УДК 511.36

О критериях линейной и алгебраической зависимости значений E-функций в алгебраических точках

А. Б. Шидловский

В статье доказываются теоремы о необходимых и достаточных условиях линейной и алгебраической зависимости значений в алгебраических точках подсовокупности E-функций в случае, когда основная рассматриваемая совокупность E-функций составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Библиография: 4 названия.

В работах К. Зигеля, А. Б. Шидловского и других авторов установлены различные утверждения о трансцендентности, линейной и алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках. Со многими основными из них и историей вопроса можно ознакомиться по книге [1]. В статье [2] доказан ряд теорем и высказано несколько предположений о линейной независимости значений E-функций.

Пусть в статье $\mathbb{A}$ обозначает поле всех алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$. Пусть в дальнейшем совокупность E-функций

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \tag{1}$$

будет составлять решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y_k' = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad m \geqslant 2, \tag{2}$$

или системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_k' = Q_{k,i} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad m \geqslant 1, \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант MHS000.

которая может быть и однородной, $T(z) \in \mathbb{C}[z]$ и является общим наименьшим знаменателем всех функций $Q_{k,i}$ в системе (2) или (3), а $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Пусть также в дальнейшем $\mathbb{K}$ обозначает любое фиксированное алгебраическое поле над $\mathbb{Q}$, содержащее все коэффициенты всех степенных рядов по степеням z Е-функций (1) и число ξ.

Ниже потребуется следующее утверждение об арифметических свойствах чисел

$$f_1(\xi), \dots, f_m(\xi), \tag{4}$$

доказательство которого содержится в книге [1, гл. 3 и 4].

Основная теорема. *Степень трансцендентности* (*однородной трансцендентности*) *чисел* (4) *равна* l, $0 \leqslant l \leqslant m$, *тогда и только тогда, когда степень трансцендентности* (*однородной трансцендентности*) *функций* (1) *над* $\mathbb{C}(z)$ *равна* l.

Теорема 1. *Пусть совокупность* Е-*функций* (1) *составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений* (2),

$$f_{i_1}(z), \dots, f_{i_t}(z), \quad 1 \leqslant t \leqslant m, \tag{5}$$

— *любая подсовокупность функций* (1), *а* $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда числа

$$f_{i_1}(\xi), \dots, f_{i_t}(\xi) \tag{6}$$

линейно зависимы над полем $\mathbb{K}$ *в том и только в том случае, когда существует неприводимый однородный по* $z_1, \dots, z_m$ *многочлен*

$$P = P(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m], \tag{7}$$

такой, что

$$P\bigl(z, f_1(z), \dots, f_m(z)\bigr) = 0 \tag{8}$$

и

$$P(\xi, z_1, \dots, z_m) = \left(\sum_{s=1}^{t} a_s z_{i_s}\right) P_1(z_1, \dots, z_m), \tag{9}$$

где

$$a_1, \dots, a_t \in \mathbb{K}, \quad \sum_{s=1}^{t} |a_s| > 0, \quad \sum_{s=1}^{t} a_s f_{i_s}(\xi) = 0, \tag{10}$$

$$P_1(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_m]. \tag{11}$$

Замечание. Утверждение теоремы 1 сохранится, если в ее формулировке заменить поле $\mathbb{K}$ на поле $\mathbb{A}$.

Доказательство. Если существует неприводимый однородный по $z_1, \ldots, z_m$ многочлен P (7), удовлетворяющий условиям (8)–(11), то числа (6) очевидно линейно зависимы над $\mathbb{K}$.

Теперь предположим, что при некотором значении t существует подсовокупность (5) функций (1), для которой числа (6) линейно зависимы над $\mathbb{K}$.

Пусть l есть степень однородной трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ функций (1). Тогда по сформулированной выше основной теореме $l < m$. Если $l = 0$, то все функции (1) будут тождественно равны нулю, а все числа (4) являются нулями. Тогда, очевидно, что существует многочлен P (7), удовлетворяющий условиям (8)–(11). Пусть теперь выполняется неравенство $1 \leqslant l < m$.

По основной теореме степень однородной трансцендентности чисел (4) равна l. Поэтому среди этих чисел имеется ровно l однородно алгебраически независимых. Пусть это будут числа

$$f_1(\xi), \ldots, f_l(\xi) \tag{12}$$

(нумерация функций (1) в нашем распоряжении). Тогда функции

$$f_1(z), \ldots, f_l(z) \tag{13}$$

однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

По предположению существует функция

$$\varphi(z) = \sum_{s=1}^{t} a_s f_{i_s}(z), \quad a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{K}, \quad \sum_{s=1}^{t} |a_s| > 0, \tag{14}$$

такая, что

$$\varphi(\xi) = \sum_{s=1}^{t} a_s f_{i_s}(\xi) = 0. \tag{15}$$

Если функция $\varphi(z) \equiv 0$, то полагая

$$P(z, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{s=1}^{t} a_s z_{i_s}, \quad P_1 \equiv 1,$$

получим, что теорема справедлива. Пусть теперь $\varphi(z) \not\equiv 0$. Тогда из равенства (15) имеем, что в линейную форму $\varphi(z)$ входит хотя бы одна из функций $f_{l+1}, \ldots, f_m(z)$, поскольку числа (12) однородно алгебраически независимы.

