УДК 511.3

В. В. Зудилин

Об иррациональности значений дзета-функции Римана

Обобщается конструкция Ривоаля, позволяющая строить линейные приближающие формы от 1 и значений дзета-функции $\zeta(s)$ только в нечетных точках. Доказываются теоремы об иррациональности числа $\zeta(s)$ для некоторого нечетного s из заданного отрезка натурального ряда; с помощью усовершенствования арифметических оценок усиливаются оригинальные результаты Ривоаля о линейной независимости чисел $\zeta(s)$.

Библиография: 28 наименований.

Введение

Изучение арифметической природы значений дзета-функции Римана

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

в целых точках $s>1$ является одним из самых притягательных направлений современной теории чисел. Несмотря на обманчивую простоту и более чем двухвековую историю этой проблемы, полученные результаты немногочисленны. Первым продвижением в этом направлении бесспорно является формула Эйлера

$$\zeta(s)=-\frac{(2\pi i)^s B_s}{2s!}, \qquad s=2,4,6,\dots,$$

выражающая значения дзета-функции в четных точках в терминах $\pi\approx 3.1415926$ и чисел Бернулли $B_s\in\mathbb{Q}$, которые задаются производящей функцией

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\sum_{s=2}^{\infty}B_s\frac{t^s}{s!}, \qquad B_s=0 \text{ для нечетных } s\geqslant 3.$$

В 1882 г. Линдеманн доказал трансцендентность числа π и, тем самым, трансцендентность $\zeta(s)$ для четных s.

Проблема иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках казалась непреступной вплоть до 1978 г., когда Апери [1] предъявил последовательность рациональных приближений, доказывающих иррациональность числа $\zeta(3)$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

Теорема Апери. *Число $\zeta(3)$ иррационально.*

История этого открытия и строгое математическое обоснование наблюдений Апери изложены в [2]. В последующие годы феномен последовательности Апери был неоднократно переосмыслен с точки зрения различных аналитических методов теории чисел (см. [3]–[8]); новые подходы позволили усилить результат Апери *количественно* – получить "хорошую" меру иррациональности числа $\zeta(3)$ (последние этапы соревнования в этом направлении – работы [9], [10]).

К сожалению, естественные обобщения конструкции Апери приводят к линейным формам, содержащим значения дзета-функции как в нечетных, так и в четных точках (интерес к которым заметно угас после результата Эйлера–Линдеманна); это обстоятельство не позволяло получить результаты об иррациональности $\zeta(s)$ для нечетных $s \geqslant 5$. Интересные попытки подступиться к этой проблеме содержатся в препринтах [11] и [12].

Наконец, в 2000 г. Ривоаль [13] наделил вспомогательную рациональную функцию симметрией и построил линейные формы, содержащие значения дзета-функции только в нечетных точках $s > 1$.

Теорема Ривоаля. *Среди чисел $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$ имеется бесконечно много иррациональных. Более точно, для размерности $\delta(a)$ пространств, натянутых над $\mathbb{Q}$ на числа $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a-2), \zeta(a)$, где a нечетно, справедлива оценка*

$$\delta(a) \geqslant \frac{\log a}{1+\log 2}\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad a \to \infty.$$

В настоящей работе мы обобщаем конструкцию Ривоаля [13] и доказываем следующие результаты.

Теорема 0.1. *В каждом числовом наборе*

$$\begin{gathered} \{\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \zeta(15),\ \zeta(17),\ \zeta(19),\ \zeta(21)\}, \\ \{\zeta(7),\ \zeta(9),\ \dots,\ \zeta(35),\ \zeta(37)\}, \qquad \{\zeta(9),\ \zeta(11),\ \dots,\ \zeta(51),\ \zeta(53)\} \end{gathered} \tag{0.1}$$

имеется по крайней мере одно иррациональное число[1].

Теорема 0.2. *Для каждого нечетного $b \geqslant 1$ среди чисел*

$$\zeta(b+2),\ \zeta(b+4),\ \dots,\ \zeta(8b-3),\ \zeta(8b-1)$$

имеется по крайней мере одно иррациональное.

Теорема 0.3. *Существуют нечетные $a_1 \leqslant 145$ и $a_2 \leqslant 1971$ такие, что числа $1, \zeta(3), \zeta(a_1), \zeta(a_2)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Теорема 0.3 усиливает соответствующий результат работы [15], где установлена линейная независимость чисел $1, \zeta(3), \zeta(a)$ для некоторого нечетного $a \leqslant 169$.

[1] После завершения работы над статьей автору стало известно, что Ривоаль [14] независимо получил утверждение теоремы 0.1 для первого из наборов в (0.1), используя иное обобщение конструкции из [13].

Замечание при корректуре. Недавно автор получил ряд уточнений теоремы 0.1 и, в частности, доказал [28], что по крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально.

Теорема 0.4. *Для каждого нечетного $a \geqslant 3$ справедлива абсолютная оценка*

$$\delta(a) > 0.395 \log a > \frac{2}{3} \cdot \frac{\log a}{1+\log 2}. \tag{0.2}$$

Дальнейшее изложение устроено следующим образом. В § 1 описана аналитическая конструкция линейных форм от значений дзета-функции в нечетных точках; в § 2–4 исследуется асимптотика линейных форм, их коэффициентов и знаменателей соответственно. Наконец, в § 5 приводятся подробные доказательства результатов; основным ингредиентом в доказательстве теорем 0.3, 0.4 (так же, как и в работе [13]) является следующий частный случай теоремы Нестеренко из [16].

Критерий линейной независимости. *Пусть для заданного набора вещественных чисел $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$, $m \geqslant 1$, существуют последовательность линейных форм*

$$I_n = A_{0,n}\theta_0 + A_{1,n}\theta_1 + \dots + A_{m,n}\theta_m, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

с целыми коэффициентами и числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$\log |I_n| = -n\alpha + o(n), \qquad \log \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \bigl\{|A_{j,n}|\bigr\} \leqslant n\beta + o(n)$$

при $n \to \infty$. Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\theta_0 + \mathbb{Q}\theta_1 + \dots + \mathbb{Q}\theta_m) \geqslant 1 + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отметим, что обоснование теорем 0.1–0.4 опирается на метод перевала и следует схеме доказательства теоремы Апери из [8]. Мы также считаем необходимым указать на диссертацию [17], в которой с помощью метода перевала были получены арифметические результаты для значений полилогарифмов; работа [17] послужила связующим звеном между нашими эмпирическими наблюдениями и строгим обоснованием результатов в § 2. Усовершенствование арифметических оценок (знаменателей числовых линейных форм) в духе [18], [9], [10], приводимое в § 4, позволило уточнить оценку снизу для $\delta(a)$ в теоремах 0.3, 0.4 при малых значениях a. Наконец, в § 3 для коэффициентов линейных форм получена не только оценка сверху, но и асимптотика их роста.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в сообщении [19].

Автор искренне благодарен профессору Ю. В. Нестеренко за постоянное внимание к работе и ряд ценных указаний по ее усовершенствованию.

§ 1. Аналитическая конструкция

В этом параграфе мы изложим аналитическую конструкцию, позволяющую строить “хорошие” линейные формы с рациональными коэффициентами от значений дзета-функции в нечетных точках.

Зафиксируем целые положительные параметры a, b, r, $2rb \leqslant a$ и $a+b$ четно, и для каждого целого положительного n рассмотрим рациональную функцию

$$R(t) = R_n(t) := \frac{\bigl((t \pm (n+1)) \cdots (t \pm (n+2rn))\bigr)^b}{\bigl(t(t \pm 1) \cdots (t \pm n)\bigr)^a} \cdot (2n)!^{a-2rb}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее запись $(t \pm l)$ означает, что в произведении (сумме или множестве) участвуют одновременно множители (слагаемые или элементы соответственно) $t-l$ и $t+l$. Функции (1.1) поставим в соответствие число – бесконечную сумму

$$I = I_n := \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{(b-1)!} \frac{\mathrm{d}^{b-1} R(t)}{\mathrm{d}t^{b-1}}. \tag{1.2}$$

Как несложно заметить, суммирование в (1.2) происходит только по целым $t > n + 2rn$. Ряд в правой части (1.2) сходится абсолютно, так как степени числителя и знаменателя рациональной функции (1.1) равны соответственно $4rbn$ и $a(2n+1) \geqslant 4rbn + a \geqslant 4rbn + 2$, значит,

$$R(t) = O\biggl(\frac{1}{t^2}\biggr) \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{d}^{b-1} R(t)}{\mathrm{d}t^{b-1}} = O\biggl(\frac{1}{t^2}\biggr), \qquad t \to \infty. \tag{1.3}$$

Интегральное представление суммы (1.2) и применение метода Лапласа позволяют вычислить величину

$$\varkappa = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\log |I_n|}{n} > -\infty \tag{1.4}$$

(подробности см. далее, в § 2) подобно тому, как это проделалось в работах [8], [17].

