Математические заметки

том 73 выпуск 4 апрель 2003

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ q-ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

В. В. Зудилин

Для каждого целого $k \geqslant 1$ степенной ряд

$$\zeta_q(k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(n) q^n, \qquad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k, \tag{1}$$

определяет некоторое q-расширение значения $\zeta(k+1)$ дзета-функции Римана (см. [1]). Более того, ряд в (1) имеет смысл и при $k = 0$. Ввиду тривиальных оценок

$$\sigma_k(n) \leqslant n^k \sum_{d|n} 1 \leqslant n^{k+1}$$

для каждого целого $k \geqslant 0$ этот ряд представляет в единичном круге некоторую аналитическую функцию. Цель этой заметки – доказать, что функция $\zeta_q(k+1)$ не является алгебраической ни для какого $k \geqslant 1$. Этот результат (и даже более сильный) хорошо известен для $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6), \dots$, поскольку для каждого четного $k \geqslant 2$ функции $1 + c_k \zeta_q(k)$ при подходящем выборе $c_k \in \mathbb{Q}$ являются рядами Эйзенштейна.

Теорема. *Для каждого $k \geqslant 0$ аналитическая в области $|q| < 1$ функция $\zeta_q(k+1)$ трансцендентна над $\mathbb{C}(q)$.*

Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта.

По существу этот результат является приложением задач из [2, отдел 8] (см. также оригинальную работу [3, с. 368–371]). Под *целочисленным* степенным рядом далее понимается ряд с целыми коэффициентами (например, таковым является степенной ряд в (1)).

Лемма 1 [2, отдел 8, гл. 3, §4, задача 163]. *Если рациональная функция представляется целочисленным степенным рядом, то коэффициенты этого ряда, начиная с некоторого, периодические по любому модулю.*

Лемма 2 [2, отдел 8, гл. 3, §5, задача 167]. *Если целочисленный ряд представляет алгебраическую иррациональную функцию, то его радиус сходимости меньше единицы.*

Лемма 3. *Для каждого целого $k \geqslant 0$ функция $\sigma_k(n)$ натурального аргумента $n > N$ не является периодической по модулю 2 ни при каком $N \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что функция $\sigma_k(n)$ является *мультипликативной*, т.е.

$$\sigma_k(m_1 m_2) = \sigma_k(m_1)\sigma_k(m_2), \qquad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad (m_1, m_2) = 1,$$

и если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$ – каноническое разложение числа n на простые множители, то

$$\sigma_k(n) = \prod_{j=1}^{l} \bigl(1 + p_j^k + p_j^{2k} + p_j^{3k} + \dots + p_j^{\alpha_j k}\bigr) \tag{2}$$

(см., например, [2, отдел 8, гл. 1, §6, задача 44]). Из формулы (2), в частности, следует, что $\sigma_k(n^2) \equiv 1 \pmod 2$ для любого $n \geqslant 1$ и $\sigma_k(p) \equiv 0 \pmod 2$ для любого нечетного простого p. Поэтому в случае существования периодичности $\sigma_k(n)$, $n > N$, по модулю 2, этот период больше единицы.

Предположим от противного, что существует период $m > 1$ у рассматриваемой последовательности по модулю 2:

$$\sigma_k(n_1) \equiv \sigma_k(n_2) \pmod 2, \qquad n_1, n_2 > N, \quad n_1 \equiv n_2 \pmod m. \tag{3}$$

Выберем нечетное простое число $p > N$, взаимно простое с m, и показатель $\alpha \geqslant 1$ так, чтобы $m^{2\alpha} > N$. Согласно сказанному выше $\sigma_k(p) \equiv 0 \pmod 2$ и $\sigma_k(m^{2\alpha}) \equiv 1 \pmod 2$, откуда

$$\sigma_k(pm^{2\alpha}) = \sigma_k(p)\sigma_k(m^{2\alpha}) \equiv 0 \pmod 2.$$

Однако последнее сравнение противоречит предположению (3), поскольку $pm^{2\alpha} \equiv m^{2\alpha} \pmod m$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Согласно леммам 1 и 3 функция $\zeta_q(k+1)$ иррациональна над полем $\mathbb{C}(q)$, поэтому лемма 2 и сходимость ряда в (1) в области $|q| < 1$ влечет трансцендентность этой функции над $\mathbb{C}(q)$.

Замечание. Степенной ряд в (1) можно также представить в области $|q| < 1$ как ряд Ламберта

$$\zeta_q(k+1) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(l) q^l}{1 - q^l},$$

где $f(l) = l^k$ – мультипликативная функция натурального аргумента. Вопрос об иррациональности (и трансцендентности) подобных рядов Ламберта не всегда решается положительно: например, выбор (мультипликативной) функции Эйлера $f(l) = \varphi(l)$ (количество чисел $0 \leqslant k < l$, взаимно простых с l) приводит к рациональной функции $q/(1-q)^2$ (см. [2, отдел 8, гл. 1, §7, задача 69]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зудилин В. В. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. №6. С. 936–940. **2**. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. 3 изд. М.: Наука, 1978. **3**. Fatou P. // Acta Math. 1906. V. 30. P. 335–400.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступило
14.12.2002