Ввиду выбора l, функция $\varphi(z)$ связана с функциями (13) единственным (с точностью до постоянного множителя) однородным алгебраическим уравнением с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{N} Q_k\big(z, f_1(z), \dots, f_l(z)\big)\varphi^k(z) = 0, \quad N \geqslant 1,\\ Q_k = Q_k(z, z_1, \dots, z_l) \in \mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_l], \quad k = 0, 1, \dots, N,\\ Q_0 \not\equiv 0, \quad Q_N \not\equiv 0,\end{gathered} \tag{16}$$

левая часть которого неприводимый и примитивный однородный многочлен от переменных (13) и $\varphi(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$. Числовые коэффициенты этого многочлена, а, следовательно, и всех многочленов Q_k, могут быть выбраны числами из $\mathbb{K}$ (см. [1, гл. 3, лемма 2]). Обозначим

$$P = P(z, z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=0}^{N} Q_k(z, z_1, \dots, z_l)\left(\sum_{s=1}^{t} a_s z_{i_s}\right)^k. \tag{17}$$

Поскольку в правую часть равенства (17) входит хотя бы одна из переменных $z_{l+1}, \dots, z_m$, то легко убеждаемся в том, что $P \not\equiv 0$.

Положим в уравнении (16) $z = \xi$. Тогда, ввиду равенства (15), $\varphi(\xi) = 0$ и поэтому

$$Q_0\big(\xi, f_1(\xi), \dots, f_l(\xi)\big) = 0. \tag{18}$$

Но по предположению числа (12) однородно алгебраически независимы, а тогда из равенства (18) следует, что в многочлене $Q_0(z, z_1, \dots, z_l)$ все коэффициенты-многочлены от z при различных произведениях степеней $z_1, \dots, z_l$ равны нулю при $z = \xi$. Следовательно,

$$Q_0(\xi, z_1, \dots, z_l) \equiv 0. \tag{19}$$

Тогда из равенств (17) и (19) имеем, что

$$P(\xi, z_1, \dots, z_m) = \left(\sum_{s=1}^{t} a_s z_{i_s}\right)\left(\sum_{k=1}^{N} Q_k(\xi, z_1, \dots, z_l)\left(\sum_{s=1}^{t} a_s z_{i_s}\right)^{k-1}\right). \tag{20}$$

Так как из примитивности многочлена (16) как многочлена от переменных $f_1(z), \dots, f_l(z), \varphi(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ следует, что хотя бы при одном значении k $Q_k(\xi, z_1, \dots, z_l) \not\equiv 0$, то $P(\xi, z_1, \dots, z_m) \not\equiv 0$.

Из равенств (20), (14), (15) и (16) следует, что для многочлена P (17) выполняются все условия (8)–(11). Если P неприводим, то теорема доказана. В противном случае утверждению теоремы удовлетворяет один из неприводимых делителей P.

Заменяя в теореме 1 число m на $m + 1$ и полагая $f_{m+1} \equiv 1$, получаем ее неоднородный аналог.

Теорема 2. *Пусть совокупность* E*-функций* (1) *составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений* (3), *функции* (5) — *любая подсовокупность функций* (1), *а* $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда числа (6) *вместе с* 1 *линейно зависимы над полем* $\mathbb{K}$ *в том и только том случае, когда существует неприводимый многочлен* P (7), *удовлетворяющий условию* (8) *и такой, что*

$$P(\xi, z_1, \dots, z_m) = \left(a_0 + \sum_{s=1}^{t} a_s z_{i_s}\right) P_1(z_1, \dots, z_m),$$

где

$$a_0, a_1, \dots, a_t \in \mathbb{K}, \quad \sum_{s=0}^{t} |a_s| > 0, \quad a_0 + \sum_{s=1}^{t} a_s f_{i_s}(\xi) = 0,$$
$$P(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_m].$$

Замечание. Утверждение теоремы 2 сохранится, если в ее формулировке заменить поле $\mathbb{K}$ на поле $\mathbb{A}$.

В работе [4, теорема 3] доказан критерий алгебраической зависимости значений подсовокупности чисел (4). Такого типа критерий имеет место в более общем случае и доказывается с помощью аналогичных рассуждений.

Теорема 3. *Пусть совокупность* E*-функций* (1) *составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений* (3) (*однородных дифференциальных уравнений* (2)), *функции* (5) — *любая подсовокупность функций* (1), *а* $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда числа (6) *алгебраически зависимы* (*однородно алгебраически зависимы*) *в том и только том случае, когда существует неприводимый* (*однородный по* $z_1, \dots, z_m$ *неприводимый*) *многочлен*

$$P = P(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{A}[z, z_1, \dots, z_m], \tag{21}$$

удовлетворяющий условию (8), *такой, что*

$$\left.\begin{aligned} &P(\xi, z_1, \dots, z_m) = P_0(z_{i_1}, \dots, z_{i_t}) P_1(z_1, \dots, z_m),\\ &P_0 = P_0(z_{i_1}, \dots, z_{i_t}) \in \mathbb{A}[z_{i_1}, \dots, z_{i_t}], \quad P_0\big(f_{i_1}(\xi), \dots, f_{i_t}(\xi)\big) = 0,\\ &P_1(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{A}[z_1, \dots, z_m], \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где P_0 — *неприводимый многочлен.*

Наметим план доказательства теоремы 3. Рассмотрим неоднородный случай, однородный случай рассматривается аналогично.