Лемма 1.1. *Для каждого $n = 1, 2, \dots$ число (1.2) является линейной формой от 1 и значений дзета-функции в нечетных точках s, $b < s < a + b$:*

$$I = \sum_{\substack{s \text{ нечетно} \\ b < s < a+b}} \bar{A}_s \zeta(s) - \bar{A}_0. \tag{1.5}$$

Доказательство. Представляя функцию (1.1) в виде суммы простейших дробей:

$$R(t) = \sum_{k=-n}^{n} \biggl(\frac{A_{k,a}}{(t+k)^a} + \dots + \frac{A_{k,2}}{(t+k)^2} + \frac{A_{k,1}}{t+k}\biggr), \tag{1.6}$$

отметим, что

$$\sum_{k=-n}^{n} A_{k,1} = -\operatorname*{Res}_{t=\infty} R(t) = 0 \tag{1.7}$$

согласно (1.3). Из (не)четности функции (1.1), именно

$$R(-t) = (-1)^a R(t), \tag{1.8}$$

и единственности разложения (1.6) следуют соотношения

$$A_{k,j}=(-1)^{a-j}A_{-k,j}, \qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n, \quad j=1,2,\dots,a;$$

поэтому

$$\sum_{k=-n}^{n}A_{k,j}=(-1)^{a-j}\sum_{k=-n}^{n}A_{k,j}=0, \quad \text{если } a-j \text{ нечетно}, \qquad j=2,\dots,a. \quad (1.9)$$

Подставляя разложение (1.6) в (1.2), находим

$$(-1)^{b-1}I=\sum_{t=n+1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\biggl(\binom{a+b-2}{b-1}\frac{A_{k,a}}{(t+k)^{a+b-1}} + \binom{a+b-3}{b-1}\frac{A_{k,a-1}}{(t+k)^{a+b-2}}+\dots+\binom{b}{b-1}\frac{A_{k,2}}{(t+k)^{b+1}}+\frac{A_{k,1}}{(t+k)^{b}}\biggr),$$

откуда после несложных преобразований получаем

$$I=\bar A_{a+b-1}\zeta(a+b-1)+\bar A_{a+b-2}\zeta(a+b-2)+\dots+\bar A_{b}\zeta(b)-\bar A_0, \qquad (1.10)$$

где

$$\bar A_j=(-1)^{b-1}\binom{j-1}{b-1}\sum_{k=-n}^{n}A_{k,j-b+1}, \qquad j=b,b+1,\dots,a+b-1, \quad (1.11)$$

$$\bar A_0=(-1)^{b-1}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=1}^{k+n}\biggl(\binom{a+b-2}{b-1}\frac{A_{k,a}}{l^{a+b-1}}+\dots+\binom{b}{b-1}\frac{A_{k,2}}{l^{b+1}}+\frac{A_{k,1}}{l^{b}}\biggr). \quad (1.12)$$

Согласно (1.7) выполнено $\bar A_b = 0$, так что выражение в правой части (1.10) определено корректно даже в случае $b=1$; кроме того, согласно (1.9) и четности числа $a+b$ имеет место равенство $\bar A_j=0$, если $j\geqslant b$ четно. Таким образом, формула (1.10) означает, что I является линейной формой от 1 и значений дзета-функции в нечетных точках s, $b+1\leqslant s\leqslant a+b-1$, что и требовалось доказать.

Для нахождения знаменателей линейных форм (1.2) воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 1.2 (ср. с [20], [13]). *Пусть для некоторого многочлена $P(t)$ степени не выше n рациональная функция*

$$R(t)=\frac{P(t)}{(t+s)(t+s+1)\cdots(t+s+n)} \qquad (1.13)$$

(в необязательно несократимом представлении) удовлетворяет условиям

$$\bigl(R(t)(t+k)\bigr)\big|_{t=-k}\in\mathbb Z, \qquad k=s,s+1,\dots,s+n. \qquad (1.14)$$

Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\frac{D_n^j}{j!}\,\frac{\mathrm d^j}{\mathrm dt^j}\bigl(R(t)(t+k)\bigr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb Z, \qquad k=s,s+1,\dots,s+n,$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1,2,\dots,n$.

Доказательство. Раскладывая рациональную функцию (1.13) на простейшие дроби, получаем

$$R(t)=\sum_{l=s}^{s+n}\frac{B_l}{t+l},$$

где

$$B_l=\bigl(R(t)(t+l)\bigr)\big|_{t=-l}\in\mathbb{Z},\qquad l=s,s+1,\dots,s+n.$$

Тогда

$$R(t)(t+k)=B_k+\sum_{\substack{l=s\\ l\ne k}}^{s+n}B_l\frac{t+k}{t+l}=B_k+\sum_{\substack{l=s\\ l\ne k}}^{s+n}B_l\biggl(1+\frac{k-l}{t+l}\biggr)$$

и, значит,

$$\frac{1}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(R(t)(t+k)\bigr)\bigg|_{t=-k}=(-1)^j\sum_{\substack{l=s\\ l\ne k}}^{s+n}\frac{B_l(k-l)}{(t+l)^{j+1}}\bigg|_{t=-k}=-\sum_{\substack{l=s\\ l\ne k}}^{s+n}\frac{B_l}{(k-l)^j}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Замечание 1.1. Формулировка леммы 1.2 принадлежит Нестеренко [21]. В работе Никишина [20] доказанная лемма применялась к многочлену

$$P(t)=(t+p+1)\cdots(t+p+n)$$

для $p-s\in\mathbb{Z}$ и $p+n<s$ или $p\geqslant s+n$; Ривоаль заметил [13], что условиям (1.14) удовлетворяет также многочлен $P(t)=n!$. В каждом из этих случаев числа B_k, $k=s,s{+}1,\dots,s{+}n$, являются биномиальными коэффициентами, так что проверка включений (1.14) не составляет труда.

Как несложно заметить, рациональная функция (1.1) может быть представлена в виде произведения функций

$$F(t)=F_{n,m}(t):=\frac{(t\pm(m+1))\cdots(t\pm(m+2n))}{\bigl(t(t\pm1)\cdots(t\pm n)\bigr)^2},\qquad n\leqslant m, \tag{1.15}$$

$$H(t)=H_n(t):=\frac{(2n)!}{t(t\pm1)\cdots(t\pm n)} \tag{1.16}$$

(см. формулу (1.22) далее).

Лемма 1.3. *Для функций* (1.15), (1.16) *выполнены включения*

$$\frac{D_{2n}^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(F(t)(t+k)^2\bigr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n,\quad j=0,1,2,\dots, \tag{1.17}$$

$$\frac{D_{2n}^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(H(t)(t+k)\bigr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n,\quad j=0,1,2,\dots, \tag{1.18}$$

где D_{2n} – наименьшее общее кратное чисел $1,2,\dots,2n$.

Доказательство. Включения (1.18) следуют из леммы 1.2, примененной к рациональной функции (1.16). Чтобы доказать включения (1.17), необходимо воспользоваться леммой 1.2 для рациональных функций

$$
\begin{aligned}
R_-(t) &= \frac{(t-(m+1))\cdots(t-(m+2n))}{t(t\pm 1)\cdots(t\pm n)},\\
R_+(t) &= \frac{(t+(m+1))\cdots(t+(m+2n))}{t(t\pm 1)\cdots(t\pm n)}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

и правилом Лейбница для j-й производной произведения $R_-(t)R_+(t) = F(t)$. При этом условия (1.14) для каждой из рациональных функций в (1.16), (1.19) действительно выполнены, так как

$$
\begin{aligned}
\bigl(H(t)(t+k)\bigr)\big|_{t=-k} &= (-1)^{n+k}\frac{(2n)!}{(n+k)!\,(n-k)!} = (-1)^{n+k}\binom{2n}{n+k} \in \mathbb{Z},\\
\bigl(R_-(t)(t+k)\bigr)\big|_{t=-k} &= \binom{m+2n+k}{2n}\cdot(-1)^{n+k}\binom{2n}{n+k} \in \mathbb{Z},\\
\bigl(R_+(t)(t+k)\bigr)\big|_{t=-k} &= \binom{m+2n-k}{2n}\cdot(-1)^{n+k}\binom{2n}{n+k} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

для всех $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$. Тем самым лемма доказана.

Всюду в дальнейшем под *знаменателем* $\operatorname{den}(I)$ линейной формы $I = A_0 + A_1\theta_1 + \cdots + A_m\theta_m$ понимаем наименьшее *рациональное* (не обязательно целое) $D > 0$ такое, что каждое из чисел $DA_0, DA_1, \dots, DA_m$ является целым.

Лемма 1.4. *Коэффициенты линейной формы* (1.5) *удовлетворяют включениям*

$$
D_{2n}^{a+b-1-s}\bar{A}_s \in \mathbb{Z},
\tag{1.20}
$$

где $s = 0$ *или* s *нечетно*, $b < s < a + b$; *поэтому* $\operatorname{den}(I_n)$ *является делителем* D_{2n}^{a+b-1} *и*

$$
\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log\operatorname{den}(I_n)}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\log D_{2n}^{a+b-1}}{n} = 2(a+b-1).
\tag{1.21}
$$

Доказательство. Для определения коэффициентов в разложении (1.6) воспользуемся формулой

$$
A_{k,j} = \frac{1}{(a-j)!}\,\frac{\mathrm{d}^{a-j}}{\mathrm{d}t^{a-j}}\bigl(R(t)(t+k)^a\bigr)\bigg|_{t=-k}, \qquad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, 2, \dots, a,
$$

и представлением

$$
R(t) = (H_n(t))^{a-2rb}\,(F_{n,n}(t))^b\,(F_{n,3n}(t))^b\cdots(F_{(2r-1)n,n}(t))^b
\tag{1.22}
$$

рациональной функции (1.1). Тогда включения

$$
D_{2n}^{a-j}A_{k,j} \in \mathbb{Z}, \qquad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, 2, \dots, a,
\tag{1.23}
$$

следуют из леммы 1.3 и правила Лейбница для дифференцирования произведения. В свою очередь, включения (1.20) получаются согласно формулам (1.11), (1.12) и соотношениям (1.23). Предельное соотношение (1.21) вытекает из формулы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} = 1 \tag{1.24}$$

(согласно асимптотическому закону распределения простых чисел). Лемма доказана полностью.

