1/(2C)$ получаем:

$$\begin{aligned} |R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leqslant (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) \sum_{\mu=K-n}^{\infty} C^{(1+\varepsilon_1/8)\mu} |\alpha|^\mu \\ &\leqslant (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) C^{\varepsilon_1 (K-n)/8} \big(C|\alpha|\big)^{K-n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{C^{1+\varepsilon_1/8}}{2C}\right)^\mu \\ &\leqslant (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) C^{\varepsilon_1 M/4} \big(C|\alpha|\big)^{K-n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \big(\tfrac{2}{3}\big)^\mu \\ &\leqslant C_5 \binom{M}{n} \big(2(t+1)^2 H\big)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M} \big(C|\alpha|\big)^{K-n}, \\ &\qquad\qquad n < \frac{K-M}{t+1}, \end{aligned}$$

и

$$\varphi_{M+tn} \psi_n' P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) = -\sum_{\mu=0}^{M+tn-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} \psi_n' P_{\bar{\kappa}^*,\nu}^{[n]} \cdot \varphi_{M+tn} f_{l^*,\mu-\nu} z^\mu \in \mathbb{Z}[z].$$

Осталось положить $M_2(N, \varepsilon_1) = \max\{M_2'(N, \varepsilon_1), M_2''(N, \varepsilon_1)\}$.

Лемма доказана полностью.

§ 2. Переход к числовым линейным формам

Лемма 2.1. *При $M > M_3(N)$ функциональный определитель*

$$\det\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\omega-1;\bar\kappa\in\Omega} \tag{2.1}$$

отличен от нуля.

Доказательство этого факта повторяет общую схему доказательства леммы 3.3 главы I, однако, значительно проще последнего.

Предположим, что определитель (2.1) равен нулю тождественно, т.е. ранг совокупности форм $R^{[0]}(z;\bar a), R^{[1]}(z;\bar a), R^{[2]}(z;\bar a), \dots$ равен $\widetilde\omega$, $1 \leqslant \widetilde\omega < \omega$. Согласно лемме 6 [20, гл. 3] это означает линейную независимость функциональных форм

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z),$$
$$n = 0,1,\dots,\widetilde\omega-1,$$

Таким образом, в матрице

$$\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde\omega-1;\bar\kappa\in\Omega}$$

(ранга $\widetilde\omega$) можно выбрать $\widetilde\omega$ линейно независимых столбцов. Если делать такой выбор последовательно двигаясь “слева направо” (в лексикографическом порядке) по столбцам с номерами $\bar\kappa \in \Omega$, то базисные столбцы будут иметь номера из некоторого множества $\widetilde\Omega \subset \Omega$, причем с некоторыми рациональными функциями

$$\begin{aligned} &D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \in \mathbb{C}(z), \\ &D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \equiv 0, \quad \bar\kappa' \prec \bar\kappa, \end{aligned} \qquad \bar\kappa \in \widetilde\Omega, \quad \bar\kappa' \in \Omega \setminus \widetilde\Omega, \tag{2.2}$$

выполняются равенства

$$P^{[n]}_{\bar\kappa'}(z) = \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) = \sum_{\substack{\bar\kappa\in\widetilde\Omega\\ \bar\kappa\prec\bar\kappa'}} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z),$$

$$n = 0,1,\ldots,\widetilde\omega-1, \quad \bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega.$$

Таким образом,

$$\Delta = \Delta(z) = \det\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde\omega-1;\bar\kappa\in\widetilde\Omega} \not\equiv 0,$$

и согласно лемме 1.4а) находим, что

$$\deg\Delta < \widetilde\omega M + \frac{\widetilde\omega(\widetilde\omega-1)}{2}t. \tag{2.3}$$

Как уже отмечалось в главе I, рациональные функции $D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}$, $\bar\kappa\in\widetilde\Omega$, $\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega$, могут быть представлены в виде

$$D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} = -\frac{\lambda_{\bar\kappa,\bar\kappa'}}{\lambda}, \quad \lambda\not\equiv 0, \quad \bar\kappa\in\widetilde\Omega, \quad \bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega, \tag{2.4}$$

