КВАДРАТИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ФОРМУЛЫ ГИЛЛЕРЫ ДЛЯ $1/\pi^2$

ВАДИМ В. ЗУДИЛИН

Аннотация. Доказываются две новые формулы рамануджанова типа для $1/\pi^2$.

В серии работ [3]–[5] Х. Гиллера обнаружил ряд формул рамануджанова типа для $1/\pi^2$, часть из которых он доказал. Так, например, следующие два тождества установлены в [3], [5]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac12)_n^5}{n!^5}(20n^2+8n+1)\left(-\frac{1}{2^2}\right)^n=\frac{8}{\pi^2}; \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac12)_n^5}{n!^5}(820n^2+180n+13)\left(-\frac{1}{2^{10}}\right)^n=\frac{128}{\pi^2}, \tag{2}$$

где $(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)=\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)$ обозначает символ Похгаммера. В действительности, левые части всех формул Гиллеры представлены некоторыми гипергеометрическими ${}_5F_4$-рядами, за единственным исключением [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{36n^2+12n+1}{2^{10n}}=\frac{32}{\pi^2}, \qquad \text{где} \quad A_n=\binom{2n}{n}^2\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}^2\binom{2n-2k}{n-k}^2 \tag{3}$$

(эта формула остается недоказанной). Напомним, что обобщенный гипергеометрический ряд [7] определяется для $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$, формулой

$${}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix}a_0,\,a_1,\,\dots,\,a_q\\ b_1,\,\dots,\,b_q\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_0)_n(a_1)_n\cdots(a_q)_n}{n!(b_1)_n\cdots(b_q)_n}z^n.$$

Формула (3) является естественным обобщением формулы Сато для $1/\pi$, содержащей в качестве слагаемых числа Апери (см. [9] и [2]), а также некоторых других тождеств вроде

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{4n+1}{36^n}=\frac{18}{\pi\sqrt{15}}, \qquad \text{где} \quad B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^4$$

(этот пример доказан Й. Янгом [10]).

Цель этой заметки — вывести два новых тождества типа (3) из (1), (2), используя гипергеометрическую технику.

1. Квадратичные преобразования

Напомним квадратичные преобразования для ${}_2F_1$-ряда (Гаусс)

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\,b\\ 1+a-b\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=(1-z)^{-a}\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac12a,\,\frac12+\frac12a-b\\ 1+a-b\end{matrix}\,\middle|\,\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)$$

Дата: сентябрь 2005.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00793).

и для ${}_3F_2$-ряда (Уиппл)

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,\, b,\, c \\ 1+a-b,\, 1+a-c \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = (1-z)^{-a} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac12 a,\, \frac12+\frac12 a,\, 1+a-b-c \\ 1+a-b,\, 1+a-c \end{matrix} \,\middle|\, \frac{-4z}{(1-z)^2}\right). \qquad (4) $$

Их многомерные аналоги в правых частях обязательно содержат кратные гипергеометрические ряды (ср., например, с [1], предложение 6, и [11], теорема 5). Здесь мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Имеет место квадратичное преобразование*

$$ \begin{aligned} &{}_5F_4\left(\begin{matrix} a,\, b,\, c,\, d,\, e \\ 1+a-b,\, 1+a-c,\, 1+a-d,\, 1+a-e \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \\ &\quad = (1-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac12 a)_n (\frac12+\frac12 a)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_n} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n \\ &\qquad \times \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(b)_\nu (c)_\nu (1+a-d-e)_\nu}{\nu!(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu} \, \frac{(1+a-b-c)_{n-\nu}}{(n-\nu)!} \end{aligned} \qquad (5) $$

при условии, что оба ряда сходятся.

Замечание. Теорема 1 может быть сформулирована в виде теоремы типа Орра (ср. с [7], раздел 2.5): *Если*

$$ (1-z)^{b+c-a-1} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} b,\, c,\, 1+a-d-e \\ 1+a-d,\, 1+a-e \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \qquad (6) $$

то

$$ \begin{aligned} &{}_5F_4\left(\begin{matrix} a,\, b,\, c,\, d,\, e \\ 1+a-b,\, 1+a-c,\, 1+a-d,\, 1+a-e \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \\ &\quad = (1-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{(\frac12 a)_n (\frac12+\frac12 a)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_n} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n. \end{aligned} $$

Как следует из (6), выполнено $|f_n|^{1/n} \to 1$ при $n \to \infty$; поэтому условие $|4z/(1-z)^2| < 1$ обеспечивает сходимость двойного ряда в (5).