Таким образом, мы построили последовательность линейных форм I_n, $n = 1, 2, \dots$, из которой (согласно предельному соотношению (1.4)) можно выделить бесконечную подпоследовательность ненулевых форм; при этом формы $D_{2n}^{a+b-1} I_n$, $n = 1, 2, \dots$, имеют целочисленные коэффициенты. Это означает, что при

$$\varkappa + 2(a+b-1) < 0 \tag{1.25}$$

среди чисел $\zeta(s)$, где s нечетно и $b < s < a+b$, имеется по крайней мере одно иррациональное. Более того, верхние оценки для коэффициентов линейных форм (1.10) в случае (1.25) позволяют получить оценку снизу для количества иррациональных чисел в указанном наборе значений дзета-функции. Поэтому следующий этап наших рассуждений посвящен вычислению величины (1.4) и асимптотики коэффициентов линейных форм (1.10) при $n \to \infty$.

§ 2. Асимптотическая оценка линейных форм

Нам понадобятся некоторые дополнительные свойства функции $\operatorname{ctg} z$.

Лемма 2.1. *Максимальное значение вещественнозначной неотрицательной функции* $h(y) = |\operatorname{ctg}(x+iy)|$, $y \in \mathbb{R}$, *зависит только от* $x \pmod{\pi\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Если $x = \pi k$ для некоторого целого k, то точка $z = x$ является (единственным) полюсом функции $\operatorname{ctg} z$ на прямой $\operatorname{Im} z = x$ (см. (2.6) далее). Следовательно, в этом случае абсолютный максимум функции $h(y)$, равный бесконечности, достигается при $y = 0$. Поэтому считаем далее, что $x \notin \pi\mathbb{Z}$ и, значит, $\cos 2x < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} h(y)^2 &= \left|\frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)}\right|^2 = \left|\frac{(e^{-y}+e^{y})\cos x + i(e^{-y}-e^{y})\sin x}{(e^{-y}-e^{y})\cos x + i(e^{-y}+e^{y})\sin x}\right|^2 \\ &= \frac{e^{-2y}+e^{2y}+2\cos 2x}{e^{-2y}+e^{2y}-2\cos 2x} = 1 + \frac{4\cos 2x}{e^{-2y}+e^{2y}-2\cos 2x} \\ &\leqslant 1 + \frac{4|\cos 2x|}{2-2\cos 2x}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где мы воспользовались неравенством $Y + 1/Y \geqslant 2$ при $Y = e^{-2y} > 0$, которое становится равенством лишь в случае $Y = 1$. Оценка в правой части (2.1) зависит только от $x \pmod{\pi\mathbb{Z}}$, что и завершает доказательство леммы.

Определим теперь "дифференциальные итерации" котангенса:

$$\operatorname{ctg}_b z = \frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{b-1}\operatorname{ctg} z}{\mathrm{d}z^{b-1}}, \qquad b = 1, 2, \dots. \tag{2.2}$$

Лемма 2.2. *Для каждого* $b = 1, 2, \dots$

а) *функция* $\operatorname{ctg}_b z$ *является многочленом от* $\operatorname{ctg} z$ *с рациональными коэффициентами*:

$$\operatorname{ctg}_b z = U_b(\operatorname{ctg} z), \qquad U_b(-y) = (-1)^b U_b(y), \quad \deg U_b = b;$$

б) *функция* $\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z$ *является многочленом от* $\cos z$ *с рациональными коэффициентами*:

$$\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z = V_b(\cos z), \qquad V_b(-y) = (-1)^b V_b(y), \quad \deg V_b = \max\{1, b-2\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $b = 1$ имеем $\operatorname{ctg}_1 z = \operatorname{ctg} z$ и $\sin z \cdot \operatorname{ctg}_1 z = \cos z$, так что $U_1(y) = V_1(y) = y$.

а) Согласно дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -(y^2 + 1), \qquad y = \operatorname{ctg} z,$$

и определению (2.2) для многочленов $U_b(y)$, $b = 1, 2, \dots$, справедливо рекуррентное соотношение

$$U_{b+1}(y) = \frac{1}{b}(y^2 + 1) U_b'(y), \qquad b = 2, 3, \dots .$$

Индукционный переход от b к $b+1$ показывает, что $U_{b+1}(-y) = (-1)^{b+1} U_{b+1}(y)$ и степень многочлена U_{b+1} на единицу больше степени U_b.

б) Пусть представление (2.3) доказано для некоторого целого $b \geqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sin z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} V_b(\cos z) &= \sin z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z) \\
&= b \cos z \cdot \sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z + \sin^{b+1} z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{ctg}_b z \\
&= b \cos z \cdot V_b(\cos z) - b \sin^{b+1} z \cdot \operatorname{ctg}_{b+1} z,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\sin^{b+1} z \cdot \operatorname{ctg}_{b+1} z &= \cos z \cdot V_b(\cos z) - \frac{1}{b} \sin z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} V_b(\cos z) \\
&= \cos z \cdot V_b(\cos z) + \frac{1}{b} \sin^2 z \cdot V_b'(\cos z) \\
&= V_{b+1}(\cos z),
\end{aligned}$$

где

$$V_{b+1}(y) = y V_b(y) + \frac{1}{b}(1 - y^2) V_b'(y). \tag{2.4}$$

Согласно формуле (2.4) и индукционному предположению функция $V_{b+1}(y)$ является многочленом, степень которого не более чем на единицу превосходит степень $V_b(y)$; кроме того, $U_{b+1}(-y) = (-1)^{b+1} U_{b+1}(y)$. Поскольку $V_2(y) = 1$ (вновь согласно (2.4)), получаем оценку $\deg V_{b+1} \leqslant b - 1$. В то же время индукционный переход от b к $b+1$ и соотношение (2.4) показывают, что коэффициент при y^{b-1} в многочлене $V_{b+1}(y)$ ненулевой и равен $2^{b-1}/b!$. Тем самым представление (2.3) доказано для всех $b = 1, 2, \dots$. Лемма доказана полностью.

Лемма 2.3. *Для каждого $b=1,2,\dots$ и любого целого k в окрестности точки $t=k$ справедливо представление*

$$\pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t = \frac{1}{(t-k)^b} + O(1), \tag{2.5}$$

где функция в $O(1)$ аналитична в окрестности точки $t=k$. В окрестности точки $t \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ функция $\operatorname{ctg}_b \pi t$ аналитична.

Доказательство. Второе утверждение леммы следует из определения (2.2) функции $\operatorname{ctg}_b z$ и разложения котангенса в сумму простейших дробей:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi t = \frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-m} + \frac{1}{t+m}\right) \tag{2.6}$$

(см., например, [22, гл. X, §3, формула (3)]).

В окрестности точки $t=k\in\mathbb{Z}$ имеем

$$\pi \operatorname{ctg} \pi t = \pi \operatorname{ctg} \pi(t-k) = \frac{1}{t-k}\cdot\left(1 + \sum_{s=2}^{\infty} B_s \frac{(2\pi i)^s (t-k)^s}{s!}\right), \tag{2.7}$$

где B_s, $s=2,3,\dots$, – числа Бернулли (см., например, [22, гл. X, §3, формула (2)]). Дифференцируя $b-1$ раз тождество (2.7), получаем представление (2.5) и первое утверждение леммы. Лемма доказана полностью.

Лемма 2.4. *Для суммы (1.2) справедливы интегральное представление*

$$I = \frac{\pi^{b-1} i}{2}\int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot R(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

где $M\in\mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $n<M<(2r+1)n$.

Доказательство. Рассмотрим подынтегральную функцию в (2.8) на контуре прямоугольника с вершинами $M\pm iN$, $N+1/2\pm iN$ (см. рис. 1), где целое число N достаточно велико, $N>(2r+1)n$. Согласно теореме Коши, лемме 2.3 и аналитичности функции $R(t)$ внутри и на границе прямоугольника интеграл

$$\frac{\pi^b}{2\pi i}\left(\int_{M+iN}^{M-iN} + \int_{M-iN}^{N+1/2-iN} + \int_{N+1/2-iN}^{N+1/2+iN} + \int_{N+1/2+iN}^{M+iN}\right)\operatorname{ctg}_b \pi t\cdot R(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.9}$$

равен сумме вычетов подынтегральной функции в точках $t\in\mathbb{Z}$, $M<t\leqslant N$. Пользуясь теперь представлением (2.5) и разложением

$$R(t) = R(k) + R'(k)\cdot(t-k) + \dots + \frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!}\cdot(t-k)^{b-1} + O\big((t-k)^b\big)$$

в окрестности точки $t=k\in\mathbb{Z}$, $M<k\leqslant N$, получаем, что интеграл (2.9) равен

$$\sum_{M<k\leqslant N}\operatorname*{Res}_{t=k}\big(\pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t\cdot R(t)\big) = \sum_{M<k\leqslant N}\frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!} = \sum_{k=n+1}^{N}\frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!}. \tag{2.10}$$

