УДК 511.3

# Эссе о мерах иррациональности $\pi$ и других логарифмов

Вадим В. Зудилин* (МГУ)

14 мая 2004 г.

*Моему учителю и другу А. И. Галочкину*
*по случаю 60-летия*

Пусть $a \in \mathbb{Q} \cap (0,2]$, $a \neq 1$. Тогда последовательность величин

$$\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-(1-a)x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\log a + \mathbb{Q}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \tag{1}$$

реализует 'хорошие' рациональные приближения к $\log a$. Существует несколько способов осуществить интегрирование в (1) с тем, чтобы показать, что интеграл лежит в $\mathbb{Q}\log a + \mathbb{Q}$; далее мы приводим экспозицию различных методов. Целью настоящего миниобзора-эссе продемонстрировать, как различные обобщения интеграла в (1) позволяют установить наилучшие результаты о мерах иррациональности чисел $\log 2$, $\pi$ и $\log 3$. Несмотря на то, что представленные ниже методы работают и в более общих ситуациях (например, для некоторых $\mathbb{Q}$-линейных форм от логарифмов), три указанных числа представляются нам наиболее красивыми и важными моделями для экспозиции.

Оценки мер иррациональности будут представлены в терминах верхних оценок для показателей иррациональности. Напомним, что *показатель иррациональности* вещественного числа $\gamma$ определяется соотношением

$$\mu = \mu(\gamma) = \inf\{c \in \mathbb{R} : \text{неравенство } |\gamma - a/b| \leqslant |b|^{-c} \text{ имеет лишь конечное число в } a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Оценки для $\mu(\gamma)$ выводятся с помощью конструкции линейных форм, содержащих величину $\gamma$, и стандартных утверждений следующего вида.

*Работа выполнена при поддержке исследовательской стипендии фонда Александра фон Гумбольдта и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

**Предложение 1** ([10], лемма 3.1). *Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ иррационально. Предположим, что последовательность линейных форм $b_n x - a_n$ с целыми коэффициентами из поля рациональных чисел или мнимого квадратичного поля удовлетворяет соотношениям*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|b_n|}{n} \leqslant C_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|b_n\gamma - a_n|}{n} = -C_0$$

*где $C_0$ и $C_1$ — некоторые положительные вещественные числа. Тогда $\mu(\gamma) \leqslant 1 + C_1/C_0$.*

**Предложение 2** ([11], лемма 2.1). *Пусть $\omega, \omega' \in \mathbb{R}$ — два иррациональных числа. Предположим, что последовательности линейных форм $b_n x - a_n$ и $b_n x - a'_n$ с целыми коэффициентами из поля рациональных чисел или мнимого квадратичного поля удовлетворяют соотношениям*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|b_n|}{n} \leqslant C_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|b_n\omega - a_n|}{n} = -C_0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|b_n\omega' - a'_n|}{n} = -C'_0$$

*где $C_0 < C'_0$ и $C_1$ — некоторые положительные вещественные числа. Тогда любой ненулевой элемент $\gamma \in \mathbb{Q}\omega + \mathbb{Q}\omega'$ является иррациональным с оценкой $\mu(\gamma) \leqslant 1 + C_1/C_0$ для показателя иррациональности.*

*Замечание.* На самом деле, лемма 2.1 в [11] несколько отличается от нашего последнего утверждения; однако непосредственная проверка показывает, что приведенное в [11] доказательство проходит и в случае нашей 'модификации'.

# 1 Мера иррациональности для $\log 2$ (после Е. Рухадзе)

## 1.1 Гипергеометрическая функция Гаусса

Мы будем работать с более общей формой интеграла (1), именно с интегралом

$$I(m, n_0, n_1; a) = \int_0^1 \frac{x^{n_0}(1-x)^{n_1}}{(1-(1-a)x)^{m+1}}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

где неотрицательные целые $m, n_0, n_1$ удовлетворяют дополнительному условию $\max\{m, n_0\} \leqslant n_1$ (это ограничение вводится для удобства). Интеграл в (2) есть в точности эйлеров интеграл для гипергеометрического ряда Гаусса:

$$\begin{aligned} I(m, n_0, n_1; a) &= \frac{\Gamma(n_0+1)\,\Gamma(n_1+1)}{\Gamma(n_0+n_1+2)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} m+1,\ n_0+1 \\ n_0+n_1+2 \end{matrix} \,\middle|\, 1-a\right) \\ &= \frac{\Gamma(n_1+1)}{\Gamma(m+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\nu)\,\Gamma(n_0+1+\nu)}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(n_0+n_1+2+\nu)} (1-a)^{\nu} \end{aligned} \tag{3}$$

(см., например, [3], § 2.2). Последняя сумма может быть записана в виде

$$I(m, n_0, n_1; a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R(\nu)(1-a)^{\nu}, \tag{4}$$

где

$$R(t) = \frac{(t+1)(t+2)\cdots(t+m)}{m!} \cdot \frac{n_1!}{(t+n_0+1)(t+n_0+2)\cdots(t+n_0+n_1+1)}, \tag{5}$$

причем $R(t) = O(t^{-1})$ при $t \to \infty$ ввиду $m \leqslant n_1$. Полагая $m^* = \min\{m, n_0\}$ и $n_0^* = \max\{m, n_0\}$, разложим рациональную функцию (5) в сумму простейших дробей:

$$R(t) = \sum_{k=n_0^*}^{n_0+n_1} \frac{A_k}{t+k+1} = \sum_{k=n_0^*}^{n_0+n_1} \frac{(-1)^{m+n_0-k}\binom{k}{m}\binom{n_1}{k-n_0}}{t+k+1}. \tag{6}$$