где λ и $\lambda_{\bar\kappa,\bar\kappa'}$ – миноры порядка $(\omega-\widetilde\omega)$ некоторой фундаментальной матрицы решений системы

$$\frac{d}{dz}x_{\bar\kappa} = -\sum_{l,j=1}^{m}\kappa_j Q_{lj}(z)x_{\bar\kappa-\bar e_j+\bar e_l} + \bigl(N-|\bar\kappa|\bigr)\sum_{l=1}^{m}Q_{l0}(z)x_{\bar\kappa+\bar e_l}, \quad \bar\kappa\in\Omega, \tag{2.5}$$

порядка ω. В доказательстве леммы 8 [20, гл. 3, с. 102–103] было показано, что сумма степеней числителя каждой рациональной функции (2.4) и их общего знаменателя не превосходит некоторой постоянной C_7, зависящей только от системы линейных дифференциальных уравнений (2.5), которая, в свою очередь, однозначно определяется системой (0.5) и числом N. Но ввиду линейной независимости функций $1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над $\mathbb{C}(z)$ по лемме 3 [20, гл. 3] система (0.5) определена функциями $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ однозначно. Поэтому $C_7 = C_7(f_1, \ldots, f_m; N)$.

Сравнивая коэффициенты при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s} \in \Theta$, в (1.2), согласно (1.5) и (1.6) получаем:

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) &= P_{\bar{s}}^{[n]}(z) + \sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}^{[n]}(z) f_j(z) \\ &= \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta, \end{aligned}$$

где функции $x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, $\bar{s} \in \Theta$, определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} &x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) = \delta_{\bar{\kappa},\bar{s}}, && \text{если } |\bar{\kappa}| = N; \\ &x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) = \sum_{j=1}^{m} \delta_{\bar{\kappa}+\bar{e}_j,\bar{s}} f_j(z), && \text{если } |\bar{\kappa}| = N-1, \end{aligned}\right\} \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}) \\ &= \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \Bigg(x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}) \Bigg) \\ &= \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta, \qquad (2.6) \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) = x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}), \quad \bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}, \quad \bar{s}\in\Theta.$$

Согласно предложению 2.1 (и лемме 4.1 в случае $m = 2$) главы I для множества $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ найдутся множества $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$ и $\Theta_1\subset\Theta$, для которых

$$\det\bigl(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0, \tag{2.7}$$

и величина $\widetilde{\theta} = \operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} \leqslant \frac{\omega - \frac{1}{N+m-1}}{\theta} \leqslant \frac{\omega - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta}.$$

Обозначая через $D(z)$ наименьший общий знаменатель рациональных функций (2.2), получаем, что определитель $\chi = \chi\bigl(z, f_1(z),\dots,f_m(z)\bigr)$ матрицы

$$\bigl(D(z)\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) \mid \delta_{\bar{\kappa},\bar{r}}\bigr)_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega};\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}, \tag{2.8}$$

с точностью до знака равный произведению $D^{\widetilde{\theta}}(z)$ и (2.7), есть отличный от нуля многочлен от функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$. В то же время

$$\deg D(z) < C_7, \quad \deg\bigl(D(z)\cdot D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)\bigr) < C_7, \quad \bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega},$$

и функции $D(z)\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})$, $\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}$, $\bar{s}\in\Theta_1$, являются линейными формами от $1, f_1(z),\dots,f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и оценкой C_7 на степени этих коэффициентов. Поэтому степень χ как многочлена от z

не выше $\widetilde{\theta}C_7$ и по лемме 4 [20, гл. 3] порядок нуля $\chi(z)$ как линейной формы от всевозможных мономов $f_1^{\nu_1}(z)\cdots f_m^{\nu_m}(z)$ степени не выше $\widetilde{\theta}$ в точке $z=0$ ограничен сверху некоторой положительной постоянной $C_8 = C_8(f_1,\ldots,f_m;\widetilde{\theta};\widetilde{\theta}C_7) = C_8(f_1,\ldots,f_m;N)$.

