Математические заметки

В ПЕЧАТЬ ИЮЛЬ 2002

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О РЕКУРСИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА АПЕРИ ДЛЯ $\zeta(5)$

В. В. Зудилин

В 1978 году Р. Апери [1], [2] предъявил последовательности рациональных приближений к $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$, доказывающие иррациональность каждого из этих чисел. Одним из ключевых ингредиентов доказательства Апери были разностные уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами для числителей и знаменателей указанных приближений. Недавно В. Н. Сорокин [3] и автор [4], [5] независимо получили аналогичное разностное уравнение второго порядка для $\zeta(4)$. Полученная рекурсия не дает диофантовых приближений к $\zeta(4)=\pi^4/90$, доказывающих иррациональность, однако представляет некоторый алгоритм быстрого вычисления этой постоянной. Цель данной заметки – указать на возможное обобщение указанных результатов для числа $\zeta(5)$, иррациональность которого так до сих пор и не установлена.

1. Формулировка основного результата. Рассмотрим разностное уравнение

$$(n+1)^6a_0(n)q_{n+1}+a_1(n)q_n-4(2n-1)a_2(n)q_{n-1}-4(n-1)^4(2n-1)(2n-3)a_0(n+1)q_{n-2}=0, \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
a_0(n)&=41218n^3-48459n^2+20010n-2871,\\
a_1(n)&=2(48802112n^9+89030880n^8+36002654n^7-24317344n^6-19538418n^5\\
&\qquad+1311365n^4+3790503n^3+460056n^2-271701n-60291),\\
a_2(n)&=3874492n^8-2617900n^7-3144314n^6+2947148n^5+647130n^4\\
&\qquad-1182926n^3+115771n^2+170716n-44541,
\end{aligned}$$

и определим три линейно независимых решения $\{q_n\}$, $\{p_n\}$ и $\{\tilde p_n\}$ начальными условиями

$$q_0=-1,\quad q_1=42,\quad q_2=-17934,\qquad p_0=0,\quad p_1=\frac{87}{2},\quad p_2=-\frac{1190161}{64},$$
$$\tilde p_0=0,\quad \tilde p_1=\frac{101}{2},\quad \tilde p_2=-\frac{344923}{16}$$

(здесь и далее символом $\{x_n\}$ мы обозначаем последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}=\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$).

Теорема 1. *Последовательности*

$$\ell_n=q_n\zeta(5)-p_n,\quad \tilde\ell_n=q_n\zeta(3)-\tilde p_n,\qquad n=0,1,2,\dots, \tag{2}$$

также удовлетворяющие разностному уравнению (1), *знакопостоянны*:

$$\ell_n>0,\quad \tilde\ell_n<0,\qquad n=1,2,\dots, \tag{3}$$

и имеют место предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{\log|\ell_n|}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log|\tilde{\ell}_n|}{n} = \log|\mu_2| = -1.08607936\ldots, \\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log|q_n|}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log|p_n|}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log|\tilde{p}_n|}{n} = \log|\mu_3|, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\mu_1 = -0.02001512\ldots, \qquad \mu_2 = 0.33753726\ldots, \qquad \mu_3 = -2368.31752213\ldots \tag{5}$$

– корни характеристического уравнения $\mu^3 + 2368\mu^2 - 752\mu - 16$ *рекурсии* (1).

Отметим, что последовательности $\{q_n\}$, $\{p_n\}$ и $\{\tilde{p}_n\}$ являются знакочередующимися:

$$(-1)^{n-1}q_n > 0, \quad (-1)^{n-1}p_n > 0, \quad (-1)^{n-1}\tilde{p}_n > 0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 1 дает алгоритм быстрого вычисления числа $\zeta(5)$. Именно, последовательность рациональных чисел p_n/q_n сходится к $\zeta(5)$ со скоростью $|\mu_2/\mu_3| < 1.42521964 \cdot 10^{-4}$ (см. таблицу).