Тогда согласно (4) получаем

$$\begin{aligned} I(m, n_0, n_1; a) &= \sum_{\nu=-m^*}^{\infty} R(\nu)(1-a)^{\nu} = \sum_{k=n_0^*}^{n_0+n_1} A_k (1-a)^{-(k+1)} \sum_{\nu=-m^*}^{\infty} \frac{(1-a)^{\nu+k+1}}{\nu+k+1} \\ &= \sum_{k=n_0^*}^{n_0+n_1} A_k (1-a)^{-(k+1)} \Biggl( \sum_{l=1}^{\infty} - \sum_{l=1}^{k-m^*} \Biggr) \frac{(1-a)^l}{l} \\ &= -\log a \cdot \sum_{k=n_0^*}^{n_0+n_1} A_k (1-a)^{-(k+1)} - \sum_{k=n_0^*}^{n_0+n_1} \sum_{l=1}^{k-m^*} \frac{A_k (1-a)^{l-(k+1)}}{l}, \end{aligned} \tag{7}$$

откуда

$$I(m, n_0, n_1; a)(1-a)^{n_0+n_1+1} \cdot d^{n_0+n_1-m^*} D_{n_0+n_1-m^*} \in \mathbb{Z} \log a + \mathbb{Z}, \tag{8}$$

где $d$ обозначает знаменатель числа $a$, а $D_n$ — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Согласно асимптотическому закону распределения простых чисел имеем следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} = 1.$$

## 1.2 Арифметические оценки

Включение (8) в ряде случаев может быть значительно уточнено, и именно это наблюдение позволило Рухадзе установить рекордную оценку для меры иррациональности $\log 2$.

Симметрия ${}_2F_1$-ряда в (3) относительно его верхних параметров $m+1$ и $n_0+1$ влечет тождество

$$\frac{I(m,n_0,n_1;a)}{\Gamma(n_0+1)\,\Gamma(n_1+1)}=\frac{I(n_0,m,n_0+n_1-m;a)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n_0+n_1-m+1)} \tag{9}$$

(которое не столь очевидно с точки зрения (2)). Включение (8), записанное для $I$-величины в правой части (9):

$$I(n_0,m,n_0+n_1-m;a)(1-a)^{n_0+n_1+1}\cdot d^{n_0+n_1-m^*}D_{n_0+n_1-m^*}\in\mathbb{Z}\log a+\mathbb{Z},$$

а также равенство

$$\begin{aligned}I(m,n_0,n_1;a)(1-a)^{n_0+n_1+1}\cdot d^{n_0+n_1-m^*}D_{n_0+n_1-m^*}\cdot\frac{m!\,(n_0+n_1-m)!}{n_0!\,n_1!}\\ =I(n_0,m,n_0+n_1-m;a)(1-a)^{n_0+n_1+1}\cdot d^{n_0+n_1-m^*}D_{n_0+n_1-m^*}\end{aligned}$$

означают, что если $\Phi(m,n_0,n_1)$ является знаменателем отношения

$$\frac{m!\,(n_0+n_1-m)!}{n_0!\,n_1!},$$

то

$$I(m,n_0,n_1;a)(1-a)^{n_0+n_1+1}\cdot d^{n_0+n_1-m^*}D_{n_0+n_1-m^*}\cdot\Phi(m,n_0,n_1)^{-1}\in\mathbb{Z}\log a+\mathbb{Z}. \tag{10}$$

Известно, что для каждого простого $p$ имеет место формула $\operatorname{ord}_p N!=\lfloor N/p\rfloor+\lfloor N/p^2\rfloor+\lfloor N/p^3\rfloor+\cdots$, где $\lfloor\cdot\rfloor$ — целая часть числа. Следовательно,

$$\Phi(m,n_0,n_1)=\prod_p p^{\phi(p)+\phi(p^2)+\phi(p^3)+\cdots}, \tag{11}$$

где

$$\phi(t)=\max\biggl\{0,\,\biggl\lfloor\frac{n_0}{t}\biggr\rfloor+\biggl\lfloor\frac{n_1}{t}\biggr\rfloor-\biggl\lfloor\frac{m}{t}\biggr\rfloor-\biggl\lfloor\frac{n_0+n_1-m}{t}\biggr\rfloor\biggr\}.$$

Заключительное замечание (сделанное Г. Чудновским в [7] вместе с методом вычисления асимптотики множителей вида (11)) состоит в том, что делитель

$$\widetilde{\Phi}(m,n_0,n_1)=\prod_{p>\sqrt{n_1}}p^{\phi(p)} \tag{12}$$

числа $\Phi(m,n_0,n_1)$ дает главный вклад в асимптотику (11), и его асимптотика может быть несложно подсчитана.

## 1.3 Результат об иррациональности

Выбор $a = 2$ и $n_0 = 6n$, $m = 7n$, $n_1 = 8n$, где $n$ — положительный целый параметр, возрастающий к $\infty$, позволил Е. Рухадзе в [18] доказать следующее утверждение (см. также [10], [19] и [6]).

**Теорема 1.** *Показатель иррациональности* $\log 2$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mu(\log 2) \leqslant 3.89139977\ldots.$$

Приведем набросок доказательства. Для указанного выше выбора параметров положим

$$I_n = I(7n, 6n, 8n; 2) = \int_0^1 \left(\frac{x^6(1-x)^8}{(1+x)^7}\right)^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \bar{A}_n \log 2 - \bar{B}_n,$$

где ввиду (6) и (7) справедлива формула

$$\bar{A}_n = (-1)^n \sum_{k=7n}^{14n} \binom{k}{7n}\binom{8n}{k-6n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log I_n}{n} &= \log \max_{0<x<1} \frac{x^6(1-x)^8}{(1+x)^7} \\ &= \log \frac{2^5 3^3(7734633\sqrt{393} - 153333125)}{7^7} = -11.84497806\ldots,\end{aligned} \tag{13}$$

