**Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова**

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.36

ЗУДИЛИН Вадим Валентинович

Об оценках меры линейной независимости значений некоторых аналитических функций

Специальность 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор *НЕСТЕРЕНКО Юрий Валентинович*

Москва
1995

Содержание

Введение

Одним из направлений теории трансцендентных чисел является исследование поведения величины

$$|h_0 + h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m|, \quad h_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \tag{0.1}$$

для заданных действительных $\xi_1, \dots, \xi_m$, $m \geqslant 1$, и ее оценка снизу в зависимости от

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant m} \{|h_j|\}.$$

Как следует из теоремы Дирихле [20, § 2 гл. 1], *для любого действительного $H \geqslant 1$ существуют целые числа $h_0, h_1, \dots, h_m$ такие, что*

$$|h_0 + h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m| < H^{-m}, \quad 0 < \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \{|h_j|\} \leqslant H.$$

Тем самым, теорема Дирихле отвечает на вопрос, сколь малым может быть величина (0.1), в общем случае, не принимая во внимание конкретную структуру чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$. Из метрических соображений (см. теорему 12 [16, § 5 гл. I]) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для почти всех (в смысле меры Лебега) точек $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ существует постоянная $C = C(\bar{\xi}, \varepsilon) > 0$ такая, что для произвольных целых $h_0, h_1, \dots, h_m$, не равных нулю одновременно, справедливо неравенство

$$|h_0 + h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m| > CH^{-m}(\log H)^{-1-\varepsilon}, \tag{0.2}$$

$$H = \max\Big\{e, \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \{|h_j|\}\Big\}.$$

Методы теории трансцендентных чисел позволяют получать оценки снизу величины (0.1), близкие по порядку к оценкам (0.2), при специальном выборе $\bar{\xi}$.

В качестве чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$ можно рассматривать значения в рациональной точке $\alpha \neq 0$ аналитических функций

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{j,\nu} z^{\nu}, \quad f_{j,\nu} \in \mathbb{Q}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \nu \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{0.3}$$

При получении оценок снизу величины (0.1) возникает вопрос о линейной независимости чисел $1, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$. В случае, когда функции (0.3) линейно зависимы с единицей над $\mathbb{C}(z)$, как легко показать (см. лемму 2 [20, § 2 гл. 3]), существует уравнение вида

$$P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j(z) f_j(z) \equiv 0, \quad P_j \in \mathbb{Q}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

связывающее функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$. При этом можно считать, что многочлены $P_0(z), P_1(z), \dots, P_m(z)$ в совокупности взаимно просты и, следовательно, хотя бы одно из чисел $P_1(\alpha), \dots, P_m(\alpha)$ отлично от нуля. Но это означает, что числа $1, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Таким образом, *необходимым условием линейной независимости чисел $1, f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$ является линейная независимость функций $1, f_1(z), \dots, f_m(z)$ над полем $\mathbb{C}(z)$.*

В работе К. Л. Зигеля [26] был предложен метод исследования арифметических свойств значений некоторых аналитических функций $f_1(z)$, $\dots, f_m(z)$, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений, в алгебраической точке α. Оформив свой метод в виде общей теоремы, К. Л. Зигель [27] указал некоторые достаточные условия, которым должны удовлетворять такие функции для того, чтобы числа

$1, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ были однородно алгебраически и, в частности, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Правда, эта теорема относилась только к значениям E-функций, а развитие метода применительно к классу G-функций так и осталось на уровне замечания о его возможности в статье [26].

Метод Зигеля был существенно обобщен в работах А. Б. Шидловского, который доказал критерий алгебраической независимости значений E-функций. Подробную историю этого вопроса можно найти в его монографии [20]. Сразу отметим, что приводимые ниже результаты затрагивают только *линейную* независимость над $\mathbb{Q}$ значений E- и G-функций, имеющих *рациональные* коэффициенты рядов Тейлора ($\mathbb{Q}$E-функций в смысле [20] и $\mathbb{Q}$G-функций в духе [20]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu}{\nu!} z^\nu \tag{0.4}$$

называется E-*функцией*, если выполнены следующие условия:

1) $f_\nu \in \mathbb{Q}$ для $\nu \in \mathbb{Z}^+$;
2) для некоторой положительной константы C справедливо неравенство $|f_\nu| < C^{\nu+1}$ при $\nu \in \mathbb{Z}^+$;
3) существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ такая, что $\varphi_n f_\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi_n < C^n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Данное определение E-функции было введено С. Ленгом [25] для функции с алгебраическими коэффициентами ряда Тейлора и несколько отличается от классического определения Зигеля. Однако, все известные E-функции (в смысле Зигеля) с рациональными коэффициентами рядов Тейлора, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяют определению 1. В частности, это относится ко всем гипергеометрическим функциям с рациональными параметрами (см. [20, § 1 гл. 5]).

Определение 2. Функция

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu$$

называется G-*функцией*, если для нее выполнены условия 1)–3) определения 1.

Заметим, что рассматриваемые в методе Зигеля–Шидловского аналитические функции $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ должны удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}y_l=Q_{l0}+\sum_{j=1}^{m}Q_{lj}y_j,\quad l=1,\ldots,m;\\ Q_{lj}=Q_{lj}(z)\in\mathbb{C}(z),\quad l=1,\ldots,m,\quad j=0,\ldots,m,\end{gathered}\tag{0.5}$$

первого порядка. Если известно, что эти функции вместе с единицей линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то, как вытекает из леммы 3 [20, § 2 гл. 3], все $Q_{lj}(z)\in\mathbb{Q}(z)$ и можно выбрать многочлен $T(z)\in\mathbb{Z}[z]$ так, что

$$T(z)Q_{lj}(z)\in\mathbb{Z}[z],\quad l=1,\ldots,m,\quad j=0,\ldots,m.\tag{0.6}$$

В 1955 г. А. Б. Шидловский доказал, что *условие линейной независимости* E-*функций* $f_1(z),\ldots,f_m(z)$, *удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений* (0.5), *с единицей над* $\mathbb{C}(z)$ *является не только необходимым, но и достаточным условием линейной независимости чисел* $1, f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ *над* $\mathbb{Q}$ *для рациональной точки* α, *отличной от нуля и полюсов коэффициентов системы* (0.5) (иными словами, для точки $\alpha\in\mathbb{Q}$ такой, что $\alpha T(\alpha)\neq 0$).

Тем самым, применение метода Зигеля к линейной независимости значений E-функций с рациональными коэффициентами было доведено до его естественных границ.

Как и большинство методов теории трансцендентных чисел, метод Зигеля–Шидловского позволил получить не только качественные, но и количественные характеристики арифметических свойств значений заданных функций в точке α. Сам К. Л. Зигель в статье [26] указывал (без доказательства), что для значений функции Бесселя

$$J_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}$$

и ее производной в рациональной точке $\alpha \neq 0$ справедливо неравенство

$$|h_0 + h_1 J_0(\alpha) + h_2 J_0'(\alpha)| > CH^{-2-\delta}, \quad \delta > 0,$$
$$h_j \in \mathbb{Z}, \quad H = \max_{0 \leqslant j \leqslant 2} \bigl\{|h_j|\bigr\} > 0, \quad C = C(\alpha, \delta) > 0.$$

Развитие метода в работах А. Б. Шидловского позволило в 1967 г. установить следующий общий результат [17]:

Пусть совокупность E-*функций* $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqslant 1$, *линейно независима над* $\mathbb{C}(z)$ *с единицей и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений* (0.5), *а* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *– произвольная неособая точка этой системы. Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует постоянная* $C = C(f_1, \ldots, f_m; \alpha, \delta) > 0$ *такая, что*

$$|h_0 + h_1 f_1(\alpha) + \cdots + h_m f_m(\alpha)| > CH^{-m-\delta},$$
$$h_j \in \mathbb{Z}, \quad H = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \bigl\{|h_j|\bigr\} > 0.$$

В этом же году в заметке [18] были аннонсированы, а в 1979 г. в статье [19] опубликованы доказательства оценок, уточняющих остаточный член в показателе неравенства, а именно, что в условиях сформулированной теоремы *существует постоянная* $\gamma = \gamma(f_1, \ldots, f_m; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $H \geqslant H_*(f_1, \ldots, f_m; \alpha)$ *выполнено*

$$|h_0 + h_1 f_1(\alpha) + \cdots + h_m f_m(\alpha)| > H^{-m-\gamma(\log\log H)^{-1/2}}. \qquad (0.7)$$

Из (0.7) вытекает оценка для рациональных приближений значений любой из участвующих E-функций:

$$\begin{gathered} \left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-m-1-\gamma(\log\log|q|)^{-1/2}}, \quad l = 1, \ldots, m, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \\ |q| \geqslant q_*(f_1, \ldots, f_m; \alpha), \quad \gamma = \gamma(f_1, \ldots, f_m; \alpha). \end{gathered} \qquad (0.8)$$

В 1984 г. Г. В. Чудновский в статье [23] предложил оригинальную конструкцию, позволяющую получать оценки снизу линейных форм от значений E-функций, каждая из которых удовлетворяет своему линейному однородному дифференциальному уравнению произвольного порядка. При этом на совокупность этих уравнений накладывалось очень жесткое ограничительное условие, схожее с условием Зигеля [27]. Кроме этого, Чудновскому не удалось корректно осуществить переход от линейных приближающих функциональных форм, названных им *градуированными приближениями Паде*, к линейным числовым формам. В целом, метод Чудновского являлся непосредственным развитием метода Зигеля–Шидловского.

В первой главе настоящей диссертации с помощью некоторого усовершенствования конструкции Чудновского доказывается усиление оценки (0.8), близкое по порядку к неравенствам (0.2) при $m = 1$. Этот результат формулируется в виде двух отдельных теорем по следующей причине: в случае $m = 2$ условие, накладываемое на функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, является более слабым, чем в случае произвольного $m \geqslant 2$, что дает возможность указать более сильные следствия. Заметим только, что это условие в обеих теоремах существенно слабее соответствующего условия работы [23]. Случай $m = 1$ полностью исчерпывается результатом А. Б. Шидловского (0.8).

Теорема 1. *Пусть алгебраически независимые над $\mathbb{C}(z)$ E-функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqslant 2$, составляют решение системы* (0.5). *Пусть, кроме того, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Тогда существует постоянная $\gamma = \gamma(f_1, \ldots, f_m; \alpha) > 0$ такая, что для всех $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f_1, \ldots, f_m; \alpha)$, справедливы неравенства*

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}}, \quad l = 1, \ldots, m,$$

каково бы ни было целое p.

Следствие 1. *Пусть E-функция $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$A_m y^{(m)} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = B, \quad m \geqslant 2,$$
$$A_j = A_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \ldots, m, \quad B = B(z) \in \mathbb{C}[z],$$

порядка m и алгебраически независима над $\mathbb{C}(z)$ со своими производными $f'(z), \ldots, f^{(m-1)}(z)$; рациональная точка α такова, что $\alpha A_m(\alpha) \neq 0$. Тогда существует постоянная $\gamma = \gamma(f; \alpha) > 0$ такая, что для всех $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f; \alpha)$, справедливо неравенство

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство этого следствия вытекает из того факта, что совокупность m E-функций $f_l(z) = f^{(l-1)}(z)$, $l = 1, \dots, m$, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Это дает возможность применить к ней утверждение теоремы 1, из которого и следует требуемое неравенство.

Следствие 2. *Пусть t, l – неотрицательные целые числа, t нечетно, $t+l > 1$ и параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}; \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{Q}\backslash\{-1, -2, \dots\}$ функции*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_\nu \cdots (\beta_l)_\nu}{(\lambda_1 + 1)_\nu \cdots (\lambda_{t+l} + 1)_\nu} \left(\frac{z}{t}\right)^{t\nu},$$

где

$$(\beta)_0 = 1, \quad (\beta)_\nu = \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + \nu - 1), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lambda_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ *для всех* $i = 1, \dots, t+l$, $j = 1, \dots, l$;
2) *не существует общего делителя* $d > 1$ *чисел* t, l *такого, что*

$$(\lambda_1 + 1/d, \dots, \lambda_{t+l} + 1/d) \sim (\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}),$$

$$(\beta_1 + 1/d, \dots, \beta_l + 1/d) \sim (\beta_1, \dots, \beta_l)$$

(запись $(\beta'_1, \dots, \beta'_m) \sim (\beta_1, \dots, \beta_m)$ означает, что для некоторой перестановки $\sigma : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$, отличной от тождественной, при всех $j = 1, \dots, m$ выполнено $\beta'_j - \beta_{\sigma(j)} \in \mathbb{Z}$). Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ существует постоянная $\gamma = \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l};$

$\beta_1, \ldots, \beta_l; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+l}; \beta_1, \ldots, \beta_l; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(t+l+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Действительно, обобщенная гипергеометрическая функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\left(z\frac{d}{dz} + t\lambda_1\right) \cdots \left(z\frac{d}{dz} + t\lambda_{t+l}\right) - z^t\left(z\frac{d}{dz} + t\beta_1\right) \cdots \left(z\frac{d}{dz} + t\beta_l\right)\right)y = t^{t+l}\lambda_1 \cdots \lambda_{t+l},$$

а алгебраическая независимость функций $f(z), f'(z), \ldots, f^{(t+l-1)}(z)$ вытекает из теоремы 1.I работы В. Х. Салихова [15].

Если воспользоваться теоремой 1.II [15], то можно получить аналогичный результат и в случае четного t.

В случае $l = 0$ условие следствия 2 можно упростить.

Следствие 3. *Пусть целое* $t > 1$ *нечетно или* $t = 2$ *и параметры* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ *функции*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_\nu \cdots (\lambda_t + 1)_\nu} \left(\frac{z}{t}\right)^{t\nu}$$

не удовлетворяют следующему условию: числа $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_t$ *являются целыми и образуют полную систему вычетов по* $\bmod\, t$.

Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *существует постоянная* $\gamma = \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_t; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda_1, \dots, \lambda_t; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(t+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство алгебраической независимости функций $f(z), f'(z), \dots, f^{(t-1)}(z)$ в случае нечетного t получено в работе В. Х. Салихова [14] при доказательстве теоремы 2; при $t = 2$ этот результат вытекает из теоремы 4 статьи В. А. Олейникова [13].

Теорема 2. *Пусть* E-*функции* $f_1(z), f_2(z)$ *составляют решение системы*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz} y_l = Q_{l0} + Q_{l1} y_1 + Q_{l2} y_2, \quad l = 1, 2; \\ Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad l = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \end{gathered} \tag{0.9}$$

и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ *с единицей;* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ – *неособая точка системы* (0.9). *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(f_1, f_2; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f_1, f_2; \alpha)$, *справедливы неравенства*

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}}, \quad l = 1, 2,$$

каково бы ни было целое p.

В случае $m = 2$ справедлив аналог следствия 1 из теоремы 1, в котором полностью отсутствует условие независимости функции $f(z)$ и ее производной.

Следствие 1. *Пусть* E*-функция* $f(z)$ *является решением дифференциального уравнения*

$$A_2(z)y'' + A_1(z)y' + A_0(z)y = B(z), \quad A_2, A_1, A_0, B \in \mathbb{C}[z],$$

и $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha A_2(\alpha) \neq 0$. *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(f;\alpha) > 0$ *такая, что для любых целых* p, q, $|q| \geqslant q_*(f;\alpha)$, *либо* $f(\alpha) = p/q$ *либо*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}}.$$

В двух следующих утверждениях полностью решается вопрос об оценке снизу рациональных приближений значений гипергеометрических функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка.

Следствие 2. *Пусть*

$$K_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\lambda+1)_\nu(\mu+1)_\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

и $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(\lambda, \mu; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda, \mu; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| K_{\lambda,\mu}(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}},$$

каково бы ни было целое p.

Следствие 3. *Пусть*

$$A_{\lambda,\mu,\beta}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)_\nu}{(\lambda+1)_\nu(\mu+1)_\nu}z^\nu,\quad \lambda,\mu,\beta\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\},$$

$$\beta-\lambda,\beta-\mu\notin\mathbb{N},$$

и $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. *Тогда существует постоянная* $\gamma=\gamma(\lambda,\mu,\beta;\alpha)>0$ *такая, что для всех* $q\in\mathbb{Z}$, $|q|\geqslant q_*(\lambda,\mu,\beta;\alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left|A_{\lambda,\mu,\beta}(\alpha)-\frac{p}{q}\right|>|q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}},$$

каково бы ни было целое p.

В первых работах, связанных с применением метода Зигеля–Шидловского к классу G-функций (см. [11], [12]), были получены оценки линейных форм и многочленов от значений этих функций в алгебраических точках. При этом, однако, величина этих точек зависела от высоты рассматриваемых форм. В 1974 г., воспользовавшись указанием Зигеля в работе [26] о сокращении коэффициентов линейных приближающих форм (“сокращении факториалов”), А. И. Галочкин [1] получил для одного подкласса G-функций оценки модулей многочленов от значений в точках, не зависящих от высоты многочленов. Там же была сформулирована теорема об эффективной оценке линейной формы от G-функций из одного класса, доказательство которой опубликовано в работе [2]. В 1985 г. Д. В. Чудновский и Г. В. Чудновский [22] доказали, что условие “сокращения факториалов”, сформулированное в работе [1], выполняется для однородных систем линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют G-функции. Несложное усовершенствование схемы Чудновских позволило в работе [21] получить этот результат и для неоднородных систем. Таким образом, применение метода Зигеля–Шидловского к классу G-функций было расширено до естественных границ. Отметим, что использование приближений Паде второго рода дает возможность получать оценки линейных форм от значений G-функций без условия "сокращения факториалов" (см. [22]).

Отметим, прежде всего, что для получения оценок снизу линейных форм от значений G-функций требуется более тщательный учет постоянных, чем в аналогичной задаче для E-функций. Именно поэтому, необходимо следующее уточняющее определение для элементов $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ класса G-функций.

Определение 3. Будем говорить, что *совокупность функций* (0.3) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(C, \Phi)$, где $C \geqslant 1$ и $\Phi \geqslant 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ, зависящая только от ε и функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, такая, что:

1) $|f_{j,\nu}| < \gamma C^{(1+\varepsilon)\nu}$, $j = 1, \ldots, m$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$;
2) существуют натуральные числа $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что все числа $\varphi_n f_{j,\nu} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, m$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi_n < \gamma \Phi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Для совокупности G-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, линейно независимой над $\mathbb{C}(z)$ с единицей, наряду с системой (0.5) будем рассматривать сопряженную к ее однородной части систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} a_j = \sum_{l=1}^{m} S_{jl} a_l, \quad j = 1, \ldots, m;$$
$$S_{jl}(z) = -Q_{lj}(z) \in \mathbb{Q}(z), \quad j, l = 1, \ldots, m. \tag{0.10}$$

Из (0.10) следует, что для производных порядка n, $n = 1, 2, \ldots$, имеют место соотношения

$$\frac{d^n}{dz^n} a_j = \sum_{l=1}^{m} S_{jl}^{[n]} a_l, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{0.11}$$

где все $S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}(z)$, $j, l = 1, \ldots, m$. Обозначим через $T_*(z) \in \mathbb{Z}[z]$ наименьший общий знаменатель функций $S_{jl} = -Q_{lj}$, $j, l = 1, \ldots, m$, т.е. такой многочлен, что

$$T_*(z) S_{lj}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad j, l = 1, \ldots, m.$$

Согласно выбору (0.6) многочлена $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ получаем, что

$$T(z) \big/ T_*(z) \in \mathbb{Z}[z]. \tag{0.12}$$

Несложные выкладки показывают справедливость следующих рекуррентных соотношений для коэффициентов систем (0.11):

$$S_{jl}^{[n+1]}(z) = \frac{d}{dz} S_{jl}^{[n]}(z) + \sum_{i=1}^{m} S_{ji}^{[n]}(z) \cdot S_{il}(z),$$
$$j, l = 1, \ldots, m, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.13}$$

и значит,

$$T_*^{n+1}(z) S_{jl}^{[n+1]}(z) = T_*(z) \frac{d}{dz} \big(T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z) \big)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} T_*^n(z) S_{ji}^{[n]}(z) \cdot T_*(z) S_{il}(z) - n T_*'(z) T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z),$$
$$j, l = 1, \ldots, m, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.14}$$

Отсюда, в частности, следует, что $T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j, l = 1, \ldots, m$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Будем говорить, что *система линейных дифференциальных уравнений* (0.10) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(\Psi)$ (удовлетворяет условию "сокращения факториалов" с постоянной Ψ), где $\Psi \geqslant 1$, если существуют натуральные числа $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что все функции

$$\frac{\psi_n}{i!}T_*^i(z)S_{jl}^{[i]} \in \mathbb{Z}[z], \quad j,l=1,\dots,m, \quad i=1,\dots,n, \quad n\in\mathbb{N},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ', зависящая только от ε и системы (0.10), такая, что $\psi_n < \gamma'\Psi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Теперь сформулируем основные результаты второй главы – теорему 3 и следствия из нее. В отличие от случая E-функций, случай $m=2$ представлен в теореме 3 отдельным пунктом. Через $H(\cdot)$ мы обозначаем высоту многочлена из $\mathbb{C}[z]$ (максимум модулей его коэффициентов).