Умножим теперь матрицу

$$\bigl(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde{\omega}-1;\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}},$$

определитель которой равен Δ, справа на матрицу (2.8) и согласно соотношениям (2.6) получим матрицу

$$\bigl(D(z)R_{\bar{s}}^{[n]}(z)\;\big|\;P_{\bar{r}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde{\omega}-1;\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}.$$

Ее определитель равен $\Delta\chi\not\equiv 0$. В первых $\widetilde{\theta}$ столбцах этой матрицы стоят функции, порядок нуля которых в точке $z=0$ не ниже $K-\widetilde{\omega}$ по лемме 1.4б). Таким образом,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi \geqslant \widetilde{\theta}(K-\widetilde{\omega}).$$

С другой стороны,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi = \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta + \operatorname*{ord}_{z=0}\chi \leqslant \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta + C_8,$$

и значит,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta > \widetilde{\theta}(K-\widetilde{\omega}) - C_8. \tag{2.9}$$

Отсюда и согласно (2.3) имеем:

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \deg\Delta - \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta &< \widetilde{\omega}M - \widetilde{\theta}K + \frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}-1)}{2}t + \widetilde{\theta}\widetilde{\omega} + C_8\\
&\leqslant \widetilde{\omega}M - \widetilde{\theta}\frac{\omega-\varepsilon}{\theta}M + C_9\\
&\leqslant \widetilde{\theta}\frac{\omega-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta}M - \widetilde{\theta}\frac{\omega-\varepsilon}{\theta}M + C_9\\
&= -\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}\cdot\frac{\varepsilon}{N+m-1}M + C_9\\
&\leqslant -\frac{\varepsilon}{\theta(N+m-1)}M + C_9,\\
&\qquad C_9 = C_9(f_1,\ldots,f_m;N). \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Поскольку величины ε и $N+m-1$ положительны, для всех $M > M_3(\varepsilon,N) = M_3(N)$ неравенство (2.10) становится противоречивым. Следовательно, при этих значениях M предположение о том, что определитель (2.1) равен нулю, неверно. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 2.2. *При $M > M_3(N)$ справедливо равенство*

$$
\Delta(z) = \det\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\omega-1;\bar\kappa\in\Omega} = z^{\operatorname{ord}_{z=0}\Delta}\Delta_0(z),
$$

где $\Delta_0(z)$ – многочлен, $\Delta_0 \not\equiv 0$ и $\deg\Delta_0 < \varepsilon M + C_{10}$, где положительная постоянная C_{10} зависит только от N.

Доказательство. Воспользуемся неравенствами (2.3) и (2.9) с $\widetilde{\omega} = \omega$, $\widetilde{\theta} = \theta$:

$$
\deg\Delta_0 = \deg\Delta - \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta < \omega M + \frac{\omega(\omega-1)}{2}t - \theta(K-\omega) + C_8 \leqslant \varepsilon M + C_{10},
$$

что и требовалось.

Следующие два утверждения (второе является непосредственным следствием первого) реализуют переход от построенных градуированных приближений Паде к приближающим числовым линейным формам. Доказательство первой леммы осуществляется с помощью ставших уже стандартными рассуждений Зигеля, и поэтому опускается (см., например, доказательство леммы 10 [20, гл. 3]).

Лемма 2.3. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(\alpha)\bigr)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10};\bar\kappa\in\Omega}$$

равен в точности ω.

Лемма 2.4. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\bigl(P_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha) \quad P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(\alpha)\bigr)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10}},$$

где, как и раньше, $\bar s^* = N\bar e_{l^*}$, $\bar\kappa^* = (N-1)\bar e_{l^*}$, равен двум.