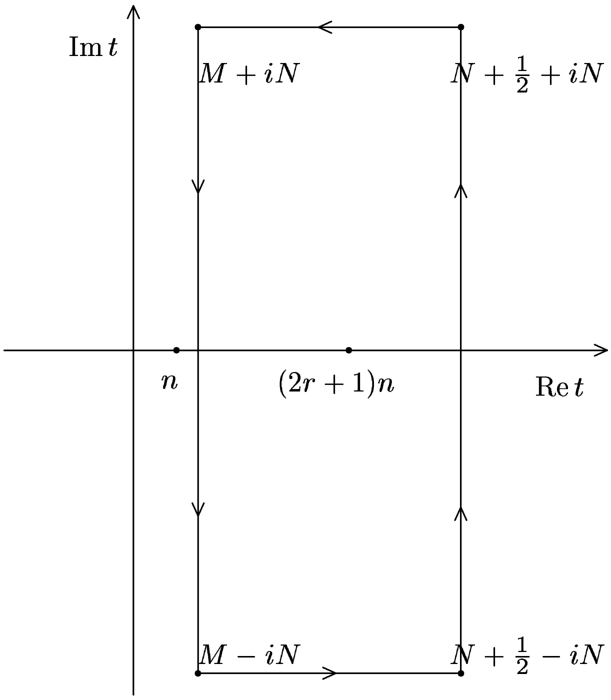

Рис. 1

Отметим теперь, что на сторонах $[N+1/2-iN, N+1/2+iN]$, $[M-iN, N+1/2-iN]$ и $[N+1/2+iN, M+iN]$ прямоугольника выполнено $R(t)=O(N^{-2})$ согласно (1.3), а функция $\operatorname{ctg}_b \pi t$ ограничена. Последнее утверждение следует из утверждения a) леммы 2.2 и ограниченности функции $\operatorname{ctg} \pi t$ на рассматриваемых сторонах: для отрезка $[N+1/2-iN, N+1/2+iN]$ пользуемся леммой 2.1, а для двух других отрезков – тривиальной оценкой

$$|\operatorname{ctg} \pi(x+iy)| = \left|\frac{1+e^{\pm 2\pi i x}\cdot e^{-2\pi|y|}}{1-e^{\pm 2\pi i x}\cdot e^{-2\pi|y|}}\right| \leqslant \frac{1+e^{-2\pi|y|}}{1-e^{-2\pi|y|}}, \qquad x\in\mathbb{R},$$

при $y=\pm N$. Поэтому

$$\left(\int_{M-iN}^{N+1/2-iN} + \int_{N+1/2-iN}^{N+1/2+iN} + \int_{N+1/2+iN}^{M+iN}\right) \operatorname{ctg}_b \pi t\cdot R(t)\,\mathrm{d}t = O(N^{-1}),$$

и после перехода к пределу при $N\to\infty$ в (2.9) получаем правую часть (2.8), в то время как предельный переход в (2.10) дает искомую сумму (1.2). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *При $n\to\infty$ для суммы (1.2) выполнено*

$$I = \tilde{I}\,\frac{(-1)^{bn}(2\sqrt{\pi n}\,)^{a-2rb}(2\pi)^b}{n^{a-1}}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr),$$

где

$$\tilde{I}=\tilde{I}_n := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \sin^b \pi n\tau\cdot \operatorname{ctg}_b \pi n\tau\cdot e^{nf(\tau)}\cdot g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} f(\tau) &= b(\tau+2r+1)\log(\tau+2r+1)+b(-\tau+2r+1)\log(-\tau+2r+1)\\ &\quad+(a+b)(\tau-1)\log(\tau-1)-(a+b)(\tau+1)\log(\tau+1)+(a-2rb)2\log 2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$g(\tau)=\frac{(\tau+2r+1)^{b/2}(-\tau+2r+1)^{b/2}}{(\tau+1)^{(a+b)/2}(\tau-1)^{(a+b)/2}}, \tag{2.13}$$

а $\mu\in\mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $1<\mu<2r+1$.

Замечание 2.1. Для однозначного определения функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ рассматриваем их в τ-плоскости с разрезами вдоль лучей $(-\infty, 1]$ и $[2r+1, +\infty)$, фиксируя ветви логарифмов, принимающие действительные значения на интервале $(1, 2r+1)$ вещественной оси. Такой выбор ветвей обусловлен следующим далее доказательством леммы.

Доказательство. Пользуясь формулой понижения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, перепишем рациональную функцию (1.1) в терминах гамма-функции:

$$R(t) = (-1)^{an}\left(\frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n + 1)}{\Gamma(\pm t + n + 1)}\right)^b \left(\frac{\Gamma(t)\Gamma(1-t)}{\Gamma(\pm t + n + 1)}\right)^a (2n)!^{a-2rb}, \qquad (2.14)$$

где, как и раньше, знак $\pm$ отвечает двум множителям в произведении. Преобразуем подынтегральную функцию в (2.8), пользуясь представлением (2.14) функции $R(t)$ и тождеством

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t} = (-1)^n \Gamma(-t+n+1)\Gamma(t-n).$$

Имеем

$$R(t) = \frac{(-1)^{bn} \cdot \sin^b \pi t}{\pi^b} \, \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n + 1)^b \Gamma(t-n)^{a+b}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}} \, (2n)!^{a-2rb}. \qquad (2.15)$$

Подставив это выражение в (2.8), получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^{bn} i}{2\pi} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \sin^b \pi t \cdot \operatorname{ctg}_b \pi t \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n + 1)^b \Gamma(t-n)^{a+b} (2n)!^{a-2rb}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}} \, dt \\ &= \frac{(-1)^{bn} (2n)^{a-2rb} i}{2\pi} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \sin^b \pi t \cdot \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot \frac{(-t + (2r+1)n)^b (t + (2r+1)n)^b}{(t+n)^{a+b}} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n)^b \Gamma(t-n)^{a+b} \Gamma(2n)^{a-2rb}}{\Gamma(t+n)^{a+b}} \, dt, \end{aligned} \qquad (2.16)$$

где $M \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $n < M < (2r+1)n$. Положим $M = \mu n$ для постоянной $\mu \in \mathbb{R}$ из интервала $1 < \mu < 2r+1$.

Согласно асимптотике Γ-функции

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O\bigl(|z|^{-1}\bigr) \qquad (2.17)$$

(см., например, [23, § 3.10]) на контуре интегрирования в (2.16) имеем

$$\begin{aligned} \log \Gamma(\pm t + (2r+1)n) &= \left(\pm t + (2r+1)n - \frac{1}{2}\right) \log(\pm t + (2r+1)n) \\ &\qquad - (\pm t + (2r+1)n) + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}), \\ \log \Gamma(t+n) &= \left(t + n - \frac{1}{2}\right) \log(t+n) - (t+n) + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}), \\ \log \Gamma(t-n) &= \left(t - n - \frac{1}{2}\right) \log(t-n) - (t-n) + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}), \\ \log \Gamma(2n) &= \left(2n - \frac{1}{2}\right) \log(2n) - 2n + \log \sqrt{2\pi} + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, после замены $t = n\tau$ в интегралах в (2.16) получим

$$I = \frac{(-1)^{bn}(2\sqrt{\pi n}\,)^{a-2rb}(2\pi)^{b-1}i}{n^{a-1}} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \sin^b \pi n\tau \cdot \operatorname{ctg}_b \pi n\tau \cdot e^{nf(\tau)}$$
$$\times \frac{(\tau+2r+1)^{b/2}(-\tau+2r+1)^{b/2}}{(\tau+1)^{(a+b)/2}(\tau-1)^{(a+b)/2}}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr)\,\mathrm{d}\tau,$$

где функция $f(\tau)$ определена в (2.12) и $\mu = M/n \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $1 < \mu < 2r+1$. Лемма доказана.

Согласно утверждению б) леммы 2.2 интеграл (2.11) можно представить в виде

$$\tilde{I} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-b}^{b} c_k \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\tau)-k\pi i\tau)} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad c_k = c_{-k}, \tag{2.18}$$

где суммирование происходит только по k, имеющим ту же четность, что и число b, причем $c_{-b} = c_b = 0$ в случае $b > 1$.

Лемма 2.6. *Для $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $1 < \mu < 2r+1$, и целого положительного n определим величину*

$$J_{n,\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.19}$$

Тогда

$$J_{n,-\lambda} = \overline{J_{n,\lambda}},$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Доказательство. Для аналитических в $\mathbb{C}\setminus((-\infty,1]\cup[2r+1,+\infty))$ функций $f(\tau), g(\tau)$, принимающих вещественные значения на интервале $(1, 2r+1)$, воспользуемся принципом симметрии Шварца (см., например, [24, гл. III, §7, предложение 7.1]). Тогда после замены $\tau \mapsto \bar{\tau}$ в интеграле (2.19) получим

$$J_{n,\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\bar\tau)-\lambda\pi i\bar\tau)} g(\bar\tau)\,\mathrm{d}\bar\tau = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\bar\tau)-\lambda\pi i\bar\tau)} g(\bar\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \overline{\frac{1}{2\pi i}}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(\,\overline{f(\tau)+\lambda\pi i\tau}\,)}\,\overline{g(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \overline{J_{n,-\lambda}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2.1. *Интеграл (2.11) представим в виде*

$$\tilde{I} = -2\sum_{\substack{k=0\\ k\equiv b \pmod 2}}^{b} c_k \operatorname{Re} J_{n,k}, \tag{2.20}$$

где c_k – некоторые (рациональные) постоянные, причем $c_1 = 1$ для $b = 1$ и $c_b = 0$, $c_{b-2} \neq 0$ для $b > 1$.

Доказательство. Требуемое представление (2.20) непосредственно следует из утверждения б) леммы 2.2, формулы (2.18) и леммы 2.6.

Займемся вычислением асимптотики каждого из интегралов в правой части (2.18) с помощью метода перевала. Для этого нам понадобятся седловые точки подынтегральных функций – нули производных функций $f(\tau)-k\pi i\tau$, $k=0,\pm1,\dots$ $\dots,\pm b$, $k\equiv b\ (\mathrm{mod}\,2)$. Как несложно убедиться, все корни производной

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f(\tau)-k\pi i\tau)&=b\log(\tau+2r+1)-b\log(-\tau+2r+1)\\&\quad+(a+b)\log(\tau-1)-(a+b)\log(\tau+1)-k\pi i,\\&\qquad k=0,\pm1,\dots,\pm b,\quad k\equiv b\ (\mathrm{mod}\,2),\end{aligned}$$

одновременно являются корнями многочлена

$$(\tau+2r+1)^b(\tau-1)^{a+b}-(\tau-2r-1)^b(\tau+1)^{a+b}, \tag{2.21}$$

общее количество которых равно его степени $a+2b-1$.

