О рациональных приближениях значений G-функций

В. В. Зудилин

С помощью метода "градуированных приближений Паде" [1] доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z) \in \mathrm{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$ *(определение см. в [2]) является решением линейного дифференциального уравнения*

$$A_m(z)y^{(m)} + \dots + A_1(z)y' + A_0(z)y = B(z), \quad B, A_j \in \mathbb{Q}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad m \geqslant 2,$$

порядка m *и не удовлетворяет никакому*

а) *линейному в случае* $m = 2$, б) *алгебраическому в случае* $m > 2$

дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{Q}(z)$ *меньшего порядка. Пусть, кроме того,* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $aA_m(a/b) \neq 0$, *и* $\epsilon < \frac{1}{m+t+1}$ *– произвольная положительная постоянная. Обозначим через* $k \in \mathbb{N}$ *наименьший общий знаменатель коэффициентов многочленов* $B, A_0, \dots, A_m \in \mathbb{Q}[z]$ *и положим*

$$t = \max\Bigl\{\deg B, \max_{0 \leqslant j < m}\{\deg A_j\}, \deg A_m - 1\Bigr\}, \quad H = k \cdot \max\Bigl\{H(B), \max_{0 \leqslant j \leqslant m}\{H(A_j)\}\Bigr\},$$

$$C_0 = \Bigl(2e(t+1)^2 H(C\Phi)^{6(m+1)^2(t+1)(1+\log m)}\Bigr)^{\epsilon(1-\log\epsilon)} \Phi^{1+t\epsilon} (C\Phi)^{\frac{2-(m-1)\epsilon}{\epsilon^m (m-1)!}},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+t\epsilon)\log b + \log C_0}{(1-(m+t+1)\epsilon)\log b - \log C_0 - (2-(m+1)\epsilon)\log(C|a|)}.$$

Если для заданных a, b *выполнено условие* $b > C_0 \cdot (C|a|)^{2+\epsilon(m+2t+1)\left(1+\frac{\epsilon}{1/(m+t+1)-\epsilon}\right)}$, *иными словами, если* $\eta_0 > 0$, *то число* $f(a/b)$ *иррационально и для любых* $\eta > \eta_0$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $|q| > q_\star(f; a, b, \epsilon, \eta)$, *справедливы оценки* $\bigl|f(a/b) - p/q\bigr| > |q|^{-1-\eta}$.

Через $\operatorname{den}\lambda \in \mathbb{N}$ обозначим знаменатель несократимой дроби рационального числа λ. Введем в рассмотрение следующие функции натурального аргумента n:

$$\phi(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ (i,n)=1}} 1 \text{ – функция Эйлера}, \quad \rho(n) = \frac{n}{\phi(n)} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ (i,n)=1}} \frac{1}{i}, \quad \chi(n) = \sum_{p|n} \frac{\log p}{p-1},$$

Так, $\rho(1) = 1, \chi(1) = 0; \rho(2) = 2, \chi(2) = \log 2; \rho(3) = \frac{9}{4}, \chi(3) = \frac{1}{2}\log 3$ и т.д.

Теорема 2. *Рассмотрим обобщенную полилогарифмическую функцию*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^m}, \quad m \geqslant 2, \quad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}.$$

Пусть $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{N}$ *и* $\epsilon < \frac{1}{m+2}$ *– произвольная положительная постоянная. Положим* $\rho = \rho(\operatorname{den}\lambda)$, $\chi = \chi(\operatorname{den}\lambda)$, $H = \operatorname{den}\lambda \cdot \max\{1, |\lambda|\}$,

$$C_0 = \exp\Bigl\{\bigl(\log(8H) + \chi + m\bigr)\epsilon(1-\log\epsilon) + m\rho\bigl(1 + \epsilon + \tfrac{2-(m-1)\epsilon}{\epsilon^m (m-1)!}\bigr)\Bigr\},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+\epsilon)\log b + \log C_0}{(1-(m+2)\epsilon)\log b - \log C_0 - (2-(m+1)\epsilon)\log|a|}.$$

Если для заданных a, b *выполнено условие* $b > C_0 \cdot (C|a|)^{2+\epsilon(m+3)\left(1+\frac{\epsilon}{1/(m+2)-\epsilon}\right)}$, *то число* $f(a/b)$ *иррационально и для любого* $\eta > \eta_0$ *и произвольных* $p, q \in \mathbb{Z}$, $|q| > q_\star(a, b, \lambda, \epsilon, \eta)$, *справедливы оценки* $\bigl|f(a/b) - p/q\bigr| > |q|^{-1-\eta}$.

[1] *Зудилин В.В.* Мат. сборник. 1995. Т. 186. № 4. С. 89–124.

[2] *Галочкин А.И.* Мат. сборник. 1974. Т. 95 (137). № 3 (11). С. 396–417.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Кафедра теории чисел