Доказательство теоремы 3. Выберем по заданным $\eta > \eta_0$ и $\varepsilon > 0$ число $\varepsilon_1(\eta,\varepsilon,\alpha) > 0$ таким образом, чтобы для постоянной

$$C_{11} = b^{(t+1)\varepsilon_1}\bigl(C|\alpha|\bigr)^{-\varepsilon\varepsilon_1}C_0^{1+\varepsilon_1}$$

выполнялось неравенство

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{\eta+\eta_0}{2}\\ &> \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}{(1-(m+t+1)\varepsilon)\log b - \log C_{11} - (2-(m+1)\varepsilon)\log(C|a|)}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Положим

$$\begin{aligned}M_* &= M_*(N,\varepsilon_1,\alpha)\\ &= \max\Big\{M_2(N,\varepsilon_1), M_3(N), \frac{\log(C_3C_4C_5)}{\varepsilon_1\log b}, \frac{(2+\varepsilon_1)(C_{10}+\omega)}{\varepsilon\varepsilon_1}\Big\}.\end{aligned}$$

Тогда при любых натуральных $M > M_*$ справедливы утверждения лемм 1.5, 2.4 и неравенства

$$C_3C_4C_5 \leqslant b^{\varepsilon_1 M},$$
$$\varepsilon M + C_{10} + \omega < \big(1+\tfrac{\varepsilon_1}{2}\big)(\varepsilon M + C_{10}+\omega) \leqslant (1+\varepsilon_1)\varepsilon M.$$

Кроме того, при всех $M > M_*$ и $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\binom{M}{n} &= \frac{(M-n+1)\cdots(M-1)M}{n!} < \frac{M^n}{(n/e)^n} \leqslant \Big(\frac{e}{\varepsilon}\Big)^{\varepsilon M + C_{10}+\omega}\\ &\leqslant \exp\big\{(1-\log\varepsilon)(1+\varepsilon_1)\varepsilon M\big\};\\ K-n &\geqslant \Big(\frac{\omega-\varepsilon}{\theta} - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\Big)M = \Big(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta} - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\Big)M\\ &\geqslant \Big(2 - \frac{m-1}{\frac{1}{\varepsilon}-1} - \varepsilon\big(1+\tfrac{1}{m}\big) - \varepsilon\varepsilon_1\Big)M \geqslant \big(2-(m+1)\varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\big)M.\end{aligned}$$

Поэтому для заданной $C_{11} > C_0$ и всех $M > M_*$ при $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ согласно лемме 1.5 справедливы оценки:

$$\begin{aligned}\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)| &\leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}(C|\alpha|)^{\varepsilon\varepsilon_1}C_{11}\big)^M \leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}C_{11}\big)^M,\\ \varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)| &\leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}(C|\alpha|)^{\varepsilon\varepsilon_1}C_{11}\big)^M\big(C|\alpha|\big)^{K-n}\\ &\leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}C_{11}(C|a/b|)^{2-(m+1)\varepsilon}\big)^M. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Возьмем теперь

$$q_* = \max\biggl\{\frac{1}{2}\exp\biggl\{\frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}{\eta_1}M_*\biggr\},$$
$$\exp\biggl\{\frac{(\eta_1+1)\log 2 + (1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}{\eta-\eta_1}\biggr\}\biggr\}.$$

Тогда, полагая для произвольной числовой линейной формы $r = qf_{l^*}(\alpha) - p$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*$,

$$M = \left[\frac{\eta_1 \log(2q)}{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}\right] + 1, \tag{2.13}$$

получим, что $M > M_*$. Кроме того, при $q > q_*$ выполняется неравенство

$$M \cdot \bigl((1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}\bigr) \leqslant \eta_1 \log(2q) + (1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}$$
$$< \eta \log q - \log 2. \tag{2.14}$$

Согласно лемме 2.4 для $M > M_*$ существует $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ такое, что

$$qP^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha) + pP^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha) \neq 0.$$