Лемма 2.7. *Пусть a,b,r – целые положительные числа, $a+b$ четно, $a\geqslant 3rb$, и функция $f(\tau)$ определена в (2.12), где соответствующие ветви логарифмов в разрезанной плоскости $\mathbb{C}\setminus((-\infty,1]\cup[2r+1,+\infty))$ принимают вещественные значения на интервале $(1,2r+1)$. Тогда уравнение*

$$f'(\tau)-\lambda\pi i=0,\qquad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{2.22}$$

имеет:

а) *пару симметричных относительно мнимой оси вещественных решений $-\mu_0\pm i0$ и μ_0 для $\lambda=0$, где $\mu_0\in(1,2r+1)$ и знак $+$ (знак $-$) в записи $\pm i0$ отвечает верхнему (нижнему) берегу разреза $(-\infty,1]$;*

б) *пару симметричных относительно мнимой оси вещественных решений $-\mu_1\pm i0$ и $\mu_1\pm i0$ для $\lambda=\pm b$, где $\mu_1\in(2r+1,+\infty)$ и знак $+$ (знак $-$) в записи $\pm i0$ совпадает со знаком λ и отвечает верхним (нижним) берегам разрезов $(-\infty,1],[2r+1,+\infty)$;*

в) *вещественное решение $\pm i0$ для $\lambda=\pm(a+b)$, где знак $+$ (знак $-$) в записи $\pm i0$ совпадает со знаком λ и отвечает верхнему (нижнему) берегу разреза $(-\infty,1]$;*

г) *одно решение на мнимой оси для вещественных λ, удовлетворяющих неравенству $b<|\lambda|<a+b$;*

д) *пару симметричных относительно мнимой оси комплексных решений для вещественных λ, удовлетворяющих неравенству $0<|\lambda|<b$.*

При этом все решения уравнения (2.22), отвечающие положительным λ, лежат в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau>0$, а отвечающие отрицательным λ – в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau<0$. Все решения уравнения (2.22) исчерпываются набором а)–д).

Доказательство. Поскольку

$$f'(\tau) = b\log(\tau+2r+1) - b\log(-\tau+2r+1) \\ + (a+b)\log(\tau-1) - (a+b)\log(\tau+1) \tag{2.23}$$

и $\log z = \log|z| + i\arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$, для главной ветви логарифма с разрезом $(-\infty, 0]$ в z-плоскости, имеем

$$\operatorname{Re} f'(\tau) = \log\frac{|\tau+2r+1|^b|\tau-1|^{a+b}}{|-\tau+2r+1|^b|\tau+1|^{a+b}}, \tag{2.24}$$

$$\operatorname{Im} f'(\tau) = b\arg(\tau+2r+1) - b\arg(-\tau+2r+1) \\ + (a+b)\arg(\tau-1) - (a+b)\arg(\tau+1), \tag{2.25}$$

причем все аргументы $\arg(\,\cdot\,)$ принимают нулевые значения на интервале $(1, 2r+1)$. Геометрическая интерпретация формулы (2.25) в обозначениях рис. 2 имеет вид

$$\operatorname{Im} f'(\tau) = b(\beta_- + \beta_+) + (a+b)(\alpha_+ - \alpha_-) = b(\pi-\beta) + (a+b)\alpha, \tag{2.26}$$

откуда, в частности, следует, что $\operatorname{Im} f'(\tau) > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau > 0$ и $\operatorname{Im} f'(\tau) < 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau < 0$. Кроме того, согласно (2.24), (2.26) множество решений уравнения (2.22) для каждого λ симметрично относительно мнимой оси, а симметрия $\tau \mapsto \bar\tau$ переводит его в множество решений уравнения (2.22) с заменой λ на $-\lambda$. Поэтому наши дальнейшие рассуждения относятся к случаю $\lambda > 0$ и верхней полуплоскости, а симметрия относительно действительной оси переносит их на случай $\lambda < 0$.

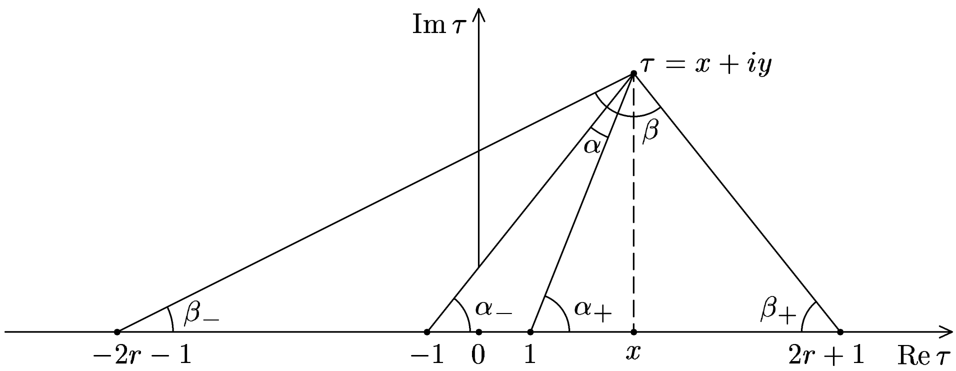

Рис. 2

Отметим также, что любое решение уравнения (2.22) согласно (2.23) является корнем многочлена

$$(\tau+2r+1)^b(\tau-1)^{a+b} - e^{\lambda\pi i}(-\tau+2r+1)^b(\tau+1)^{a+b} \tag{2.27}$$

степени $a+2b-1$, если λ – целое число, имеющее ту же четность, что и b, и степени $a+2b$ в противном случае; при $\lambda \equiv b \pmod 2$ этот многочлен совпадает с (2.21).

а), в) При $\lambda = 0$ (или, что то же самое, при $\lambda = a+b$) многочлен (2.27) является нечетной функцией, поэтому имеет корень 0; соответствующее решение $+i0$ уравнения (2.22) отвечает $\lambda = a+b$, так как $\alpha = \beta = \pi$ в (2.26) для $\tau = 0$. Вычисляя значения многочлена в точках $1, 2r+1$ и пользуясь его нечетностью, получаем, что этот многочлен обладает парой вещественных корней $\pm\mu_0$, где $\mu_0 \in (1, 2r+1)$. В дальнейшем покажем, что μ_0 – единственный вещественный корень на интервале $(1, 2r+1)$, но до тех пор мы будем считать μ_0 ближайшим к точке $2r+1$ вещественным корнем многочлена (2.27) при $\lambda = 0$ на указанном интервале. Согласно (2.26) решения $-\mu_0 + i0$ и μ_0 отвечают $\lambda = 0$ в уравнении (2.22).

б) Аналогично, вычисляя значения многочлена (2.27) при $\lambda = b$ в точках $2r+1$, $+\infty$, получаем, что этот многочлен обладает парой вещественных корней $\pm\mu_1$, причем корень $\mu_1 \in (2r+1, +\infty)$ мы (временно) считаем ближайшим к точке $2r+1$ среди остальных корней из интервала $(2r+1, +\infty)$. Согласно (2.26) решения $-\mu_1 + i0$ и $\mu_1 + i0$ отвечают $\lambda = b$ в уравнении (2.22).

В случае $a \geqslant 3rb$ можно указать лучшую локализацию корня μ_1, именно $\mu_1 \in (2r+1, 4r+1)$. Действительно, значение многочлена (2.27) в точке $4r+1$ равно

$$(6r+2)^b(4r)^{a+b} - (2r)^b(4r+2)^{a+b} = (2r)^b(4r)^{a+b}\left(\left(3+\frac{1}{r}\right)^b - \left(1+\frac{1}{2r}\right)^{a+b}\right) < 0,$$

так как

$$\begin{aligned} &(3r+1)\log\left(1+\frac{1}{2r}\right) = 4\log\frac{3}{2} > 2\log 2 = \log\left(3+\frac{1}{r}\right) && \text{при } r = 1, \\ &(3r+1)\log\left(1+\frac{1}{2r}\right) > \frac{3r+1}{2r+1} \geqslant \frac{7}{5} > 2\log 2 > \log\left(3+\frac{1}{r}\right) && \text{при } r \geqslant 2 \end{aligned}$$

(мы воспользовались элементарным неравенством

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \tag{2.28}$$

справедливым для всех целых положительных n) и, значит,

$$(a+b)\log\left(1+\frac{1}{2r}\right) \geqslant (3r+1)b\log\left(1+\frac{1}{2r}\right) > b\log\left(3+\frac{1}{r}\right).$$

г) На мнимой оси согласно (2.24) выполнено $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$. Когда точка τ пробегает луч iy, $y > 0$, углы α, β непрерывно убывают от π до 0. Поэтому функция $\operatorname{Im} f'(\tau) = b(\pi - \beta) + (a+b)\alpha$ принимает все промежуточные значения на интервале $(b\pi, (a+b)\pi)$; в частности, для каждого вещественного λ, $b < \lambda < a+b$, мы получаем по крайней мере одно решение уравнения (2.22), лежащее на мнимой оси.

д) Займемся теперь локализацией комплексных решений (2.22), отвечающих вещественным λ, $0 < |\lambda| < b$.

