УДК 511.36

Диофантовы приближения значений полилогарифмических функций

О. Н. Василенко

Построены функциональные приближения с высоким порядком нуля для наборов функций, включающих в себя логарифмические функции и разности дилогарифмических функций. С их помощью получены оценки снизу для приближений значений рассматриваемых функций в достаточно малой ненулевой рациональной точке.

Библиография: 7 названий.

Обозначим
$$L_j(\alpha, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{(\alpha+m)^j},$$
где $\alpha \in \mathbb{Q}$, $j \in \mathbb{N}$. Н. И. Фельдман в работе [1] с помощью аппроксимаций Эрмита–Паде получил оценки снизу для линейных форм от значений $L_1(\alpha_l, z), l = 1, \dots, s$, в достаточно малой ненулевой рациональной точке z. Оценки линейных форм от значений общего набора функций $L_j(\alpha_l, z)$ в одной малой рациональной точке также на основе построения аппроксимаций Эрмита–Паде были получены в работах [2], [3], а в различных точках в работе [4]. В настоящей работе получены оценки диофантовых приближений совокупностей чисел, в которые входят значения функции $L_1(0, z) = -\ln(1-z)$ и разности значений дилогарифма $L_2(0, z)$ в различных рациональных точках. Для доказательства строится последовательность функциональных приближающих линейных форм от указанных функций с высоким порядком нуля.

Символами $C_1, C_2, \dots$ будем обозначать положительные, не зависящие от натурального параметра n, эффективные постоянные.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант MHS000.

Теорема. *Пусть* $\omega_1,\dots,\omega_s$ *различные ненулевые рациональные числа,* $\eta\in\mathbb{Q}$, $\eta\neq 0$, $|\eta|<1$. *Пусть* $a\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{N}$, $(a,b)=1$,

$$\left|\tfrac{a}{b}\right|\bigl(1+|\eta|\bigr)\bigl(\max_j|\omega_j|+1\bigr)<1.$$

Фиксируем ε_0, $1/(s+1)>\varepsilon_0>0$. *Пусть выполнено неравенство* $\ln b>A+B\ln|a|$, *где* A *и* B *положительные эффективно вычислимые постоянные, зависящие только от* η, $\omega_1,\dots,\omega_s$, ε_0. *Тогда для любого* $r\in\mathbb{N}$, $1\leqslant r\leqslant s+1$, *и любого рационального подпространства* $\mathscr{L}\subseteq\mathbb{R}^{3s+1}$, $\dim\mathscr{L}=r$, *расстояние от вектора* $\theta\in\mathbb{R}^{3s+1}$ *с координатами*

$$\begin{gathered}1,\quad \ln\bigl(1-\omega_j\tfrac{a}{b}\bigr),\quad \ln\bigl(1-\omega_j\tfrac{a}{b}(1-\eta)\bigr),\\ L_2\bigl(0,\omega_j\tfrac{a}{b}\bigr)-L_2\bigl(0,\omega_j\tfrac{a}{b}(1-\eta)\bigr),\quad j=1,\dots,s,\end{gathered}$$

до $\mathscr{L}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\rho(\theta,\mathscr{L})\geqslant\gamma_r V(\mathscr{L})^{-(s+2)/(s+2-r(1+\varepsilon_0))}$$

Здесь γ_r — *положительная постоянная, не зависящая от* $\mathscr{L}$, $V(\mathscr{L})$ — *объем основного параллелепипеда решетки линейных форм с рациональными коэффициентами, обращающихся на* $\mathscr{L}$ *в нуль.*

Рассмотрим последовательность интегралов

$$\begin{aligned}R_n(z)=z^{2n+1}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}&\frac{1}{\prod_{j=1}^{s}(t-\omega_j)^{n+1}}\\ &\times\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{(xy)^n\bigl((1-x)(1-y)\bigr)^n}{\bigl(1-ztx(1-\eta y)\bigr)^{n+1}}\,dx\,dy\right)dt,\quad n=0,1,\dots,\end{aligned}$$

где Γ — окружность с центром в нуле, проходимая в положительном направлении, радиуса $\rho=\max_j|\omega_j|+1$. Заметим, что $R_n(z)$ определена и аналитична по z в круге $|z|\rho(1+|\eta|)<1$.