Доказательство. Достаточно провести доказательство в окрестности $z = 0$. Воспользовавшись теоремой Пфаффа–Заальшютца [7], формула (2.3.1.3),

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n,\, a+n,\, 1+a-d-e \\ 1+a-d,\, 1+a-e \end{matrix} \,\middle|\, 1\right) = \frac{(-d-n+1)_n (e)_n}{(1+a-d)_n(e-a-n)_n} = \frac{(d)_n(e)_n}{(1+a-d)_n(1+a-e)_n}, $$

запишем

$$ \begin{aligned} &{}_5F_4\left(\begin{matrix} a,\, b,\, c,\, d,\, e \\ 1+a-b,\, 1+a-c,\, 1+a-d,\, 1+a-e \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{n!(1+a-b)_n(1+a-c)_n} z^n \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n,\, a+n,\, 1+a-d-e \\ 1+a-d,\, 1+a-e \end{matrix} \,\middle|\, 1\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{n!(1+a-b)_n(1+a-c)_n} z^n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-n)_\nu (a+n)_\nu (1+a-d-e)_\nu}{\nu!(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1+a-d-e)_\nu(-1)^\nu}{\nu!(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(a)_{n+\nu}(b)_n(c)_n}{(n-\nu)!(1+a-b)_n(1+a-c)_n} z^n \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1+a-d-e)_\nu(-1)^\nu}{\nu!(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+2\nu}(b)_{m+\nu}(c)_{m+\nu}}{m!(1+a-b)_{m+\nu}(1+a-c)_{m+\nu}} z^{m+\nu} \end{aligned} $$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{2\nu}(b)_\nu(c)_\nu(1+a-d-e)_\nu}{\nu!(1+a-b)_\nu(1+a-c)_\nu(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu}(-z)^\nu \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} a+2\nu,\, b+\nu,\, c+\nu \\ 1+a-b+\nu,\, 1+a-c+\nu \end{matrix} \,\middle|\, z\right).$$

Применение квадратичного преобразования (4) к внутреннему ${}_3F_2$-ряду дает

$$\begin{aligned}
&{}_5F_4\left(\begin{matrix} a,\, b,\, c,\, d,\, e \\ 1+a-b,\, 1+a-c,\, 1+a-d,\, 1+a-e \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{2\nu}(b)_\nu(c)_\nu(1+a-d-e)_\nu}{\nu!(1+a-b)_\nu(1+a-c)_\nu(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu}(-z)^\nu \\
&\quad\times (1-z)^{-(a+2\nu)} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac12 a+\nu,\, \frac12+\frac12 a+\nu,\, 1+a-b-c \\ 1+a-b+\nu,\, 1+a-c+\nu \end{matrix} \,\middle|\, \frac{-4z}{(1-z)^2}\right) \\
&= (1-z)^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\frac12 a)_\nu(\frac12+\frac12 a)_\nu(b)_\nu(c)_\nu(1+a-d-e)_\nu}{\nu!(1+a-b)_\nu(1+a-c)_\nu(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu}\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^\nu \\
&\quad\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac12 a+\nu)_m(\frac12+\frac12 a+\nu)_m(1+a-b-c)_m}{m!(1+a-b+\nu)_m(1+a-c+\nu)_m}\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^m \\
&= (1-z)^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(b)_\nu(c)_\nu(1+a-d-e)_\nu}{\nu!(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu}\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^\nu \\
&\quad\times \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(\frac12 a)_n(\frac12+\frac12 a)_n(1+a-b-c)_{n-\nu}}{(n-\nu)!(1+a-b)_n(1+a-c)_n}\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^{n-\nu} \\
&= (1-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac12 a)_n(\frac12+\frac12 a)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_n}\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n \\
&\quad\times \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(b)_\nu(c)_\nu(1+a-d-e)_\nu}{\nu!(1+a-d)_\nu(1+a-e)_\nu}\,\frac{(1+a-b-c)_{n-\nu}}{(n-\nu)!},
\end{aligned}$$

что в точности является требуемой формулой (5). □

Подставляя $a=b=c=d=e=\frac12$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac12)_n^5}{n!^5} z^n = \frac{1}{(1-z)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac14)_n(\frac34)_n}{n!^2}\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\frac12)_\nu^3}{\nu!^3}\,\frac{(\frac12)_{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

Отметим равенство

$$u_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\frac12)_\nu^3}{\nu!^3}\,\frac{(\frac12)_{n-\nu}}{(n-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{(\frac14)_\nu(\frac34)_{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!}\right)^2, \tag{7}$$

вытекающее из [7], формула (2.5.18). Другой способ получения (7) основан на рекуррентном соотношении

$$8(n+1)^3u_{n+1} - (2n+1)(8n^2+8n+5)u_n + 8n^3u_{n-1} = 0, \tag{8}$$

которому удовлетворяют обе части (7). (Доказательство (8) использует алгоритм созидательного телескопирования [8], гл. 6.) Подытожим сказанное в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть $|z|<1$ и $|4z/(1-z)^2|<1$. Тогда имеет место тождество*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac12)_n^5}{n!^5} z^n = \frac{1}{(1-z)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{(\frac14)_n(\frac34)_n}{n!^2}\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n, \tag{9}$$

где числа u_n определены в (7).