Проведем в верхней полуплоскости полуокружность с центром в точке $2r+1$ радиуса 2ρ, где $\rho < r$. Для точек $\tau = x + iy$ на этой полуокружности выполнено

$$\begin{gathered} |-\tau + 2r + 1|^2 = 4\rho^2, \qquad |\tau + 2r + 1|^2 = 4\rho^2 + 4(2r+1)x, \\ |\tau - 1|^2 = 4\rho^2 + 4rx - 4r(r+1), \qquad |\tau + 1|^2 = 4\rho^2 + 4(r+1)x - 4r(r+1), \end{gathered} \tag{2.29}$$

значит, ввиду (2.24)

$$2\operatorname{Re} f'(\tau) = \log \frac{(\rho^2+(2r+1)x)^b(\rho^2+rx-r(r+1))^{a+b}}{\rho^{2b}(\rho^2+(r+1)x-r(r+1))^{a+b}}. \tag{2.30}$$

Обозначим функцию в (2.30) через $\tilde{f}(x)$, $2r+1-2\rho < x < 2r+1+2\rho$; как функция от переменной x она монотонно возрастает, поскольку

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(x) &= \frac{b(2r+1)}{\rho^2+(2r+1)x} + \frac{(a+b)r}{\rho^2+rx-r(r+1)} - \frac{(a+b)(r+1)}{\rho^2+(r+1)x-r(r+1)} \\ &= \frac{b(2r+1)}{\rho^2+(2r+1)x} + \frac{(a+b)(r(r+1)-\rho^2)}{(\rho^2+rx-r(r+1))(\rho^2+(r+1)x-r(r+1))} \\ &= \frac{4b(2r+1)}{|\tau+2r+1|^2} + \frac{16(a+b)(r(r+1)-\rho^2)}{|\tau-1|^2|\tau+1|^2} > 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(2r+1-2\rho) < \tilde{f}(x) < \tilde{f}(2r+1+2\rho), \qquad x \in (2r+1-2\rho, 2r+1+2\rho), \tag{2.31}$$

и на нашей полуокружности выполнено

$$\operatorname{Re} f'(2r+1-2\rho) < \operatorname{Re} f'(\tau) < \operatorname{Re} f'(2r+1+2\rho+i0). \tag{2.32}$$

Выберем $\rho = (\mu_1 - 2r - 1)/2$, где $\mu_1 \in (2r+1, +\infty)$ – вещественный корень многочлена (2.27) при $\lambda = b$; как было показано выше, $2r+1 < \mu_1 < 4r+1$ в случае $a \geqslant 3rb$, т.е. условие $\rho < r$ выполняется. Поэтому согласно (2.32) для точек полуокружности имеем

$$\operatorname{Re} f'(\tau) < \operatorname{Re} f'(\mu_1 + i0) = 0. \tag{2.33}$$

Кроме того,

$$\lim_{\tau\to 2r+1} \operatorname{Re} f'(\tau) = +\infty. \tag{2.34}$$

Выпустим из точки $2r+1$ в верхнюю полуплоскость лучи; на каждом таком луче в области, ограниченной построенной полуокружностью и действительной осью, согласно (2.33) и (2.34) содержится точка τ, в которой $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$. Таким образом, в указанной области заключена часть непрерывно дифференцируемой кривой

$$\operatorname{Re} f'(\tau) = \log \frac{|\tau+2r+1|^b|\tau-1|^{a+b}}{|-\tau+2r+1|^b|\tau+1|^{a+b}} = 0 \tag{2.35}$$

(см. рис. 3, где указанная часть кривой локализована согласно (2.31) между двумя полуокружностями, отвечающими $\rho = (\mu_1 - 2r - 1)/2$ и $\rho = (2r+1-\mu_0)/2$). Согласно (2.26) значения $\operatorname{Im} f'(\tau)$ на этой кривой при подходе к действительной оси равны 0 (в точке μ_0) и $b\pi$ (в точке μ_1). Следовательно, $\operatorname{Im} f'(\tau)$ принимает на кривой все промежуточные значения между 0 и $b\pi$, т.е. значения $\lambda\pi$, где $0 < \lambda < b$.

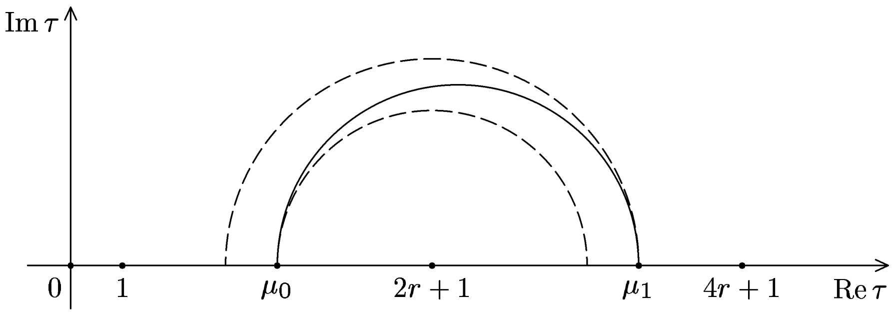

Рис. 3

Тем самым мы указали решения уравнения (2.22) для таких λ; симметричные относительно мнимой оси точки также являются решениями.

Таким образом, мы указали все решения уравнения (2.22) из набора а)–д), и для завершения доказательства необходимо показать, что других решений не существует. Предположим, что это не так, т.е. для некоторого $\lambda_0\in\mathbb{R}$ существует еще одно не учтенное в наборе а)–д) решение уравнения (2.22). Как было отмечено, это решение является корнем многочлена (2.27) с $\lambda=\lambda_0$. Покажем, что набор а)–д) содержит корни многочлена (2.27) в количестве, равном его степени, что вступит в противоречие с наличием дополнительного неучтенного решения.

Если число λ_0 не является целым, то имеем a мнимых решений из г), отвечающих $\lambda\equiv\lambda_0 \pmod 2$, $b<|\lambda|<a+b$, и b пар комплексных решений из д), отвечающих $\lambda\equiv\lambda_0\pmod 2$, $|\lambda|<b$. Следовательно, общее количество содержащихся в наборе г), д) корней многочлена (2.27) с $\lambda=\lambda_0$ равно степени многочлена $a+2b$.

Для целого (как четного, так и нечетного) λ_0 решение уравнения (2.22) с $\lambda=\lambda_0$ одновременно является корнем многочлена

$$(\tau+2r+1)^{2b}(\tau-1)^{2(a+b)}-(\tau-2r-1)^{2b}(\tau+1)^{2(a+b)}. \tag{2.36}$$

Для этого многочлена найдены два вещественных корня $\pm\mu_0$ из а), два вещественных корня $\pm\mu_1$ из б), один вещественный корень 0 из в), $2(a-1)$ мнимых корней из г) и $4(b-1)$ комплексных корней из д); общее количество корней многочлена (2.36), содержащихся в наборе а)–д), равно его степени $2a+4b-1$.

Таким образом, любое решение уравнения (2.22) обязательно содержится в наборе а)–д). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Замечание 2.2. Замена исходного ограничения $a\geqslant 2rb$ на более сильное $a\geqslant 3rb$ в лемме 2.7 потребовалось только для локализации корня μ_1. Поэтому лемма 2.7 остается справедливой и в случае $a\geqslant 2rb$, если выполнено условие

$$\mu_1<4r+1. \tag{2.37}$$

Следствие 2.2. *Множество точек $\tau\in\mathbb{C}$, для которых выполнено* (2.35), *представляет собой мнимую ось и пару замкнутых кривых, симметричных относительно мнимой оси* (*см. рис.* 4). *Указанные кривые делят комплексную плоскость на четыре части, в каждой из которых знак* $\operatorname{Re} f'(\tau)$ *постоянный.*

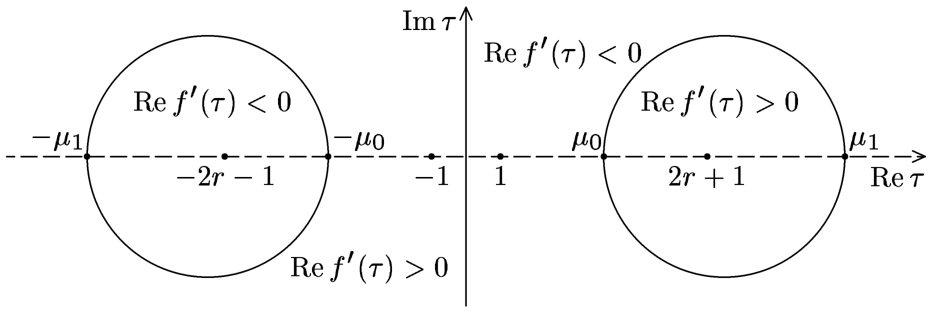

Рис. 4

Следствие 2.3. *Любая полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке* $2r+1$ *радиуса* ρ, $2r+1-\mu_0 < 2\rho < \mu_1 - 2r - 1$, *пересекает кривую* (2.35) (*см. рис.* 3) *в точности в одной точке.*

Доказательство. Это утверждение следует из неравенств (2.32) и монотонности функции $\operatorname{Re} f'(\tau)$ на любой такой полуокружности.

Лемма 2.8. *Пусть* a, b, r, n – *целые положительные числа,* $a \geqslant 2rb$, *функции* $f(\tau), g(\tau)$ *определены в* (2.12), (2.13) *и* $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $1 < \mu < 2r+1$, $|\lambda| \leqslant b$. *Тогда контур интегрирования* $\operatorname{Re}\tau = \mu$ *в интеграле*

$$\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{n(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.38}$$

может быть заменен на любой другой контур $\mathscr{L}$, *соединяющий бесконечно удаленные точки в областях* $\operatorname{Re}\tau \geqslant \mu$, $\operatorname{Im}\tau < 0$ *и* $\operatorname{Re}\tau \geqslant \mu$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ *и пересекающий действительную ось в единственной точке* $\tau = \mu$. *В частности, контур* $\mathscr{L}$ *может проходить по верхнему и* (*или*) *нижнему берегу разреза* $[2r+1, +\infty)$.