Теорема 3. *Пусть совокупность функций* $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $m \geqslant 2$, *из класса* $\mathrm{G}(C,\Phi)$

а) *линейно независима над* $\mathbb{C}(z)$ *с единицей в случае* $m=2$;

б) *алгебраически независима над* $\mathbb{C}(z)$ *в случае* $m>2$,

и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (0.5), *для которой система* (0.10) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(\Psi)$. *Пусть, кроме того,* $\alpha = a/b$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условию* $\alpha T(\alpha) \neq 0$; $\varepsilon < \frac{1}{m+t+1}$ – *произвольная положительная постоянная. Положим* $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - m + 1$,

$$t = \max\Big\{\deg T - 1, \max_{l,j}\{\deg TQ_{lj}\}\Big\},$$

$$H = \max\Big\{H(T), \max_{l,j}\{H(TQ_{lj})\}\Big\},$$

$$C_0 = e^{\varepsilon(1-\log\varepsilon)}\big(2(t+1)^2H\Psi\big)^{\varepsilon(1+\log N)}\Phi^{1+t\varepsilon}(C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{m-1}{N+m-1}\right)\binom{N+m-2}{m-1}},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_0}{(1-(m+t+1)\varepsilon)\log b - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon)\log(C|a|)}.$$

Если для заданного α выполнено условие $\eta_0 > 0$, иными словами, если

$$b^{1-(m+t+1)\varepsilon} > C_0 \cdot \bigl(C|a|\bigr)^{2-(m+1)\varepsilon}, \tag{0.15}$$

то числа $f_l(\alpha)$, $l = 1, \dots, m$, иррациональны. Более того, для любого $\eta > \eta_0$ и произвольных $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(f_1, \dots, f_m; \alpha, \varepsilon, \eta)$, справедливы оценки

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}, \quad l = 1, \dots, m.$$

В предыдущих работах (см., например, [2], [22]) доказана иррациональность значений G-функций, удовлетворяющих системе (0.5), в рациональных точках $\alpha = a/b$, для которых выполнено условие типа

$$b > C_0' |a|^{m+1+\delta}, \quad \delta > 0.$$

Поэтому неравенство (0.15) теоремы 3 расширяет класс известных иррациональных значений таких G-функций.

Следующее утверждение можно считать более "практичным" по сравнению с теоремой 3, поскольку в его формулировке полностью отсутствует условие "сокращения факториалов" и вспомогательный параметр N.

Следствие 1. *Пусть функция $f(z) \in \mathrm{G}(C, \Phi)$ является решением линейного дифференциального уравнения*

$$A_m y^{(m)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = B, \quad m \geqslant 2,$$

$$A_j = A_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad B = B(z) \in \mathbb{C}[z],$$

порядка m и не удовлетворяет никакому

а) *линейному в случае $m = 2$,*

б) *алгебраическому в случае $m > 2$*

дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ *меньшего порядка. Пусть, кроме того,* $\alpha = a/b$*, где* $a \in \mathbb{Z}$*,* $b \in \mathbb{N}$*, удовлетворяет условию* $\alpha A_m(\alpha) \neq 0$*;* $\varepsilon < \frac{1}{m+t+1}$ *– произвольная положительная постоянная. Обозначим через* $d \in \mathbb{N}$ *наименьший общий знаменатель коэффициентов многочленов* $B, A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{Q}[z]$ *и положим*

$$t = \max\Big\{\deg A_m - 1, \max_{0 \leqslant j < m}\{\deg A_j\}, \deg B\Big\},$$

$$H = d\max\Big\{H(B), \max_{0 \leqslant j \leqslant m}\{H(A_j)\}\Big\},$$

$$\Psi = \big(C\Phi\big)^{6(m+1)^2(t+1)(1+\log m)},$$

$$C_0 = \big(2e(t+1)^2 H\Psi\big)^{\varepsilon(1-\log\varepsilon)}\Phi^{1+t\varepsilon}\big(C\Phi\big)^{\frac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_0}{(1-(m+t+1)\varepsilon)\log b - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon)\log(C|a|)}.$$

Если для заданного α *выполнено условие* (0.15)*, то число* $f(\alpha)$ *иррационально и для любого* $\eta > \eta_0$ *и произвольных* $p \in \mathbb{Z}$*,* $q \in \mathbb{N}$*,* $q > q_*(f; \alpha, \varepsilon, \eta)$ *справедливы оценки*

$$\left|f(\alpha) - \frac{p}{q}\right| > q^{-1-\eta}.$$

Вывод этого утверждения из теоремы 3 проводится по следующей схеме. Функции $f_l(z) = f^{(l-1)}(z)$, $l = 1, \ldots, m$, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y_l' = y_{l+1}, \quad l = 1, \ldots, m-1, \quad y_m' = \frac{B}{A_m} - \frac{A_0}{A_m}y_1 - \cdots - \frac{A_{m-1}}{A_m}y_{m-1},$$

и принадлежат классу $\mathrm{G}(C,\Phi)$. Как следует из теоремы [21, § 4 гл. VI] сокращение факториалов для системы (0.5) происходит с постоянной, не большей $(C\Phi)^{6(m+1)^2(t+1)}$, а согласно утверждению [21, § 5.5 гл. IV] для системы (0.10), сопряженной к (0.5), эту постоянную необходимо еще возвести в степень $1+\log m$. Кроме того, для $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-m+1\geqslant 1$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\log N<\log(N+m-1)\leqslant-\log\varepsilon,\quad \frac{m-1}{N+m-1}\geqslant(m-1)\varepsilon,\\ \binom{N+m-2}{m-1}<\frac{(N+m-1)^{m-1}}{(m-1)!}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^{m-1}(m-1)!}.\end{gathered}\tag{0.16}$$

Результат следствия получается теперь из основной теоремы прямой подстановкой.

Наконец, утверждение следствия 2, приводимого ниже, относится к значениям так называемых обобщенных полилогарифмических функций. Для его формулировки нам потребуются вспомогательные обозначения. Под $\operatorname{den}\lambda\in\mathbb{N}$ будем понимать знаменатель несократимой дроби λ. Введем в рассмотрение следующие функции натурального аргумента:

$$\begin{gathered}\rho(b)=\frac{b}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant b\\(i,b)=1}}\frac{1}{i},\quad\chi(b)=\sum_{p\,|\,b}\frac{\log p}{p-1},\\ \varphi(b)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant b\\(i,b)=1}}1\text{ – функция Эйлера},\quad b\in\mathbb{N}.\end{gathered}\tag{0.17}$$

Так, например, $\rho(1)=1$, $\chi(1)=0$; $\rho(2)=2$, $\chi(2)=\log 2$; $\rho(3)=\frac{9}{4}$, $\chi(3)=\frac{1}{2}\log 3$; $\rho(4)=\frac{8}{3}$, $\chi(4)=\log 2$ и т.д.

Следствие 2. *Рассмотрим функцию*

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^m},\quad m\geqslant 2,\quad \lambda\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}.$$

Пусть $\alpha = a/b \neq 0$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *и пусть* $\varepsilon < \frac{1}{m+2}$ *– произвольная положительная постоянная. Положим* $\rho = \rho(\operatorname{den}\lambda)$, $\chi = \chi(\operatorname{den}\lambda)$, $H = \operatorname{den}\lambda \cdot \max\{1, |\lambda|\}$,

$$C_0 = \exp\Big\{ \big(\log(8H) + \chi + m\big)\varepsilon(1 - \log\varepsilon) + m\rho\big(1 + \varepsilon + \tfrac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}\big) \Big\},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+\varepsilon)\log b + \log C_0}{(1 - (m+2)\varepsilon)\log b - \log C_0 - (2 - (m+1)\varepsilon)\log|a|}.$$

Если для заданного α *выполнено условие*

$$b^{1-(m+2)\varepsilon} > C_0 \cdot |a|^{2-(m+1)\varepsilon},$$

то число $f(\alpha)$ *иррационально и для любого* $\eta > \eta_0$ *и произвольных* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(\lambda, \alpha, \varepsilon, \eta)$ *справедливы оценки*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

В частном случае, при $\lambda = 0$, *имеем:*

$$C_0 = \exp\Big\{ (m + \log 8)\varepsilon(1 - \log\varepsilon) + m\big(1 + \varepsilon + \tfrac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}\big) \Big\}.$$

Опишем теперь коротко метод настоящей диссертации для исследования арифметических свойств значений E- и G-функций, названный Г. В. Чудновским методом “градуированных приближений Паде”.

В конструкции Зигеля–Шидловского строится (с помощью принципа

Дирихле) одна линейная приближающая функциональная форма

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j(z) f_j(z), \quad P_j \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

а остальные формы (такого же вида) получаются из нее дифференцированием по z с последующим домножением на определенный выше многочлен $T(z)$. Именно в этом месте используется тот факт, что совокупность функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений (0.5). Арифметические свойства коэффициентов-многочленов получающихся линейных функциональных форм, зависящие от свойств числовых коэффициентов в рядах Тейлора рассматриваемых функций, вместе с невырожденностью определителя, составленного из этих многочленов, позволяют перейти к линейным приближающим формам от чисел $1, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$. В применении к G-функциям метод Зигеля–Шидловского позволяет получать арифметические результаты только в точках, достаточно малых по модулю. Это обстоятельство связано с тем, что в числовых линейных приближающих формах от значений G-функций, построенных с помощью этого метода, малость форм достигается не за счет множителя $1/\nu!$ в общем члене ряда, как в случае E-функций, а за счет $|\alpha|^{\nu}$. Конструкции "градуированных приближений Паде" как потомку метода Зигеля–Шидловского не удается преодолеть этот недостаток. Поэтому в результатах второй главы появляется условие (0.15) на число α.

Параметрами описываемой ниже конструкции являются натуральные числа M, N и (достаточно малое) вещественное $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ – набор вспомогательных переменных. В дальнейшем будут встречаться суммы, слагаемые которых нумеруются мультииндексами $\bar{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m) \in \mathbb{Z}^m$. При этом если в некоторой сумме по $\bar{\kappa}$ встретится слагаемое хотя бы с одной компонентой $\kappa_j < 0$, то будем считать это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Через $\bar{e}_j$ обозначим мультииндекс, у которого на месте с номером j стоит единица, а на остальных местах – нули. Для экономии места в формулах будем писать:

$$\bar{a}^{\bar{\kappa}} = \prod_{j=1}^{m} a_j^{\kappa_j}; \quad |\bar{\kappa}| = \sum_{j=1}^{m} \kappa_j.$$

Введем, наконец, следующие множества мультииндексов:

$$\Omega = \Omega(m, N) = \bigl\{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| \in \{N-1, N\}\bigr\}, \quad \Theta = \Theta(m, N) = \bigl\{\bar{s} : |\bar{s}| = N\bigr\};$$

$$\omega = \operatorname{Card}\Omega = \binom{N+m-2}{m-1} + \binom{N+m-1}{m-1},$$

$$\theta = \operatorname{Card}\Theta = \binom{N+m-1}{m-1}$$

(результаты о количествах элементов в этих множествах следуют, например, из леммы 7 [20, § 7 гл. 2]). Упорядочим элементы множеств Ω и Θ в лексикографическом порядке, т.е. будем говорить, что мультииндекс $\bar{\kappa}$ меньше мультииндекса $\bar{\kappa}'$ (запись $\bar{\kappa} \prec \bar{\kappa}'$), если $\kappa_1 = \kappa_1'$, $\kappa_2 = \kappa_2', \ldots, \kappa_{j-1} = \kappa_{j-1}'$, но $\kappa_j < \kappa_j'$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Под $\delta_{\bar{s}',\bar{s}}$, $\bar{s}', \bar{s} \in \Theta$, будем понимать “обобщенный” символ Кронекера множества Θ, а именно,

$$\delta_{\bar{s}',\bar{s}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{s}' = \bar{s}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассматриваются формы от переменных $a_1, \ldots, a_m$ с функциональными коэффициентами вида

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z),$$

$$P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Q}[z]. \quad (0.18)$$

Поскольку такие формы однородны и имеют степень N, их можно представить в виде

$$R(z;\bar{a}) = \sum_{\bar{s}\in\Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z). \tag{0.19}$$

Сравнивая коэффициенты при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s}\in\Theta$, в (0.18) и (0.19), выразим элементы строки $\big(R_{\bar{s}}(z)\big)_{\bar{s}\in\Theta}$ через элементы строки $\big(P_{\bar{\kappa}}(z)\big)_{\bar{\kappa}\in\Omega}$.

$$R_{\bar{s}}(z) = \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N} P_{\bar{\kappa}}(z)\delta_{\bar{\kappa},\bar{s}} + \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^{m} \delta_{\bar{\kappa}+\bar{e}_j,\bar{s}} f_j(z), \quad \bar{s}\in\Theta, \tag{0.20}$$

или

$$R_{\bar{s}}(z) = P_{\bar{s}}(z) + \sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z), \quad \bar{s}\in\Theta. \tag{0.21}$$

Также, как и в методе Зигеля–Шидловского, с помощью принципа Дирихле удается построить совокупность линейных функциональных форм (0.21) с оценкой

$$\deg P_{\bar{\kappa}} < M, \quad \bar{\kappa}\in\Omega,$$

на степени входящих в них многочленов (и, кроме того, с некоторой оценкой их высот) такую, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geqslant \left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right] = \left[\left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right], \quad \bar{s}\in\Theta.$$

Теперь применение к формам вида (0.18) дифференциального оператора

$$D = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} Q_{lj}(z) a_l\right)\frac{\partial}{\partial a_j}, \tag{0.22}$$

связанного с системой дифференциальных уравнений (0.10), с последующим домножением на многочлен $T(z)$ переводит их в формы того же вида с другими коэффициентами-многочленами $P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$. Это обстоятельство связано со следующим простым свойством оператора D:

$$D \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z) = \sum_{l=1}^{m} a_l Q_{l0}(z). \tag{0.23}$$

Таким образом, по одной построенной форме вида (0.18) удается построить целый набор таких форм. Наиболее трудным моментом метода является доказательство невырожденности функционального определителя, составленного из коэффициентов-многочленов этих форм. Для его преодоления исследуются свойства матрицы перехода от строки многочленов $\bigl(P_{\bar{\kappa}}(z)\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega}$ к строке линейных форм $\bigl(R_{\bar{s}}(z)\bigr)_{\bar{s}\in\Theta}$, а также используется технический аппарат для оценки порядка нуля многочленов от $z, f_1(z), \ldots, f_m(z)$, разработанный Ю. В. Нестеренко в [9], [10] и других работах. Заключительная часть доказательств теорем 1 и 3 проводится по двум различным схемам: традиционной схеме метода Зигеля–Шидловского (см., например, лемму 17 [20, § 11 гл. 3]) и использованию приближений Паде второго рода.

Отметим, что доказательство теорем 1–3 проводятся для фиксированного $l = l^*$, $1 \leqslant l^* \leqslant m$.

Основные результаты этой диссертации опубликованы в работах [5], [6].

Автор выражает глубокую признательность Ю. В. Нестеренко за интересную тему и большое внимание, оказанное настоящей работе.

ГЛАВА I

Мера иррациональности значений E-функций

§ 1. Конструкция рациональных приближений к числу $f_{l^*}(\alpha)$

Договоримся сразу представление функции $f(z)$ в виде ряда (0.4) называть *нормальным разложением функции в степенной ряд* (или просто *нормальным разложением*), а числа $\{f_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ – *коэффициентами в нормальном разложении.* При этом в случае $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ будет считаться, что $f_\nu = 0$ для $\nu > \deg f$.

Положим

$$N = \left[(\log M)^{1/(m+1)}\right], \quad \varepsilon = \frac{1}{3(N+m-1)}, \tag{1.1}$$

при этом будем считать натуральный параметр M достаточно большим, т.е. $M > M_*(f_1, \ldots, f_m)$. Буквы C с индексами будем использовать для обозначения положительных постоянных, зависящих от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и числа α.

Лемма 1.1. *Для натурального $M > M_*$ и выбранных согласно* (1.1) *числам N и ε существуют многочлены $P_{\bar\kappa}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $\bar\kappa \in \Omega$, удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *не все они тождественно равны нулю*;
2) $\deg P_{\bar\kappa} < M$ *для всех* $\bar\kappa \in \Omega$;
3) *коэффициенты в нормальном разложении этих многочленов являются целыми числами, ограниченными по модулю величиной* $C_0^{\omega M/\varepsilon}$;

4) *порядок нуля в точке $z = 0$ каждой из линейных функциональных форм* (0.21) *не ниже*

$$K = \left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right] = \left[\left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right].$$

Доказательство. Рассмотрим нормальное разложение требуемых многочленов:

$$P_{\bar{\kappa}}(z) = \sum_{\nu=0}^{M-1} \frac{P_{\bar{\kappa},\nu}}{\nu!} z^{\nu}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \tag{1.2}$$

и будем искать нужную совокупность целых чисел $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, $\nu = 0, 1, \ldots, M-1$, общее количество которых ωM.

Пользуясь определением E-функции одновременно для функций

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_{j,\nu}}{\nu!} z^{\nu}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

получим некоторую положительную константу C и последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$|\varphi_K f_{j,\nu}| < C^{2K}, \quad \varphi_K f_{j,\nu} \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \nu = 0, 1, \ldots, K-1. \tag{1.3}$$

Запишем искомые формы в виде

$$R_{\bar{s}}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{R_{\bar{s},\mu}}{\mu!} z^{\mu}, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

где, согласно формулам (0.21),

$$R_{\bar{s},\mu} = P_{\bar{s},\mu} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{0 \leqslant \nu \leqslant \mu \\ \mu-\nu < M}} \binom{\mu}{\nu} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\mu-\nu} f_{j,\nu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Домножая каждое из этих равенств на φ_K, мы получим, согласно условию

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geqslant K, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

в точности $\theta K \leqslant (\omega - \varepsilon)M$ линейных уравнений

$$\varphi_K R_{\bar{s},\mu} = 0, \quad \bar{s} \in \Theta, \quad \mu = 0, 1, \ldots, K-1,$$

относительно $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, $\nu = 0, 1, \ldots, M-1$, целые коэффициенты которых в силу (1.3) и того, что

$$\binom{\mu}{\nu} < 2^K, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, K-1,$$

ограничены по модулю величиной $2^K C^{2K}$. Осталось воспользоваться леммой Зигеля (см. лемму 11 [20, гл. 3]), согласно которой существует нетривиальный набор многочленов (1.2) с целыми коэффициентами в нормальном разложении, ограниченными по модулю величиной

$$\left(\Psi 2^K C^{2K}\right)^{\Upsilon/(\Psi-\Upsilon)} < \left(\omega M 2^{2M} C^{4M}\right)^{\omega/\varepsilon}.$$

Учитывая, что $\omega < M$ согласно (1.1), получаем требуемое.

Докажем теперь указанное выше свойство (0.23) дифференциального оператора (0.22):

$$\begin{aligned}
D \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z) &= \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\underset{\cdot}{\mathrm{f}}_j}{\underset{\cdot}{\mathrm{z}}}(z) - \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{m} Q_{lj}(z) a_l \right) f_j(z) \\
&= \sum_{l=1}^{m} a_l \frac{\underset{\cdot}{\mathrm{f}}_l}{\underset{\cdot}{\mathrm{z}}}(z) - \sum_{l=1}^{m} a_l \sum_{j=1}^{m} Q_{lj}(z) f_j(z) \\
&= \sum_{l=1}^{m} a_l \left(f_l'(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_{lj}(z) f_j(z) \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} a_l Q_{l0}(z).
\end{aligned}$$

Положим

$$P^{[0]}_{\bar\kappa}(z) = P_{\bar\kappa}(z), \quad \bar\kappa \in \Omega;$$

$$R^{[0]}_{\bar s}(z) = R_{\bar s}(z), \quad \bar s \in \Theta,$$

где $P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa \in \Omega$, и $R_{\bar s}(z)$, $\bar s \in \Theta$, – построенные в лемме 1.1 многочлены и отвечающие им линейные формы (0.21);

$$R^{[0]}(z;\bar a) = \sum_{\bar s\in\Theta} \bar a^{\bar s} R^{[0]}_{\bar s}(z).$$

Тогда функциональные формы

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \bigl(T(z)D\bigr)^n R^{[0]}(z;\bar a), \quad n \geqslant 0,$$

будут иметь вид

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z), \quad n \geqslant 0,$$

и входящие в них многочлены от z удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$P^{[n+1]}_{\bar\kappa}(z) = T(z)\biggl(\frac{d}{dz} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) - \sum_{l,j=1}^{m} (\kappa_j - \delta_{lj} + 1) Q_{lj}(z) P^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l+\bar e_j}(z) + \bigl(|\bar\kappa| - N + 1\bigr) \sum_{l=1}^{m} Q_{l0}(z) P^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l}(z)\biggr), \quad \bar\kappa \in \Omega, \quad n \geqslant 0. \quad (1.4)$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и отвечающие каждой функциональной форме

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar s\in\Theta} \bar a^{\bar s} R^{[n]}_{\bar s}(z), \quad n \geqslant 0,$$

линейные формы $R_{\bar{s}}^{[n]}(z)$, $\bar{s}\in\Theta$, $n\geqslant 0$, от функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$:

$$R_{\bar{s}}^{[n+1]}(z)=T(z)\Bigl(\frac{d}{dz}R_{\bar{s}}^{[n]}(z)-\sum_{l,j=1}^{m}(s_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)R_{\bar{s}-\bar{e}_l+\bar{e}_j}^{[n]}(z)\Bigr),$$

$$\bar{s}\in\Theta,\quad n\geqslant 0. \quad (1.5)$$

Если ввести обозначение

$$t=\max\Bigl\{\deg T,\max_{l,j}\{\deg TQ_{lj}\}\Bigr\},$$

то из леммы 1.1 и соотношений (1.4), (1.5) имеем:

$$\deg P_{\bar{\kappa}}^{[n]}<M+tn,\quad \bar{\kappa}\in\Omega,\quad n\geqslant 0; \quad (1.6)$$

$$\operatorname*{ord}_{z=0}R_{\bar{s}}^{[n]}\geqslant K-n,\quad \bar{s}\in\Theta,\quad n\geqslant 0. \quad (1.7)$$

Лемма 1.2. *Для многочлена*

$$g(z)=\sum_{\nu}\frac{g_\nu}{\nu!}z^\nu,\quad g_\nu\in\mathbb{C},$$

положим

$$\|g(z)\|=\max_{\nu}\{|g_\nu|\}.$$

Тогда

а) $\|g'(z)\|\leqslant\|g(z)\|$;

б) $\|g_1(z)+g_2(z)\|\leqslant\|g_1(z)\|+\|g_2(z)\|$;

в) $\|g_1(z)g_2(z)\|\leqslant\binom{\deg g_1(z)+\deg g_2(z)}{\deg g_1(z)}\|g_1(z)\|\cdot\|g_2(z)\|$.

Доказательство свойств а) и б) тривиально.