Лемма 1. *При $N = ns + s - 1$ справедливо равенство*

$$R_n(z) = z^{N+2n+1} \frac{(n+N)!}{(n!)^{s+1}} \int_{\substack{t_1+\cdots+t_s=1 \\ t_j \geqslant 0,\ j=1,\ldots,s}} \left(\prod_{j=1}^{s} t_j\right)^n$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{N+n} y^n \big((1-x)(1-y)\big)^n (1-\eta y)^N \,dx\,dy}{\big(1 - zx(1-\eta y)(\sum_{j=1}^{s} \omega_j t_j)\big)^{N+n+1}} \right) dt_1 \cdots dt_{s-1}.$$

Утверждение леммы получается непосредственным применением леммы 1 работы [5] к $R_n(z)$. Заметим, что порядок нуля $R_n(z)$ в точке $z = 0$ равен $(s+2)n + s$.

Лемма 2. *Пусть a и b такие же, как в условии теоремы, ε — фиксированное число из интервала $(0;1)$. Тогда при всех n, $n \geqslant n_0 = n_0(\varepsilon)$, справедливы неравенства*

$$\big((1-\varepsilon)C_1\big)^n \leqslant |R_n(a/b)| \leqslant \big((1+\varepsilon)C_1\big)^n,$$

где C_1 — некоторая положительная не зависящая от n и ε постоянная.

Доказательство. Рассмотрим представление $R_n(z)$, полученное в лемме 1. Функция

$$\left(\prod_{j=1}^{s} t_j\right)^n \frac{x^{N+n} y^n \big((1-x)(1-y)\big)^n (1-\eta y)^N}{\big(1 - \frac{a}{b} x(1-\eta y)(\sum_{j=1}^{s} \omega_j t_j)\big)^{N+n+1}}$$

неотрицательна в области интегрирования, поскольку

$$1 - \tfrac{a}{b} x(1-\eta y)\left(\sum_{j=1}^{s} \omega_j t_j\right) \geqslant 1 - \left|\tfrac{a}{b}\right|(1+|\eta|)\big(\max_j |\omega_j|\big) > 0$$

в силу условий теоремы. Если обозначить

$$C_2 = \max_{\substack{0 \leqslant x,y \leqslant 1 \\ t_j \geqslant 0,\ j=1,\ldots,s \\ t_1+\cdots+t_s=1}} \left\{ t_1 \cdots t_s \frac{x^{s+1} y^s (1-x)(1-y)(1-\eta y)^s}{\big(1 - \frac{a}{b} x(1-\eta y)(\sum_{j=1}^{s} \omega_j t_j)\big)^{s+1}} \right\},$$

то, с учетом формулы Стирлинга, утверждение леммы будет выполнено при $C_1 = (a/b)^{s+2} C_2 (s+1)^{s+1}$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$R_n(z)=Q_n(z)+\sum_{j=1}^{s}\Big(Q_{n1j}(z)\ln(1-\omega_j z)+Q_{n2j}(z)\ln(1-\omega_j z(1-\eta))$$
$$+\,Q_{n3j}(z)\big(L_2(0,\omega_j z)-L_2(0,\omega_j z(1-\eta))\big)\Big),$$

где $Q_n(z)$, $Q_{nij}(z)$ — многочлены от z степени не выше n, с рациональными коэффициентами, максимум модулей которых не превосходит C_3^n и общий знаменатель коэффициентов D_n не превосходит C_4^n.

Доказательство. Интегрируя по частям n раз по y, получаем равенство

$$z^n\int_0^1\int_0^1\frac{(xy)^n(1-x)^n(1-y)^n}{\big(1-ztx(1-\eta y)\big)^{n+1}}\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{(\eta t)^n}\int_0^1\int_0^1\frac{(1-x)^nP_n(y)}{1-ztx(1-\eta y)}\,dx\,dy,$$

где $P_n(y)=(y^n(1-y)^n)^{(n)}/n!$ — ортогональный многочлен Лежандра. Он имеет целые коэффициенты и высота его не превосходит $(n+1)2^{3n+1}$. Далее, по теореме Коши о вычетах,

$$R_n(z)=\frac{z^{n+1}}{\eta^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{1}{t^n\prod_{j=1}^{s}(t-\omega_j)^{n+1}}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1\frac{(1-x)^nP_n(y)}{1-ztx(1-\eta y)}\,dx\,dy$$
$$=\frac{z^{n+1}}{\eta^n}\left(\sum_{u=1}^{s}\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\bigg|_{t=\omega_u}\left\{\frac{1}{t^n\prod_{\substack{j=1\\ j\neq u}}^{s}(t-\omega_j)^{n+1}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_0^1\int_0^1\frac{(1-x)^nP_n(y)}{1-ztx(1-\eta y)}\,dx\,dy\right\}\right)$$
$$=\frac{z^{n+1}}{\eta^n}\sum_{u=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}E_{nuv}\int_0^1\int_0^1\frac{z^vx^v(1-x)^nP_n(y)(1-\eta y)^v}{\big(1-z\omega_u x(1-\eta y)\big)^{v+1}}\,dx\,dy,$$