Доказательство. Для любого вещественного $N > \mu$ соединим точки исходного контура $\operatorname{Re}\tau = \mu$ и нового контура $\mathscr{L}$ двумя дугами радиуса N с центром в начале координат; соответствующие точки пересечения с контурами обозначим через $M_\pm$ и $L_\pm$ (см. рис. 5).

Криволинейные треугольники $\mu L_+ M_+$ и $\mu M_- L_-$ не содержат внутри особых точек подынтегральной функции в (2.38). Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что при $N \to \infty$

$$\int_{L_+M_+} e^{n(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0, \qquad \int_{M_-L_-} e^{n(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0, \tag{2.39}$$

где L_+M_+ и M_-L_- – дуги окружности радиуса N с центром в начале координат.

На дугах L_+M_+ и M_-L_- окружности $\tau = Ne^{it}$ выполнены неравенства $0 \leqslant t < \pi/2$ и $-\pi/2 < t \leqslant 0$ соответственно (значение $t = 0$ принимается на верхнем и нижнем берегах разреза $[2r+1, +\infty)$). Пользуясь формулой Тейлора, находим

$$\begin{aligned} \log(\tau+1) &= \log(Ne^{it}+1) = \log(Ne^{it}) + \log\biggl(1 + \frac{e^{-it}}{N}\biggr) \\ &= \log N + it + \frac{e^{-it}}{N} + O\biggl(\frac{1}{N^2}\biggr), \end{aligned} \tag{2.40}$$

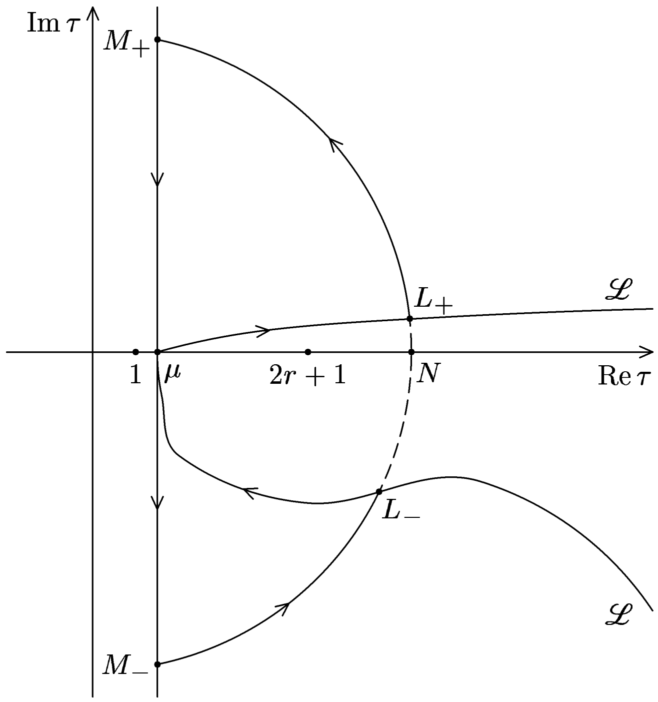

Рис. 5

$$\log(\tau-1)=\log N+it-\frac{e^{-it}}{N}+O\biggl(\frac{1}{N^2}\biggr), \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}\log(\tau+2r+1)&=\log(Ne^{it}+2r+1)=\log(Ne^{it})+\log\biggl(1+\frac{(2r+1)e^{-it}}{N}\biggr)\\&=\log N+it+\frac{(2r+1)e^{-it}}{N}+O\biggl(\frac{1}{N^2}\biggr),\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\log(-\tau+2r+1)&=\mp\pi i+\log(Ne^{it}-(2r+1))\\&=\mp\pi i+\log N+it-\frac{(2r+1)e^{-it}}{N}+O\biggl(\frac{1}{N^2}\biggr),\end{aligned} \tag{2.43}$$

где знак $-$ (знак $+$) в записи $\mp\pi i$ в (2.43) отвечает дуге L_+M_+ (дуге M_-L_-) согласно выбору ветвей логарифма. Постоянная в $O(1/N^2)$ в формулах (2.40)–(2.43) является абсолютной, так как $|e^{-it}|=1$ для вещественных t. Подставляя найденные разложения в (2.12), получаем

$$\begin{aligned}&f(\tau)=f(Ne^{it})\\&\quad=(\log N+it)\bigl(b(\tau+2r+1)+b(-\tau+2r+1)+(a+b)(\tau-1)-(a+b)(\tau+1)\bigr)\\&\qquad+\frac{e^{-it}}{N}\bigl(b(2r+1)(\tau+2r+1)-b(2r+1)(-\tau+2r+1)\\&\qquad\quad-(a+b)(\tau-1)-(a+b)(\tau+1)\bigr)\\&\qquad\mp\pi i\cdot b(-\tau+2r+1)+(a-2rb)2\log 2+O\biggl(\frac{|\tau|}{N^2}\biggr)\\&\quad=-2(a-2rb)\biggl(\log\frac{Ne}{2}+it\biggr)\pm b\pi i(Ne^{it}-2r-1)+O\biggl(\frac{1}{N}\biggr),\end{aligned}$$

где знак $\pm b\pi$ совпадает со знаком t (и $\sin t$). Следовательно, на дугах L_+M_+ и M_-L_- при $N\to\infty$ выполнено

$$\operatorname{Re}(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)=-2(a-2rb)\log\frac{Ne}{2}-(b\mp\lambda)\pi N|\sin t|+O\biggl(\frac{1}{N}\biggr)\leqslant\frac{1}{n},$$

где мы воспользовались неравенствами $a\geqslant 2rb$ и $|\lambda|\leqslant b$. Таким образом, для всех достаточно больших N справедлива оценка

$$|e^{n(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)}|=e^{n\operatorname{Re}(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)}\leqslant e. \tag{2.44}$$

Для функции (2.13) на дугах L_+M_+ и M_-L_- воспользуемся тривиальной оценкой

$$|g(\tau)|=O\biggl(\frac{N^{b/2}\,N^{b/2}}{N^{(a+b)/2}\,N^{(a+b)/2}}\biggr)=O\biggl(\frac{1}{N^a}\biggr)=O\biggl(\frac{1}{N^2}\biggr)\qquad\text{при } N\to\infty, \tag{2.45}$$

так как $a\geqslant 2rb\geqslant 2$. Поскольку длина каждой из дуг L_+M_+ и M_-L_- не превосходит $\pi N/2$, согласно оценкам (2.44), (2.45) каждый из интегралов в (2.39) имеет порядок $O(1/N)$. Это доказывает предельные соотношения (2.39) и завершает доказательство леммы.

Лемма 2.9. *Пусть a,b,r – целые положительные числа, $a\geqslant 2rb$, функции $f(\tau),g(\tau)$ определены в* (2.12), (2.13) *и $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda|\leqslant b$. Предположим дополнительно, что вещественные корни $\mu_0\in(1,2r+1)$ и $\mu_1\in(2r+1,+\infty)$ многочлена* (2.36) *удовлетворяют условию* (2.37) *и условию*

$$\mu_0+\sqrt{\mu_0^2-1}\geqslant\mu_1. \tag{2.46}$$

Тогда асимптотическое поведение интеграла (2.38) *с $\mu=\mu_0$ при $n\to\infty$ определяется единственной точкой перевала τ_0 – решением уравнения* (2.22) *– в области $\operatorname{Im}\tau>0$. Более точно, справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned}J_{n,\lambda}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu_0-i\infty}^{\mu_0+i\infty}e^{n(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=(2\pi)^{-1/2}|f''(\tau_0)|^{-1/2}e^{n\operatorname{Re}f_0(\tau_0)}|g(\tau_0)|\cdot e^{-\frac{i}{2}\arg f''(\tau_0)+i\arg g(\tau_0)+in\operatorname{Im}f_0(\tau_0)}\\&\qquad\times n^{-1/2}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr)\qquad\textit{при } n\to\infty,\end{aligned} \tag{2.47}$$

где

$$\begin{aligned}f_0(\tau)&=f(\tau)-f'(\tau)\tau\\&=b(2r+1)\log(\tau+2r+1)+b(2r+1)\log(-\tau+2r+1)\\&\qquad-(a+b)\log(\tau+1)-(a+b)\log(\tau-1)+(a-2rb)2\log 2.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Доказательство. Ограничимся доказательством леммы для $\lambda \geqslant 0$, так как все дальнейшие вычисления переносятся на случай $\lambda < 0$ зеркальным отображением относительно вещественной оси.

Согласно лемме 2.8 заменим контур интегрирования в (2.38) с $\mu = \mu_0$ на контур, состоящий из прямолинейных лучей и отрезков. Отметим сразу, что производная функции $\operatorname{Re} f(\tau)$ на каждом таком прямолинейном участке $\tau = \tau_1 + e^{i\varphi}t$, $t \in \mathbb{R}$, задается формулой

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re} f(\tau) = \operatorname{Re}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}t} = \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right) = \operatorname{Re} f'(\tau)\,\cos\varphi - \operatorname{Im} f'(\tau)\,\sin\varphi. \tag{2.49}$$

Если $\lambda = 0$, то точка μ_0 является единственной точкой максимума функции $\operatorname{Re} f(\tau)$ на прямой $\tau = \mu_0 + it$, $-\infty < t < +\infty$, поскольку

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re} f(\tau) = -\operatorname{Im} f'(\tau)$$

и функция $\operatorname{Im} f'(\tau)$ принимает отрицательные значения в области $\operatorname{Im}\tau < 0$ и положительные – в области $\operatorname{Im}\tau > 0$. Таким образом, в случае $\lambda = 0$ пользуемся исходным контуром $\operatorname{Re}\tau = \mu_0$.