n	p_n/q_n	$\lvert\zeta(5) - p_n/q_n\rvert$
0	0	$1.036927755\ldots$
1	$\frac{29}{28}$	$0.001213469\ldots$
2	$\frac{24289}{23424}$	$0.000000182\ldots$
3	$\frac{7682021239}{7408444032}$	$< 2.80 \cdot 10^{-11}$
4	$\frac{24943788950905}{24055474286592}$	$< 4.13 \cdot 10^{-15}$
5	$\frac{81875586674776013003}{78959779279372800000}$	$< 6.02 \cdot 10^{-19}$
6	$\frac{282653756112686336975107}{272587704119854963200000}$	$< 8.71 \cdot 10^{-23}$
7	$\frac{215903781003833520407770175189}{208214873150908926517286400000}$	$< 1.26 \cdot 10^{-26}$
10		$< 3.71 \cdot 10^{-38}$
20		$< 1.32 \cdot 10^{-76}$
50		$< 5.52 \cdot 10^{-192}$

Дальнейшее построение указанных решений разностного уравнения (1) приводит к включениям

$$4D_n^2 q_n \in \mathbb{Z}, \quad 4D_n^7 p_n \in \mathbb{Z}, \quad 4D_n^5 \tilde{p}_n \in \mathbb{Z}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(см. соотношения (14) и (15)), где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$, хотя вычисления на основе рекурсии (1) показывают, что

$$q_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^5 p_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^3 \tilde{p}_n \in \mathbb{Z}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Включения (6) не позволяют доказать иррациональность числа $\zeta(5)$, поэтому мы не акцентируем внимание на арифметических свойствах последовательностей $\{q_n\}$, $\{p_n\}$, $\{\tilde{p}_n\}$ и указываем лишь на прикладное значение теоремы 1.

2. Вспомогательные рекурсии. Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды

$$\begin{aligned} r_n &= n!^4 \sum_{k=1}^{\infty}\Big(k + \frac{n}{2}\Big)\frac{\prod_{j=1}^{n}(k-j)\cdot\prod_{j=1}^{n}(k+n+j)}{\prod_{j=0}^{n}(k+j)^6}, \\ \tilde{r}_n &= -n!^4 \sum_{k=1}^{\infty}\Big(k + \frac{n}{2}\Big)\frac{\prod_{j=0}^{n}(k-j)\cdot\prod_{j=0}^{n}(k+n+j)}{\prod_{j=0}^{n}(k+j)^6}, \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

являются $\mathbb{Q}$-линейными формами от $1, \zeta(3), \zeta(5)$:

$$r_n = u_n\zeta(5) + w_n\zeta(3) - v_n, \quad \tilde{r}_n = \tilde{u}_n\zeta(5) + \tilde{w}_n\zeta(3) - \tilde{v}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} r_0 &= \zeta(5), \quad & r_1 &= 9\zeta(5) + 33\zeta(3) - 49, \quad & r_2 &= 469\zeta(5) + \frac{6125}{4}\zeta(3) - \frac{74463}{32}, \\ \tilde{r}_0 &= \zeta(3), \quad & \tilde{r}_1 &= 2\zeta(5) + 12\zeta(3) - \frac{33}{2}, \quad & \tilde{r}_2 &= 552\zeta(5) + 1764\zeta(3) - \frac{43085}{16}. \end{aligned}$$

Применяя к рядам (7) алгоритм созидательного телескопирования [6, гл. 6] в духе работ [4], [5], [7], мы приходим к разностным уравнениям

$$n(n+1)^5 b_0(n-1)u_{n+1} - 2nb_1(n)u_n - b_2(n)u_{n-1} + 2(n-1)^5(2n-1)b_0(n)u_{n-2} = 0, \tag{8}$$

где

$$b_0(n) = -a_0(-n), \qquad b_1(n) = a_2(-n), \qquad b_2(n) = -a_1(-n),$$

и

$$n^3(n+1)^3\tilde{b}_0(n-1)u_{n+1} - 2n\tilde{b}_1(n)u_n - \tilde{b}_2(n)u_{n-1} + 2n(n-1)^4(2n-3)\tilde{b}_0(n)\tilde{u}_{n-2} = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0(n) &= 41218n^7 + 35648n^6 - 932n^5 - 13190n^4 - 5128n^3 + 811n^2 + 957n + 174, \\ \tilde{b}_1(n) &= 3874492n^{12} - 14084302n^{11} + 12425954n^{10} + 8641603n^9 - 15230839n^8 - 1369195n^7 \\ &\quad + 8618417n^6 - 623249n^5 - 2785973n^4 + 308165n^3 + 495325n^2 - 40670n - 37632, \\ \tilde{b}_2(n) &= 2(48802112n^{13} - 201803328n^{12} + 267014032n^{11} - 69927236n^{10} \\ &\quad - 95912858n^9 + 37524471n^8 + 30257812n^7 - 9523224n^6 - 8524312n^5 \\ &\quad + 2138687n^4 + 1507490n^3 - 398634n^2 - 111012n + 33408). \end{aligned}$$