и в соответствии с асимптотической формулой Стирлинга для факториала

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log|\bar{A}_n|}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max_{7n\leqslant k\leqslant 14n} \binom{k}{7n}\binom{8n}{k-6n} \\ &= \log \max_{7<y<14} \left(\frac{y^y}{7^7(y-7)^{y-7}} \cdot \frac{8^8}{(y-6)^{y-6}(14-y)^{14-y}}\right) \\ &= \log \frac{2^5 3^3(7734633\sqrt{393} + 153333125)}{7^7} = 12.68147230\ldots.\end{aligned} \tag{14}$$

Для вычисления асимптотического поведения величины $\Phi_n = \widetilde{\Phi}(7n, 6n, 8n)$ в (12) мы пользуемся тем, что $\phi(t) = \varpi_0(n/t)$, где

$$\begin{aligned}\varpi_0(x) &= \max\bigl\{0, \lfloor 6x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor - 2\lfloor 7x\rfloor\bigr\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{7}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{7}\right) \cup \left[\frac{3}{8}, \frac{3}{7}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{7}\right) \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}\end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\Phi_n}{n}=\int_0^1\varpi_0(x)\mathrm{d}\psi(x)=\log\frac{2^{15}3^3}{7^7}+\frac{\pi(3+6\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{6}=2.45775406\ldots,\tag{15}$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Применяя включения (10) и асимптотики (13)–(15), заключаем, что

$$\begin{aligned}C_0&=-\log(7734633\sqrt{393}-153333125)+10\log2-8+\frac{\pi(3+6\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{6}\\&=6.30273213\ldots,\\C_1&=\log(7734633\sqrt{393}+153333125)-10\log2+8-\frac{\pi(3+6\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{6}\\&=18.22371823\ldots,\end{aligned}$$

в обозначениях предложения 1. Окончательно, приходим к оценке

$$\mu(\log 2)\leqslant 1+\frac{C_1}{C_0}=3.89139977\ldots.$$

Полученный результат для меры $\log 2$ можно сравнить с оценкой в случае более простого выбора $n_0=n_1=m=n$ (как в (1)):

$$C_0=-2\log(\sqrt{2}-1)-1=2\log(\sqrt{2}+1)-1,\qquad C_1=2\log(\sqrt{2}+1)+1,$$

откуда

$$\mu(\log 2)\leqslant 1+\frac{C_1}{C_0}\leqslant 1+\frac{2\log(\sqrt{2}+1)+1}{2\log(\sqrt{2}+1)-1}=4.62210083\ldots.$$

# 2 Мера иррациональности для $\pi$ (после М. Хаты)

## 2.1 Совместные приближения логарифмов

Замена переменной $z=1-(1-a)x$ в (1) приводит интеграл к виду

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(1-a)^{2n+1}}\int_1^a\frac{(z-1)^n(z-a)^n}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.\tag{16}$$

Вместо разложения последнего интеграла мы будем работать с более общим *комплексным* интегралом

$$I_k(\boldsymbol{a},m,\boldsymbol{n};a)=\int_{\Gamma_{1,a}}\frac{(z-1)^{n_0}(z-a_1)^{n_1}\cdots(z-a_k)^{n_k}}{z^{m+1}}\,\mathrm{d}z,$$

где $\Gamma_{1,a}$ есть гладкий ориентируемый путь из 1 в $a$, заключенный в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$; параметры $a, a_1, \dots, a_k$ — комплексные числа, не равные 0 и 1; показатели $n_0, n_1, \dots, n_k, m$ — положительные целые. Интеграл в (16) отвечает выбору $k = 1$, $a_1 = a$ и $n_0 = n_1 = m = n$. Полагая дополнительно $a_0 = 1$, так же, как и в [11], раздел 3, находим

$$\begin{aligned} I_k(\boldsymbol{a}, m, \boldsymbol{n}; a) &= \sum_{l_0=0}^{n_0}\sum_{l_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{l_k=0}^{n_k} A_{\boldsymbol{l}}\binom{n_0}{l_0}\binom{n_1}{l_1}\cdots\binom{n_k}{l_k}\int_{\Gamma_{1,a}} z^{l_0+l_1+\dots+l_k-m-1}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum\cdots\sum_{l_0+\dots+l_k\ne m} \frac{A_{\boldsymbol{l}}}{l_0+\dots+l_k-m}\binom{n_0}{l_0}\cdots\binom{n_k}{l_k}(a^{l_0+\dots+l_k-m}-1) \\ &\qquad + \sum\cdots\sum_{l_0+\dots+l_k=m} A_{\boldsymbol{l}}\binom{n_0}{l_0}\cdots\binom{n_k}{l_k}\cdot\log a, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$A_{\boldsymbol{l}} = A_{l_0,l_1,\dots,l_k} = (-1)^{l_0+l_1+\dots+l_k} a_1^{n_1-l_1}\cdots a_k^{n_k-l_k}$$

и мы воспользовались формулой

$$\int_{\Gamma_{1,a}} z^{l-1}\,\mathrm{d}z = \int_1^a z^{l-1}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} a^l/l & \text{при } l\ne 0, \\ \log a & \text{при } l = 0. \end{cases}$$

Основная идея заключается в том, что коэффициент при $\log a$ в линейной форме (17) не зависит от выбора $a$ (но, разумеется, аналитическое поведение интеграла зависит!). Подходящий и естественный выбор для $a$ — принадлежать множеству $\{a_1, \dots, a_k\}$. В этом случае определенные выше величины $I_k$ реализуют совместные приближения к $\log a_1, \dots, \log a_k$.

## 2.2 Аналитические и арифметические ингредиенты

Сконцентрируем наше внимание на случае $k = 2$, при котором в [11] установлена оценка меры линейной независимости чисел $\pi$ и $\log 2$ над $\mathbb{Q}$ (в частности, меры иррациональности $\pi$), а также новая мера иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$.