Если существует неприводимый многочлен P (21), удовлетворяющий условиям (8) и (22), то числа (6), очевидно, алгебраически зависимы.

Теперь предположим, что при некотором значении t существует подсовокупность (5) функций (1), для которой числа (6) алгебраически зависимы.

Пусть l есть степень трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ функций (1). Как и в случае теоремы 1 рассматриваем только неравенство $1 \leqslant l < m$.

По основной теореме степень трансцендентности чисел (4) равна l. Поэтому среди них имеется ровно l алгебраически независимых. Пусть это будут числа (12) (нумерация функций (1) в нашем распоряжении). Тогда функции (13) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Если функции (5) алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$ (и, следовательно, над $\mathbb{A}(z)$), то они связаны алгебраическим уравнением $P\bigl(z, f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_t}(z)\bigr) = 0$, где $P(z, z_{i_1}, \ldots, z_{i_t})$ — неприводимый многочлен из $\mathbb{A}[z, z_{i_1}, \ldots, z_{i_t}]$. Разлагая многочлен $P(\xi, z_{i_1}, \ldots, z_{i_t})$ на неприводимые множители, найдем среди них многочлен $P_0(z_{i_1}, \ldots, z_{i_t})$ такой, что $P_0\bigl(f_{i_1}(\xi), \ldots, f_{i_t}(\xi)\bigr) = 0$. Поэтому в рассматриваемом случае утверждение теоремы будет справедливо.

Пусть теперь функции (5) алгебраически независимы на $\mathbb{C}(z)$. Тогда $t \leqslant l$. Пусть r — степень трансцендентности чисел (6). Так как эти числа алгебраически зависимы, то выполняется неравенство $0 \leqslant r < t$. Можно считать, что числа $f_{i_1}(\xi), \ldots, f_{i_r}(\xi)$ алгебраически независимы.

По основной теореме степень трансцендентности чисел (4) равна l. Можно считать, что l чисел

$$f_{i_1}(\xi), \ldots, f_{i_r}(\xi), f_{i_{t+1}}(\xi), \ldots, f_{i_{t+l-r}}(\xi)$$

алгебраически независимы. Тогда соответствующие им t функций алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Рассуждая, далее, как в доказательстве теоремы 3 работы [4], получим утверждение теоремы 3.

Теоремы 1–3 показывают, что точки ξ, в которых числа (4) оказываются линейно зависимыми или алгебраически зависимыми зависят от структуры алгебраических уравнений, связывающих функции (1) над $\mathbb{C}(z)$, т.е. от свойств идеала, образованного такими алгебраическими уравнениями.

Применение теорем 1–3 к конкретным совокупностям функций в общем случае затруднительно, так как в них утверждается только существование многочлена P с заданными свойствами, но не указывается метод его нахождения. Поэтому представляет интерес установление достаточных условий для доказательства линейной и алгебраической независимости чисел (4), которые было бы возможно применять к каким-либо подклассам E-функций.

В случае $l = m - 1$ может существовать только один многочлен P с необходимыми свойствами. Поэтому в этом случае возможны применения теорем 1–3 к конкретным функциям.

Из теоремы 3 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть совокупность* E-*функций* (1) *составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений* (3) (*однородных дифференциальных уравнений* (2)), *степень трансцендентности* (*однородной трансцендентности*) *функций* (1) *над* $\mathbb{C}(z)$ *равна* $l = m - 1$, *функции* (5) — *любая подсовокупность функций* (1), P — *неприводимый* (*однородный по* $z_1, \ldots, z_m$ *неприводимый*) *многочлен* (21) *такой, что выполняется условие* (8), *а* $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда, если в разложении многочлена $P(\xi, z_1, \ldots, z_m)$ *на неприводимые множители каждый такой множитель содержит хотя бы одну из переменных* $z_{i_{t+1}}, \ldots, z_{i_m}$, *то числа* (6) *алгебраически* (*однородно алгебраически*) *независимы.*

Аналогичные следствия получаются и из теорем 1 и 2 для линейной независимости чисел (6). При этом надо накладывать ограничения только на линейные множители многочлена P (см. [3]).

Нетрудно привести примеры приложений теоремы 4 к конкретным функциям (см. [3]).

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

[2] *Шидловский А. Б.* О линейной независимости значений E-функций в алгебраических точках // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №2. С. 174–185.

[3] *Шидловский А. Б.* О линейной независимости значений E-функций, связанных одним алгебраическим уравнением над полем рациональных функций // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №5. С. 794–797.

[4] *Шидловский А. Б.* Об алгебраической независимости значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций // Тр. МИРАН. 1994. Т. 207. С. 369–376.