в) Пусть

$$g_i(z) = \sum_{\nu=0}^{n_i} \frac{g_{i,\nu}}{\nu!} z^\nu, \quad i = 1, 2; \quad h(z) = g_1(z) g_2(z) = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \frac{h_\eta}{\eta!} z^\eta.$$

Тогда

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{n_1} \sum_{\mu=0}^{n_2} \frac{g_{1,\nu}}{\nu!} \frac{g_{2,\mu}}{\mu!} z^{\nu+\mu} = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu} g_{1,\nu} g_{2,\mu} \frac{z^\eta}{\eta!},$$

$$\mathrm{S}_\eta = \big\{(\nu, \mu) : 0 \leqslant \nu \leqslant n_1,\ 0 \leqslant \mu \leqslant n_2,\ \nu + \mu = \eta\big\},$$

$$\eta = 0, 1, \ldots, n_1 + n_2,$$

откуда

$$|h_\eta| = \left| \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu} g_{1,\nu} g_{2,\mu} \right| \leqslant \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu},$$

$$\eta = 0, 1, \ldots, n_1 + n_2. \tag{1.8}$$

Имеем:

$$\sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu} \leqslant \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1 + n_2 - \eta}{n_1 - \nu} \binom{\eta}{\nu}$$

$$= \frac{(n_1 + n_2 - \eta)!\eta!}{n_1! n_2!} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu} \binom{n_2}{\mu},$$

$$\eta = 0, 1, \ldots, n_1 + n_2. \tag{1.9}$$

Воспользуемся формулой для бинома Ньютона:

$$(1+z)^{n_1} = \sum_{\nu=0}^{n_1} \binom{n_1}{\nu} z^{\nu}; \quad (1+z)^{n_2} = \sum_{\mu=0}^{n_2} \binom{n_2}{\mu} z^{\mu},$$

откуда

$$\begin{aligned}(1+z)^{n_1+n_2} &= \sum_{\nu=0}^{n_1} \binom{n_1}{\nu} z^{\nu} \sum_{\mu=0}^{n_2} \binom{n_2}{\mu} z^{\mu} \\ &= \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu}\binom{n_2}{\mu} z^{\eta}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

а с другой стороны,

$$(1+z)^{n_1+n_2} = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{\eta} z^{\eta}. \tag{1.11}$$

Сравнивая коэффициенты при z^{η}, $\eta = 0, 1, \ldots, n_1+n_2$, в соотношениях (1.10) и (1.11), заключаем:

$$\sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu}\binom{n_2}{\mu} = \binom{n_1+n_2}{\eta}, \quad \eta = 0, 1, \ldots, n_1+n_2. \tag{1.12}$$

Осталось подставить полученное тождество (1.12) в неравенство (1.9) и продолжить оценку (1.8):

$$\begin{aligned}|h_\eta| &\leqslant \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \frac{(n_1+n_2-\eta)!\eta!}{n_1!n_2!} \binom{n_1+n_2}{\eta} \\ &= \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \binom{n_1+n_2}{n_1}, \quad \eta = 0, 1, \ldots, n_1+n_2,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.3. а) *Коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)$, $\bar\kappa\in\Omega$, $n\geqslant 0$, являются целыми числами и при $n<C_1\varepsilon M$ имеет место оценка*

$$\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\}<C_0^{\omega M/\varepsilon}M^{C_2\varepsilon M}. \tag{1.13}$$

б) *При $n<C_1\varepsilon M$ справедлива оценка*

$$\bigl|R_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha)\bigr|<C_0^{\omega M/\varepsilon}M^{C_2\varepsilon M}C_3^M M^{-K},\quad \bar s^*=N\bar e_{l^*}. \tag{1.14}$$

Доказательство. а) Первая часть утверждения вытекает из соотношений (1.4) и выбора (0.6) многочлена $T(z)$. Положим

$$C_4=\max\Bigl\{\|T\|,\max_{l,j}\bigl\{\|TQ_{lj}\|\bigr\}\Bigr\}$$

и воспользуемся рекуррентными соотношениями (1.4) и неравенствами леммы 1.2:

$$\begin{aligned}\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\}\leqslant(m^2+m+1)N\binom{M+tn-1}{t}\cdot C_4\\ \times\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n-1]}(z)\|\bigr\},\quad n\geqslant 1,\end{aligned}$$

откуда простая индукция по n дает оценку

$$\begin{aligned}\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\}&\leqslant\bigl((m^2+m+1)N\bigr)^n\cdot\left(\frac{1}{t!}\right)^n\frac{(M+tn-1)!}{(M-1)!}\cdot C_4^n\\ &\quad\times\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[0]}(z)\|\bigr\}\\ &<\left(\frac{C_4(m^2+m+1)N}{t!}\right)^n(2M)^{tn}C_0^{\omega M/\varepsilon},\quad n\geqslant 0.\end{aligned}$$

Осталось вспомнить, что $n < C_1\varepsilon M$.

б) Пусть $P^{[n]}_{\bar{s}^*,\nu}$, $P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*,\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P^{[n]}_{\bar{s}^*}(z)$, $P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(z)$, $n \geqslant 0$, соответственно, $\bar{\kappa}^* = \bar{s}^* - \bar{e}_{l^*}$; $R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}$, $\mu \in \mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении линейных форм $R^{[n]}_{\bar{s}^*}(z)$, $n \geqslant 0$. Тогда согласно формуле (0.21)

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*}(z) = P^{[n]}_{\bar{s}^*}(z) + P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(z) f_{l^*}(z), \quad n \geqslant 0, \tag{1.15}$$

и значит,

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu} = P^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu} + \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*,\nu} f_{l^*,\mu-\nu}, \quad \mu \in \mathbb{Z}^+, \quad n \geqslant 0. \tag{1.16}$$

При этом

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu} = 0, \quad \mu < K - n, \quad n < C_1\varepsilon M.$$

Поэтому, если в соотношении (1.16) воспользоваться оценкой (1.13) и определением E-функции для $f_{l^*}(z)$, то мы получим (для $\mu \geqslant K - n$):

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}| \leqslant 2 \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \| P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z) \| \} C^{\mu+1} < (2C)^{\mu+1} C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2 \varepsilon M},$$

откуда

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)| = \left| \sum_{\mu \geqslant K-n} \frac{R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}}{\mu!} \alpha^\mu \right| < C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M} \sum_{\mu \geqslant K-n} \frac{|\alpha|^\mu}{\mu!} (2C)^{\mu+1}.$$

Пользуясь неравенством

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{|\alpha|^{\mu}}{\mu!}(2C)^{\mu+1} &\leqslant \frac{|\alpha|^{K-n}(2C)^{K-n+1}}{(K-n)!}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{\bigl(2C|\alpha|\bigr)^{\mu-K+n}}{(\mu-K+n)!}\\
&= \frac{|\alpha|^{K-n}(2C)^{K-n+1}}{(K-n)!}e^{2C|\alpha|}\\
&< \bigl(2C|\alpha|\bigr)^{2M}\left(\frac{e}{K-n}\right)^{K-n}e^{2C|\alpha|}\\
&< \bigl(2C|\alpha|\bigr)^{2M}\left(\frac{e}{M}\right)^{K}e^{2C|\alpha|}\\
&< e^{2C|\alpha|}\bigl(2C|\alpha|e\bigr)^{2M}M^{-K},
\end{aligned}$$

поскольку $M<K-n\leqslant K<2M$, получаем:

$$|R_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha)|<C_0^{\omega M/\varepsilon}M^{C_2\varepsilon M}e^{2C|\alpha|}\bigl(2C|\alpha|e\bigr)^{2M}M^{-K},$$

что и дает (1.14).

Лемма 1.3 и равенство (1.15) означают, что рациональное число $-P_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha)/P_{\bar s^*-\bar e_{l^*}}^{[n]}(\alpha)$ для любого не слишком большого n будет достаточно хорошим приближением к числу $f_{l^*}(\alpha)$.

§ 2. Алгебраическая природа переходной матрицы

Рассмотрим матрицу

$$(x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega;\bar s\in\Theta}, \tag{2.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
x_{\bar\kappa,\bar s}&=\delta_{\bar\kappa,\bar s}, &&\text{если } |\bar\kappa|=N;\\
x_{\bar\kappa,\bar s}&=\sum_{j=1}^{m}\delta_{\bar\kappa+\bar e_j,\bar s}y_j, &&\text{если } |\bar\kappa|=N-1,
\end{aligned}\right\}\quad \bar s\in\Theta, \tag{2.2}$$

переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ независимы. При подстановке $y_j = f_j(z)$, $j = 1, \ldots, m$, матрица (2.1) согласно формуле (0.20) является матрицей перехода от строки $\big(P_{\bar\kappa}(z)\big)_{\bar\kappa\in\Omega}$ к строке $\big(R_{\bar s}(z)\big)_{\bar s\in\Theta}$.

Пусть задано непустое множество $\widetilde\Omega \subset \Omega$ и функции

$$\begin{matrix} D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \in \mathbb{C}(z), & \\ D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \equiv 0, \quad \bar\kappa' \prec \bar\kappa, & \end{matrix} \quad \bar\kappa \in \widetilde\Omega, \quad \bar\kappa' \in \Omega \setminus \widetilde\Omega, \tag{2.3}$$

определяют элементы матрицы

$$\left(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s}\right)_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega;\bar s\in\Theta} \tag{2.4}$$

по формуле

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s} &= x_{\bar\kappa,\bar s} + \sum_{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega} D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} x_{\bar\kappa',\bar s} \\ &= x_{\bar\kappa,\bar s} + \sum_{\substack{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega \\ \bar\kappa'\succ\bar\kappa}} D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} x_{\bar\kappa',\bar s}, \quad \bar\kappa \in \widetilde\Omega, \quad \bar s \in \Theta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Целью этого параграфа будет доказательство оценки снизу ранга матрицы (2.4), содержащейся в следующем утверждении.

Предложение 2.1. *Для любого непустого множества* $\widetilde\Omega \subset \Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde\Omega = \widetilde\omega$, *существуют множества* $\Omega_1 \subset \widetilde\Omega$ *и* $\Theta_1 \subset \Theta$, $\operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1 = \widetilde\theta$, *зависящие только от множества* $\widetilde\Omega$ *и не зависящие от рациональных функций* (2.3), *такие, что минор* $\det(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$ *матрицы* (2.4) *отличен от нуля и*

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde\omega}{\widetilde\theta} \leqslant \dfrac{\omega}{\theta} - \dfrac{1}{(N+m-1)\theta}, & \text{если } \widetilde\Omega \ne \Omega; \\[2ex] \dfrac{\widetilde\omega}{\widetilde\theta} = \dfrac{\omega}{\theta}, & \text{если } \widetilde\Omega = \Omega. \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Пусть произвольные подмножества* $\Omega_1 \subset \Omega$ *и* $\Theta_1 \subset \Theta$ *выбраны так, что* $\operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1$. *Тогда определитель*

$$\det(x_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$$

как многочлен от переменных $y_1,\ldots,y_m$ *является мономом мультистепени*

$$\bar r = \bar r(\Omega_1,\Theta_1) = \sum_{\bar s\in\Theta_1}\bar s - \sum_{\bar\kappa\in\Omega_1}\bar\kappa$$

или равен нулю.

Доказательство. Требуемый определитель представляет собой сумму всевозможных произведений вида

$$\pm\prod_{\bar\kappa\in\Omega_1} x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)},$$

где σ – произвольное биективное отображение множества Ω_1 на множество Θ_1. Поэтому достаточно показать, что каждое такое ненулевое произведение в точности равно $\pm\bar y^{\bar r}$. Из определения (2.2) элементов матрицы (2.1) следует, что если $x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)} \neq 0$ для всех $\bar\kappa\in\Omega_1$, то для каждого $\bar\kappa\in\Omega_1$ либо $\sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa$ (и тогда $x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)}=1$, $|\bar\kappa|=N$) либо существует $j=j(\bar\kappa,\sigma)$, $1\leqslant j\leqslant m$, такой, что $\sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_j$ (и тогда $x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)}=y_j$, $|\bar\kappa|=N-1$). Поэтому

$$\prod_{\bar\kappa\in\Omega_1} x_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)} = \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ |\bar\kappa|=N-1}} y_{j(\bar\kappa,\sigma)}, \tag{2.6}$$

где произведение в правой части в случае $\Omega_1\subset\Theta$ считаем равным 1. Сложим равенства

$$\sigma(\bar\kappa)=\begin{cases}\bar\kappa, & \text{если } |\bar\kappa|=N;\\ \bar\kappa+\bar e_{j(\bar\kappa,\sigma)}, & \text{если } |\bar\kappa|=N-1,\end{cases}\qquad \bar\kappa\in\Omega_1, \tag{2.7}$$

по всевозможным $\bar{\kappa} \in \Omega_1$ и воспользуемся тем, что $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ есть биекция:

$$\sum_{\substack{\bar{\kappa}\in\Omega_1\\ |\bar{\kappa}|=N-1}} \bar{e}_{j(\bar{\kappa},\sigma)} = \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1} \sigma(\bar{\kappa}) - \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1} \bar{\kappa} = \sum_{\bar{s}\in\Theta_1} \bar{s} - \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1} \bar{\kappa} = \bar{r},$$

а это означает, что

$$\prod_{\substack{\bar{\kappa}\in\Omega_1\\ |\bar{\kappa}|=N-1}} y_{j(\bar{\kappa},\sigma)} = \prod_{\substack{\bar{\kappa}\in\Omega_1\\ |\bar{\kappa}|=N-1}} \bar{y}^{\bar{e}_{j(\bar{\kappa},\sigma)}} = \bar{y}^{\bar{r}}.$$

Сопоставляя это равенство с (2.6), получаем требуемое утверждение.

Замечание. Из доказательства леммы 2.2 вытекает, что величина

$$\operatorname{Card}\bigl\{\bar{\kappa} \in \Omega_1 : \sigma(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa} + \bar{e}_j\bigr\} = r_j$$

зависит только от множеств Ω_1, Θ_1, и не зависит от биективного отображения $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ вида (2.7).

Лемма 2.3. *Пусть заданы множество $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, рациональные функции* (2.3); *произвольные множества $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и $\Theta_1 \subset \Theta$ таковы, что $\operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1$. Тогда если $\det(x_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0$, то и $\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0$.*

Доказательство. Перепишем соотношение (2.5) в виде

$$(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega};\bar{s}\in\Theta} = (\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega};\bar{\kappa}'\in\Omega}(x_{\bar{\kappa}',\bar{s}})_{\bar{\kappa}'\in\Omega;\bar{s}\in\Theta},$$

где

$$\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = \begin{cases} \delta_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}, & \text{если } \bar{\kappa}' \in \widetilde{\Omega}; \\ D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}, & \text{если } \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \end{cases} \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \tag{2.8}$$

и воспользуемся формулой Бине–Коши [4, с. 17]:

$$\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} = \sum_{\substack{\Omega'\subset\Omega \\ \operatorname{Card}\Omega'=\operatorname{Card}\Omega_1}} \det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} \det(x_{\bar{\kappa}',\bar{s}})_{\bar{\kappa}'\in\Omega';\bar{s}\in\Theta_1}. \tag{2.9}$$

Согласно лемме 2.2 каждый определитель $\det(x_{\bar{\kappa}',\bar{s}})_{\bar{\kappa}'\in\Omega';\bar{s}\in\Theta_1}$, отличный от нуля, является произведением степеней переменных $y_1,\dots,y_m$. Покажем, что определитель, отвечающий множеству $\Omega'=\Omega_1$ (отличный от нуля по условию), имеет наибольшую мультистепень среди всех других ненулевых определителей такого вида, а коэффициент при нем в сумме (2.9) равен 1. Отсюда и будет следовать утверждение леммы 2.3.

Рассмотрим каждое ненулевое слагаемое суммы (2.9). Пусть Ω' – произвольное подмножество Ω, $\operatorname{Card}\Omega' = \operatorname{Card}\Omega_1$, такое, что $\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} \neq 0$.

Если $\Omega'=\Omega_1$, то

$$\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} = \det(\delta_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega_1} = 1.$$

Если же $\Omega' \neq \Omega_1$, то $\widetilde{\Omega}' = \Omega' \cap \widetilde{\Omega} \subset \Omega_1$. Действительно, в противном случае существует мультииндекс $\bar{\kappa}' \in \widetilde{\Omega}' \subset \widetilde{\Omega}$ такой, что $\bar{\kappa}' \notin \Omega_1$. Тогда для любого $\bar{\kappa} \in \Omega_1$ имеем $\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = \delta_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = 0$, и значит, $\det(\widetilde{D}_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{\kappa}'\in\Omega'} = 0$. Итак, $\widetilde{\Omega}' \subset \Omega_1$.

Раскладывая определитель матрицы $(\widetilde{D}_{\bar\kappa,\bar\kappa'})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar\kappa'\in\Omega'}$ последовательно по строкам с номерами $\bar\kappa \in \widetilde{\Omega}' \subset \widetilde{\Omega}$, согласно (2.8) получим с точностью до знака определитель

$$\det(\widetilde{D}_{\bar\kappa,\bar\kappa'})_{\bar\kappa\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'} = \det(D_{\bar\kappa,\bar\kappa'})_{\bar\kappa\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}.$$

Поскольку $\Omega' \neq \Omega_1$, имеем $\mu = \mathrm{Card}(\Omega_1 \setminus \widetilde{\Omega}') = \mathrm{Card}(\Omega' \setminus \widetilde{\Omega}') \geqslant 1$. Упорядочим элементы множеств в лексикографическом порядке:

$$\Omega_1 \setminus \widetilde{\Omega}' = \{\bar\kappa^{(1)}, \dots, \bar\kappa^{(\mu)}\}, \quad \bar\kappa^{(1)} \prec \dots \prec \bar\kappa^{(\mu)};$$
$$\Omega' \setminus \widetilde{\Omega}' = \{\bar r^{(1)}, \dots, \bar r^{(\mu)}\}, \quad \bar r^{(1)} \prec \dots \prec \bar r^{(\mu)}.$$

Если для некоторого ν, $1 \leqslant \nu \leqslant \mu$, выполнено $\bar r^{(\nu)} \prec \bar\kappa^{(\nu)}$, то согласно (2.3)

$$D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} = 0, \quad \bar\kappa \in \{\bar\kappa^{(\nu)}, \dots, \bar\kappa^{(\mu)}\}, \quad \bar\kappa' \in \{\bar r^{(1)}, \dots, \bar r^{(\nu)}\}.$$

Это означает, что первые ν столбцов матрицы $(D_{\bar\kappa,\bar\kappa'})_{\bar\kappa\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}$ линейно зависимы, что невозможно ввиду условия

$$\det(D_{\bar\kappa,\bar\kappa'})_{\bar\kappa\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'} = \pm\det(\widetilde{D}_{\bar\kappa,\bar\kappa'})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar\kappa'\in\Omega'} \neq 0.$$

Поэтому $\bar r^{(\nu)} \succ \bar\kappa^{(\nu)}$ для всех $\nu = 1, \dots, \mu$, и, в частности,

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \bar r^{(\nu)} \succ \sum_{\nu=1}^{\mu} \bar\kappa^{(\nu)},$$

или

$$\sum_{\bar{\kappa}\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}\bar{\kappa}\succ\sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}'}\bar{\kappa}.$$

Таким образом, любому ненулевому слагаемому в сумме (2.9), соответствует либо множество $\Omega'=\Omega_1$ либо множество Ω', для которого

$$\sum_{\bar{\kappa}\in\Omega'}\bar{\kappa}\succ\sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1}\bar{\kappa}.$$

Но последнее условие согласно лемме 2.2 означает, что мультистепень соответствующего множествам Ω', Θ_1 монома младше мультистепени монома, соответствующего множествам Ω_1, Θ_1. Следовательно, в многочлене $\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1}$ от переменных $y_1,\dots,y_m$ присутствует по крайней мере один моном с ненулевым коэффициентом. Это завершает доказательство.

Будем рассматривать пары (Ω_1,σ), где $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$ и $\sigma:\Omega_1\to\Theta$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\operatorname{Card}\sigma(\Omega_1)=\operatorname{Card}\Omega_1$, т.е. σ – биекция множеств Ω_1 и $\sigma(\Omega_1)$;
2) отображение $\sigma:\Omega_1\to\Theta$ имеет вид (2.7);
3) если $\bar{\kappa}\in\Omega_1$ и $\bar{\kappa}+\bar{e}_j\prec\sigma(\bar{\kappa})$, то $\bar{\kappa}+\bar{e}_j\in\sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\bar{\kappa}+\bar{e}_j)\succ\bar{\kappa}$.

Лемма 2.4. *Если* $\widetilde{\Omega}\neq\varnothing$, *то пары* (Ω_1,σ), *удовлетворяющие условиям* 1)–3), *существуют.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи, когда $\widetilde{\Omega}\cap\Theta\neq\varnothing$ и когда $\widetilde{\Omega}\cap\Theta=\varnothing$. В первом возьмем произвольный элемент $\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}\cap\Theta$ и положим $\sigma(\bar{\kappa})=\bar{\kappa}$, во втором – произвольный элемент $\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}$ и положим $\sigma(\bar{\kappa})=\bar{\kappa}+\bar{e}_m\in\Theta$. Тогда пара $(\{\bar{\kappa}\},\sigma)$, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2). Кроме того, не существует j, $1\leqslant j\leqslant m$, такого, что $\bar{\kappa}+\bar{e}_j\prec\sigma(\bar{\kappa})$. Поэтому условие 3) также выполнено для указанной пары.

Лемма 2.5. *Пусть множество* $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ *вместе с отображением* $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$ *удовлетворяют условиям* 1)–3). *Тогда любое биективное отображение множества* Ω_1 *в* $\sigma(\Omega_1)$ *вида* (2.7) *совпадает с* σ.