Итак, Хата [11] выбирает $k = 2$ (чем действительно обобщает (16), а значит, и (1)) и, подставляя $a = a_1$ и $a = a_2$, строит хорошие совместные приближения к $\log a_1$ и $\log a_2$. Хата ‘ограничивается’ с самого начала рассмотрением частного случая $n_0 = n_1 = n_2 = 2n$ и $m = 3n$, где $n$ — растущий параметр. Однако этот простой выбор приводит к наилучшим теоретико-числовым результатам, и наше собственное рассмотрение общей ситуации

$$n_0 = \alpha_0 n, \quad n_1 = \alpha_1 n, \quad n_2 = \alpha_2 n, \quad m = \alpha n,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha$ — положительные целые, в большей степени подчинено методологическим причинам.

Запишем интегралы в виде

$$J_{j,n} = I_2(a_j) = \int_{\gamma_j} \frac{e^{nf(z)}}{z}\,\mathrm{d}z, \qquad j = 1, 2, \tag{18}$$

где

$$f(z) = \alpha_0 \log(z - a_0) + \alpha_1 \log(z - a_1) + \alpha_2 \log(z - a_2) - \alpha \log z$$

и путь $\gamma_j$ соединяет точки 1 и $a_j$, проходя через соответствующие точки перевала. Эти точки перевала $\xi_0, \xi_1, \xi_2$ являются решениями уравнения $f'(z) = 0$, которое приводится к кубическому полиномиальному уравнению: две точки $\xi_1$ и $\xi_2$ отвечают за рост интегралов в (18):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |J_{1,n}|}{n} = \operatorname{Re} f(\xi_1), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log |J_{2,n}|}{n} = \operatorname{Re} f(\xi_2),$$

в то время как третья точка перевала $\xi_0$ определяет асимптотическое поведение коэффициентов линейных форм.

Для вычисления арифметики коэффициентов мы должны определить правильные знаменатели произведений

$$\frac{1}{l_0 + l_1 + l_2 - \alpha n} \binom{\alpha_0 n}{l_0} \binom{\alpha_1 n}{l_1} \binom{\alpha_2 n}{l_2}, \qquad l_0 + l_1 + l_2 \ne \alpha n.$$

Ясно, что потребуется наименьший общий знаменатель $D_{\beta n}$, где $\beta = \max\{\alpha, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha\}$, но часть простых $p > \sqrt{Cn}$ может быть исключена из $D_{\beta n}$ с помощью решения следующей задачи: определить простые $p$, делящие все целые числа

$$\binom{\alpha_0 n}{l_0} \binom{\alpha_1 n}{l_1} \binom{\alpha_2 n}{l_2}$$

при дополнительном условии $l_0 + l_1 + l_2 \equiv \alpha n \pmod p$. Записывая дробные доли $x = \{n/p\}$ и $y_j = \{l_j/p\}$, $j = 0, 1, 2$, сведем задачу к минимизации 1-периодической целозначной функции

$$\varpi(x, y_0, y_1, y_2) = \sum_{j=0}^{2} \bigl(\lfloor \alpha_j x \rfloor - \lfloor y_j \rfloor - \lfloor \alpha_j x - y_j \rfloor\bigr)$$

на кубе $(y_0, y_1, y_2) \in [0, 1)^3$ при дополнительном ограничении $y_0 + y_1 + y_2 \equiv \alpha x \pmod 1$. (Последнее условие означает, что знание $x, y_0, y_1$ однозначно определяет оставшуюся величину $y_2$.) Обозначим через $\varpi_0(x)$ требуемый минимум. Например, выбор Хаты $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\alpha = 3$ приводит к функции

$$\varpi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \bigl[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\bigr), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Существует также 'проблема' отыскания правильных знаменателей чисел $A_l$ и $A_l a^{l_0+l_1+l_2-m}$. К примеру, в случае $a_1=2$, $a_2=1+i$ (отвечающем совместным приближениям к $\log 2$ и $\pi$) получаем

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{l_0+l_1+l_2}A_l a_0^{l_0+l_1+l_2-m} = 2^{n_1-l_1}(1+i)^{n_2-l_2}\in\mathbb{Z}[i],\\
&(-1)^{l_0+l_1+l_2}A_l a_1^{l_0+l_1+l_2-m} = 2^{n_1+l_0+l_2-m}(1+i)^{n_2-l_2}\\
&\qquad = 2^{n_1+l_0-m}(1+i)^{l_2}(1-i)^{l_2}\cdot(1+i)^{2\lfloor n_2/2\rfloor}(1+i)^{2\{n_2/2\}-l_2}\\
&\qquad = 2^{n_1+\lfloor n_2/2\rfloor-m+l_0}i^{\lfloor n_2/2\rfloor}(1+i)^{2\{n_2/2\}}(1-i)^{l_2}\in\mathbb{Z}[i],\\
&(-1)^{l_0+l_1+l_2}A_l a_2^{l_0+l_1+l_2-m} = 2^{n_1-l_1}(1+i)^{n_2+l_0+l_1-m}\\
&\qquad = (1+i)^{n_1-l_1}(1-i)^{n_1-l_1}(1+i)^{n_2+l_0+l_1-m}\\
&\qquad = (1+i)^{n_1+n_2-m+l_0}(1-i)^{n_1-l_1}\in\mathbb{Z}[i]
\end{aligned}
$$

при условии, что $n_1+\lfloor n_2/2\rfloor-m\geqslant 0$ и $n_1+n_2-m\geqslant 0$ (иными словами, $\alpha_1+\alpha_2/2\geqslant\alpha$).