Отметим, что каждая из рекурсий (8) и (9) имеет один и тот же характеристический многочлен $\lambda^3 - 188\lambda^2 - 2368\lambda + 4$; корни этого многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, упорядоченные в порядке возрастания модулей, связаны с корнями (5) следующими соотношениями:

$$\mu_1 = \lambda_1\lambda_2, \qquad \mu_2 = \lambda_1\lambda_3, \qquad \mu_3 = \lambda_2\lambda_3.$$

Теорема 2. *Последовательности линейных форм $\{r_n\}$ и их коэффициентов $\{u_n\}$, $\{w_n\}$, $\{v_n\}$ удовлетворяют разностному уравнению (8). Кроме того, имеют место неравенства*

$$r_n > 0, \quad u_n > 0, \quad w_n > 0, \quad v_n > 0, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{10}$$

и предельные соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|r_n|}{n} = \log\lambda_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|u_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|w_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|v_n|}{n} = \log\lambda_3. \tag{11}$$

Теорема 3. *Последовательности линейных форм* $\{\tilde r_n\}$ *и их коэффициентов* $\{\tilde u_n\}$, $\{\tilde w_n\}$, $\{\tilde v_n\}$ *удовлетворяют разностному уравнению* (9). *Кроме того, имеют место неравенства*

$$\tilde r_n < 0, \quad \tilde u_n > 0, \quad \tilde w_n > 0, \quad \tilde v_n > 0, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{12}$$

и предельные соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|\tilde r_n|}{n} = \log\lambda_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\tilde u_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\tilde w_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\tilde v_n|}{n} = \log\lambda_3. \tag{13}$$

Отметим, что результат Васильева [8] и наша теорема [4] (см. также [9]) о совпадении совершенно уравновешенных гипергеометрических рядов с некоторым обобщением интеграла Бейкерса [10] приводят к включениям

$$\begin{matrix} 2u_n \in \mathbb{Z}, & 2D_n^2 w_n \in \mathbb{Z}, & 2D_n^5 v_n \in \mathbb{Z}, \\ 2\tilde u_n \in \mathbb{Z}, & 2D_n^2 \tilde w_n \in \mathbb{Z}, & 2D_n^5 \tilde v_n \in \mathbb{Z}, \end{matrix} \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{14}$$

Наконец, искомые последовательности (2) определяются формулами

$$\begin{aligned} \ell_n &= \tilde w_n r_n - w_n \tilde r_n = (u_n \tilde w_n - \tilde u_n w_n)\zeta(5) - (\tilde w_n v_n - w_n \tilde v_n), \\ \tilde\ell_n &= u_n \tilde r_n - \tilde u_n r_n = (u_n \tilde w_n - \tilde u_n w_n)\zeta(3) - (u_n \tilde v_n - \tilde u_n v_n), \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

так что

$$q_n = u_n \tilde w_n - \tilde u_n w_n, \quad p_n = \tilde w_n v_n - w_n \tilde v_n, \quad \tilde p_n = u_n \tilde v_n - \tilde u_n v_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{15}$$

Для доказательства неравенств (3) и предельных соотношений (4) остается воспользоваться оценками (10), (12), соотношениями (11), (13) и теоремой Пуанкаре.

3. Заключительные замечания. Другой алгоритм быстрого вычисления $\zeta(5)$ и $\zeta(3)$ (также не приводящий к достаточно хорошим диофантовым приближениям этих постоянных), основанный на бесконечном матричном произведении

$$\prod_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\dfrac{n}{2(2n+1)} & \dfrac{1}{2n(2n+1)} & \dfrac{1}{n^4} \\ 0 & -\dfrac{n}{2(2n+1)} & \dfrac{5}{4n^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta(5) \\ 0 & 0 & \zeta(3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

предложен недавно Р. У. Госпером [11]. Однако в письмах [11] отсутствует описание аналитических и арифметических свойств возникающих рациональных приближений. Отметим также алгоритм Е. А. Карацубы [12] для вычисления дзета-функции Римана в целых положительных точках.