Замечание. Стоит отметить следующее любопытное гипергеометрическое тождество:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{(\frac{1}{3})_n(\frac{2}{3})_n}{n!^2} z^n = {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \\ 1, 1 \end{matrix} \,\middle|\, z\right)^2 = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{12}, \frac{5}{12} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, z\right)^4, \tag{10}$$

поскольку двойной гипергеометрический ряд в левой части тесно связан с рядом из (9). Формула (10) родилась в нашей совместной переписке с Г. Альмквистом и Й. Янгом.

2. Новые формулы для $1/\pi^2$

Для дифференциального оператора $\theta = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ имеем

$$\theta(1-z)^{-1/2} = \frac{z}{2(1-z)} \cdot (1-z)^{-1/2} \qquad \text{и} \qquad \theta\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right) = \frac{1+z}{1-z} \cdot \left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\theta\left((1-z)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n\right) \\ &\quad = (1-z)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \left(n\frac{1+z}{1-z} + \frac{z}{2(1-z)}\right) \cdot \left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n, \\ &\theta^2\left((1-z)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n\right) \\ &\quad = (1-z)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \left(n^2\frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} + n\frac{z(3+z)}{(1-z)^2} + \frac{z(2+z)}{4(1-z)^2}\right) \cdot \left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n. \end{aligned}$$

Применим эти результаты к функциям

$$20\theta^2 f(z) + 8\theta f(z) + f(z) \qquad \text{и} \qquad 820\theta^2 f(z) + 180\theta f(z) + 13f(z),$$

где $f(z)$ задается формулой (9), и подставим соответственно $z = -1/2^2$ и $z = -1/2^{10}$. Воспользовавшись далее тождествами (1), (2) и формулами

$$\frac{(\frac{1}{4})_n(\frac{3}{4})_n}{n!^2} = 2^{-6n}\frac{(4n)!}{n!^2(2n)!}, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})_k^3}{k!^3}\,\frac{(\frac{1}{2})_{n-k}}{(n-k)!} = 2^{-6n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}^3\binom{2n-2k}{n-k}2^{4(n-k)},$$

получаем следующий результат.

Теорема 3. *Имеют место тождества*

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{(4n)!}{n!^2(2n)!}\,\frac{18n^2-10n-3}{(2^8 5^2)^n} = \frac{10\sqrt{5}}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{(4n)!}{n!^2(2n)!}\,\frac{1046529n^2+227104n+16032}{(5^4 41^2)^n} = \frac{5^4 41\sqrt{41}}{\pi^2},$$

где последовательность целых чисел

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}^3\binom{2n-2k}{n-k}2^{4(n-k)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(n+1)^3 U_{n+1} - 8(2n+1)(8n^2+8n+5)U_n + 4096n^3 U_{n-1} = 0, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Нам представляется крайне правдоподобным, что гипергеометрическая техника могла бы привести к ряду других формул для $1/\pi^2$.

Список литературы

[1] *G. Almkvist, W. Zudilin*, Differential equations, mirror maps and zeta values // Calabi–Yau Varieties and Mirror Symmetry. The BIRS workshop volume (06–11 December 2003), eds. J. Lewis, S.-T. Yau and N. Yui. Providence, RI: Amer. Math. Soc. & International Press, 2005 (to appear); `math.NT/0402386`.

[2] *H. H. Chan, S. H. Chan, Z. Liu*, Domb's numbers and Ramanujan–Sato type series for $1/\pi$ // Adv. Math. 2004. V. 186, №2. P. 396–410.

[3] *J. Guillera*, Some binomial series obtained by the WZ-method // Adv. in Appl. Math. 2002. V. 29, №4. P. 599–603.

[4] *J. Guillera*, About a new kind of Ramanujan-type series // Experiment. Math. 2003. V. 12, №4. P. 507–510.

[5] *J. Guillera*, Generators of some Ramanujan's formulas // Ramanujan J. (to appear).

[6] *J. Guillera*, My formulas for $1/\pi^2$ // Manuscript at `http://personal.auna.com/jguillera/pi-formulas.pdf`. 2005.

[7] *L. J. Slater*, Generalized hypergeometric functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

[8] *M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger*, $A = B$. Wellesley, MA: A. K. Peters, Ltd., 1996.

[9] *Y. Yang*, On differential equations satisfied by modular forms // Math. Z. 2004. V. 246, №1–2. P. 1–19.

[10] *Y. Yang*, Personal communication (August 2005).

[11] *W. Zudilin*, Well-poised hypergeometric transformations of Euler-type multiple integrals // J. London Math. Soc. 2004. V. 70, №1. P. 215–230.

Кафедра теории чисел
Механико-математический факультет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Воробьевы горы, ГСП-2
119992 Москва
URL: http://wain.mi.ras.ru/
E-mail address: `wadim@ips.ras.ru`