## 2.3 Мера для $\pi$

Таким образом, выбор Хаты $a_1=2$, $a_2=1+i$ и $n_0=n_1=n_2=2n$, $m=3n$ с помощью предложения 2 приводит к следующему результату.

**Теорема 2.** *Показатель иррациональности любого ненулевого $\gamma\in\mathbb{Q}\log 2+\mathbb{Q}\pi$ удовлетворяет неравенству*

$$\mu(\gamma)\leqslant 8.01604539\dots.$$

Заинтересованному читателю было бы полезно ознакомиться с заметками [5], которые в состоянии передать ощущения трудности получения оценки меры иррациональности числа $\pi$.

## 2.4 Двойные гипергеометрические ряды

В этом пункте укажем связь между конструкцией Хаты и гипергеометрическими рядами (использованными как основной инструмент в разделе 1).

Для краткости положим $a=a_1$, $b=a_2$ и рассмотрим интегралы

$$J=\int_1^a\frac{(z-1)^{n_0}(z-a)^{n_1}(z-b)^{n_2}}{z^{m+1}}\,\mathrm{d}z$$

и

$$J^*=\int_1^b\frac{(z-1)^{n_0}(z-a)^{n_1}(z-b)^{n_2}}{z^{m+1}}\,\mathrm{d}z,$$

реализующие совместные приближения к $\log a$ и $\log b$. Применяя стартовую замену переменной $z = 1-(1-a)x$ к первому интегралу, получаем интеграл

$$J = (-1)^{n_0+1}(1-a)^{n_0+n_1+1}(1-b)^{n_2}\int_0^1 \frac{x^{n_0}(1-x)^{n_1}\Bigl(1-\dfrac{1-a}{1-b}x\Bigr)^{n_2}}{(1-(1-a)x)^{m+1}}\,\mathrm{d}x, \tag{19}$$

который можно отождествить с гипергеометрической функцией Аппеля

$$\begin{aligned} J = (-1)^{n_0+1}(1-a)^{n_0+n_1+1}(1-b)^{n_2}\frac{\Gamma(n_0+1)\,\Gamma(n_1+1)}{\Gamma(n_0+n_1+1)} \\ \times F_1\biggl(n_0+1; m+1, -n_2; n_0+m+2; 1-a, \frac{1-a}{1-b}\biggr) \end{aligned}$$

(см. [4], § 9.3, формула (4)), где ряд

$$F_1(A; B, B'; C; X, Y) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(A)_{\nu+\mu}(B)_\nu(B')_\mu}{\nu!\,\mu!(C)_{\nu+\mu}}X^\nu Y^\mu$$

абсолютно сходится в области $|X| < 1$, $|Y| < 1$.

Другая замена переменной

$$x = (1-y)\Bigg/\biggl(1-\frac{1-a}{1-b}y\biggr)$$

в (19) приводит к интегральному представлению

$$\begin{aligned} J &= (-1)^{n_0+m}(1-a)^{n_0+n_1+1}(1-b)^{n_0+n_2+1}(a-b)^{n_1+n_2+1} \\ &\quad\times\int_0^1 \frac{y^{n_1}(1-y)^{n_0}\,\mathrm{d}y}{\bigl(a(1-b)-b(1-a)y\bigr)^{m+1}\bigl((1-b)-(1-a)y\bigr)^{n_0+n_1+n_2-m+1}} \\ &= (-1)^{n_0+m}\frac{(1-a)^{n_0+n_1+1}(a-b)^{n_1+n_2+1}}{a^{m+1}(1-b)^{n_1+1}}\,\frac{\Gamma(n_0+1)\,\Gamma(n_1+1)}{\Gamma(n_0+n_1+1)} \\ &\quad\times F_1\biggl(n_1+1; m+1, n_0+n_1+n_2-m+1; n_0+n_1+2; \frac{b(1-a)}{a(1-b)}, \frac{1-a}{1-b}\biggr). \end{aligned} \tag{20}$$

Случай $a = 2$, $b = 1+i$ отвечает следующему выбору аргументов в последнем $F_1$-ряде:

$$\frac{1-a}{1-b} = -i = e^{-\pi i/2}, \qquad \frac{b(1-a)}{a(1-b)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi i/4}.$$

Наконец, те же самые замены переменной, примененные к интегралу $J^*$, приводят к интегралам подобным (19) и (20), но с интегрированием по гладким путям от 0 до $(1-b)/(1-a)$ и от $\infty$ до 1 соответственно.

# 3 Мера иррациональности для $\log 3$ (после Дж. Рина)

## 3.1 Предварительное замечание

Как было отмечено, метод раздела 2 имеет множество других приложений. Например, выбор $a_1 = 4/3$, $a_2 = 3/2$ и $n_0 = n_1 = n_2 = 2n$, $m = 3n$ (ср. с п. 2.3) и применение предложения 2 влекут неравенство $\mu(\gamma) \leqslant 11.1017577\ldots$ для показателя иррациональности $\gamma \in \mathbb{Q}\log 2 + \mathbb{Q}\log 3$ (см. [12], следствие 3.1).