Доказательство. Пусть σ' – произвольная биекция множества Ω_1 в $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$ вида (2.7). Тогда если $\bar\kappa \in \Omega_1 \cap \Theta$, то $\sigma'(\bar\kappa) = \bar\kappa = \sigma(\bar\kappa)$. Поэтому, если $\sigma'(\bar\kappa) \neq \sigma(\bar\kappa)$, то $\bar\kappa \in \Omega_1 \setminus \Theta$. Предположим, что существуют элементы $\bar\kappa \in \Omega_1$, для которых $\sigma'(\bar\kappa) \neq \sigma(\bar\kappa)$. Пусть j', $1 \leqslant j' \leqslant m$, – наибольший номер, для которого существует $\bar\kappa' \in \Omega_1$ с условием $\sigma'(\bar\kappa') = \bar\kappa' + \bar e_{j'} \neq \sigma(\bar\kappa')$. Как было отмечено в замечании к лемме 2.2,

$$\mathrm{Card}\{\bar\kappa \in \Omega_1 : \sigma'(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j\} = \mathrm{Card}\{\bar\kappa \in \Omega_1 : \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j\}.$$

Из условия $\sigma'(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j$, $j' < j \leqslant m$, в силу выбора j' вытекает, что $\sigma'(\bar\kappa) = \sigma(\bar\kappa)$. Так что множества $\{\bar\kappa \in \Omega_1 : \sigma'(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j\}$ и $\{\bar\kappa \in \Omega_1 : \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j\}$, $j' < j \leqslant m$, совпадают, и значит, если $\sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_j$ при $j' < j \leqslant m$, то $\sigma(\bar\kappa) = \sigma'(\bar\kappa)$. Поэтому из условия $\sigma'(\bar\kappa') = \bar\kappa' + \bar e_{j'} \neq \sigma(\bar\kappa') = \bar\kappa' + \bar e_{j_1}$, вытекает, что $j_1 < j'$. Кроме того, если $\bar r \in \Omega_1$ таково, что $\sigma'(\bar\kappa') = \sigma(\bar r) = \bar r + \bar e_{j_2}$, то $j_2 < j'$. В противном случае $\sigma(\bar r) = \sigma'(\bar r)$ и поскольку σ' – биекция, имеем $\bar\kappa' = \bar r$ и $\sigma'(\bar\kappa') = \sigma(\bar\kappa')$, что противоречит выбору элемента $\bar\kappa' \in \Omega_1$. Воспользуемся тем, что $\bar e_{j'} \prec \bar e_{j_1}$ и $\bar e_{j'} \prec \bar e_{j_2}$:

$$\bar\kappa' + \bar e_{j'} \prec \bar\kappa' + \bar e_{j_1} = \sigma(\bar\kappa');$$

$$\sigma^{-1}(\bar\kappa + \bar e_{j'}) = \sigma^{-1}\big(\sigma'(\bar\kappa')\big) = \bar r = \sigma'(\bar\kappa') - \bar e_{j_2} = \bar\kappa' + \bar e_{j'} - \bar e_{j_2} \prec \bar\kappa',$$

а это противоречит условию 3), справедливому для пары (Ω_1, σ) при $\bar\kappa = \bar\kappa'$. Полученное противоречие доказывает, что $\sigma'(\bar\kappa) = \sigma(\bar\kappa)$ для всех $\bar\kappa \in \Omega_1$.

Пусть

$$\widetilde{\theta} = \max_{(\Omega_1,\sigma)} \{\operatorname{Card} \Omega_1\},$$

где максимум берется по всевозможным парам (Ω_1, σ), $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$, удовлетворяющим условиям 1)–3). Среди всех таких пар (Ω_1, σ), $\operatorname{Card} \Omega_1 = \widetilde{\theta}$, выберем ту, для которой величина

$$\sum_{\bar{\kappa}\in\Omega_1} \big(\sigma(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big)$$

минимальна (в смысле лексикографического порядка), и зафиксируем ее. Для выбранной таким образом пары (Ω_1, σ) положим $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$, $\Omega_2 = \widetilde{\Omega} \setminus \Omega_1$.

Лемма 2.6. *Справедливо следующее вложение*:

$$\bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar{e}_j) \subset \Theta_1.$$

(Здесь мы полагаем $\Omega_2 + \bar{e}_j = \{\bar{\kappa} + \bar{e}_j : \bar{\kappa} \in \Omega_2\}$, $j = 1, \ldots, m$.)

Доказательство. Прежде всего докажем, что $\Omega_2 \cap \Theta = \varnothing$, точнее, что если $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega} \cap \Theta$, то $\bar{\kappa} \in \Omega_1$. Если это не выполнено, т.е. некоторый элемент $\bar{\kappa}^* \in \widetilde{\Omega} \cap \Theta$ не лежит в Ω_1, то существует пара (Ω_1^*, σ^*), где $\Omega_1^* = \Omega_1 \cup \{\bar{\kappa}^*\}$,

$$\sigma^*(\bar{\kappa}) = \begin{cases} \sigma(\bar{\kappa}), & \text{если } \bar{\kappa} \in \Omega_1; \\ \bar{\kappa}^*, & \text{если } \bar{\kappa} = \bar{\kappa}^*, \end{cases}$$

удовлетворяющая условиям 1)–3), но $\operatorname{Card} \Omega_1^* > \operatorname{Card} \Omega_1$. Это противоречит выбору пары (Ω_1, σ). Поэтому $\Omega_2 \cap \Theta = \varnothing$ и, значит,

$$\bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar{e}_j) \subset \Theta.$$

Предположим теперь существование j, $1 \leqslant j \leqslant m$, такого, что $\Omega_2 + \bar{e}_j \not\subset \Theta_1$, и среди всех таких j выберем максимальное j^*. Это означает, что для некоторого $\bar{\kappa}^* \in \Omega_2$ выполнено $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*} \notin \Theta_1$. Кроме того, $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \in \Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$ для всех j, $j^* < j \leqslant m$, т.е. для таких j, что $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \prec \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}$. Покажем, что $\sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \succ \bar{\kappa}^*$ для всех таких j.

Если это не так, то выберем максимальное j такое, что $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \prec \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}$ и $\bar{\kappa}' = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \prec \bar{\kappa}^*$. Если $\sigma(\bar{\kappa}') = \bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'}$, то

$$\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j - \bar{e}_{j'} = \bar{\kappa}' = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \prec \bar{\kappa}^*,$$

откуда $\bar{e}_j \prec \bar{e}_{j'}$. Рассмотрим пару (Ω_1^*, σ^*), где $\Omega_1^* = (\Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}) \cup \{\bar{\kappa}^*\}$ и

$$\sigma^*(\bar{\kappa}) = \begin{cases} \sigma(\bar{\kappa}), & \text{если } \bar{\kappa} \in \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\} = \Omega_1^* \setminus \{\bar{\kappa}^*\}; \\ \bar{\kappa}^* + \bar{e}_j = \sigma(\bar{\kappa}'), & \text{если } \bar{\kappa} = \bar{\kappa}^*. \end{cases}$$

Для нее, очевидно, справедливы условия 1), 2). В силу выбора j условие 3) выполнено при $\bar{\kappa}^* \in \Omega_1^*$. Поскольку $\sigma(\Omega_1) = \sigma^*(\Omega_1^*)$ и

$$(\sigma^*)^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) = \bar{\kappa}^* \succ \bar{\kappa}' = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) = \sigma^{-1}(\bar{\kappa}' + \bar{e}_{j'}),$$

то условие 3) справедливо и при любом $\bar{\kappa} \in \Omega_1^* \setminus \{\bar{\kappa}^*\} = \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}$. Итак, пара (Ω_1^*, σ^*) удовлетворяет условиям 1)–3) и

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1^*} \big(\sigma^*(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1^* \setminus \{\bar{\kappa}^*\}} \big(\sigma^*(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) + \big(\sigma^*(\bar{\kappa}^*) - \bar{\kappa}^*\big) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}} \big(\sigma(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) + \bar{e}_j \\ &\prec \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1 \setminus \{\bar{\kappa}'\}} \big(\sigma(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big) + \bar{e}_{j'} \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_1} \big(\sigma(\bar{\kappa}) - \bar{\kappa}\big), \end{aligned}$$

а это противоречит выбору пары (Ω_1, σ).

Таким образом, мы получили, что $\bar{\kappa}^* \notin \Omega_1$, $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*} \notin \sigma(\Omega_1)$ и если $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \prec \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}$, то $\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j \in \sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\bar{\kappa}^* + \bar{e}_j) \succ \bar{\kappa}^*$. Поэтому пара (Ω_1^*, σ^*), где $\Omega_1^* = \Omega_1 \cup \{\bar{\kappa}^*\}$,

$$\sigma^*(\bar{\kappa}) = \begin{cases} \sigma(\bar{\kappa}), & \text{если } \bar{\kappa} \in \Omega_1; \\ \bar{\kappa}^* + \bar{e}_{j^*}, & \text{если } \bar{\kappa} = \bar{\kappa}^*, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1)–3), в то время как $\operatorname{Card} \Omega_1^* > \operatorname{Card} \Omega_1$. Это противоречит выбору пары (Ω_1, σ). Следовательно, $\Omega_2 + \bar{e}_j \subset \Theta_1$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.7. *Для произвольных множеств A, B и любого вещественного β, $0 < \beta < 1$, имеет место неравенство*

$$\operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \beta \operatorname{Card} A + (1 - \beta) \operatorname{Card} B;$$

оно превращается в равенство тогда и только тогда, когда множества A и B совпадают.

Доказательство. Если умножить первое из очевидных неравенств

$$\operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \operatorname{Card} A, \quad \operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \operatorname{Card} B, \tag{2.10}$$

на β, а второе – на $(1 - \beta)$ и сложить, то получим требуемое неравенство. Неравенства (2.10) превращаются в равенства только в случае $A \cup B = A$ и $A \cup B = B$.

Лемма 2.8. *Для натуральных чисел* $m \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ *пусть* Ω_2 – *произвольное подмножество* $\{\bar\kappa : \kappa_1 + \dots + \kappa_m = N-1\}$ *и*

$$\Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar e_j) \subset \{\bar\kappa : \kappa_1 + \dots + \kappa_m = N\}.$$

Тогда

$$\operatorname{Card}\Theta_2 \geqslant \frac{N+m-1}{N} \operatorname{Card}\Omega_2, \tag{2.11}$$

причем равенство имеет место лишь в одном из трех случаев: $m = 1$, $\Omega_2 = \varnothing$ *или* $\Omega_2 = \{\bar\kappa : \kappa_1 + \dots + \kappa_m = N-1\}$.

Доказательство. В случае $m = 1$ имеем очевидное равенство $\operatorname{Card}\Theta_2 = \operatorname{Card}\Omega_2$. Поэтому пусть $m \geqslant 2$ и для $m-1$ утверждение леммы доказано. Разобьем множество Ω_2 (даже если оно пустое) на непересекающиеся подмножества

$$\Omega_2^{(\nu)} = \{\bar\kappa \in \Omega_2 : \kappa_1 + \dots + \kappa_{m-1} = \nu\}, \quad \nu = 0, 1, \dots, N-1, \tag{2.12}$$

и положим

$$\Theta_2^{(\nu)} = \bigcup_{j=1}^{m-1} (\Omega_2^{(\nu)} + \bar e_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, N-1. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar e_j) = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{\nu=0}^{N-1} (\Omega_2^{(\nu)} + \bar e_j) = \bigcup_{\nu=0}^{N-1} \big(\Theta_2^{(\nu)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar e_m)\big)$$

$$= \big[\Omega_2^{(0)} + \bar e_m\big] \cup \bigcup_{\nu=1}^{N-1} \big[\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar e_m)\big] \cup \big[\Theta_2^{(N-1)}\big].$$

Множества в квадратных скобках не пересекаются, так как каждое из них характеризуется своей суммой первых $m-1$ координат входящих мультииндексов. Поэтому

$$\operatorname{Card}\Theta_2 = \operatorname{Card}\Omega_2^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \operatorname{Card}\bigl(\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar e_m)\bigr) + \operatorname{Card}\Theta_2^{(N-1)}. \tag{2.14}$$

Согласно лемме 2.7 имеем:

$$\operatorname{Card}\bigl(\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \bar e_m)\bigr) \geqslant \frac{\nu}{N}\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu-1)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.15}$$

что дает возможность переписать (2.14) в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Theta_2 &\geqslant \operatorname{Card}\Omega_2^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{N-1}\Bigl(\frac{\nu}{N}\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu-1)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}\Bigr) \\ &\qquad + \operatorname{Card}\Theta_2^{(N-1)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1}\Bigl(\frac{\nu+1}{N}\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}\Bigr).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Осталось воспользоваться индукционным предположением для множеств (2.12)–(2.13):

$$\operatorname{Card}\Theta_2^{(\nu)} \geqslant \frac{\nu+m-1}{\nu+1}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, N-1,$$

и неравенство (2.16) примет требуемый вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Theta_2 &\geqslant \sum_{\nu=0}^{N-1}\Bigl(\frac{\nu+1}{N}\cdot\frac{\nu+m-1}{\nu+1}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)} + \frac{N-\nu}{N}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)}\Bigr) \\ &= \frac{N+m-1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\operatorname{Card}\Omega_2^{(\nu)} = \frac{N+m-1}{N}\operatorname{Card}\Omega_2.\end{aligned}$$

Это неравенство становится равенством, если каждое из неравенств (2.15) превращается в равенство, т.е. если

$$\Omega_2^{(\nu)} + \bar{e}_m = \Theta_2^{(\nu-1)} = \bigcup_{j=1}^{m-1} (\Omega_2^{(\nu-1)} + \bar{e}_j), \quad \nu = 1, \dots, N-1. \quad (2.17)$$

Если $\Omega_2^{(0)} \neq \varnothing$, т.е. $\Omega_2^{(0)} = \{(0, \dots, 0, N-1)\}$, то индукцией по $\nu = 1, \dots, N-1$ с помощью (2.17) легко устанавливаем равество $\Omega_2^{(\nu)} = \{\bar{\kappa} : \kappa_1 + \dots + \kappa_{m-1} = \nu\}$. Если же $\Omega_2^{(0)} = \varnothing$, то индукцией по $\nu = 1, \dots, N-1$ с помощью (2.17) устанавливаем, что $\Omega_2^{(\nu)} = \varnothing$. Поэтому (2.11) становится при $m \geqslant 2$ равенством только в случае, когда Ω_2, являющееся объединением множеств (2.12), либо совпадает с $\{\bar{\kappa} : \kappa_1 + \dots + \kappa_m = N-1\}$ либо пусто.

Доказательство предложения 2.1. Выберем множество $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и отображение $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$, как это было проделано перед леммой 2.6, и положим

$$\Theta_1 = \sigma(\Omega_1), \quad \Omega_2 = \widetilde{\Omega} \setminus \Omega_1, \quad \Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \bar{e}_j).$$

Поскольку $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ – единственное биективное отображение множества Ω_1 во множество Θ_1, то $\det(x_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0$, откуда и из леммы 2.3 $\det(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}})_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0$.

Если $\Omega_2 = \varnothing$ или $\Omega_1 = \widetilde{\Omega}$, то

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \frac{\operatorname{Card} \widetilde{\Omega}}{\operatorname{Card} \Theta_1} = \frac{\operatorname{Card} \Omega_1}{\operatorname{Card} \Theta_1} = 1 < 1 + \frac{N}{N+m-1}.$$

Если же $\Omega_2 \neq \varnothing$, то $\Theta_2 \neq \varnothing$, и значит, $\operatorname{Card}\Theta_2 > 0$. В силу леммы 2.6 имеем $\Theta_2 \subset \Theta_1$, откуда $\operatorname{Card}\Theta_2 \leqslant \operatorname{Card}\Theta_1$. Согласно лемме 2.8 получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} &= \frac{\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}}{\operatorname{Card}\Theta_1} = \frac{\operatorname{Card}\Omega_1 + \operatorname{Card}\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} = \frac{\operatorname{Card}\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} + \frac{\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} \\ &= 1 + \frac{\operatorname{Card}\Omega_2}{\operatorname{Card}\Theta_1} \leqslant 1 + \frac{\operatorname{Card}\Omega_2}{\operatorname{Card}\Theta_2} \leqslant 1 + \frac{N}{N+m-1},\end{aligned}$$

причем

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = 1 + \frac{N}{N+m-1} = \frac{\omega}{\theta}$$

только в случае $\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1 = \Omega_2 = \{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| = N-1\}$, т.е. $\Omega_1 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ или $\widetilde{\Omega} = \Omega = \big\{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| \in \{N-1, N\}\big\}$.

Таким образом, если $\widetilde{\Omega} \neq \Omega$, то

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} < 1 + \frac{N}{N+m-1} = \frac{2N+m-1}{N+m-1} = \frac{\omega}{\theta}.$$

Последнее означает, что $(2N+m-1)\widetilde{\theta} - (N+m-1)\widetilde{\omega} \geqslant 1$, и поскольку $\widetilde{\theta} \leqslant \operatorname{Card}\Theta = \theta$, имеем:

$$\frac{\omega}{\theta} - \frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \frac{(2N+m-1)\widetilde{\theta} - (N+m-1)\widetilde{\omega}}{(N+m-1)\widetilde{\theta}} \geqslant \frac{1}{(N+m-1)\theta}.$$

Предложение 2.1 доказано полностью.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $a_1, \dots, a_m$ – произвольное решение системы (0.10); $y_1, \dots, y_m$ – произвольное решение системы (0.5). Тогда набор функций

$$x_{\bar\kappa} = \bar a^{\bar\kappa}(1 + a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)^{N-|\bar\kappa|}, \quad \bar\kappa \in \Omega,$$

удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} x_{\bar\kappa} = -\sum_{l,j=1}^{m} \kappa_j Q_{lj} x_{\bar\kappa - \bar e_j + \bar e_l} + \bigl(N - |\bar\kappa|\bigr) \sum_{l=1}^{m} Q_{l0} x_{\bar\kappa + \bar e_l}, \quad \bar\kappa \in \Omega, \tag{3.1}$$

порядка ω. Через $\beta \in \mathbb{C}$ обозначим точку, отличную от полюсов рациональных функций Q_{lj}, $l = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$ (поскольку $Q_{lj} \in \mathbb{Q}(z)$, $l = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$, в качестве β можно взять любое трансцендентное число, например, $\beta = e$). Согласно теореме существования для дифференциальных уравнений найдется фундаментальная матрица решений $(\varphi_{lj})_{l,j=1,\dots,m}$ однородной системы (0.10) и частное решение $(\gamma_l)_{l=1,\dots,m}$ неоднородной системы (0.5) такие, что

$$\varphi_{lj}\big|_{z=\beta} = \delta_{lj}, \quad \gamma_l\big|_{z=\beta} = 1, \quad l, j = 1, \dots, m.$$

Положим, кроме того,

$$\psi_j = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{lj} \gamma_l, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\psi_j\big|_{z=\beta} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{lj}\big|_{z=\beta} \cdot \gamma_l\big|_{z=\beta} = 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Лемма 3.1. *Элементы произвольной фундаментальной матрицы решений системы* (3.1) *являются многочленами от*

$$\varphi_{lj}, \ \psi_j, \quad l, j = 1, \dots, m, \tag{3.2}$$

степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$.

Доказательство достаточно провести для одной фундаментальной матрицы решений, так как любая другая выражается через нее умножением на матрицу с элементами из $\mathbb{C}$.

Общее решение $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ системы (0.10) может быть представлено в виде

$$a_l = \rho_1\varphi_{l1} + \dots + \rho_m\varphi_{lm}, \quad l = 1, \dots, m,$$

где $\rho_1, \dots, \rho_m$ – произвольные числа из $\mathbb{C}$. Тогда

$$a_1\gamma_1 + \dots + a_m\gamma_m = \sum_{l,j=1}^{m} \rho_j\varphi_{lj}\gamma_l = \rho_1\psi_1 + \dots + \rho_m\psi_m$$

и набор функций

$$\begin{aligned}\bar{a}^{\bar{\kappa}}(1 + a_1\gamma_1 + \dots + a_m\gamma_m)^{N-|\bar{\kappa}|} &= \prod_{l=1}^{m}(\rho_1\varphi_{l1} + \dots + \rho_m\varphi_{lm})^{\kappa_l} \\ &\quad \times (1 + \rho_1\psi_1 + \dots + \rho_m\psi_m)^{N-|\bar{\kappa}|} \\ &= \sum_{\bar{r}\in\Omega} \bar{\rho}^{\bar{r}} u_{\bar{\kappa},\bar{r}}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega,\end{aligned}$$

при любых значениях $\rho_1, \dots, \rho_m$ составляет решение системы (3.1). Это означает, что для каждого $\bar{r} \in \Omega$ вектор $(u_{\bar{\kappa},\bar{r}})_{\bar{\kappa}\in\Omega}$ размерности ω удовлетворяет системе (3.1). Тем самым мы получили ω решений этой системы.

Покажем, что $\det(u_{\bar{\kappa},\bar{r}})_{\bar{\kappa},\bar{r}\in\Omega} \not\equiv 0$. Для этого посчитаем значение этого определителя в точке $z = \beta$. Имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{\bar{r}\in\Omega} \bar{\rho}^{\bar{r}} u_{\bar{\kappa},\bar{r}}\big|_{z=\beta} &= \prod_{l=1}^{m}\left(\rho_1\varphi_{l1}\big|_{z=\beta} + \dots + \rho_m\varphi_{lm}\big|_{z=\beta}\right)^{\kappa_l} \\ &\quad \times \left(1 + \rho_1\psi_1\big|_{z=\beta} + \dots + \rho_m\psi_m\big|_{z=\beta}\right)^{N-|\bar{\kappa}|} \\ &= \bar{\rho}^{\bar{\kappa}}(1 + \rho_1 + \dots + \rho_m)^{N-|\bar{\kappa}|}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega.\end{aligned}$$

Поэтому для всех $\bar r \prec \bar\kappa$ выполнено $u_{\bar\kappa,\bar r}\big|_{z=\beta} = 0$, а кроме того, имеем $u_{\bar\kappa,\bar\kappa}\big|_{z=\beta} = 1, \bar\kappa \in \Omega$. Таким образом, числовая матрица $(u_{\bar\kappa,\bar r}\big|_{z=\beta})_{\bar\kappa,\bar r\in\Omega}$ имеет треугольный вид, причем на ее диагонали стоят единицы. Следовательно, ее определитель $\det(u_{\bar\kappa,\bar r})_{\bar\kappa,\bar r\in\Omega}\big|_{z=\beta} = 1$. Но отсюда вытекает, что матрица $(u_{\bar\kappa,\bar r})_{\bar\kappa,\bar r\in\Omega}$ является фундаментальной матрицей решений системы (3.1). Ее элементы $u_{\bar\kappa,\bar r}$, $\bar\kappa, \bar r \in \Omega$, являются многочленами от функций (3.2) степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_W(z)$ – совокупность функций, аналитических в некоторой области; функции $\lambda_0(z) \not\equiv 0, \lambda_1(z), \ldots, \lambda_L(z)$ являются многочленами от $\varphi_1, \ldots, \varphi_W$ степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{C}$, причем*

$$D_l(z) = \frac{\lambda_l(z)}{\lambda_0(z)} \in \mathbb{C}(z), \quad l = 1, \ldots, L. \tag{3.3}$$

Тогда для рациональных функций (3.3) справедливо представление

$$D_l(z) = \frac{B_l(z)}{B_0(z)}, \quad l = 1, \ldots, L;$$

$$B_l \in \mathbb{C}[z], \quad \deg B_l \leqslant C_5 n, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

где постоянная C_5 зависит только от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_W$.