Приведенная в п. 2 схема позволяет также построить рекурсию третьего порядка для совместных рациональных приближений к $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$. Именно, рассмотрим разностное уравнение

$$(n+1)^4 \tilde a_0(n) q_{n+1} - \tilde a_1(n) q_n + 4(2n-1)\tilde a_2(n) q_{n-1} - 4(n-1)^2(2n-1)(2n-3)\tilde a_0(n+1) q_{n-2} = 0, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde a_0(n) &= 946n^2 - 731n + 153, \\ \tilde a_1(n) &= 2(104060n^6 + 127710n^5 + 12788n^4 - 34525n^3 - 8482n^2 + 3298n + 1071), \\ \tilde a_2(n) &= 3784n^5 - 1032n^4 - 1925n^3 + 853n^2 + 328n - 184, \end{aligned}$$

и определим три линейно независимых решения $\{q'_n\}$, $\{p'_n\}$ и $\{\tilde p'_n\}$ начальными условиями

$$q'_0 = 1, \;\; q'_1 = 14, \;\; q'_2 = 978, \qquad p'_0 = 0, \;\; p'_1 = 17, \;\; p'_2 = \frac{9405}{8}, \qquad \tilde p'_0 = 0, \;\; \tilde p'_1 = 23, \;\; \tilde p'_2 = \frac{6435}{4}.$$

Теорема 4. *(Знакоположительные) последовательности* $\{q'_n\}$, $\{p'_n\}$ *и* $\{\tilde{p}'_n\}$, *а также последовательности*

$$\ell'_n = q'_n\zeta(3) - p'_n, \quad \tilde{\ell}'_n = q'_n\zeta(2) - \tilde{p}'_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|\ell'_n|}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log|\tilde{\ell}'_n|}{n} = \log|\mu_2| = -1.31018925\dots,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|q'_n|}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log|p'_n|}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log|\tilde{p}'_n|}{n} = \log|\mu_3|,$$

где

$$\mu_{1,2} = 0.07260980\dots \pm i0.25981363\dots, \qquad \mu_3 = 219.85478039\dots$$

– корни характеристического уравнения $\mu^3 - 220\mu^2 + 32\mu - 16$ *рекурсии* (16).

На этот раз вспомогательным рекурсиям удовлетворяют гипергеометрические ряды

$$r'_n = -n!^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}(k-j)}{\prod_{j=0}^{n}(k+j)^3}, \quad \tilde{r}'_n = n!^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{n}(k-j)}{\prod_{j=0}^{n}(k+j)^3}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

являющиеся $\mathbb{Q}$-линейными формами от $1, \zeta(2), \zeta(3)$.

Так же, как и в случае разностного уравнения (1), явные вычисления приводят к включениям

$$q'_n \in \mathbb{Z}, \quad D_n^3 p'_n \in \mathbb{Z}, \quad D_n^2 \tilde{p}'_n \in \mathbb{Z}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

что значительно лучше ожидаемых.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Apéry R. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13. **2**. Van der Poorten A. A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report // Math. Intelligencer. 1978/79. V. 1. № 4. P. 195–203. **3**. Сорокин В. Н. Об одном алгоритме быстрого вычисления $\zeta(4)$. Препринт (апрель 2002). М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002. **4**. Zudilin W. Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values. Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001) // J. Théorie Nombres Bordeaux. 2003 (to appear). **5**. Zudilin W. Apéry-like difference equation for Catalan's constant // E-print `math.NT/0201024` (January 2002). **6**. Petkovšek M., Wilf H.S., Zeilberger D. $A = B$. Wellesley (M.A.): A.K. Peters, Ltd., 1997. **7**. Zudilin W. An elementary proof of Apéry's theorem // E-print `math.NT/0202159` (February 2002). **8**. Vasilyev D.V. On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points. Preprint no. 1 (558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001. **9**. Зудилин В. В. Совершенно уравновешанные гипергеометрические ряды и кратные интегралы // УМН. 2002. Т. 57. № 4. **10**. Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. № 3. P. 268–272. **11**. Gosper R.W. Some infinite products involving $\zeta(2m+1)$. Letters of 24.10.2000 and 25.10.2000 // Favorite Mathematical Constants / ed. S. Finch. `http://pauillac.inria.fr/algo/bsolve/constant/apery/infprd.html`, 2000. **12**. Карацуба Е. А. Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при целых значениях аргумента s // Проблемы передачи информации. 1995. Т. 31. № 4. С. 69–80.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступило
27.05.2002