## 3.2 Снова о рациональных приближениях $\log 2$

Как нам уже известно из раздела 1.1, для нашего первоначального интеграла (1) в случае $a = 2$ выполнено

$$D_n \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right)^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \in \mathbb{Z}\log 2 + \mathbb{Z}$$

и, значит,

$$D_n \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right)^k \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \in \mathbb{Z}\log 2 + \mathbb{Z}$$

при любом неотрицательном $k \leqslant n$. Рассматривая линейные комбинации таких интегралов, заключаем, что для любого многочлена $G_n(y) \in \mathbb{Z}[y]$ степени $\deg G_n \leqslant n$ имеют место включения

$$D_n \int_0^1 G_n\!\left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \in \mathbb{Z}\log 2 + \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Для того чтобы угадать 'удачный' выбор многочлена $G_n$, заметим, что

$$\int_0^1 \left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right)^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = C\int_0^b \left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right)^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x},$$

где $C$ — некоторая постоянная (в нашем случае $C = 2$), а $b$ — точка перевала подынтегральной функции: $b = \sqrt{2} - 1$; следовательно,

$$\int_0^1 \left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right)^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = C\int_0^{(\sqrt{2}-1)^2} y^n x(y)\,\mathrm{d}y,$$

где $y = x(1-x)/(1+x)$ и $x(y)\colon (0, (\sqrt{2}-1)^2) \to (0, b)$ — обратное отображение. Окончательно,

$$\int_0^1 G_n\!\left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = C\int_0^{(\sqrt{2}-1)^2} G_n(y)x(y)\,\mathrm{d}y.$$

Таким образом, оценивая необходимую асимптотику, используя включения (21) и применяя предложение 1, получаем оценку $\mu(\log 2) \leqslant 1 + C_1/C_0$, где

$$\begin{aligned} C_0 &= -1 - \lim_{n\to\infty} \log \max_{0\leqslant y\leqslant(\sqrt{2}-1)^2} \left\{ |G_n(y)|^{1/n} \right\}, \\ C_1 &= \quad 1 + \lim_{n\to\infty} \log \max_{0\leqslant y\leqslant(\sqrt{2}+1)^2} \left\{ |G_n(y)|^{1/n} \right\}. \end{aligned}$$

Теперь можно было бы заняться поиском многочлена $G_n \in \mathbb{Z}[y]$ степени $\leqslant n$, доставляющего минимум величины $C_1/C_0$. К сожалению, эта (нелинейная!) задача представляется весьма трудно разрешимой.

Идея Рина [15], [16] — автора указанной конструкции — заключается в ‘линеаризации’ данной оптимизационной задачи. Рин предлагает искать многочлен $G^* \in \mathbb{Z}[y]$ степени, скажем, $\leqslant n^*$, который наиболее близок к оптимальному выбору многочлена в задаче

$$\min_{\substack{G\in\mathbb{Z}[y] \\ 1\leqslant\deg G\leqslant n^*}} \max_{0\leqslant y\leqslant(\sqrt{2}-1)^2} \left\{ |G(y)|^{1/n^*} \right\}, \tag{22}$$

после чего в качестве $G_n(x)$ выбирать $(G^*(x))^{\lfloor n/n^* \rfloor}$ для $n$ существенно бóльших чем $n^*$. Например, тот факт, что $(\sqrt{2}-1)^2 \approx 1/6$, дает первое нетривиальное приближение $G^*(y) = y^6(6y-1)$ в последней задаче.

Проблема минимизации величины (22) тесно связана с вычислением $\mathbb{Z}$-трансфинитного диаметра отрезка $[0, (\sqrt{2}-1)^2]$. (Здесь $\mathbb{Z}$-трансфинитный диаметр множества $Y \subset \mathbb{R}$ определяется соотношением

$$t_{\mathbb{Z}}(Y) = \inf_{\substack{G\in\mathbb{Z}[x] \\ \deg G\geqslant 1}} \max_{y\in Y} \left\{ |G(y)|^{1/\deg G} \right\};$$

о сложности вычисления этой величины см. [1].) Эта взаимосвязь описана в [2]; там же можно найти результат $\mu(\log 2) < 3.991$, полученный на основе описанной выше линеаризованной процедуры оптимизации. Последняя оценка выглядит достаточно близкой к оценке из теоремы 1; однако она является очень ‘компьютернозависимой’.

Указанный метод может быть использован и в ситуациях, подобных рассмотренной в разделе 2. Например, можно рассматривать совместные $\mathbb{Z}[i]$-приближения к $\log a_1$ и $\log a_2$ вида

$$\begin{aligned} \int_1^{a_1} G_n\left( \frac{(z-1)^2(z-a_1)^2(z-a_2)^2}{z^3} \right) \frac{\mathrm{d}z}{z} &= B_n \log a_1 - B'_n, \\ \int_1^{a_2} G_n\left( \frac{(z-1)^2(z-a_1)^2(z-a_2)^2}{z^3} \right) \frac{\mathrm{d}z}{z} &= B_n \log a_2 - B''_n \end{aligned}$$

для произвольного многочлена $G_n(y) \in \mathbb{Z}[y]$ степени $\leqslant n$, где

$$d^n B_n, \ d^n D_{3n} B'_n, \ d^n D_{3n} B''_n \in \mathbb{Z}[i],$$

а целое $d > 0$ происходит от знаменателей чисел $a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}$. (Применение лучших включений, полученных Хатой в [11], в этом случае крайне проблематично.) К сожалению, данный способ не выглядит слишком перспективным, опять же ввиду необходимости 'линеаризовать' возникающую оптимизационную задачу.

## 3.3 Другое обобщение интеграла в (1)

С другой стороны, интегрирование в (1) можно проводить заменяя числитель $x^n(1-x)^n$ подынтегрального выражения произвольным многочленом степени $\leqslant 2n$. При этом, разумеется, возникают естественные дополнительные ограничения на выбор подобного многочлена.