Доказательство. Рассмотрим кольцо $\mathbb{C}(z)[\varphi_1, \ldots, \varphi_W]$ и выберем в нем максимальное количество алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ элементов $\xi_1, \ldots, \xi_w$ и обозначим буквой d степень алгебраического расширения $\mathbb{C}(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_W) \supset \mathbb{C}(z, \xi_1, \ldots, \xi_w)$. Через $\mu_1, \ldots, \mu_d$ обозначим базис поля $\mathbb{C}(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_W)$ над $\mathbb{C}(z, \xi_1, \ldots, \xi_w)$. Повторяя рассуждения работы [9, с. 274–275], представим функции $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_L$ в виде

$$\lambda_l = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{li}\mu_i}{a^n}, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

$$b_{li} \in \mathbb{C}[z, \xi_1, \ldots, \xi_w], \quad \deg_z b_{li} \leqslant C_5 n, \quad i = 1, \ldots, d, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

где многочлен $a \in \mathbb{C}[z, \xi_1, \ldots, \xi_w]$ и постоянная C_5 зависят только от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_W$. Тогда

$$D_l = \frac{a^n \lambda_l}{a^n \lambda_0} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{li}\mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{0i}\mu_i}, \quad l = 1, \ldots, L,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{d} \mu_i (D_l b_{0i} - b_{li}) = 0, \quad l = 1, \ldots, L,$$

или

$$D_l b_{0i} - b_{li} = 0, \quad i = 1, \ldots, d, \quad l = 1, \ldots, L,$$

ввиду линейной независимости $\mu_1, \ldots, \mu_d$ над $\mathbb{C}(z, \xi_1, \ldots, \xi_w)$. Поскольку $\lambda_0 \neq 0$, для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant d$, выполнено $b_{0i} \neq 0$. Не ограничивая общности можно считать, что $b_{01} \neq 0$. Как вытекает из последнего равенства,

$$D_l = \frac{b_{l1}}{b_{01}}, \quad l = 1, \ldots, L.$$

Многочлены b_{l1}, $l = 0, 1, \ldots, L$, являются линейными комбинациями произведений степеней $\xi_1, \ldots, \xi_w$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и, поскольку

$\xi_1, \dots, \xi_w$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, а $D_1, \dots, D_L \in \mathbb{C}(z)$, функции (3.3) запишутся в требуемом виде

$$D_l = \frac{B_l}{B_0}, \quad l = 1, \dots, L,$$

где $B_l \in \mathbb{C}[z]$ – некоторые коэффициенты многочленов b_{l1}, $l = 0, 1, \dots, L$, и значит,

$$\deg B_l \leqslant \deg_z b_{l1} \leqslant C_5 n, \quad l = 0, 1, \dots, L,$$

что завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. *Определитель*

$$\det\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\omega-1;\bar\kappa\in\Omega} \tag{3.4}$$

отличен от нуля.

Доказательство. Предположим, что определитель (3.4) тождественно равен нулю, и значит, ранг совокупности форм $R^{[0]}(z;\bar a)$, $R^{[1]}(z;\bar a)$, $R^{[2]}(z;\bar a), \dots$ равен $\widetilde\omega$, где $\widetilde\omega < \omega$. Так как $R^{[0]}(z;\bar a) \not\equiv 0$, то $\widetilde\omega \geqslant 1$. По лемме 6 [20, гл. 3] функциональные формы

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z),$$

$$n = 0, 1, \dots, \widetilde\omega - 1,$$

линейно независимы. Поэтому ранг матрицы

$$\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde\omega-1;\bar\kappa\in\Omega}$$

равен $\widetilde{\omega}$, и в ней можно выбрать $\widetilde{\omega}$ линейно независимых столбцов. Будем делать такой выбор “слева направо”, т.е. столбец с номером $\bar{\kappa} \in \Omega$ выбирается в том и только том случае, когда он линейно не выражается через столбцы с номерами, меньшими $\bar{\kappa}$. Тогда базисные столбцы будут иметь номера из некоторого множества $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, причем с некоторыми рациональными функциями (2.3) будут справедливы равенства

$$P^{[n]}_{\bar{\kappa}'}(z) = \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z) D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) = \sum_{\substack{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}\\ \bar{\kappa}\prec\bar{\kappa}'}} P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z) D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z),$$
$$n = 0, 1, \dots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \Delta(z) = \det\bigl(P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} \not\equiv 0,$$

и согласно оценке (1.6) находим, что

$$\deg\Delta < \widetilde{\omega}M + \frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}-1)}{2}t < \widetilde{\omega}M + \omega^2 t.$$

Для произвольного решения $a_1, \dots, a_m$ системы (0.10) набор функций

$$x_{\bar{\kappa}} = \begin{cases} \bar{a}^{\bar{\kappa}}, & \text{если } |\bar{\kappa}| = N; \\ \bar{a}^{\bar{\kappa}}(a_1 f_1 + \dots + a_m f_m), & \text{если } |\bar{\kappa}| = N-1, \end{cases}$$

составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (3.1) порядка ω. В доказательстве леммы 8 [20, гл. 3, с. 102–103] рациональные функции $D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}$, $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, были представлены в виде

$$D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} = -\frac{\lambda_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}}{\lambda}, \quad \lambda \not\equiv 0, \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \tag{3.5}$$

где λ и $\lambda_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}$ – миноры порядка $(\omega - \widetilde{\omega})$ некоторой фундаментальной матрицы решений системы (3.1). По лемме 3.1 элементы этой фундаментальной матрицы решений есть многочлены от функций (3.2) степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Поэтому миноры λ, $\lambda_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}$, $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, порядка $(\omega - \widetilde{\omega})$ являются многочленами от функций (3.2) степени не выше $(\omega - \widetilde{\omega})N \leqslant \omega N$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Как следует из леммы 3.2, для рациональных функций (3.5) существует представление

$$\begin{gathered} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) = \frac{B_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)}{B(z)}, \quad B, B_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} \in \mathbb{C}[z], \quad B \not\equiv 0, \\ \deg B \leqslant C_5 \omega N, \quad \deg B_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'} \leqslant C_5 \omega N, \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где постоянная C_5 зависит только от совокупности функций (3.2), которые, в свою очередь, однозначно определяются системой (0.5) (точка β не зависит ни от чего). Но из леммы 3 [20, гл. 3] следует, что система (0.5) полностью задается набором линейно независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций $1, f_1(z), \dots, f_m(z)$. Поэтому $C_5 = C_5(f_1, \dots, f_m)$.

Для произвольного многочлена $v \in \mathbb{C}(z)[y_1, \dots, y_m]$ через $v(\bar{f})$ обозначим результат подстановки в него функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ вместо переменных $y_1, \dots, y_m$ соответственно. Тогда подобно (0.20)

$$R_{\bar{s}}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \dots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

и

$$
\begin{aligned}
R_{\bar s}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f) + \sum_{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa'}^{[n]}(z)x_{\bar\kappa',\bar s}(\bar f)\\
&= \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\Bigg(x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f) + \sum_{\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega} D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z)x_{\bar\kappa',\bar s}(\bar f)\Bigg)\\
&= \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f), \quad n=0,1,\dots,\widetilde\omega-1, \quad \bar s\in\Theta, \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

где многочлены $x_{\bar\kappa,\bar s}\in\mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]$, $\bar\kappa\in\Omega$, $\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}\in\mathbb{C}(z)[y_1,\dots,y_m]$, $\bar\kappa\in\widetilde\Omega$, $\bar s\in\Theta$, определяются согласно формулам (2.2) и (2.5).

Выберем по заданному множеству $\widetilde\Omega\subset\Omega$ в соответствии с предложением 2.1 множества $\Omega_1\subset\widetilde\Omega$ и $\Theta_1\subset\Theta$, $\operatorname{Card}\Omega_1=\operatorname{Card}\Theta_1=\widetilde\theta$. Тогда определитель $\chi=\chi(z)$ матрицы

$$
\big(B(z)\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)\mid\delta_{\bar\kappa,\bar r}\big)_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega;\bar s\in\Theta_1,\bar r\in\widetilde\Omega\setminus\Omega_1}, \qquad (3.8)
$$

с точностью до знака равный

$$
B^{\widetilde\theta}\cdot\det\big(\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)\big)_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1},
$$

является невырожденным многочленом от функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$ и не равен нулю тождественно ввиду их алгебраической независимости. С другой стороны, $B(z)\widetilde x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)$, $\bar\kappa\in\widetilde\Omega$, $\bar s\in\Theta_1$, есть некоторые линейные формы от функций $1, f_1(z),\dots,f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и оценкой $C_5\omega N$ на степени этих коэффициентов согласно (3.6). Поэтому χ как многочлен от $z, f_1,\dots,f_m$ имеет степень не выше $\widetilde\theta\cdot C_5\omega N$ по z

и не выше $\widetilde{\theta}$ по группе $f_1, \dots, f_m$. По теореме 1 [10] порядок нуля этого определителя в точке $z = 0$ не превосходит

$$C_6(C_5\widetilde{\theta}\omega N + 1)\widetilde{\theta}^m < 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

где $C_6 = C_6(f_1, \dots, f_m)$.

Если умножить матрицу

$$\left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\right)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}},$$

определитель которой равен Δ, справа на матрицу (3.8), то согласно соотношениям (3.7) получим матрицу

$$\left(B(z)R_{\bar{s}}^{[n]}(z) \mid P_{\bar{r}}^{[n]}(z)\right)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}.$$

Ее определитель равен $\Delta\chi \not\equiv 0$. В первых $\widetilde{\theta}$ столбцах этой матрицы стоят линейные функциональные формы, порядок нуля которых в точке $z = 0$ в соответствии с оценками (1.7) не ниже $K - \widetilde{\omega}$. Поэтому

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta\chi \geqslant \widetilde{\theta}(K - \widetilde{\omega}) > \widetilde{\theta}K - \theta\omega.$$

С другой стороны,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta\chi = \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta + \operatorname*{ord}_{z=0} \chi \leqslant \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

откуда

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta > \widetilde{\theta}K - \theta\omega - 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

и значит,

$$0 \leqslant \deg \Delta - \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta < \widetilde{\omega} M - \widetilde{\theta} K + \omega^2 t + \theta\omega + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N. \quad (3.9)$$

Выбираем $M_* = M_*(f_1, \dots, f_m)$ так, чтобы для всех $M > M_*$ выполнялось

$$\omega^2 t + \theta\omega + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N < \frac{\varepsilon}{\theta}M, \quad (3.10)$$

и тогда

$$K < \Big(\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} + \frac{\varepsilon}{\theta\widetilde{\theta}}\Big)M \leqslant \Big(\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} + \frac{\varepsilon}{\theta}\Big)M.$$

Осталось воспользоваться оценкой предложения 2.1:

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} \leqslant \frac{\omega}{\theta} - \frac{1}{(N+m-1)\theta} = \frac{\omega - 3\varepsilon}{\theta},$$

откуда

$$K < \frac{\omega - 2\varepsilon}{\theta}M,$$

что противоречит выбору K в условии леммы 1.1. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.4. *Справедливо равенство*

$$\Delta(z) = \det\big(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\big)_{n=0,1,\dots,\omega-1;\bar\kappa\in\Omega} = z^{\operatorname{ord}_{z=0}\Delta}\Delta_0(z),$$

где $\Delta_0(z)$ *– многочлен,* $\Delta_0 \not\equiv 0$ *и* $\deg\Delta_0 < 2\varepsilon M$.

Доказательство. Согласно оценке (3.9) с $\widetilde{\omega} = \omega$ и $\widetilde{\theta} = \theta$ имеем:

$$\deg \Delta - \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta < \omega M - \theta K + \omega^2 t + \theta\omega + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N < 2\varepsilon M,$$

что и требовалось.

Теперь мы подготовлены для перехода к числовым линейным формам.

Лемма 3.5. *Ранг числовой матрицы*

$$\left(P_{\bar\kappa}^{[n]}(\alpha)\right)_{n=0,1,\ldots,\omega+[2\varepsilon M];\bar\kappa\in\Omega}$$

равен в точности ω.

Доказательство этого факта использует ставшие уже стандартными рассуждения Зигеля, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 10 [20, гл. 3], и опирается на результат леммы 3.4. Очевидным следствием из этой леммы является следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Ранг числовой матрицы*

$$\left(P_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha) \quad P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(\alpha)\right)_{n=0,1,\ldots,\omega+[2\varepsilon M]},$$

где $\bar s^* = N\bar e_{l^*}$, $\bar\kappa^* = (N-1)\bar e_{l^*}$, *равен двум.*

Доказательство теоремы 1. Для произвольного $M > M_*$, где M_* определяется согласно неравенству (3.10), воспользуемся результатом леммы 3.6 и выберем целые числа n_1, n_2, $0 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant \omega + 2\varepsilon M < 3\varepsilon M$, такие, что числовая матрица

$$\begin{pmatrix} P_{\bar s^*}^{[n_1]}(\alpha) & P_{\bar s^* - \bar e_{l^*}}^{[n_1]}(\alpha) \\ P_{\bar s^*}^{[n_2]}(\alpha) & P_{\bar s^* - \bar e_{l^*}}^{[n_2]}(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где $\bar{s}^* = N\bar{e}_{l^*}$, $\bar{\kappa}^* = (N-1)\bar{e}_{l^*}$, невырождена. Пусть $\alpha = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{aligned} q_j &= b^{M+tn_j}(M+tn_j)!P^{[n_j]}_{\bar{s}^*-\bar{e}_{l^*}}(\alpha) \in \mathbb{Z}; \\ p_j &= -b^{M+tn_j}(M+tn_j)!P^{[n_j]}_{\bar{s}^*}(\alpha) \in \mathbb{Z}; \qquad\qquad j = 1, 2. \\ r_j &= b^{M+tn_j}(M+tn_j)!R^{[n_j]}_{\bar{s}^*}(\alpha) = q_j f_{l^*}(\alpha) - p_j, \end{aligned}$$

Поскольку $n_j < 3\varepsilon M$, можно воспользоваться оценками леммы 1.3 для целых чисел q_j и линейных форм r_j, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} |q_j| &< b^{M+tn_j}(M+tn_j)! \sum_{\nu=0}^{M+tn_j} \frac{C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M}}{\nu!}\alpha^\nu \\ &\leqslant C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{M+C_7\varepsilon M} \leqslant M^M C_8^{M(\log M)^{m/(m+1)}}; \\ |r_j| &< b^{M+tn_j}(M+tn_j)! C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M} C_3^M M^{-K} \\ &\leqslant M^{-M+C_9\varepsilon M+M(m-1)/(N+m-1)} C_0^{\omega M/\varepsilon} \leqslant M^{-M} C_{10}^{M(\log M)^{m/(m+1)}}, \\ &\qquad\qquad j = 1, 2. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Выберем $q_* = \frac{1}{2} M_*^{M_*} C_{10}^{-M_*(\log M_*)^{m/(m+1)}}$ и пусть p, q – произвольные целые числа, $|q| \geqslant q_*$. Возьмем наименьшее целое M такое, что

$$M^{-M} C_{10}^{M(\log M)^{m/(m+1)}} \leqslant \tfrac{1}{2}|q|^{-1}, \qquad (3.13)$$

при этом выполнено $M > M_*$. Тогда

$$\begin{aligned} M^M C_8^{M(\log M)^{m/(m+1)}} &\leqslant (M-1)^{M-1}(2C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}} \\ &\leqslant 2|q|(2C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}} \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}|q|(4C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}}. \qquad (3.14) \end{aligned}$$

Из выбора (3.13) вытекает, что

$$C_{11}\log M < \log\log|q| < C_{12}\log M,$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}(4C_8)^{M(\log M)^{m/(m+1)}} &\leqslant (M^M)^{C_{13}(\log M)^{-1/(m+1)}}\\ &\leqslant |q|^{\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}}, \quad \gamma>0. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Оценки (3.12) согласно неравенствам (3.14), (3.15) и (3.13) соответственно перепишутся в виде:

$$|q_j| < \tfrac{1}{2}|q|^{1+\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}}, \quad |r_j| < \tfrac{1}{2}|q|^{-1}, \quad j=1,2.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

невырождена в виду невырожденности (3.11). Поэтому, по крайней мере, одна из линейно независимых над $\mathbb{C}$ линейных форм r_1, r_2 должна быть линейно независимой с $r = qf_{l^*}(\alpha) - p$. Пусть для определенности это будет форма r_1, т.е.

$$\lambda = \det\begin{pmatrix} q & p \\ q_1 & p_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} q & -r \\ q_1 & -r_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поскольку все входящие в левый определитель числа являются целыми, то и $\lambda \in \mathbb{Z}$, иными словами, $|\lambda| \geqslant 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}1 \leqslant |\lambda| = |rq_1 - qr_1| &\leqslant |r|\cdot|q_1| + |q|\cdot|r_1|\\ &< \tfrac{1}{2}|r|\cdot|q|^{1+\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}} + \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

откуда

$$|r| > |q|^{-1-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}},$$

что завершает доказательство теоремы 1.

§ 4. Доказательство теоремы 2 и следствий из нее

Изложенная выше конструкция существенно использует условие алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ рассматриваемых E-функций. Однако, в случае $m = 2$ удается уточнить предложение 2.1 и тем самым ослабить это условие.

Лемма 4.1. *Пусть множество* $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ *и отображение* $\sigma : \Omega_1 \to \Theta$ *удовлетворяют свойствам* 1)–3), *описанным перед леммой* 2.4. *Тогда минор* $\det(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$, $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$, *матрицы* (2.4) *равен*

$$\pm \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_2}} \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2} \cdot \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \bar\kappa-\bar e_2\in\Omega_1}} \det\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} & \widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa} \\ \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Переставим в матрице $(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$ столбцы таким образом, чтобы на главной диагонали получившейся матрицы X стояли элементы $\widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)}$, $\bar\kappa \in \Omega_1$, и покажем, что матрица X имеет “почти треугольный” вид.

Прежде всего отметим, что

$$\bar s \prec \bar\kappa,\ \bar s \in \Theta,\ \bar\kappa \in \widetilde{\Omega} \implies \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s} = 0 \quad (4.2)$$

согласно определению (2.5), так как в этом случае $\bar s \prec \bar\kappa$, $\bar s - \bar e_2 \prec \bar\kappa$ и $\bar s - \bar e_1 \prec \bar\kappa$. Пусть $\bar\kappa$ – произвольный мультииндекс из Ω_1. Рассмотрим отдельно две возможности.

а) $\underline{|\bar\kappa| = N - 1.}$ Докажем, что в этом случае в строке с номером $\bar\kappa$ матрицы X левее главной диагонали расположены нулевые элементы. Для этого в силу (4.2) достаточно показать, что из условий $\bar\kappa' \prec \bar\kappa$, $\bar\kappa' \in \Omega_1$ следует $\sigma(\bar\kappa') \prec \bar\kappa$.

Если $|\bar\kappa'| = N$, то $\sigma(\bar\kappa') = \bar\kappa' \prec \bar\kappa$.

Если $|\bar\kappa'| = N-1$, то $\bar\kappa' \preccurlyeq \bar\kappa - \bar e_1 + \bar e_2$, откуда $\sigma(\bar\kappa') \preccurlyeq \bar\kappa' + \bar e_1 \preccurlyeq \bar\kappa + \bar e_2$. Равенство $\sigma(\bar\kappa') = \bar\kappa + \bar e_2$ возможно лишь в случае $\bar\kappa' = \bar\kappa - \bar e_1 + \bar e_2$, и тогда $\sigma(\bar\kappa) \neq \sigma(\bar\kappa') = \bar\kappa + \bar e_2$, т.е. $\sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_1$. Из условия 3) и того, что $\bar\kappa + \bar e_2 \prec \bar\kappa + \bar e_1 = \sigma(\bar\kappa)$ вытекает, что $\bar\kappa' = \sigma^{-1}(\bar\kappa + \bar e_2) \succ \bar\kappa$, что противоречит предпосылке $\bar\kappa' \prec \bar\kappa$. Следовательно, $\sigma(\bar\kappa') \neq \bar\kappa + \bar e_2$ и $\sigma(\bar\kappa') \prec \bar\kappa + \bar e_2$. Отсюда $\sigma(\bar\kappa') \preccurlyeq \bar\kappa$, и в то же время $\sigma(\bar\kappa') \neq \bar\kappa$, поскольку $|\sigma(\bar\kappa')| = N,\ |\bar\kappa| = N-1$.

Окончательно, $\sigma(\bar\kappa') \prec \bar\kappa$. Воспользовавшись утверждением (4.2), получаем:

$$\bar\kappa' \prec \bar\kappa,\ \bar\kappa' \in \Omega_1 \implies \widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa')} = 0. \tag{4.3}$$

б) $\underline{|\bar\kappa| = N}$. Покажем, что если $\bar\kappa' \prec \bar\kappa - \bar e_2$, $\bar\kappa' \in \Omega_1$, то $\sigma(\bar\kappa') \prec \bar\kappa$. Поскольку мультииндексы $\bar\kappa - \bar e_2, \bar\kappa$ соседние во множестве Ω, это будет означать, что в строке с номером $\bar\kappa$ матрицы X левее главной диагонали стоят нулевые элементы, кроме, быть может, элемента $\widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa-\bar e_2)}$, предшествующего $\widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)}$, в случае $\bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1$.

Если $|\bar\kappa'| = N$, то $\sigma(\bar\kappa') = \bar\kappa' \prec \bar\kappa - \bar e_2 \prec \bar\kappa$.

