ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ $\zeta_q(2)$

В. В. Зудилин

Для комплексного q, $|q|<1$, определим величину

$$\zeta_q(2):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q^n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)q^n,\qquad \lim_{\substack{q\to1\\|q|<1}}(1-q)^2\zeta_q(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},$$

где $\sigma(n)$ – сумма делителей натурального числа n.

Теорема 1. *При $q=1/p$, где $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$, число $\zeta_q(2)$ иррационально и показатель иррациональности удовлетворяет неравенству $\mu(\zeta_q(2))\leqslant 4.07869374\dots$.*

Напомним, что *показатель иррациональности* $\mu(\alpha)$ числа $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ определяется как точная верхняя грань чисел $\mu\in\mathbb{R}$, для которых неравенство $|\alpha-a/b|\leqslant|b|^{-\mu}$ имеет конечное число решений в $a,b\in\mathbb{Z}$, при этом $\mu(\alpha)\geqslant2$ согласно теореме Дирихле; в случае $\mu(\alpha)<+\infty$ говорят, что α – *лиувиллево число*. Теорема Нестеренко [1] влечет трансцендентность $\zeta_q(2)$ для любого $q\in\mathbb{Q}$, $0<|q|<1$, однако из общих оценок для меры трансцендентности [2] не следует лиувиллевость этого числа.

Мы будем пользоваться стандартными q-обозначениями [3]:

$$(T;q)_n:=\prod_{k=1}^{n}(1-q^{k-1}T),\quad \Gamma_q(t):=\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t},\quad [n]_q!:=\Gamma_q(n+1)=\frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}.$$

Для каждого $n=0,1,2,\dots$ определим набор $a_j=\alpha_jn+1$, $j=1,2,3$, $b_1=\beta_1n+1$, $b_k=\beta_kn+2$, $k=2,3$, где целочисленные параметры (*направления*) α_j и β_1,β_k удовлетворяют условиям $\beta_1=0\leqslant\alpha_j\leqslant\beta_k$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leqslant\beta_1+\beta_2+\beta_3$. Рассмотрим q-базисный гипергеометрический ряд [3]

$$H_n(q):=\frac{[b_2-a_2-1]_q!\,[b_3-a_3-1]_q!}{(1-q)^2[a_1-b_1]_q!}\sum_{t=0}^{\infty}R(q;t)q^t, \tag{1}$$

$$\text{где}\quad R(q;t)=\frac{\Gamma_q(t+a_1)\,\Gamma_q(t+a_2)\,\Gamma_q(t+a_3)}{\Gamma_q(t+b_1)\,\Gamma_q(t+b_2)\,\Gamma_q(t+b_3)}\cdot q^{t(b_2+b_3-a_1-a_2-a_3-1)}.$$

Записывая разложение $R(q;t)$ как рациональной функции от $T=q^t$ в сумму простейших дробей и производя суммирование в (1), мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Имеет место равенство $H_n(q)=A_n(q)\zeta_q(2)-B_n(q)$, где $A_n(q)$ и $B_n(q)$ – рациональные функции параметра q.*

Явные формулы для коэффициента $A_n(q)$ и тривиальные оценки для ряда в правой части (1) приводят нас к следующему результату.

Лемма 2. *Для любого $q=1/p$, $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$, справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|H_n(q)|}{n^2\log|p|}=0,\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|A_n(q)|}{n^2\log|p|}\leqslant\beta_2\beta_3-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{2}=:C_1.$$

Для вычисления знаменателей рациональных функций $A_n(q)$, $B_n(q)$ так же, как и в [4], [5] для линейных приближений к $\zeta(2)$, применяется группа $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{S}_{10}$ перестановок 10-элементного множества

$$c_{00}=(\beta_2+\beta_3)-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\qquad c_{jk}=\begin{cases}\alpha_j-\beta_k & \text{для } k=1,\\ \beta_k-\alpha_j & \text{для } k=2,3,\end{cases}\qquad j,k=1,2,3; \tag{2}$$

эта группа содержит 120 перестановок и величина

$$\frac{H_n(q)}{[c_{00}n]_q!\,[c_{21}n]_q!\,[c_{22}n]_q!\,[c_{33}n]_q!\,[c_{31}n]_q!}$$

инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{G}$; кроме того, сама величина $H_n(q)$ инвариантна относительно действия подгруппы $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$ порядка 10. Положим

$$M := \max_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}_0}\{\widetilde{M}(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})\}, \qquad \widetilde{M}(\boldsymbol{c}) := \begin{cases} c_{00}c_{21} + c_{31}c_{33} - c_{21}c_{33}, & \text{если } c_{21} \leqslant c_{31}, \\ c_{00}c_{31} + c_{21}c_{22} - c_{31}c_{22}, & \text{если } c_{21} \geqslant c_{31}, \end{cases}$$

$$\omega(z) := \max_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}\{\widetilde{\omega}(\boldsymbol{c};z) - \widetilde{\omega}(\mathfrak{g}\boldsymbol{c};z)\}, \qquad \widetilde{\omega}(\boldsymbol{c};z) := \lfloor c_{00}z\rfloor + \lfloor c_{21}z\rfloor + \lfloor c_{22}z\rfloor + \lfloor c_{33}z\rfloor + \lfloor c_{31}z\rfloor,$$

где через $\mathfrak{g}\boldsymbol{c}$ обозначается действие соответствующей перестановки $\mathfrak{g}$ на множестве (2), а через $\lfloor\cdot\rfloor$ целая часть числа; функция $\omega(z)$ принимает целые неотрицательные значения и является 1-периодической. Пусть также $m_1 \geqslant m_2$ – два максимальных элемента, стоящих на разных местах в наборе $\boldsymbol{c}$. *Круговые многочлены* $\Phi_l(x)$ и только они участвуют в разложении $(x;x)_n$ на неприводимые множители (см., например, [6], [7]), а многочлен $D_n(x) := \prod_{l=1}^{n}\Phi_l(x)$ является наименьшим общим кратным $x-1, x^2-1, \dots, x^n-1$. В этих обозначениях имеет место

Лемма 3. *Пусть* $\Pi_n(p) := p^{-Mn^2}\cdot D_{m_1n}(p)D_{m_2n}(p)\cdot\prod_{l=1}^{m_1n}\Phi_l(p)^{-\omega(n/l)}$, *где* $p = q^{-1} \in \mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$. *Тогда для коэффициентов линейной формы* $H_n(q)$ *справедливы включения* $\Pi_n(p)A_n(q), \Pi_n(p)B_n(q) \in \mathbb{Z}$.

Для изучения асимптотики величины $\Pi_n(p)$ при $n \to \infty$ мы применяем соответствующий результат из [6] об асимптотике $D_n(p)$ и q-аналог арифметической схемы Чудновского–Рухадзе–Хаты.

Лемма 4. *Справедливо предельное соотношение*

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{\log|\Pi_n(p)|}{n^2\log|p|} = M - \frac{3}{\pi^2}\biggl(m_1^2 + m_2^2 + \int_0^1 \omega(z)\,\mathrm{d}\psi'(z)\biggr) =: C_0,$$

где $\psi(z)$ *– логарифмическая производная гамма-функции.*

Если $C_0 > 0$, то число $\zeta_q(2)$ иррационально для любого $q = 1/p, p \in \mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$, и справедлива оценка $\mu(\zeta_q(2)) \leqslant C_1/C_0$ для показателя иррациональности. Выбор $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 7, \beta_2 = 14, \beta_3 = 15$ приводит к $C_0 = 38.00236293\ldots$ и $C_1 = 155$, откуда следует требуемая оценка теоремы 1.

q-арифметическая схема и q-гипергеометрическая конструкция приближающих линейных форм позволяет также уточнить меры иррациональности (см. [6] и [7]) для величин

$$\zeta_q(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^n}, \quad \ln_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}q^n}{1-q^n}, \qquad |q| < 1, \tag{3}$$

являющихся q-аналогами (расходящегося) гармонического ряда и $\log 2$ соответственно.

Теорема 2. *При* $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$, *показатели иррациональности чисел* (3) *удовлетворяют неравенствам* $\mu(\zeta_q(1)) \leqslant 2.49846482\ldots$, $\mu(\ln_q(2)) \leqslant 3.29727451\ldots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Ю. В. Нестеренко // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 9. С. 65–96. [**2**] Ю. В. Нестеренко // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 299–334. [**3**] Г. Гаспер, М. Рахман. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993. [**4**] G. Rhin, C. Viola // Acta Arith. 1996. V. 77. № 1. P. 23–56. [**5**] W. Zudilin. Arithmetic of linear forms involving odd zeta values // Manuscript, 2001 (submitted for publication). [**6**] P. Bundschuh, K. Väänänen // Compositio Math. 1994. V. 91. P. 175–199. [**7**] W. Van Assche // The Ramanujan J. 2001. V. 5. № 3. P. 295–310.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Принято редколлегией
24.10.2001