Тогда

$$P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha) r = -\bigl(qP^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha) + pP^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)\bigr) + q\bigl(P^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha) + P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha) f_{l^*}(\alpha)\bigr)$$

и поскольку

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}\bigl(qP^{[n]}_{\bar{s}^*}(a/b) + pP^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(a/b)\bigr)$$

является целым числом, отличным от нуля,

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)|\cdot|r| \geqslant 1-\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)|\cdot q.$$

Согласно оценкам (2.12) и выбору (2.11), (2.13) имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)| &\leqslant \exp\Big\{M\cdot\Big(-\big(1-(m+t+1)\varepsilon\big)\log b \\ &\qquad + \log C_{11} + \big(2-(m+1)\varepsilon\big)\log\big(C|a|\big)\Big)\Big\} \\ &\leqslant \exp\Big\{-\frac{\eta_1\log(2q)}{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}} \\ &\qquad \times\frac{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}{\eta_1}\Big\} \\ &= \tfrac{1}{2}q^{-1},\end{aligned}$$

откуда

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)|\cdot|r| \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

С помощью оценок (2.12), выбора (2.13) и неравенства (2.14) получаем:

$$|r| \geqslant \tfrac{1}{2}\exp\Big\{-M\cdot\big((1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}\big)\Big\} > q^{-\eta}.$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы 3.

§ 3. Рациональные приближения обобщенных полилогарифмов

Рассматриваются функции

$$f_l(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^l},\quad l=1,\dots,m,\quad \lambda\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}, \qquad (3.1)$$

(обобщенные полилогарифмы).

Лемма 3.1. *Функции (3.1) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Доказательство этого утверждения проводится с помощью так называемого “арифметического” метода (см. [20, гл. 8]). Пусть $\lambda = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ – взаимно простые числа. Обозначим через t произвольное натуральное число. По теореме Дирихле в арифметической прогрессии $\{a + b\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ содержится бесконечное множество простых чисел. Поэтому можно выбрать натуральное $\mu > \max\{t, -2a/b\}$ такое, что число $a + b\mu$ является простым. Тогда точные знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\mu+\lambda)^l} = \frac{b^\mu}{(a+b\mu)^l}, \quad l = 1, \ldots, m,$$

содержат простое число $a + b\mu$ в степенях l, $l = 1, \ldots, m$, соответственно, и в то же время знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\nu+\lambda)^l} = \frac{b^\nu}{(a+b\nu)^l}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1, \quad l = 1, \ldots, m,$$

не делятся на число $a + b\mu$ в силу его простоты и поскольку $a + b\mu > |a + b\nu|$ для всех $\nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1$. Полагая в лемме 1 [20, гл. 8] $u = 0$, $\varphi_0(z) = z$, $v = m$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, получаем, что функции $z, f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Для взаимно простых $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$ через D_n обозначим наименьшее общее кратное чисел*

$$a + b\mu, \quad \mu = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \rho(b),$$

где функция $\rho(b)$ определяется равенством (0.17).

Доказательство этого факта мы заимствуем из работы [24] (см. доказательство теоремы 7.1). Не ограничивая общности, считаем $a > 0$, поскольку утверждение леммы можно доказывать с заменой a на $a + b\nu > 0$ для некоторого фиксированного $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и разложение D_n на простые множители имеет вид

$$D_n = \prod p^{\tau_p},$$

где, очевидно, с некоторым μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$, выполнено

$$\tau_p \leqslant \frac{\log(a + b\mu)}{\log p} \leqslant \frac{\log(a + bn)}{\log p}.$$

Поэтому

$$D_n \leqslant \prod p^{\log(a+bn)/\log p} \leqslant (a + bn)^{N_n},$$

где N_n есть количество простых чисел p, делящих $a + b\mu$ для некоторого μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$. Следовательно,

$$N_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant b} N_{n,j} = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant b \\ (j,b)=1}} N_{n,j} + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant b \\ (j,b)>1}} N_{n,j}, \tag{3.2}$$