где

$$E_{nuv}=\frac{1}{(n-v)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-v}\bigg|_{t=\omega_u}\left(\frac{1}{t^n\prod_{\substack{j=1\\ j\neq u}}^{s}(t-\omega_j)^{n+1}}\right).$$

Хорошо известно, что максимум чисел E_{nuv} по всем u, v, и общий знаменатель их коэффициентов не превосходят C_5^n. Далее, интегрируя по частям по x, находим, что

$$z^{n+1+v}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^v(1-x)^nP_n(y)(1-\eta y)^v}{\bigl(1-z\omega x(1-\eta y)\bigr)^{v+1}}\,dx\,dy = \frac{z^{n+1}(-1)^v}{\omega^v}\int_0^1\int_0^1 \frac{P_{n,v}(x)P_n(y)}{1-z\omega x(1-\eta y)}\,dx\,dy,$$

где $P_{n,v} = (x^v(1-x)^n)^{(v)}/v!$, $v=0,\dots,n$, — многочлены с целыми коэффициентами, высота которых не превосходит C_6^n (см. [6, лемма 1]). Поэтому для завершения доказательства леммы нам нужно вычислить

$$J_{nkl}(z) = z^{n+1}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^ky^l}{1-z\omega x(1-\eta y)}\,dx\,dy$$

при $k,l=0,\dots,n$. Поскольку $y=\bigl(1-(1-\eta y)\bigr)/\eta$, то достаточно вычислять $J'_{nkl}(z)$:

$$\begin{aligned} J'_{nkl} &= z^{n+1}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^k(1-\eta y)^l}{1-z\omega x(1-\eta y)}\,dx\,dy \\ &= z^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}(z\omega)^m\int_0^1\int_0^1 x^{k+m}(1-\eta y)^{l+m}\,dx\,dy \\ &= \frac{z^{n+1}}{\eta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z\omega)^m\bigl(1-(1-\eta)^{l+m+1}\bigr)}{(k+m+1)(l+m+1)}. \end{aligned}$$

При $k=l$

$$J'_{n,k,k} = \frac{z^{n-k}}{\eta\omega^{k+1}}\Biggl(L_2(0,z\omega)-L_2(0,z\omega(1-\eta)) - \sum_{m=1}^{k-1}\frac{(z\omega)^m\bigl(1-(1-\eta)^m\bigr)}{m^2}\Biggr).$$

Аналогично, при $k\ne l$, в силу равенства

$$\frac{1}{(k+m+1)(l+m+1)} = \frac{1}{k-l}\biggl(\frac{1}{l+m+1}-\frac{1}{k+m+1}\biggr)$$

$J'_{n,k,l}$ выражается через $\ln(1-\omega z)$ и $\ln\big(1-\omega z(1-\eta)\big)$; все оценки коэффициентов и их знаменателей получаются также, как в леммах 1 и 3 работы [2].

Докажем теорему. По лемме 3 $M_n = b^n D_n R_n(a/b)$ является линейной формой от рассматриваемых в теореме чисел. Максимум модулей ее коэффициентов не превосходит C_7^n, где $C_7^n = bC_3C_4$. В силу лемм 2, 3 при всех $n \geqslant n_1 = n_1(\varepsilon)$ выполнены неравенства

$$\big((1-\varepsilon)C_8\big)^n \leqslant |M_n| \leqslant \big((1+\varepsilon)C_8\big)^n,$$

где $C_8 = C_1 b C_4$ (заметим, что мы всегда можем несколько увеличить D_n так, чтобы для него выполнялась и нижняя оценка, аналогичная верхней). Непосредственное применение теоремы работы [7] к последовательности M_n завершает доказательство.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Фельдман Н. И.* Об одной линейной форме // Acta Arith. 1972. Т. XXI. С. 347–355.

[2] *Василенко О. Н.* Арифметические свойства значений полилогарифмов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механика. 1985. № 1. С. 42–45.

[3] *Василенко О. Н.* О линейной независимости значений некоторых функций // Диофантовы приближения / ред. П. Л. Ульянов. Сб. статей. Т. II. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 3–12.

[4] *Василенко О. Н.* О приближении гипергеометрических функций и их значений // Диофантовы приближения / ред. П. Л. Ульянов. Сб. статей. Т. I. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 10–16.

[5] *Нестеренко Ю. В.* О числе π и теореме Линдемана // Commentationes Math. Univ. Carolinae. 1979. Т. 20. № 2. С. 335–343.

[6] *Василенко О. Н.* О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механика. 1985. № 5. С. 34–37.

[7] *Нестеренко Ю. В.* О линейной независимости чисел // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механика. 1985. № 1. С. 46–49.