Если $|\bar\kappa'| = N-1$, то $\bar\kappa' \preccurlyeq \bar\kappa - \bar e_1$ и $\sigma(\bar\kappa') \preccurlyeq \bar\kappa' + \bar e_1 \preccurlyeq \bar\kappa$. Равенство $\sigma(\bar\kappa') = \bar\kappa$ невозможно, так как $\sigma^{-1}(\bar\kappa) = \bar\kappa$. Поэтому $\sigma(\bar\kappa') \prec \bar\kappa$.

Воспользовавшись утверждением (4.2), в случае б) получаем:

$$\bar\kappa' \prec \bar\kappa,\ \bar\kappa' \in \Omega_1 \implies \begin{cases} \widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa')} = 0, & \text{если } \bar\kappa' \prec \bar\kappa - \bar e_2; \\ \widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa')} = \widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa-\bar e_2)}, & \text{если } \bar\kappa' = \bar\kappa - \bar e_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Если $\bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1$, то $\sigma(\bar\kappa - \bar e_2) = \bar\kappa - \bar e_2 + \bar e_1$, поскольку $\sigma(\bar\kappa - \bar e_2) \neq (\bar\kappa - \bar e_2) + \bar e_2 = \bar\kappa = \sigma(\bar\kappa)$. С другой стороны, если $\sigma(\bar r) = \bar r + \bar e_1,\ \bar r \in \Omega_1$, то согласно условию 3) выполнено $\bar r + \bar e_2 \in \sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\bar r + \bar e_2) \succ \bar r$, т.е. $\sigma^{-1}(\bar r + \bar e_2) = \bar r + \bar e_2$ и $\bar r + \bar e_2 \in \Omega_1$.

Согласно утверждениям (4.4) и (4.3) вдоль главной диагонали матрицы X стоят одномерные блоки

$$(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa}),\quad \bar\kappa\in\Omega_1,\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa,\ \bar\kappa-\bar e_2\notin\Omega_1,$$

или

$$(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2}),\quad \bar\kappa\in\Omega_1,\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_2,$$

или двумерные блоки

$$\begin{pmatrix}\widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} & \widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa}\\ \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} & \widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa}\end{pmatrix},\quad \bar\kappa\in\Omega_1,\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa,\ \bar\kappa-\bar e_2\in\Omega_1,$$

а в левее и ниже этих блоков расположены нули. Поэтому и с учетом того, что $\widetilde{x}_{\bar\kappa,\sigma(\bar\kappa)}=1$ в случае $\sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa$ согласно формуле (2.5), определитель $\det(\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s})_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}=\pm\det X$ равен (4.1), что и требовалось.

Доказательство теоремы 2. Функции $f_1(z), f_2(z)$ не являются многочленами, поскольку каждая из них линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ с единицей. Как целые функции, отличные от многочленов, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются трансцендентными функциями. Покажем, что для некоторого $l\in\{1,2\}$ функции $1, f_1(z), f_2(z), f_l^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Предположим, что это не так. Тогда

$$\begin{gathered} f_l^2(z)=E_{l0}(z)+E_{l1}(z)f_1(z)+E_{l2}(z)f_2(z),\quad l=1,2;\\ E_{lj}\in\mathbb{C}(z),\quad l=1,2,\quad j=0,1,2, \end{gathered}\tag{4.5}$$

поскольку функции $1, f_1(z), f_2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Если $E_{12}\equiv 0$, то трансцендентная функция $f_1(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $y^2-E_{11}y-E_{10}=0$, что невозможно. Поэтому

$$f_2(z)=\frac{f_1^2(z)-E_{11}(z)f_1(z)-E_{10}(z)}{E_{12}(z)},\quad E_{12}\not\equiv 0,$$

и после подстановки этого выражения в уравнение (4.5) при $l = 2$ заключаем, что трансцендентная функция $f_1(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$(y^2 - E_{11}y - E_{10})^2 - E_{22}E_{12}(y^2 - E_{11}y - E_{10}) - E_{21}E_{12}^2 y - E_{20}E_{12}^2 = 0,$$

что опять же невозможно. Полученное противоречие показывает, что по крайней мере одна из функций $f_l^2(z)$, $l \in \{1, 2\}$, не выражается линейно с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ через функции $1, f_1(z), f_2(z)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $l = 2$, т.е. что функции $1, f_1(z)$, $f_2(z), f_2^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Пусть множества Ω_1 и Θ_1 выбраны по заданному $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ в соответствии с предложением 2.1 и рациональные функции (2.3) представлены в виде (3.6). Обозначим через $\sigma : \Omega_1 \to \Theta_1$ такое биективное отображение, что пара (Ω_1, σ) удовлетворяет условиям 1)–3). Согласно формуле (2.5) имеем:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2} &= y_2 + D_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2}, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa + \bar e_2;\\
\widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} &= y_1 + D_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1}y_2\\
&\quad + D_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa,\ \bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1;\\
\widetilde{x}_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa} &= y_2, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa,\ \bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1;\\
\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1} &= D_{\bar\kappa,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1}y_2\\
&\quad + D_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}, && \text{если } \sigma(\bar\kappa) = \bar\kappa,\ \bar\kappa - \bar e_2 \in \Omega_1,
\end{aligned}$$

откуда, если воспользоваться леммой 4.1,

$$\chi = \pm \det\bigl(B(z)\widetilde{x}_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)\bigr)_{\bar\kappa\in\Omega_1;\bar s\in\Theta_1}$$

$$= \pm \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa\\ \bar\kappa-\bar e_2\notin\Omega_1}} B(z)\cdot \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_2}} \bigl\{B(z)f_2(z)+B_{\bar\kappa,\bar\kappa+\bar e_2}(z)\bigr\}$$

$$\times \prod_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \bar\kappa-\bar e_2\in\Omega_1}} B(z)\bigl\{-B_{\bar\kappa,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1}(z)f_2^2(z)+B(z)f_1(z)$$

$$+\bigl(B_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-2\bar e_2+\bar e_1}(z)-B_{\bar\kappa,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}(z)\bigr)f_2(z)+B_{\bar\kappa-\bar e_2,\bar\kappa-\bar e_2+\bar e_1}(z)\bigr\}.$$

Поскольку $B(z)\not\equiv 0$ и функции $1, f_1(z), f_2(z), f_2^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, последнее произведение отлично от нуля. Выражения в фигурных скобках можно рассматривать как многочлены от $z, f_1(z), f_2(z)$ степени не выше $C_5\omega N$ по z и не выше 2 по группе f_1, f_2. Согласно следствию из теоремы 1 [8] порядок нуля каждого такого выражения в точке $z=0$ не выше

$$C_{14}(C_5\omega N+1)2^{3^3}\leqslant C_{15}\omega N,$$

где постоянная C_{14}, а следовательно, и C_{15}, зависит только от функций $f_1(z), f_2(z)$. Кроме того,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} B(z)\leqslant \deg B(z)\leqslant C_5\omega N\leqslant C_{15}\omega N.$$

Поэтому

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\chi \leqslant \sum_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa\\ \bar\kappa-\bar e_2\notin\Omega_1}} C_{15}\omega N + \sum_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \sigma(\bar\kappa)=\bar\kappa+\bar e_2}} C_{15}\omega N$$

$$+\sum_{\substack{\bar\kappa\in\Omega_1\\ \bar\kappa-\bar e_2\in\Omega_1}} (C_{15}\omega N + C_{15}\omega N)$$

$$= \operatorname{Card}\Omega_1\cdot C_{15}\omega N\leqslant C_{15}\omega^2 N.$$

Осталось в доказательстве леммы 3.3 выбрать $M_* = M_*(f_1, f_2)$ так, чтобы для всех $M > M_*$ выполнялось неравенство

$$\omega^2 t + \theta\omega + C_{15}\omega^2 N < \frac{\varepsilon}{\theta} M.$$

Все остальные рассуждения остаются без изменений. Это завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство следствия 1. Если функции $1, f(z), f'(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то справедливость неравенства

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/3}} \tag{4.6}$$

вытекает из теоремы 2. В противном случае функция $f(z)$ либо линейно зависима с единицей и, как целая функция, является многочленом, либо удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$E_1(z)y' + E_0(z)y = F(z), \quad E_1, E_0, F \in \mathbb{C}[z],$$

в котором многочлены E_1, E_0, F взаимно просты, а кроме того, $E_1, E_0, F \in \mathbb{Q}[z]$ согласно лемме 3 [20, гл. 3]. В первом случае $f(\alpha)$ является рациональным числом, поскольку $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$. Во втором случае, если $E_1(\alpha) \neq 0$, то справедливость неравенства (4.6) следует из результата (0.7) А. Б. Шидловского при $m = 1$. Если же $E_1(\alpha) = 0$, то $E_0(\alpha)f(\alpha) = F(\alpha)$, откуда $f(\alpha) = F(\alpha)/E_0(\alpha) \in \mathbb{Q}$, так как равенство $E_0(\alpha) = 0$ невозможно ввиду взаимной простоты многочленов E_1, E_0, F. Тем самым мы доказали (4.6) в случае, когда $f(\alpha)$ не является рациональным числом. Если $f(\alpha) = a/b \in \mathbb{Q}$, то для всех $p, q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant |b|$, либо $f(\alpha) = p/q$ либо

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{|bq|} \geqslant \frac{1}{|bq|} \geqslant \frac{1}{q^2},$$

откуда следует неравенство (4.6). Утверждение доказано полностью.

Доказательство следствия 2. Докажем, что при любых значениях параметров $\lambda, \mu \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ функции $1, K_{\lambda,\mu}(z), K'_{\lambda,\mu}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Предположим, что это не так, и для некоторой пары λ, μ эти функции связаны уравнением

$$P_0(z) + P_1(z)K_{\lambda,\mu}(z) + P_2(z)K'_{\lambda,\mu}(z) = 0, \quad P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}[z], \quad (4.7)$$

где $P_0(z) + P_1(z)y_1 + P_2(z)y_2 \in \mathbb{C}[z, y_1, y_2]$ – неприводимый многочлен. Заменяя в уравнении (4.7) z на $-z$ и пользуясь тем, что $K_{\lambda,\mu}(z)$ и $K'_{\lambda,\mu}(z)$ являются соответственно четной и нечетной функциями, получим

$$P_0(-z) + P_1(-z)K_{\lambda,\mu}(z) - P_2(-z)K'_{\lambda,\mu}(z) = 0.$$

Поскольку функция $K_{\lambda,\mu}(z)$ линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ с единицей, многочлен $P_0(-z)+P_1(-z)y_1-P_2(-z)y_2$ делится на многочлен $P_0(z)+P_1(z)y_1 + P_2(z)y_2$ в кольце $\mathbb{C}[z, y_1, y_2]$. Это возможно лишь в одном из двух случаев:

$$P_0(-z) \equiv P_0(z), \quad P_1(-z) \equiv P_1(z), \quad P_2(-z) \equiv -P_2(z),$$

или

$$P_0(-z) \equiv -P_0(z), \quad P_1(-z) \equiv -P_1(z), \quad P_2(-z) \equiv P_2(z).$$

Следовательно, функции $1, K_{\lambda,\mu}(z), K'_{\lambda,\mu}(z)/z$ связаны линейным уравнением с коэффициентами из $\mathbb{C}[z^2]$. В первом случае это уравнение

$$P_0(z) + P_1(z)K_{\lambda,\mu}(z) + \bigl(zP_2(z)\bigr)\frac{K'_{\lambda,\mu}(z)}{z} = 0,$$

во втором –

$$\frac{P_0(z)}{z}+\frac{P_1(z)}{z}K_{\lambda,\mu}(z)+P_2(z)\frac{K'_{\lambda,\mu}(z)}{z}=0.$$

Поэтому функции $1,\psi(z),\psi'(z)$, где

$$K_{\lambda,\mu}(z)=\psi(z^2),\quad K'_{\lambda,\mu}(z)=2z\psi'(z^2),$$

линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$. С другой стороны,

$$\psi(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}z^{\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)},\quad b(x)=-4(x+\lambda)(x+\mu),$$

и по теореме 2 работы [3] функции $1,\psi(z),\psi'(z)$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость над $\mathbb{C}(z)$ функций $1,K_{\lambda,\mu}(z),K'_{\lambda,\mu}(z)$ при любых значениях параметров $\lambda,\mu\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}$. Функция $K_{\lambda,\mu}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y''+\frac{2\lambda+2\mu+1}{z}y'+\left(1+\frac{4\lambda\mu}{z^2}\right)y=\frac{4\lambda\mu}{z^2}.$$

Осталось воспользоваться утверждением теоремы 2.

Доказательство следствия 3. Функция $A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y''+\left(\frac{\lambda+\mu+1}{z}-1\right)y'+\frac{\lambda\mu-(\beta+1)z}{z^2}y=\frac{\lambda\mu}{z^2}$$

и представима в виде

$$A_{\lambda,\mu,\beta}(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad a(x) = x + \beta, \quad b(x) = (x+\lambda)(x+\mu).$$

Согласно теореме 2 [3] при любых значениях параметров $\lambda, \mu, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ таких, что $\beta - \lambda, \beta - \mu \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, функции $1, A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$, $A'_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и поэтому можно воспользоваться теоремой 2 настоящей работы. Если $\beta - \lambda = 0$, то функция $A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y' + \left(\frac{\mu}{z} - 1\right) y = \frac{\mu}{z}$$

и для нее можно воспользоваться результатом (0.7) при $m = 1$. Аналогично рассматривается случай $\beta - \mu = 0$. Утверждение доказано полностью.

Замечание. Если $\beta - \lambda \in \mathbb{N}$, то для некоторых $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ число $A_{\lambda,\mu,\beta}(\alpha)$ может быть рациональным. Так, например,

$$A_{\lambda,\mu,\lambda+1}(\mu - \lambda - 1) = \frac{\mu}{\lambda + 1}.$$

ГЛАВА II

Мера иррациональности значений G-функций

§ 1. Градуированные приближения Паде

Докажем прежде всего два вспомогательных утверждения: об оценке сверху высоты произведения произвольных многочленов и об оценке сверху степеней и высот многочленов $T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j, l = 1, \ldots, m$, $n \in \mathbb{N}$ (тот факт, что эти функции являются многочленами непосредственно следует из выбора многочлена $T_*(z)$ и того, что он делит $T(z)$ согласно (0.12)).

Лемма 1.1. *Пусть $w_1(z), \ldots, w_N(z)$ – произвольный набор многочленов с вещественными коэффициентами, а степень многочлена $w(z) = w_1(z) \cdots w_N(z)$ не выше n. Тогда*

$$H(w) \leqslant (n+1)^N H(w_1) \cdots H(w_N).$$

Доказательство. Если коэффициенты формальных степенных рядов

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu, \quad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu z^\nu$$

удовлетворяют условиям $|f_\nu| \leqslant F_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, то условимся обозначать $f(z) \ll F(z)$. Как следует из определения высоты многочлена,

$$w_i(z) \ll H(w_i) \sum_{\nu=0}^{\deg w_i} z^\nu \ll H(w_i)(1 + z + \cdots + z^n), \quad i = 1, \ldots, N,$$

откуда

$$w(z) \ll H(w_1) \cdots H(w_N)(1 + z + \cdots + z^n)^N.$$

Поскольку высота многочлена с неотрицательными вещественными коэффициентами не превосходит сумму всех его коэффициентов, равную значению многочлена в точке $z = 1$, получаем требуемое утверждение.

Лемма 1.2. *Справедливы оценки:*

$$\deg T^n S_{jl}^{[n]} \leqslant tn, \quad H(T^n S_{jl}^{[n]}) \leqslant C_1\bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^n n!,$$
$$C_1 = C_1(m,t) > 0, \quad j,l = 1,\dots,m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Воспользуемся рекуррентными соотношениями (0.14), в которых $T_*(z)$ заменено на $T(z)$. Из них непосредственно вытекает, что $\deg T^n S_{jl}^{[n]} \leqslant tn$, $j,l = 1,\dots,m$, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, полагая

$$H_n = \max_{1\leqslant j,l\leqslant m} \bigl\{H(T^n S_{jl}^{[n]})\bigr\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

получаем:

$$\begin{aligned} T(z)\frac{d}{dz}\bigl(T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z)\bigr) &\ll H\sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu \cdot H_n \frac{d}{dz}\sum_{\mu=0}^{tn} z^\mu \\ &\ll H\sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu \cdot tnH_n \sum_{\mu=0}^{tn-1} z^\mu \\ &\ll (t+2)H \cdot tnH_n \sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \quad j,l = 1,\dots,m; \end{aligned}$$

$$T^n(z)S_{ji}^{[n]}(z)\cdot T(z)S_{il}(z) \ll H_n\sum_{\nu=0}^{tn}z^\nu\cdot H\sum_{\mu=0}^{t}z^\mu$$

$$\ll H_n\cdot(t+1)H\sum_{\nu=0}^{tn+t}z^\nu,\quad j,i,l=1,\dots,m;$$

$$nT'(z)T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z) \ll nH\frac{d}{dz}\sum_{\nu=0}^{t+1}z^\nu\cdot H_n\sum_{\mu=0}^{tn}z^\mu$$

$$\ll (t+1)nH\sum_{\nu=0}^{t}z^\nu\cdot H_n\sum_{\mu=0}^{tn}z^\mu$$

$$\ll (t+1)^2nH\cdot H_n\sum_{\nu=0}^{tn+t}z^\nu,\quad j,l=1,\dots,m,$$

$$n\in\mathbb{N},$$

откуда и из рекуррентных соотношений имеем:

$$T^{n+1}(z)S_{jl}^{[n+1]}(z)$$

$$\ll \big(t(t+2)nHH_n+(t+1)mHH_n+(t+1)^2nHH_n\big)\sum_{\nu=0}^{tn+t}z^\nu$$

$$\ll 2(t+1)^2(n+1)\Big(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(n+1)}\Big)HH_n\sum_{\nu=0}^{tn+t}z^\nu,$$

$$j,l=1,\dots,m,\quad n\in\mathbb{N},$$

или

$$H_{n+1}\leqslant 2(t+1)^2(n+1)\Big(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(n+1)}\Big)HH_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Так как $H_1\leqslant H$, получаем:

$$H_{n+1}\leqslant 2^n(t+1)^{2n}H^{n+1}(n+1)!\prod_{i=1}^{n}\Big(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\Big),$$

$$n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку

$$1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\geqslant 1\quad\text{при}\quad i\leqslant m(t+1)-1;$$
$$1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\leqslant 1\quad\text{при}\quad i\geqslant m(t+1)-1,$$

для любого натурального n выполнено неравенство

$$\prod_{i=1}^{n}\Bigl(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\Bigr)$$
$$\leqslant C_1=\prod_{i=1}^{m(t+1)-1}\Bigl(1-\tfrac{1}{2(t+1)^2}+\tfrac{m}{2(t+1)(i+1)}\Bigr),$$

которое и завершает доказательство леммы.

Перейдем теперь к построению систем приближающих линейных форм.

Лемма 1.3. *Пусть совокупность функций* $f_1(z),\dots,f_m(z)$ *принадлежит классу* $\mathrm{G}(C,\Phi)$. *Тогда для любых натуральных чисел* N *и* M *существуют многочлены* $P_{\bar\kappa}(z)\in\mathbb{Q}[z]$, $\bar\kappa\in\Omega$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *не все они тождественно равны нулю*;
2) $\deg P_{\bar\kappa}<M$ *для всех* $\bar\kappa\in\Omega$;
3) $P_{\bar\kappa}(z)\in\mathbb{Z}[z]$, $\bar\kappa\in\Omega\setminus\Theta$, *и для произвольного* $\varepsilon_1>0$ *при* $M>M_1(N,\varepsilon_1)$ *высота многочленов удовлетворяет неравенству*

$$H(P_{\bar\kappa})<C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M},\quad \bar\kappa\in\Omega\setminus\Theta,$$
$$C_2=(C\Phi)^{\omega(\omega-\theta)/(\varepsilon\theta)}=(C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{m-1}{N+m-1}\right)\binom{N+m-2}{m-1}};$$

4) *порядок нуля в точке* $z = 0$ *каждой из линейных функциональных форм* (0.21) *не ниже*

$$K = \left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right] = \left[\left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right].$$

Доказательство. Рассмотрим разложение в степенной ряд требуемых многочленов:

$$P_{\bar{\kappa}}(z) = \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{\kappa},\nu} z^{\nu}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega,$$

Имеем:

$$\sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\min\{\mu, M-1\}} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} z^{\mu}, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Будем искать совокупность целых чисел $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, $\nu = 0, 1, \ldots, M-1$, таких, что

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} = 0, \quad \mu = M, M+1, \ldots, K-1, \quad \bar{s} \in \Theta. \quad (1.1)$$

Тогда, полагая

$$P_{\bar{s},\mu} = -\sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\mu} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, M-1, \quad \bar{s} \in \Theta,$$

получим:

$$R_{\bar{s}}(z) = P_{\bar{s}}(z) + \sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z) = \sum_{\mu=K}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} f_{j,\mu-\nu} z^{\mu}, \qquad \bar{s} \in \Theta,$$

иными словами, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geqslant K, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Возьмем последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ из определения класса $\mathrm{G}(C, \Phi)$ и умножим уравнения (1.1) на φ_K:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{M-1} P_{\bar{s}-\bar{e}_j,\nu} \varphi_{\bar{s}izeK} f_{j,\mu-\nu} = 0, \quad \mu = M, M+1, \dots, K-1, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Получившиеся $\theta(K-M)$ уравнений относительно $(\omega-\theta)M$ неизвестных $P_{\bar{\kappa},\nu}$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, $\nu = 0, 1, \dots, M-1$, имеют целочисленные коэффициенты, ограниченные по модулю величиной $\gamma^2 (C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/4)K}$, где постоянная γ зависит только от $\varepsilon_1 > 0$. Согласно лемме Зигеля (см. лемму 11 [20, гл. 3]) существует нетривиальный набор многочленов $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, высота каждого из которых не превосходит

$$\Bigl((\omega-\theta) M \gamma^2 (C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/4)K}\Bigr)^{\theta(K-M)/((\omega-\theta)M - \theta(K-M))} \leqslant \Bigl((C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/2)\omega M/\theta}\Bigr)^{(\omega-\theta)/\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$ и произвольных N, $M > M_1(N, \varepsilon_1)$. Утверждение леммы доказано.