где $N_{n,j}$ есть количество простых чисел p, удовлетворяющих сравнению $p \equiv j \mod b$ и делящих $a + b\mu$ для некоторого μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$. Пусть простое p удовлетворяет последним двум условиям. Если $(j, b) > 1$, то из сравнения $p \equiv j \mod b$ вытекает, что $(p, b) > 1$, т.е. p является делителем числа b и равенство (3.2) можно записать в виде

$$N_n = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant b \\ (j,b)=1}} N_{n,j} + O(1),$$

где значение постоянной $O(1)$ не превосходит количества делителей b. Если $(j,b)=1$, то для некоторых натуральных u,v выполнено $p-j=ub$ и $pv=a+b\mu$. Тогда $jv\equiv a \mod b$, и значит, $v\geqslant i_j$, где i_j – единственное целое решение сравнения $ji_j\equiv a \mod b$ в интервале $1\leqslant i_j\leqslant b$. Следовательно,

$$p=\frac{a+b\mu}{v}\leqslant\frac{a+bn}{i_j}$$

и

$$N_{n,j}\leqslant\pi\big((a+bn)/i_j,b,j\big),$$

где $\pi(x,b,j)$ обозначает число простых p, не превосходящих x, таких, что $p\equiv j \mod b$. По теореме о распределении простых чисел в арифметической прогрессии имеем

$$\pi\big((a+bn)/i_j,b,j\big)\sim\frac{(a+bn)/i_j}{\varphi(b)\log\big((a+bn)/i_j\big)}\sim\frac{b}{i_j\varphi(b)}\cdot\frac{n}{\log(a+bn)}$$

при $n\to\infty$. Окончательно получаем:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log D_n}{n}\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\(j,b)=1}}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{N_{n,j}\log(a+bn)}{n}\leqslant\frac{b}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\(j,b)=1}}\frac{1}{i_j}.$$

Осталось заметить, что когда j пробегает полную систему вычетов по модулю b соответствующие i_j также пробегают эту систему вычетов.

Лемма 3.3. *Совокупность функций* (3.1) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(1,e^{m\rho(\operatorname{den}\lambda)})$.

Доказательство. Радиус сходимости степенных рядов (3.1) равен 1. Если $\lambda = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для заданных a, b взята из леммы 3.2, то

$$\frac{D_n^m}{(\nu+\lambda)^l} \in \mathbb{Z}, \quad l = 1, \ldots, m, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Осталось воспользоваться оценкой леммы 3.2.

Совокупность функций (3.1) удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{z} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Поэтому матрица $S = \big(S_{jl}(z)\big)_{j,l=1,\ldots,m}$ системы линейных дифференциальных уравнений (0.10) имеет вид $S = \frac{1}{z}\Lambda$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

– числовая матрица.

Лемма 3.4. *Пусть матрица системы линейных дифференциальных уравнений* (0.10) *имеет вид* $S = \frac{1}{z}\Lambda$, *где* Λ *– числовая матрица. Тогда для матриц*

$$S^{[n]} = \big(S_{jl}^{[n]}(z)\big)_{j,l=1,\ldots,m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

систем линейных дифференциальных уравнений (0.11) *справедливо представление*

$$S^{[n]} = \tfrac{1}{z^n}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

где E – единичная матрица размера m.

Доказательство. Будем доказывать утверждение леммы индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ его истинность непосредственно вытекает из условия. Пусть представление (3.5) выполнено для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Согласно рекуррентным соотношениям (0.13) имеем:

$$\begin{aligned} S^{[n+1]} &= \frac{d}{dz}S^{[n]} + S^{[n]}\cdot S \\ &= -\frac{n}{z^{n+1}}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big) \\ &\quad + \frac{1}{z^{n+1}}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big)\cdot\Lambda \\ &= \frac{1}{z^{n+1}}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big)\big(\Lambda - nE\big), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы для $n+1$, а значит, и для всех натуральных n.

