ОДНО ИЗ ЧИСЕЛ $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ ИРРАЦИОНАЛЬНО

В. В. Зудилин

В настоящей заметке мы устанавливаем следующий результат.

Теорема. *По крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ и $\zeta(11)$ иррационально.*

Для доказательства мы используем обобщение конструкции линейных приближающих форм от значений дзета-функции Римана в нечетных точках, предложенной Т. Ривоалем в [1]. Именно с помощью этой аналитической конструкции в работе [1] была доказана бесконечность множества иррациональных чисел среди $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$; результат об иррациональности одного из девяти чисел $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$ был получен независимо Ривоалем [2] и автором [3]. Напомним также, что иррациональность числа $\zeta(3)$ установлена Р. Апери [4].

Зафиксируем нечетные числа q и r, $q \geqslant r+4$, и набор целых положительных параметров $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$, удовлетворяющих условиям $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \dots \leqslant \eta_q < \eta_0/2$ и

$$\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_q \leqslant \eta_0 \cdot \frac{q-r}{2}. \tag{1}$$

Для каждого целого $n > 0$ определим целочисленный набор

$$h_0 = \eta_0 n + 2, \qquad h_j = \eta_j n + 1, \quad j = 1, \dots, q,$$

и рассмотрим *рациональную* функцию

$$R_n(t) := (h_0 + 2t) \cdot \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(h_j - 1)!} \frac{\Gamma(h_j + t)}{\Gamma(1+t)} \cdot \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(h_j-1)!} \frac{\Gamma(h_0+t)}{\Gamma(1+h_0-h_j+t)} \\ \times \prod_{j=r+1}^{q} (h_0 - 2h_j)! \frac{\Gamma(h_j+t)}{\Gamma(1+h_0-h_j+t)},$$

а также соответствующую ей величину

$$F_n := \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{\infty} R_n^{(r-1)}(t) \tag{2}$$

(согласно (1) выполнено $R_n(t) = O(t^{-2})$, что обеспечивает сходимость ряда в правой части (2)).

Положим $m_j = \max\{\eta_r, \eta_0 - 2\eta_{r+1}, \eta_0 - \eta_1 - \eta_{r+j}\}$ для $j = 1, \dots, q-r$ и определим целую величину

$$\Phi_n := \prod_{\sqrt{\eta_0 n} < p \leqslant m_{q-r} n} p^{\varphi(n/p)},$$

где в произведении участвуют только простые числа и

$$\varphi(x) := \min_{0 \leqslant y < 1} \biggl(\sum_{j=1}^{r} \bigl(\lfloor y \rfloor + \lfloor \eta_0 x - y \rfloor - \lfloor y - \eta_j x \rfloor - \lfloor (\eta_0 - \eta_j) x - y \rfloor - 2 \lfloor \eta_j x \rfloor \bigr) \\ + \sum_{j=r+1}^{q} \bigl(\lfloor (\eta_0 - 2\eta_j) x \rfloor - \lfloor y - \eta_j x \rfloor - \lfloor (\eta_0 - \eta_j) x - y \rfloor \bigr) \biggr)$$

– целозначная неотрицательная периодическая (с периодом 1) функция. Через D_N обозначим наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, N$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

ЛЕММА 1. *Величина* (2) *является линейной формой от* $1, \zeta(r+2), \zeta(r+4), \dots, \zeta(q-2)$ *с рациональными коэффициентами; более того, справедливо включение*

$$D_{m_1 n}^r D_{m_2 n} \cdots D_{m_{q-r} n} \cdot \Phi_n^{-1} \cdot F_n \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta(r+2) + \mathbb{Z}\zeta(r+4) + \cdots + \mathbb{Z}\zeta(q-2). \qquad (3)$$

Асимптотика величины Φ_n при $n \to \infty$ вычисляется с помощью арифметического метода Чудновского–Рухадзе–Хаты (см. вычитаемое в определении постоянной C_1 из формулировки леммы 3 далее). Кроме того, согласно закону распределения простых чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log D_{m_j n}}{n} = m_j, \qquad j = 1, \dots, q-r.$$

Введем вспомогательную функцию

$$f_0(\tau) = r\eta_0 \log(\eta_0 - \tau) + \sum_{j=1}^{q} \bigl(\eta_j \log(\tau - \eta_j) - (\eta_0 - \eta_j)\log(\tau - \eta_0 + \eta_j)\bigr) - 2\sum_{j=1}^{r} \eta_j \log \eta_j + \sum_{j=r+1}^{q} (\eta_0 - 2\eta_j)\log(\eta_0 - 2\eta_j),$$

определенную в τ-плоскости с разрезами $(-\infty, \eta_0 - \eta_1]$ и $[\eta_0, +\infty)$. Следующее утверждение, характеризующее рост линейных форм F_n в случае $r = 3$, доказывается с помощью представления величины (2) в виде комплексного интеграла по прямой $\operatorname{Re} t = \mathrm{const}$ с последующим применением к нему асимптотики гамма-функции и метода перевала.

ЛЕММА 2. *Пусть* $r = 3$ *и* τ_0 – *нуль многочлена*

$$(\tau - \eta_0)^r (\tau - \eta_1) \cdots (\tau - \eta_q) - \tau^r (\tau - \eta_0 + \eta_1) \cdots (\tau - \eta_0 + \eta_q)$$

с $\operatorname{Im} \tau_0 > 0$ *и максимально возможным значением* $\operatorname{Re} \tau_0$. *Предположим, что выполнено* $\operatorname{Re} \tau_0 < \eta_0$ *и* $\operatorname{Im} f_0(\tau_0) \notin \pi\mathbb{Z}$. *Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log |F_n|}{n} = \operatorname{Re} f_0(\tau_0).$$

Если последовательность линейных форм в левой части (3) с ростом n принимает ненулевые сколь угодно малые значения, то в случае $r = 3$ среди чисел

$$\zeta(5),\ \zeta(7),\ \dots,\ \zeta(q-4),\ \zeta(q-2) \qquad (4)$$

имеется иррациональное. Поэтому справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Пусть* $r = 3$ *и в приведенных выше обозначениях* $C_0 = -\operatorname{Re} f_0(\tau_0)$,

$$C_1 = rm_1 + m_2 + \cdots + m_{q-r} - \left(\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}\psi(x) - \int_0^{1/m_{q-r}} \varphi(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right),$$

где $\psi(x)$ – *логарифмическая производная гамма-функции. Тогда в случае* $C_0 > C_1$ *по крайней мере одно из чисел* (4) *иррационально.*

Для доказательства теоремы положим $r = 3$, $q = 13$,

$$\eta_0 = 91,\ \ \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 27,\ \ \eta_4 = 29,\ \eta_5 = 30,\ \eta_6 = 31,\ \dots,\ \eta_{12} = 37,\ \eta_{13} = 38.$$

Тогда $C_0 = 227.58019641\dots$, $C_1 = 226.24944266\dots$, и согласно лемме 3 среди чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ имеется иррациональное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] T. Rivoal // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 2000. V. 331. №4. P. 267–270. [**2**] T. Rivoal. Propriétés diophantinnes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs. Thèse de Doctorat. Caen: Univ. de Caen, 2001. [**3**] В. В. Зудилин // УМН. 2001. Т. 56. №2. С. 215–216. [**4**] R. Apéry // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Принято редколлегией
18.07.2001