Положим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^{[n]}(z;\bar a) &= \sum_{\bar s:|\bar s|=N} \bar a^{\bar s}\mathcal{R}^{[n]}_{\bar s}(z)\\
&= \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z)\\
&= D^n\biggl(\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa}P_{\bar\kappa}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa}P_{\bar\kappa}(z)\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z)\biggr)\\
&= D^n\biggl(\sum_{\bar s:|\bar s|=N} \bar a^{\bar s}R_{\bar s}(z)\biggr), \quad n=0,1,2,\dots, \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

где $P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa\in\Omega$, и $R_{\bar s}(z)$, $\bar s\in\Theta$, – построенные в лемме 1.3 многочлены и отвечающие им линейные формы (0.21).

Лемма 1.4. *Для элементов последовательности функциональных форм* (1.2) *справедливы рекуррентные соотношения*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{[n+1]}_{\bar\kappa}(z) &= \frac{d}{dz}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z) - \sum_{l,j=1}^{m}(\kappa_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l+\bar e_j}(z)\\
&\quad+\bigl(|\bar\kappa|-N+1\bigr)\sum_{l=1}^{m}Q_{l0}(z)\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l}(z), \quad \bar\kappa\in\Omega, \quad n\geqslant 0;
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

$$
\mathcal{R}^{[n+1]}_{\bar s}(z) = \frac{d}{dz}\mathcal{R}^{[n]}_{\bar s}(z) - \sum_{l,j=1}^{m}(s_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)\mathcal{R}^{[n]}_{\bar s-\bar e_l+\bar e_j}(z), \quad \bar s\in\Theta, \quad n\geqslant 0. \qquad (1.4)
$$

Отсюда, в частности:

а) *функции*

$$
P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) = \frac{T^n(z)}{n!}\mathcal{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z), \quad \bar\kappa\in\Omega, \quad n=0,1,2,\dots, \qquad (1.5)
$$

являются многочленами степени не выше $M + tn - 1$;

б) *порядок нуля в точке* $z = 0$ *функциональных линейных форм*

$$R_{\bar{s}}^{[n]}(z) = \frac{T^n(z)}{n!}\mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n]}(z), \quad \bar{s} \in \Theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.6}$$

не ниже $K - n$.

Доказательство. Требуемые рекуррентные формулы (1.3), (1.4) вытекают из соотношения

$$\mathcal{R}^{[n+1]}(z; \bar{a}) = D\mathcal{R}^{[n]}(z; \bar{a}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и определения (0.22) оператора D.

а) Из рекуррентных соотношений (1.3) и поскольку

$$T^{n+1}(z)\frac{d}{dz}\mathcal{P}(z) = T(z)\frac{d}{dz}\big(T^n(z)\mathcal{P}(z)\big) - nT'(z)T^n(z)\mathcal{P}(z), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

для любой функции $\mathcal{P}(z)$, имеем:

$$\begin{aligned} T^{n+1}(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n+1]}(z) &= T(z)\frac{d}{dz}\big(T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\big) - nT'(z)T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \\ &- \sum_{l,j=1}^{m}(\kappa_j - \delta_{lj} + 1)T(z)Q_{lj}(z) \cdot T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}-\bar{e}_l+\bar{e}_j}^{[n]}(z) \\ &+ \big(|\bar{\kappa}| - N + 1\big)\sum_{l=1}^{m}T(z)Q_{l0}(z) \cdot T^n(z)\mathcal{P}_{\bar{\kappa}-\bar{e}_l}^{[n]}(z), \\ &\qquad \bar{\kappa} \in \Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

При $n = 0$ функции $\mathcal{P}_{\bar{\kappa}}^{[0]}(z) = P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, являются многочленами степени не выше $M-1$ согласно лемме 1.3. Простой индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ убеждаемся, что функции (1.5) также являются многочленами и имеют степень не выше $M + tn - 1$. Отсюда следует утверждение пункта а).

б) Из рекуррентных соотношений (1.4) и ввиду того, что функции $\mathcal{R}_{\bar{s}}^{[0]}(z) = R_{\bar{s}}(z)$, $\bar{s} \in \Theta$, имеют в точке $z = 0$ порядок нуля не ниже K, индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ заключаем, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \mathcal{R}_{\bar{s}}^{[n]}(z) \geqslant K - n, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Отсюда следует оценка снизу порядка нуля линейных форм (1.6).

В дальнейшем будем пользоваться символами $\bar{\kappa}^*$ и $\bar{s}^*$ для обозначения мультииндексов $(N-1)\bar{e}_{l^*}$ и $N\bar{e}_{l^*}$ соответственно. Через ψ'_n обозначим наименьший общий знаменатель коэффициентов многочлена $P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Лемма 1.5. *Пусть $\varepsilon_1 > 0$ выбрано в соответствии с пунктом 3) леммы 1.3. Тогда для натуральных чисел ψ'_n, многочленов $P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z)$ и форм $R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z)$ при $M > M_2(N, \varepsilon_1) \geqslant M_1(N, \varepsilon_1)$, $n < (K - M)/(t+1)$ и $|\alpha| < 1/(2C)$ справедливы оценки*

$$\psi'_n \leqslant C_3 \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)n(1+\log N)},$$

$$\bigl|P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)\bigr| \leqslant C_4 \binom{M}{n} \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M},$$

$$\bigl|R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)\bigr| \leqslant C_5 \binom{M}{n} \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M} \bigl(C|\alpha|\bigr)^{K-n},$$

$$C_3 = C_3(N, \varepsilon_1) > 0, \quad C_4 = C_4(N) > 0, \quad C_5 = C_5(N) > 0.$$

Кроме того, если выполнено неравенство $n < (K-M)/(t+1)$, то многочлен $\varphi_{M+tn} \psi'_n P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Доказательство. Из соотношений (1.2), (1.3) и свойства (0.23) следует, что

$$\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) = \frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \left(\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому многочлен $P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(z)$ является коэффициентом при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в функциональной форме

$$\frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \left(\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \right).$$

Для его нахождения определим сначала коэффициент при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в выражении $D^n(\bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z))$ для каждого $\bar{\kappa}$, $|\bar{\kappa}| = N-1$.

Пусть элемент $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$ фиксирован. Рассмотрим произвольное решение $a_1(z), \ldots, a_m(z)$ системы (0.10). Для него выполнено

$$D^n \big(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z) \big) = \frac{d^n}{dz^n} \big(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z) \big).$$

Положим

$$\begin{aligned} b_1(z) = \cdots = b_{\kappa_1}(z) &= a_1(z); \\ b_{\kappa_1+1}(z) = \cdots = b_{\kappa_1+\kappa_2}(z) &= a_2(z); \\ &\ldots\ldots\ldots; \\ b_{\kappa_1+\cdots+\kappa_{m-1}+1}(z) = \cdots = b_{N-1}(z) &= a_m(z); \\ b_N(z) &= P_{\bar{\kappa}}(z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d^n}{dz^n}\big(\bar a^{\bar\kappa}(z)P_{\bar\kappa}(z)\big) = \frac{d^n}{dz^n}\big(b_1(z)\cdots b_N(z)\big)$$

$$= \sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant 0\\ n_1+\dots+n_N=n}} \frac{n!}{n_1!\cdots n_N!} b_1^{(n_1)}(z)\cdots b_N^{(n_N)}(z). \tag{1.7}$$

Если $b_i(z)=a_j(z)$ для некоторого j, $1\leqslant j\leqslant m$, то

$$b_i^{(n_i)}(z) = \sum_{l=1}^m S_{jl}^{[n_i]}(z)a_l(z)$$

согласно уравнениям (0.11). Поэтому вклад каждого такого множителя из (1.7) в коэффициент при $\bar a^{\bar\kappa^*}(z)$, где $\bar\kappa^*=(N-1)\bar e_{l^*}$, будет в точности равен $S_{jl^*}^{[n_i]}(z)$, и, следовательно, этот коэффициент будет равен

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant 0\\ n_1+\dots+n_N=n}} \frac{n!}{n_1!\cdots n_N!} S_{1l^*}^{[n_1]}(z)\cdots S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z) S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z)\cdots S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z)\cdots$$

$$\times S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z)\cdots S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z)P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z).$$

Таким образом,

$$P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z) = \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1}\ \sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant 0\\ n_1+\dots+n_N=n}} w(\bar\kappa;n_1,\dots,n_N), \tag{1.8}$$

где

$$w(\bar\kappa;n_1,\dots,n_N) = \frac{T^{n_1}(z)S_{1l^*}^{[n_1]}(z)}{n_1!}\cdots\frac{T^{n_{\kappa_1}}(z)S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z)}{n_{\kappa_1}!}$$

$$\times\frac{T^{n_{\kappa_1+1}}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+1}!}\cdots\frac{T^{n_{\kappa_1+\kappa_2}}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z)}{n_{\kappa_1+\kappa_2}!}\cdots$$

$$\times\frac{T^{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}}(z)S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}!}\cdots\frac{T^{n_{N-1}}(z)S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z)}{n_{N-1}!}$$

$$\times T^{n_N}(z)\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!}.$$

Упорядочим числа $n_1, n_2, \ldots, n_N$ в порядке убывания: $n_{i_1} \geqslant n_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant n_{i_N}$. Тогда, поскольку $n_1 + n_2 + \cdots + n_N = n$, выполнены неравенства

$$n_{i_1} \leqslant n,\ n_{i_2} \leqslant \left[\tfrac{n}{2}\right],\ \ldots,\ n_{i_N} \leqslant \left[\tfrac{n}{N}\right].$$

Следовательно,

$$H\left(\frac{T^{n_{i_j}}(z) S_{.l^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!}\right) \leqslant C_1\bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n/j}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad i_j \neq N,$$

согласно лемме 1.2 и

$$H\bigl(T^{n_{i_j}}(z)\bigr) \leqslant \bigl((t+2)H\bigr)^{n_{i_j}} \leqslant C_1\bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n/j}, \quad i_j = N.$$

Кроме того, для последовательности $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из определения 2 ввиду (0.12) выполнено

$$\psi_{[n/j]} \frac{T^{n_{i_j}}(z) S_{.l^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!} \in \mathbb{Z}[z], \quad j = 1, \ldots, N, \quad i_j \neq N.$$

Поэтому и с учетом того, что

$$H\left(\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!}\right) \leqslant \binom{M}{n_N} H(P_{\bar\kappa}) \leqslant \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M},$$

$$\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!} \in \mathbb{Z}[z], \quad T^{n_N}(z) \in \mathbb{Z}[z],$$

$$n_N \leqslant n < M/2, \quad M > M_1(N, \varepsilon_1),$$

получаем:

$$\prod_{j=1}^{N} \psi_{[n/j]} \cdot w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}[z],$$
$$\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta, \quad n_1, \dots, n_N \geqslant 0, \quad n_1 + \dots + n_N = n < M/2,$$

и согласно леммам 1.2 и 1.1

$$\begin{aligned} \deg w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N) &\leqslant t(n_1 + \dots + n_{N-1}) \\ &\qquad + (t+1)n_N + (M + tn_N - 1) \\ &\leqslant M + (2t+1)n - 1, \\ H\bigl(w(\bar{\kappa}; n_1, \dots, n_N)\bigr) &\leqslant \bigl(M + (2t+1)n\bigr)^{N+1} \cdot C_1^N \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n g_N} \\ &\qquad \times \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \end{aligned}$$
$$\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta, \quad n_1, \dots, n_N \geqslant 0, \quad n_1 + \dots + n_N = n < M/2,$$

где

$$g_N = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \tfrac{1}{N} \leqslant 1 + \log N.$$

Пользуясь представлением (1.8), находим, что для заданного $\varepsilon_1 > 0$

$$\psi_n' \leqslant \prod_{j=1}^{N} \psi_{[n/j]} \leqslant (\gamma')^N \Psi^{(1+\varepsilon_1/2) n g_N} \leqslant C_3 \Psi^{(1+\varepsilon_1/2) n (1+\log N)},$$
$$n < M/2,$$

с некоторой постоянной C_3, зависящей только от N и ε_1,

$$
\begin{aligned}
H(P_{\bar\kappa^*}^{[n]}) &\leqslant \binom{N+m-2}{N-1}\binom{n+N-1}{n}\cdot\bigl(M+(2t+1)n\bigr)^{N+1}\\
&\qquad\times C_1^N\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{ng_N}\cdot\binom{M}{n}C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}\\
&\leqslant C_6(3M)^{2N}\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{n(1+\log N)}\cdot\binom{M}{n}C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M},\\
&\qquad\qquad C_6=C_6(N)>0,\quad n<M/2,
\end{aligned}
$$

и для $|\alpha|<1$, $M>M_2'(N,\varepsilon_1)$ выполнено

$$
\begin{aligned}
\bigl|P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(\alpha)\bigr| &\leqslant (M+tn)H(P_{\bar\kappa^*}^{[n]})\\
&\leqslant C_4\binom{M}{n}\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{n(1+\log N)}C_2^{(1+\varepsilon_1)M},\quad n<M/2,
\end{aligned}
$$

с некоторой положительной постоянной $C_4=C_4(N)$.

Если положить

$$
P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z)=\sum_{\nu=0}^{M+tn-1}P_{\bar\kappa^*,\nu}^{[n]}z^\nu,\quad n\in\mathbb{Z}^+,
$$

то

$$
R_{\bar s^*}^{[n]}(z)-P_{\bar s^*}^{[n]}(z)=P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z)f_{l^*}(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\min\{\mu,M+tn-1\}}P_{\bar\kappa^*,\nu}^{[n]}f_{l^*,\mu-\nu}z^\mu,
$$
$$
n\in\mathbb{Z}^+.
$$

Поскольку

$$\deg P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) \leqslant M + tn - 1 < K - n \leqslant \operatorname*{ord}_{z=0} R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z), \quad n < \frac{K-M}{t+1},$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) &= \sum_{\mu=K-n}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{M+tn-1} P_{\bar{\kappa}^*,\nu}^{[n]} f_{l^*,\mu-\nu} z^\mu; \\ P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) &= -\sum_{\mu=0}^{M+tn-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} P_{\bar{\kappa}^*,\nu}^{[n]} f_{l^*,\mu-\nu} z^\mu, \end{aligned}\right. \qquad n < \frac{K-M}{t+1}.$$

Отсюда для $M > M_2''(N,\varepsilon_1)$, $|\alpha| < 1/(2C)$ получаем:

$$\begin{aligned} |R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leqslant (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) \sum_{\mu=K-n}^{\infty} C^{(1+\varepsilon_1/8)\mu} |\alpha|^\mu \\ &\leqslant (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) C^{\varepsilon_1(K-n)/8} \big(C|\alpha|\big)^{K-n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{C^{1+\varepsilon_1/8}}{2C}\right)^\mu \\ &\leqslant (M+tn) H(P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}) C^{\varepsilon_1 M/4} \big(C|\alpha|\big)^{K-n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^\mu \\ &\leqslant C_5 \binom{M}{n} \big(2(t+1)^2 H\big)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M} \big(C|\alpha|\big)^{K-n}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad n < \frac{K-M}{t+1}, \end{aligned}$$

и

$$\varphi_{M+tn} \psi_n' P_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) = -\sum_{\mu=0}^{M+tn-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} \psi_n' P_{\bar{\kappa}^*,\nu}^{[n]} \cdot \varphi_{M+tn} f_{l^*,\mu-\nu} z^\mu \in \mathbb{Z}[z].$$

Осталось положить $M_2(N,\varepsilon_1) = \max\{M_2'(N,\varepsilon_1), M_2''(N,\varepsilon_1)\}$.

Лемма доказана полностью.

§ 2. Переход к числовым линейным формам

Лемма 2.1. *При $M > M_3(N)$ функциональный определитель*

$$\det\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\omega-1;\bar\kappa\in\Omega} \tag{2.1}$$

отличен от нуля.

Доказательство этого факта повторяет общую схему доказательства леммы 3.3 главы I, однако, значительно проще последнего.

Предположим, что определитель (2.1) равен нулю тождественно, т.е. ранг совокупности форм $R^{[0]}(z;\bar a), R^{[1]}(z;\bar a), R^{[2]}(z;\bar a), \ldots$ равен $\widetilde\omega$, $1 \leqslant \widetilde\omega < \omega$. Согласно лемме 6 [20, гл. 3] это означает линейную независимость функциональных форм

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) + \sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1} \bar a^{\bar\kappa} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z),$$
$$n = 0, 1, \ldots, \widetilde\omega - 1,$$

Таким образом, в матрице

$$\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde\omega-1;\bar\kappa\in\Omega}$$

(ранга $\widetilde\omega$) можно выбрать $\widetilde\omega$ линейно независимых столбцов. Если делать такой выбор последовательно двигаясь “слева направо” (в лексикографическом порядке) по столбцам с номерами $\bar\kappa \in \Omega$, то базисные столбцы будут иметь номера из некоторого множества $\widetilde\Omega \subset \Omega$, причем с некоторыми рациональными функциями

$$\left.\begin{aligned} &D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \in \mathbb{C}(z), \\ &D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) \equiv 0, \quad \bar\kappa' \prec \bar\kappa, \end{aligned}\right. \qquad \bar\kappa \in \widetilde\Omega, \quad \bar\kappa' \in \Omega \setminus \widetilde\Omega, \tag{2.2}$$

выполняются равенства

$$P_{\bar\kappa'}^{[n]}(z) = \sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z) = \sum_{\substack{\bar\kappa\in\widetilde\Omega\\ \bar\kappa\prec\bar\kappa'}} P_{\bar\kappa}^{[n]}(z) D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z),$$

$$n = 0, 1, \ldots, \widetilde\omega - 1, \quad \bar\kappa' \in \Omega\setminus\widetilde\Omega.$$

Таким образом,

$$\Delta = \Delta(z) = \det\big(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\big)_{n=0,1,\ldots,\widetilde\omega-1;\bar\kappa\in\widetilde\Omega} \not\equiv 0,$$

и согласно лемме 1.4а) находим, что

$$\deg\Delta < \widetilde\omega M + \frac{\widetilde\omega(\widetilde\omega-1)}{2}t. \tag{2.3}$$

Как уже отмечалось в главе I, рациональные функции $D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}$, $\bar\kappa\in\widetilde\Omega$, $\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega$, могут быть представлены в виде

$$D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} = -\frac{\lambda_{\bar\kappa,\bar\kappa'}}{\lambda}, \quad \lambda\not\equiv 0, \quad \bar\kappa\in\widetilde\Omega, \quad \bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega, \tag{2.4}$$

где λ и $\lambda_{\bar\kappa,\bar\kappa'}$ – миноры порядка $(\omega-\widetilde\omega)$ некоторой фундаментальной матрицы решений системы

$$\frac{d}{dz}x_{\bar\kappa} = -\sum_{l,j=1}^{m}\kappa_j Q_{lj}(z)x_{\bar\kappa-\bar e_j+\bar e_l} + \big(N-|\bar\kappa|\big)\sum_{l=1}^{m}Q_{l0}(z)x_{\bar\kappa+\bar e_l}, \quad \bar\kappa\in\Omega, \tag{2.5}$$

порядка ω. В доказательстве леммы 8 [20, гл. 3, с. 102–103] было показано, что сумма степеней числителя каждой рациональной функции (2.4) и их общего знаменателя не превосходит некоторой постоянной C_7, зависящей только от системы линейных дифференциальных уравнений (2.5), которая, в свою очередь, однозначно определяется системой (0.5) и числом N. Но ввиду линейной независимости функций $1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над $\mathbb{C}(z)$ по лемме 3 [20, гл. 3] система (0.5) определена функциями $f_1(z)$, $\ldots, f_m(z)$ однозначно. Поэтому $C_7 = C_7(f_1, \ldots, f_m; N)$.

Сравнивая коэффициенты при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s} \in \Theta$, в (1.2), согласно (1.5) и (1.6) получаем:

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) &= P_{\bar{s}}^{[n]}(z) + \sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}^{[n]}(z) f_j(z) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta, \end{aligned}$$

где функции $x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, $\bar{s} \in \Theta$, определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) &= \delta_{\bar{\kappa},\bar{s}}, & &\text{если } |\bar{\kappa}| = N; \\ x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) &= \sum_{j=1}^{m} \delta_{\bar{\kappa}+\bar{e}_j,\bar{s}} f_j(z), & &\text{если } |\bar{\kappa}| = N-1, \end{aligned} \right. \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \Bigg(x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}) \Bigg) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta, \qquad (2.6) \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) = x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}), \quad \bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}, \quad \bar{s}\in\Theta.$$

Согласно предложению 2.1 (и лемме 4.1 в случае $m = 2$) главы I для множества $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ найдутся множества $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$ и $\Theta_1\subset\Theta$, для которых

$$\det\bigl(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1}\not\equiv 0, \tag{2.7}$$

и величина $\widetilde{\theta} = \operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} \leqslant \frac{\omega - \frac{1}{N+m-1}}{\theta} \leqslant \frac{\omega - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta}.$$

Обозначая через $D(z)$ наименьший общий знаменатель рациональных функций (2.2), получаем, что определитель $\chi = \chi\bigl(z, f_1(z),\dots,f_m(z)\bigr)$ матрицы

$$\bigl(D(z)\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) \mid \delta_{\bar{\kappa},\bar{r}}\bigr)_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega};\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}, \tag{2.8}$$

с точностью до знака равный произведению $D^{\widetilde{\theta}}(z)$ и (2.7), есть отличный от нуля многочлен от функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$. В то же время

$$\deg D(z) < C_7, \quad \deg\bigl(D(z)\cdot D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)\bigr) < C_7, \quad \bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega},$$

и функции $D(z)\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})$, $\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}$, $\bar{s}\in\Theta_1$, являются линейными формами от $1, f_1(z),\dots,f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и оценкой C_7 на степени этих коэффициентов. Поэтому степень χ как многочлена от z

не выше $\widetilde{\theta}C_7$ и по лемме 4 [20, гл. 3] порядок нуля $\chi(z)$ как линейной формы от всевозможных мономов $f_1^{\nu_1}(z)\cdots f_m^{\nu_m}(z)$ степени не выше $\widetilde{\theta}$ в точке $z=0$ ограничен сверху некоторой положительной постоянной $C_8 = C_8(f_1,\ldots,f_m;\widetilde{\theta};\widetilde{\theta}C_7) = C_8(f_1,\ldots,f_m;N)$.