Пусть $a = c/d \in \mathbb{Q}$, где $c$ и $d > 0$ взаимно просты, и пусть $\Delta$ обозначает общее кратное чисел $c$ и $d$. Предположим, что многочлен $H_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ степени $\leqslant 2n$ можно представить в виде

$$H_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \Delta^{n-\nu} z^\nu + \sum_{\nu=n+1}^{2n} B_\nu z^\nu, \qquad \text{где} \quad B_\nu \in \mathbb{Z},\ \nu = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{23}$$

(Ясно, что в случае $a = 2$ многочлен $H_n(z) = (z-1)^n(z-2)^n$ имеет требуемый вид.) Тогда для интеграла

$$I(n) = (1-a)\int_0^1 \frac{H_n(d - d(1-a)x)}{d^n(1-(1-a)x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

получаем

$$\begin{aligned} I(n) &= \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \Delta^{n-\nu} d^{\nu-n}(1-a)\int_0^1 (1-(1-a)x)^{\nu-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{\nu=n+1}^{2n} B_\nu d^{\nu-n}(1-a)\int_0^1 (1-(1-a)x)^{\nu-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} B_\nu \Delta^{n-\nu} d^{\nu-n}\frac{a^{\nu-n}-1}{n-\nu} - B_n \log a - \sum_{\nu=n+1}^{2n} B_\nu d^{\nu-n}\frac{1-a^{\nu-n}}{\nu-n}, \end{aligned}$$

т.е.

$$I(n)\cdot D_n \in \mathbb{Z}\log a + \mathbb{Z}.$$

В общем случае, обладая множеством из $k$ рациональных чисел $a_j = c_j/d$ при $j = 1, \ldots, k$, будем считать, что многочлен $H_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ степени $\leqslant 2n$ представим в виде (23) с $\Delta$, являющимся общим кратным чисел $c_1, \ldots, c_k, d$. Тогда, полагая

$$I(n; a_j) = (1-a_j)\int_0^1 \frac{H_n(d - d(1-a_j)x)}{d^n(1-(1-a_j)x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{24}$$

находим

$$I(n;a_j)\cdot D_n = -B_n\log a_j + A_{nj} \in \mathbb{Z}\log a_j + \mathbb{Z}, \qquad j=1,\dots,k,$$

что опять-таки является совместными приближениями к $\log a_1,\dots,\log a_k$. (На самом деле, выбор

$$H_n(z)=\Delta^{2n}(z-1)^{\lfloor\beta_0 n\rfloor}(z-a_1)^{\lfloor\beta_1 n\rfloor}\cdots(z-a_k)^{\lfloor\beta_k n\rfloor}$$

где $\beta_j=\alpha_j/\alpha$ for $j=0,1,\dots,k$, дает в точности те же приближения, что и в разделе 2. Случай $\beta_1=\dots=\beta_k$ был ранее рассмотрен в [15] и [17].)

Поиск подходящего многочлена $H_n(z)$ для заданного набора чисел $a_1,\dots,a_k$ очень похож на процедуру из п. 3.2. Замена переменной $z_j=d-d(1-a_j)x$ в интегралах (24) (и, как следствие, интегрирование более простого выражение по отрезку $[d,da_j]$) приводит к задаче отыскания многочлена $H_n(z)\in\mathbb{Z}[z]$ степени $\leqslant 2n$ с разложением (23) такого, что величина

$$\max_{z\in Z}\left\{\left|\frac{H_n(z)}{z}\right|^{1/n}\right\}, \qquad Z=\bigcup_{j=1}^{k}[d,da_j],$$

минимально возможна. Алгоритмическое решение этой проблемы на основе LLL-алгоритма было недавно предложено К. Ву в [20]. Это дает возможность автоматизации поиска хороших оценок для линейных форм от логарифмов *рациональных* чисел.

## 3.4 Мера для $\log 3$

Для вывода наилучшей меры иррациональности $\log 3$ Рин строит в [16] совместные приближения к логарифмам чисел $a_1=2/3$, $a_2=4/3$ и использует следующий (достаточно сложный) выбор многочлена (23):

$$\begin{aligned}H_n(z)&=2^{14}\cdot 3^{2n+7}\cdot(z-1)^{\lfloor 0.704324n\rfloor}\Big(z-\frac{2}{3}\Big)^{\lfloor 0.552418n\rfloor}\Big(z-\frac{4}{3}\Big)^{\lfloor 0.447582n\rfloor}\\&\quad\times(5z-4)^{\lfloor 0.109072n\rfloor}(17z^2-34z+16)^{\lfloor 0.038934n\rfloor}(19z^2-36z+16)^{\lfloor 0.054368n\rfloor}\end{aligned}$$

('обоснование' этого выбора приведено в [20]). Таким способом Рин доказывает следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Показатель иррациональности любого ненулевого* $\gamma\in\mathbb{Q}\log 2+\mathbb{Q}\log 3$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mu(\gamma)<8.616.$$

Дальнейшие результаты в этом направлении (например, оценки для мер иррациональности чисел $\log 5$, $\log 7$ и т.д.) можно найти в [20].

# 4 Заключительные импровизации

Взаимосвязи с гипергеометрическими функциями (представленные в п. 1.1 и п. 2.4 ранее) могли бы повлиять на дальнейшее усиление оценок мер иррациональности логарифмов и других подобных постоянных. Так, например, преобразование Эйлера (см. [4], § 2.4, формула (1))

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} A,\, B \\ C \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \frac{1}{(1-z)^A} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} A,\, C-B \\ C \end{matrix} \,\middle|\, \frac{-z}{1-z}\right) $$

трансформирует аргумент $z = 1 - a = -1$ из раздела 1 в $-z/(1-z) = 1/2$. Это приводит к ${}_2F_1$-ряду с *положительными* членами и дает возможность изучения аналитической асимптотики величины (3) без использования интегрального представления (2), т.е. мы можем полностью избавиться от интеграла (эта идея принадлежит К. Боллу; см. [21], доказательство леммы 4). Однако требуются дополнительные соображения, чтобы признать гипергеометрические представления действительно весомыми для получения новых результатов.