Определим целозначный многочлен

$$\Delta_n(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Согласно лемме 3.4 выполнено

$$\frac{z^n S^{[n]}}{n!} = \Delta_n(\Lambda), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

где матрица Λ определяется равенством (3.4).

Лемма 3.5. *Пусть матрица Λ определяется равенством* (3.4). *Тогда*

$$\Delta_n(\Lambda)=\begin{pmatrix} \varkappa_{0,n}(\lambda) & \varkappa_{1,n}(\lambda) & \varkappa_{2,n}(\lambda) & \ldots & \varkappa_{m-1,n}(\lambda) \\ 0 & \varkappa_{0,n}(\lambda) & \varkappa_{1,n}(\lambda) & \ldots & \varkappa_{m-2,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & \varkappa_{0,n}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \varkappa_{1,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varkappa_{0,n}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad n\in\mathbb{N},$$

где

$$\varkappa_{j,n}(\lambda)=\frac{(-1)^j}{j!}\Delta_n^{(j)}(\lambda), \quad j=0,1,\ldots,m-1, \quad n\in\mathbb{N},$$

а дифференцирование ведется по переменной λ.

Доказательство. Запишем многочлен $\Delta_n(\lambda)$ в виде

$$\Delta_n(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n}\lambda^{\nu}, \quad n\in\mathbb{N},$$

и воспользуемся этим разложением с заменой λ на Λ:

$$\Delta_n(\Lambda)=\sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n}\Lambda^{\nu}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку матрица (3.4) имеет “почти жорданову” форму, ее степени выглядят достаточно просто, а именно:

$$\Lambda^{\nu}=\begin{pmatrix} \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \tau_{2,\nu}(\lambda) & \ldots & \tau_{m-1,\nu}(\lambda) \\ 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \ldots & \tau_{m-2,\nu}(\lambda) \\ 0 & 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \tau_{1,\nu}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \tau_{0,\nu}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \nu\in\mathbb{N},$$

где

$$\tau_{j,\nu}(\lambda) = \begin{cases} (-1)^j \binom{\nu}{j} \lambda^{\nu-j}, & \text{если } j \leqslant \nu, \\ 0, & \text{если } j > \nu, \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, матрица $\Delta_n(\Lambda)$ имеет треугольный вид, указанный в формулировке леммы 3.5, причем

$$\begin{aligned} \varkappa_{j,n} &= \sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n} \tau_{j,\nu}(\lambda) = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{\nu=\max\{1,j\}}^{n} r_{\nu,n} \frac{\nu!}{(\nu-j)!} \lambda^{\nu-j} \\ &= \frac{(-1)^j}{j!} \Delta_n^{(j)}(\lambda), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Лемма 3.6. *Для* $\lambda = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, *через* E_n *обозначим наименьший общий знаменатель чисел*

$$\frac{b^\mu \Delta_\mu^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad \mu = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\log E_n}{n} \leqslant \chi(b) + m - 1,$$

где функция $\chi(b)$ *определяется равенством* (0.17).

Доказательство. Полагая в теореме работы [7] $L = H = n$, $Q = b$, $x = -a$, $M = m - 1$, $\Lambda = 1$, получаем, что E_n делит число

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \cdot D_n^{m-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Учитывая, что

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \leqslant e^{n\chi(b)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \rho(1) = 1$$

согласно лемме 3.2, получаем требуемое.

Лемма 3.7. *Система однородных линейных дифференциальных уравнений, сопряженная к однородной части системы* (3.3), *принадлежит классу* $\mathrm{G}\big(e^{\chi(\operatorname{den}\lambda)+m-1}\big)$.

Доказательство непосредственно следует из равенства (3.6), результатов лемм 3.5, 3.6 и того факта, что $T_*(z) = \operatorname{den}\lambda \cdot z$.

Доказательство следствия 2 получается теперь подстановкой результатов лемм 3.3, 3.7, неравенств (0.16) и $t = 1$ в теорему 3 для функции $f_m(z)$.