Умножим теперь матрицу

$$\bigl(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde{\omega}-1;\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}},$$

определитель которой равен Δ, справа на матрицу (2.8) и согласно соотношениям (2.6) получим матрицу

$$\bigl(D(z)R_{\bar{s}}^{[n]}(z)\ \big|\ P_{\bar{r}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\widetilde{\omega}-1;\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}.$$

Ее определитель равен $\Delta\chi\not\equiv 0$. В первых $\widetilde{\theta}$ столбцах этой матрицы стоят функции, порядок нуля которых в точке $z=0$ не ниже $K-\widetilde{\omega}$ по лемме 1.4б). Таким образом,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi \geqslant \widetilde{\theta}(K-\widetilde{\omega}).$$

С другой стороны,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi = \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta + \operatorname*{ord}_{z=0}\chi \leqslant \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta + C_8,$$

и значит,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta > \widetilde{\theta}(K-\widetilde{\omega}) - C_8. \tag{2.9}$$

Отсюда и согласно (2.3) имеем:

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \deg \Delta - \operatorname*{ord}_{z=0} \Delta &< \widetilde{\omega} M - \widetilde{\theta} K + \frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}-1)}{2} t + \widetilde{\theta}\widetilde{\omega} + C_8 \\
&\leqslant \widetilde{\omega} M - \widetilde{\theta}\frac{\omega-\varepsilon}{\theta} M + C_9 \\
&\leqslant \widetilde{\theta}\frac{\omega-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta} M - \widetilde{\theta}\frac{\omega-\varepsilon}{\theta} M + C_9 \\
&= -\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}\cdot\frac{\varepsilon}{N+m-1} M + C_9 \\
&\leqslant -\frac{\varepsilon}{\theta(N+m-1)} M + C_9, \\
&\qquad C_9 = C_9(f_1,\ldots,f_m;N). \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Поскольку величины ε и $N+m-1$ положительны, для всех $M > M_3(\varepsilon, N) = M_3(N)$ неравенство (2.10) становится противоречивым. Следовательно, при этих значениях M предположение о том, что определитель (2.1) равен нулю, неверно. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 2.2. *При $M > M_3(N)$ справедливо равенство*

$$\Delta(z) = \det\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\omega-1;\bar\kappa\in\Omega} = z^{\operatorname{ord}_{z=0}\Delta}\Delta_0(z),$$

где $\Delta_0(z)$ – многочлен, $\Delta_0 \not\equiv 0$ и $\deg\Delta_0 < \varepsilon M + C_{10}$, где положительная постоянная C_{10} зависит только от N.

Доказательство. Воспользуемся неравенствами (2.3) и (2.9) с $\widetilde{\omega} = \omega$, $\widetilde{\theta} = \theta$:

$$\deg\Delta_0 = \deg\Delta - \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta < \omega M + \frac{\omega(\omega-1)}{2} t - \theta(K-\omega) + C_8 \leqslant \varepsilon M + C_{10},$$

что и требовалось.

Следующие два утверждения (второе является непосредственным следствием первого) реализуют переход от построенных градуированных приближений Паде к приближающим числовым линейным формам. Доказательство первой леммы осуществляется с помощью ставших уже стандартными рассуждений Зигеля, и поэтому опускается (см., например, доказательство леммы 10 [20, гл. 3]).

Лемма 2.3. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\big(P_{\bar\kappa}^{[n]}(\alpha)\big)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10};\bar\kappa\in\Omega}$$

равен в точности ω.

Лемма 2.4. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\big(P_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha) \quad P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(\alpha)\big)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10}},$$

где, как и раньше, $\bar s^* = N\bar e_{l^*}$, $\bar\kappa^* = (N-1)\bar e_{l^*}$, равен двум.

Доказательство теоремы 3. Выберем по заданным $\eta > \eta_0$ и $\varepsilon > 0$ число $\varepsilon_1(\eta,\varepsilon,\alpha) > 0$ таким образом, чтобы для постоянной

$$C_{11} = b^{(t+1)\varepsilon_1}\big(C|\alpha|\big)^{-\varepsilon\varepsilon_1} C_0^{1+\varepsilon_1}$$

выполнялось неравенство

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{\eta+\eta_0}{2}\\ &> \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}{(1-(m+t+1)\varepsilon)\log b - \log C_{11} - (2-(m+1)\varepsilon)\log(C|a|)}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Положим

$$
\begin{aligned}
M_* &= M_*(N, \varepsilon_1, \alpha) \\
&= \max\left\{M_2(N, \varepsilon_1), M_3(N), \frac{\log(C_3C_4C_5)}{\varepsilon_1 \log b}, \frac{(2+\varepsilon_1)(C_{10}+\omega)}{\varepsilon\varepsilon_1}\right\}.
\end{aligned}
$$

Тогда при любых натуральных $M > M_*$ справедливы утверждения лемм 1.5, 2.4 и неравенства

$$
C_3C_4C_5 \leqslant b^{\varepsilon_1 M},
$$

$$
\varepsilon M + C_{10} + \omega < \big(1 + \tfrac{\varepsilon_1}{2}\big)(\varepsilon M + C_{10} + \omega) \leqslant (1+\varepsilon_1)\varepsilon M.
$$

Кроме того, при всех $M > M_*$ и $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
\binom{M}{n} &= \frac{(M-n+1)\cdots(M-1)M}{n!} < \frac{M^n}{(n/e)^n} \leqslant \left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon M + C_{10}+\omega} \\
&\leqslant \exp\big\{(1-\log\varepsilon)(1+\varepsilon_1)\varepsilon M\big\}; \\
K - n &\geqslant \left(\frac{\omega-\varepsilon}{\theta} - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\right)M = \left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta} - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\right)M \\
&\geqslant \left(2 - \frac{m-1}{\frac{1}{\varepsilon}-1} - \varepsilon\big(1+\tfrac{1}{m}\big) - \varepsilon\varepsilon_1\right)M \geqslant \big(2 - (m+1)\varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1\big)M.
\end{aligned}
$$

Поэтому для заданной $C_{11} > C_0$ и всех $M > M_*$ при $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ согласно лемме 1.5 справедливы оценки:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{M+tn}\psi_n' b^{M+tn}|P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}(C|\alpha|)^{\varepsilon\varepsilon_1}C_{11}\big)^M \leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}C_{11}\big)^M, \\
\varphi_{M+tn}\psi_n' b^{M+tn}|R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}(C|\alpha|)^{\varepsilon\varepsilon_1}C_{11}\big)^M \big(C|\alpha|\big)^{K-n} \\
&\leqslant \big(b^{1+t\varepsilon}C_{11}(C|a/b|)^{2-(m+1)\varepsilon}\big)^M.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Возьмем теперь

$$q_* = \max\left\{\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}{\eta_1}M_*\right\},\right.$$
$$\left.\exp\left\{\frac{(\eta_1+1)\log 2 + (1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}{\eta-\eta_1}\right\}\right\}.$$

Тогда, полагая для произвольной числовой линейной формы $r = qf_{l^*}(\alpha) - p$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*$,

$$M = \left[\frac{\eta_1 \log(2q)}{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}\right] + 1, \tag{2.13}$$

получим, что $M > M_*$. Кроме того, при $q > q_*$ выполняется неравенство

$$M\cdot\big((1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}\big) \leqslant \eta_1\log(2q) + (1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}$$
$$< \eta\log q - \log 2. \tag{2.14}$$

Согласно лемме 2.4 для $M > M_*$ существует $n < \varepsilon M + C_{10} + \omega$ такое, что

$$qP^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha) + pP^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha) \neq 0.$$

Тогда

$$P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)r = -\big(qP^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha) + pP^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)\big) + q\big(P^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha) + P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)f_{l^*}(\alpha)\big)$$

и поскольку

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}\big(qP^{[n]}_{\bar{s}^*}(a/b) + pP^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(a/b)\big)$$

является целым числом, отличным от нуля,

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)|\cdot|r| \geqslant 1-\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|R^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)|\cdot q.$$

Согласно оценкам (2.12) и выбору (2.11), (2.13) имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|R^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)| &\leqslant \exp\Big\{M\cdot\Big(-\big(1-(m+t+1)\varepsilon\big)\log b\\ &\qquad + \log C_{11} + \big(2-(m+1)\varepsilon\big)\log\big(C|a|\big)\Big)\Big\}\\ &\leqslant \exp\Big\{-\frac{\eta_1\log(2q)}{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}\\ &\qquad \times\frac{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}{\eta_1}\Big\}\\ &= \tfrac12 q^{-1},\end{aligned}$$

откуда

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)|\cdot|r| \geqslant \tfrac12.$$

С помощью оценок (2.12), выбора (2.13) и неравенства (2.14) получаем:

$$|r| \geqslant \tfrac12\exp\Big\{-M\cdot\big((1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}\big)\Big\} > q^{-\eta}.$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы 3.

§ 3. Рациональные приближения обобщенных полилогарифмов

Рассматриваются функции

$$f_l(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^l},\quad l=1,\dots,m,\quad \lambda\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}, \tag{3.1}$$

(обобщенные полилогарифмы).

Лемма 3.1. *Функции (3.1) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Доказательство этого утверждения проводится с помощью так называемого "арифметического" метода (см. [20, гл. 8]). Пусть $\lambda = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ – взаимно простые числа. Обозначим через t произвольное натуральное число. По теореме Дирихле в арифметической прогрессии $\{a + b\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ содержится бесконечное множество простых чисел. Поэтому можно выбрать натуральное $\mu > \max\{t, -2a/b\}$ такое, что число $a + b\mu$ является простым. Тогда точные знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\mu+\lambda)^l} = \frac{b^\mu}{(a+b\mu)^l}, \quad l = 1, \ldots, m,$$

содержат простое число $a + b\mu$ в степенях l, $l = 1, \ldots, m$, соответственно, и в то же время знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\nu+\lambda)^l} = \frac{b^\nu}{(a+b\nu)^l}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1, \quad l = 1, \ldots, m,$$

не делятся на число $a + b\mu$ в силу его простоты и поскольку $a + b\mu > |a + b\nu|$ для всех $\nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1$. Полагая в лемме 1 [20, гл. 8] $u = 0$, $\varphi_0(z) = z$, $v = m$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, получаем, что функции $z, f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Для взаимно простых $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$ через D_n обозначим наименьшее общее кратное чисел*

$$a + b\mu, \quad \mu = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \rho(b),$$

где функция $\rho(b)$ определяется равенством (0.17).

Доказательство этого факта мы заимствуем из работы [24] (см. доказательство теоремы 7.1). Не ограничивая общности, считаем $a > 0$, поскольку утверждение леммы можно доказывать с заменой a на $a + b\nu > 0$ для некоторого фиксированного $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и разложение D_n на простые множители имеет вид

$$D_n = \prod p^{\tau_p},$$

где, очевидно, с некоторым μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$, выполнено

$$\tau_p \leqslant \frac{\log(a+b\mu)}{\log p} \leqslant \frac{\log(a+bn)}{\log p}.$$

Поэтому

$$D_n \leqslant \prod p^{\log(a+bn)/\log p} \leqslant (a+bn)^{N_n},$$

где N_n есть количество простых чисел p, делящих $a+b\mu$ для некоторого μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$. Следовательно,

$$N_n = \sum_{1\leqslant j\leqslant b} N_{n,j} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\ (j,b)=1}} N_{n,j} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\ (j,b)>1}} N_{n,j}, \tag{3.2}$$

где $N_{n,j}$ есть количество простых чисел p, удовлетворяющих сравнению $p \equiv j \mod b$ и делящих $a + b\mu$ для некоторого μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$. Пусть простое p удовлетворяет последним двум условиям. Если $(j,b) > 1$, то из сравнения $p \equiv j \mod b$ вытекает, что $(p,b) > 1$, т.е. p является делителем числа b и равенство (3.2) можно записать в виде

$$N_n = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\ (j,b)=1}} N_{n,j} + O(1),$$

где значение постоянной $O(1)$ не превосходит количества делителей b. Если $(j,b) = 1$, то для некоторых натуральных u, v выполнено $p - j = ub$ и $pv = a + b\mu$. Тогда $jv \equiv a \mod b$, и значит, $v \geqslant i_j$, где i_j – единственное целое решение сравнения $ji_j \equiv a \mod b$ в интервале $1 \leqslant i_j \leqslant b$. Следовательно,

$$p = \frac{a+b\mu}{v} \leqslant \frac{a+bn}{i_j}$$

и

$$N_{n,j} \leqslant \pi\bigl((a+bn)/i_j, b, j\bigr),$$

где $\pi(x,b,j)$ обозначает число простых p, не превосходящих x, таких, что $p \equiv j \mod b$. По теореме о распределении простых чисел в арифметической прогрессии имеем

$$\pi\bigl((a+bn)/i_j, b, j\bigr) \sim \frac{(a+bn)/i_j}{\varphi(b)\log\bigl((a+bn)/i_j\bigr)} \sim \frac{b}{i_j\varphi(b)} \cdot \frac{n}{\log(a+bn)}$$

при $n \to \infty$. Окончательно получаем:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\(j,b)=1}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N_{n,j}\log(a+bn)}{n} \leqslant \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\(j,b)=1}} \frac{1}{i_j}.$$

Осталось заметить, что когда j пробегает полную систему вычетов по модулю b соответствующие i_j также пробегают эту систему вычетов.

Лемма 3.3. *Совокупность функций* (3.1) *принадлежит классу* $\mathrm{G}(1, e^{m\rho(\operatorname{den}\lambda)})$.

Доказательство. Радиус сходимости степенных рядов (3.1) равен 1. Если $\lambda = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для заданных a, b взята из леммы 3.2, то

$$\frac{D_n^m}{(\nu+\lambda)^l} \in \mathbb{Z}, \quad l = 1, \ldots, m, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Осталось воспользоваться оценкой леммы 3.2.

Совокупность функций (3.1) удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{z} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Поэтому матрица $S = \big(S_{jl}(z)\big)_{j,l=1,\ldots,m}$ системы линейных дифференциальных уравнений (0.10) имеет вид $S = \frac{1}{z}\Lambda$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

– числовая матрица.

Лемма 3.4. *Пусть матрица системы линейных дифференциальных уравнений* (0.10) *имеет вид* $S = \frac{1}{z}\Lambda$, *где* Λ *– числовая матрица. Тогда для матриц*

$$S^{[n]} = \big(S_{jl}^{[n]}(z)\big)_{j,l=1,\ldots,m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

систем линейных дифференциальных уравнений (0.11) *справедливо представление*

$$S^{[n]} = \tfrac{1}{z^n}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

где E *– единичная матрица размера* m.

Доказательство. Будем доказывать утверждение леммы индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ его истинность непосредственно вытекает из условия. Пусть представление (3.5) выполнено для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Согласно рекуррентным соотношениям (0.13) имеем:

$$\begin{aligned} S^{[n+1]} &= \frac{d}{dz} S^{[n]} + S^{[n]} \cdot S \\ &= -\frac{n}{z^{n+1}}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big) \\ &\quad + \frac{1}{z^{n+1}}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big)\cdot\Lambda \\ &= \frac{1}{z^{n+1}}\Lambda\big(\Lambda - E\big)\big(\Lambda - 2E\big)\cdots\big(\Lambda - (n-1)E\big)\big(\Lambda - nE\big), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы для $n+1$, а значит, и для всех натуральных n.

Определим целозначный многочлен

$$\Delta_n(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Согласно лемме 3.4 выполнено

$$\frac{z^n S^{[n]}}{n!} = \Delta_n(\Lambda), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

где матрица Λ определяется равенством (3.4).

Лемма 3.5. *Пусть матрица* Λ *определяется равенством* (3.4). *Тогда*

$$\Delta_n(\Lambda) = \begin{pmatrix} \varkappa_{0,n}(\lambda) & \varkappa_{1,n}(\lambda) & \varkappa_{2,n}(\lambda) & \dots & \varkappa_{m-1,n}(\lambda) \\ 0 & \varkappa_{0,n}(\lambda) & \varkappa_{1,n}(\lambda) & \dots & \varkappa_{m-2,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & \varkappa_{0,n}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \varkappa_{1,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varkappa_{0,n}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\varkappa_{j,n}(\lambda) = \frac{(-1)^j}{j!} \Delta_n^{(j)}(\lambda), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad n \in \mathbb{N},$$

а дифференцирование ведется по переменной λ.

Доказательство. Запишем многочлен $\Delta_n(\lambda)$ в виде

$$\Delta_n(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n} \lambda^\nu, \quad n \in \mathbb{N},$$

и воспользуемся этим разложением с заменой λ на Λ:

$$\Delta_n(\Lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n} \Lambda^\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку матрица (3.4) имеет “почти жорданову” форму, ее степени выглядят достаточно просто, а именно:

$$\Lambda^\nu = \begin{pmatrix} \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \tau_{2,\nu}(\lambda) & \dots & \tau_{m-1,\nu}(\lambda) \\ 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \dots & \tau_{m-2,\nu}(\lambda) \\ 0 & 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \tau_{1,\nu}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{0,\nu}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

где

$$\tau_{j,\nu}(\lambda) = \begin{cases} (-1)^j \binom{\nu}{j} \lambda^{\nu-j}, & \text{если } j \leqslant \nu, \\ 0, & \text{если } j > \nu, \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, матрица $\Delta_n(\Lambda)$ имеет треугольный вид, указанный в формулировке леммы 3.5, причем

$$\begin{aligned} \varkappa_{j,n} &= \sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n} \tau_{j,\nu}(\lambda) = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{\nu=\max\{1,j\}}^{n} r_{\nu,n} \frac{\nu!}{(\nu-j)!} \lambda^{\nu-j} \\ &= \frac{(-1)^j}{j!} \Delta_n^{(j)}(\lambda), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Лемма 3.6. *Для* $\lambda = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, *через* E_n *обозначим наименьший общий знаменатель чисел*

$$\frac{b^\mu \Delta_\mu^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \mu = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log E_n}{n} \leqslant \chi(b) + m - 1,$$

где функция $\chi(b)$ *определяется равенством* (0.17).

Доказательство. Полагая в теореме работы [7] $L = H = n$, $Q = b$, $x = -a$, $M = m - 1$, $\Lambda = 1$, получаем, что E_n делит число

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \cdot D_n^{m-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Учитывая, что

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \leqslant e^{n\chi(b)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \rho(1) = 1$$

согласно лемме 3.2, получаем требуемое.

Лемма 3.7. *Система однородных линейных дифференциальных уравнений, сопряженная к однородной части системы* (3.3), *принадлежит классу* $\mathrm{G}\big(e^{\chi(\operatorname{den}\lambda)+m-1}\big)$.

Доказательство непосредственно следует из равенства (3.6), результатов лемм 3.5, 3.6 и того факта, что $T_*(z) = \operatorname{den}\lambda \cdot z$.

Доказательство следствия 2 получается теперь подстановкой результатов лемм 3.3, 3.7, неравенств (0.16) и $t = 1$ в теорему 3 для функции $f_m(z)$.

Литература

1. Галочкин А. И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Математический сборник. 1974. Т. 95 (137). № 3 (11). С. 396–417.
2. Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых G-функций // Математические заметки. 1975. Т. 18. № 4. С. 541–552.
3. Galochkin A. I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence Theory / ed. A. Baker. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 207–214.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1983.
5. Зудилин В. В. О рациональных приближениях значений одного класса целых функций // Математический сборник. 1995. Т. 186. № 4. С. 89–124.
6. Зудилин В. В. О рациональных приближениях значений G-функций // II Международная конференция "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел". Тезисы докладов. Воронеж: ВГУ, 1995. С. 67.
7. Матвеев Е. М. Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов // Математические заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 76–81.
8. Нгуен Тьен Тай. Об оценках порядков нулей многочленов от аналитических функций и их приложении к оценкам мер взаимной трансцендентности значений E-функций // Математический сборник. 1983. Т. 120 (162). № 1. С. 112–142.
9. Нестеренко Ю. В. Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел // Известия АН СССР. Серия математики. 1977. Т. 41. № 2. С. 253–284.
10. Нестеренко Ю. В. Оценки числа нулей функций некоторых классов // Acta Arithmetica. 1989. Т. LIII. № 1. С. 29–46.

11. Нурмагомедов М. С. Об арифметических свойствах значений G-функций // Математический сборник. 1971. Т. 85 (127). № 3 (7). С. 339–365.
12. Нурмагомедов М. С., Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений некоторых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1973. № 1. P. 19–26; № 2. P. 38–45.
13. Олейников В. А. О дифференциальной неприводимости линейного неоднородного уравнения // Доклады АН СССР. 1970. Т. 194. № 5. С. 1017–1020.
14. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E-функций // Математический сборник. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
15. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithmetica. 1990. Т. LIII. № 5. С. 453–471.
16. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.
17. Шидловский А. Б. Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // Математические заметки. 1967. Т. 2. № 1. С. 33–44.
18. Шидловский А. Б. Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // Успехи математических наук. 1967. Т. 22. № 3 (135). С. 245–246.
19. Shidlovsky A. B. On the estimates of the algebraic independence measures of the values of E-functions // Journal of Australian Mathematical Society. Series A. 1979. V. 27. P. 385–407.
20. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
21. André Y. G-Functions and Geometry. Aspects of Mathematics. V. E13. Braunshweig: Vieweg, 1989.
22. Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G-functions // Lecture Notes in Mathematics. 1985. V. 1135. P. 9–51.
23. Chudnovsky G. V. On some applications of diophantine approximations // Proceedings of National Academy of Sciences USA. 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.
24. Hata M. On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1990. V. 69. № 2. P. 133–173.

25. Lang S. Introduction to Transcendental Numbers. Reading: Addison Wesley Publishing Co., 1966.
26. Siegel C. L. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.–Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
27. Siegel C. L. Transcendental numbers. Princeton: Princeton University Press, 1949.

Оригинал-макет диссертации
подготовлен автором с использованием
издательской системы $\mathcal{AMS}$-TeX & $\mathcal{МИРАН}$-TeX