Нам представляется весьма любопытным и обещающим применение формул Рамануджана для $\pi$ таких, как

$$ \begin{gathered} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_\nu (1/2)_\nu (3/4)_\nu}{\nu!^3} (21460\nu + 1123) \cdot \frac{(-1)^\nu}{882^{2\nu+1}} = \frac{4}{\pi}, \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_\nu (1/2)_\nu (3/4)_\nu}{\nu!^3} (26390\nu + 1103) \cdot \frac{1}{99^{4\nu+2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \end{gathered} \tag{25} $$

(см. [14], равенства (39) и (44)) и многих других, для построения хороших рациональных приближений к числам $\pi$ и $\pi\sqrt{d}$ в случае целых положительных $d$. Именно, можно ожидать неплохие оценки для соответствующих мер иррациональности с помощью построения в явном виде приближений Паде (первого или второго типа) для функциональной системы 1, $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$, где

$$ f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_\nu (1/2)_\nu (3/4)_\nu}{\nu!^3} z^\nu = {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac14,\, \frac12,\, \frac34 \\ 1,\, 1 \end{matrix} \,\middle|\, z\right). $$

В статье [13] строятся приближения Паде для однородной системы $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ (без 1), что недостаточно для наших целей. В заключение необходимо отметить, что общий результат А. Галочкина из [8] (доказанный с помощью некоторого обобщения метода Зигеля) влечет количественную линейную независимость чисел 1, $f(1/b)$, $f'(1/b)$ и $f''(1/b)$ для целых $b$ с условием $|b| > b_0$, где, к сожалению, значение $b_0$ столь велико, что в случаях $b = -882^2$ и $b = 99^4$ из (25) указанным результатом не удается воспользоваться.

*Благодарности.* Я искренне признателен Дж. Рину за то, что он ввел меня в предмет трансфинитного диаметра и его теоретико-числовых приложений, в частности тех, что представлены в разделе 3. Я особо благодарен П. Бундшу, плодотворные беседы с которым во время моего длительного пребывания в Кёльнском университете были особенно важны при написании. Я благодарен Х. Гиллере за то, что он привлек мое внимание к формулам рамануджанова типа и предоставил возможность ознакомиться с рукописью [9], а также Дж. Сондову за ряд конструктивных замечаний.

## Список цитированной литературы

[1] F. Amoroso, "Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel," Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40,** no. 4, 885–911 (1990)

[2] F. Amoroso, "$f$-transfinite diameter and number theoretic applications," Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43,** no. 4, 1179–1198 (1993)

[3] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **71** (Cambridge University Press, Cambridge 1999)

[4] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Math. Tracts **32** (Cambridge University Press, Cambridge 1935); 2nd reprinted edition (Stechert-Hafner, New York 1964)

[5] F. Beukers, "A rational approach to $\pi$," Notes of a lecture held on the occasion of Pi-day, on July 5, 2000 in Leiden, Nieuw Archief voor Wiskunde, no. 4, 17 pages (2000)

[6] N. Brisebarre, "Irrationality measures of $\log 2$ and $\pi/\sqrt{3}$," Experiment. Math. **10,** no. 1, 35–52 (2001)

[7] G. V. Chudnovsky, "On the method of Thue–Siegel," Ann. of Math. (2) **117,** no. 2, 325–382 (1983)

[8] А. И. Галочкин, "Оценки снизу линейных форм от значений $G$-функций," Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. № 3, 23–29 (1996)

[9] J. Guillera, "Some closely related to Ramanujan formulas for $\pi$," Unpublished manuscript, 8 pages (December 2003)

[10] M. Hata, "Legendre type polynomials and irrationality measures," J. Reine Angew. Math. **407,** no. 1, 99–125 (1990)

[11] M. Hata, "Rational approximations to $\pi$ and some other numbers," Acta Arith. **63,** no. 4, 335–349 (1993)

[12] M. Huttner, “On linear independence measures of some abelian integrals,” Kyushu J. Math. **57,** no. 1, 129–157 (2003)

[13] Ю. В. Нестеренко, “Приближения Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций,” Матем. сборник **185,** № 10, 39–72 (1994)

[14] S. Ramanujan, “Modular equations and approximations to $\pi$,” Quart. J. Math. Oxford Ser. 2 **45,** 350–372 (1914); *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, eds. G. H. Hardy, P. V. Sechu Aiyar and B. M. Wilson, 23–39 (Cambridge University Press, Cambridge 1927); 2nd reprinted edition (Chelsea Publ., New York 1962)

[15] G. Rhin, “Sur l’approximation diophantienne simultanée de deux logarithmes de nombres rationnels,” *Diophantine approximations and transcendental numbers* (Luminy 1982), Progress in Math. **31,** 247–258 (Birkhäuser, Boston 1983)

[16] G. Rhin, “Approximants de Padé et mesures effectives d’irrationalité,” *Séminaire de Théorie des Nombres* (Paris 1985–86), ed. C. Goldstein, Progress in Math. **71,** 155–164 (Birkhäuser, Boston 1987)

[17] G. Rhin and P. Toffin, “Approximants de Padé simultanés de logarithmes,” J. Number Theory **24,** no. 3, 284–297 (1986)

[18] Е. А. Рухадзе, “Оценка снизу приближения ln 2 рациональными числами,” Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. № 6, 25–29 (1987)

[19] C. Viola, “Hypergeometric functions and irrationality measures,” *Analytic Number Theory*, ed. Y. Motohashi, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **247,** 353–360 (Cambridge University Press, Cambridge 1997)

[20] Q. Wu, “On the linear independence measure of logarithms of rational numbers,” Math. Comput. **72,** no. 242, 901–911 (2002)

[21] W. Zudilin, “An elementary proof of Apéry’s theorem,” E-print `math.NT/0202159`, 8 pages (2002)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Воробьёвы горы, ГСП-2, Москва 119992
*E-mail*: `wadim@ips.ras.ru`
*URL*: `http://wain.mi.ras.ru/`