Если $\lambda = b$, то для контура интегрирования в (2.38) с $\mu = \mu_0$ заменим луч, идущий из точки μ_0 в $\mu_0 + i\infty$, на луч, уходящий из μ_0 в $+\infty$ вдоль верхнего берега разреза $[2r+1, +\infty)$. На участке $\tau = \mu_0 + it$, $-\infty < t \leqslant 0$, функция

$$\operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda\pi i\tau) \tag{2.50}$$

возрастает, поскольку

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda\pi i\tau) = -\operatorname{Im} f'(\tau) + \lambda\pi \geqslant \lambda\pi > 0. \tag{2.51}$$

На участке $\tau = t$, $\mu_0 \leqslant t < +\infty$, функция $\operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda\pi i\tau) = \operatorname{Re} f(\tau)$ имеет единственную точку максимума при $t = \mu_1$ согласно лемме 2.7 и следствию 2.2.

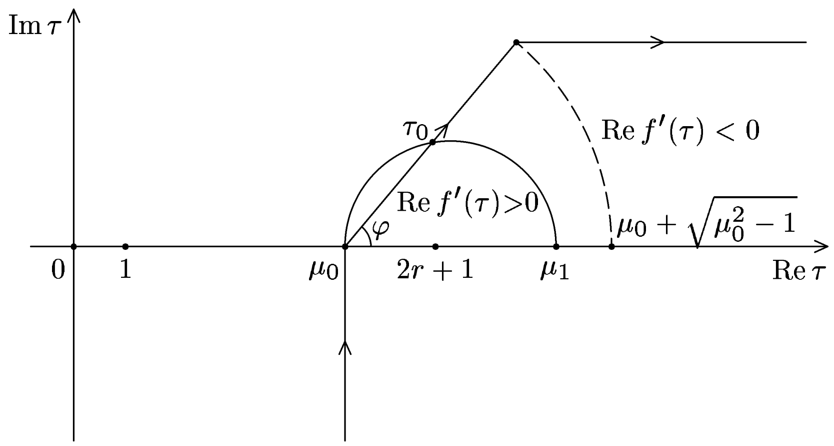

Рис. 6

Осталось рассмотреть случай $\lambda \in (0, b)$. Заменим луч от μ_0 к $\mu_0 + i\infty$ на отрезок $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$, $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\mu_0^2 - 1}$, проходящий через точку перевала τ_0 (единственное решение уравнения (2.22) в области $\operatorname{Re}\tau > 0$) и луч $\tau = e^{i\varphi}\sqrt{\mu_0^2 - 1} + t$, $\mu_0 \leqslant t < +\infty$. Согласно следствию 2.3 луч $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$, $t > 0$, пересекает кривую $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$ в точности в одной точке (именно τ_0) и $0 < \varphi < \pi/2$. Кроме того, согласно условию (2.46) точка τ_0 является внутренней точкой указанного отрезка (см. рис. 6). На луче $\tau = \mu_0 + it$, $t \leqslant 0$, функция (2.50) возрастает согласно (2.51); на луче $\tau = e^{i\varphi}\sqrt{\mu_0^2 - 1} + t$, $t \geqslant \mu_0$, функция (2.50) убывает, поскольку

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re}(f(\tau) - \lambda\pi i\tau) = \operatorname{Re}(f'(\tau) - \lambda\pi i) = \operatorname{Re} f'(\tau) < 0$$

согласно следствию 2.2. Таким образом, достаточно показать, что точка τ_0 – единственная точка максимума функции (2.50) на отрезке $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $t_1 = \sqrt{\mu_0^2 - 1}$. Пусть t_0 отвечает точке $\tau_0 = \mu_0 + e^{i\varphi}t_0$ на рассматриваемом отрезке. Согласно следствию 2.3 имеем

$$\operatorname{Re} f'(\mu_0 + e^{i\varphi}t) < 0 \quad \text{для } 0 < t < t_0, \qquad \operatorname{Re} f'(\mu_0 + e^{i\varphi}t) > 0 \quad \text{для } t_0 < t \leqslant t_1. \tag{2.52}$$

Покажем, что на рассматриваемом отрезке функция $\operatorname{Im} f'(\tau)$ монотонно возрастает. Для этого снова воспользуемся геометрической интерпретацией (2.26) функции $\operatorname{Im} f'(\tau)$. При возрастании $t \geqslant 0$ на луче $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$ угол β монотонно убывает от π до 0, а угол α сначала возрастает от 0 до некоторого α_0, а потом убывает от α_0 до 0. Покажем, что максимальное значение α_0 достигается на луче при $t = t_1$, откуда и будет следовать монотонное возрастание функции

$$\operatorname{Im} f'(\tau) = b(\pi - \beta) + (a + b)\alpha$$

на отрезке $\tau = \mu_0 + e^{i\varphi}t$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

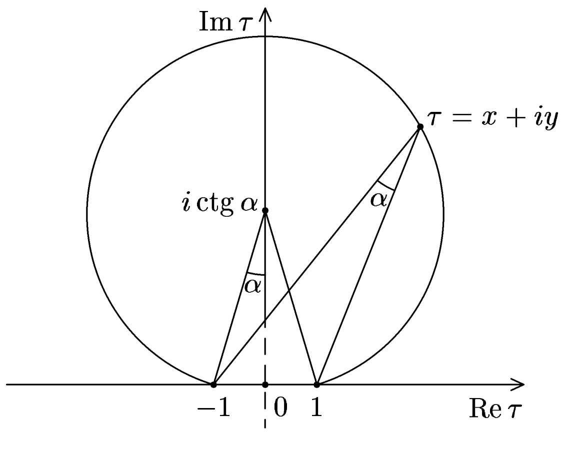

Рис. 7

Все точки $\tau = x + iy$ в верхней полуплоскости, из которых вещественный отрезок $[-1, 1]$ виден под заданным углом α, располагаются на дуге окружности с центром в точке $i\operatorname{ctg}\alpha$ радиуса $1/\sin\alpha$ (геометрическая интерпретация этого факта для острого угла α приведена на рис. 7):

$$x^2 + y^2 - 2y\operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

откуда

$$\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{x^2+y^2-1}{2y}.$$

На заданном луче $x=\mu_0+t\cos\varphi$, $y=t\sin\varphi$ для $t\geqslant 0$; поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}&=-\frac{(2x\cos\varphi+2y\sin\varphi)\cdot 2y-2\sin\varphi\cdot(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2+(2y)^2}\\&=-2\sin\varphi\cdot\frac{t^2-(\mu^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2+4y^2},\end{aligned}$$

так что максимальное значение угол α принимает при $t=\sqrt{\mu_0^2-1}$.

Из монотонного возрастания функции $\operatorname{Im}f'(\tau)$ на отрезке $\tau=\mu_0+e^{i\varphi}t$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, следует, что

$$\operatorname{Im}f'(\mu_0+e^{i\varphi}t)<\lambda\pi\quad\text{для } 0\leqslant t<t_0,\qquad \operatorname{Im}f'(\mu_0+e^{i\varphi}t)>\lambda\pi\quad\text{для } t_0<t\leqslant t_1. \tag{2.53}$$

Собирая оценки (2.52), (2.53) и пользуясь (2.49), получаем, что функция

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re}(f(\tau)-\lambda\pi i\tau)=\operatorname{Re}f'(\tau)\,\cos\varphi-(\operatorname{Im}f'(\tau)-\lambda\pi)\,\sin\varphi$$

на отрезке $\tau=\mu_0+e^{i\varphi}t$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, меняет знак с плюса на минус только при переходе через точку $\tau_0=\mu_0+e^{i\varphi}t_0$. Следовательно, точка τ_0 действительно является единственной точкой максимума на отрезке и всем контуре интегрирования, состоящем из этого отрезка и двух лучей.

Для доказательства асимптотической формулы (2.47) выпишем вклад точки перевала τ_0:

$$(2\pi)^{1/2}e^{\frac{\pi i}{2}-\frac{i}{2}\arg f''(\tau_0)}|f''(\tau_0)|^{-1/2}e^{n(f(\tau_0)-\lambda\pi i\tau_0)}g(\tau_0)\,n^{-1/2}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr) \tag{2.54}$$

(см., например, [23, § 5.7, формула (5.7.2)]); при этом

$$\begin{aligned}f''(\tau)&=\frac{b}{\tau+2r+1}+\frac{b}{-\tau+2r+1}+\frac{a+b}{\tau-1}-\frac{a+b}{\tau+1}\\&=2\frac{(a-2rb)\tau^2-(2r+1)(a-2rb+2ra)}{(\tau^2-1)(\tau^2-(2r+1)^2)}\neq 0\end{aligned}$$

в точках τ, для которых $\operatorname{Re}f'(\tau)=0$ (и, в частности, в точке τ_0). Пользуясь равенством

$$f(\tau_0)-\lambda\pi i\tau_0=f(\tau_0)-f'(\tau_0)\tau_0=f_0(\tau_0)$$

и выделяя в (2.54) модуль и аргумент, получаем (2.47). Лемма доказана.

Следствие 2.4. *Пусть выполнены условия леммы* 2.9 *и, кроме того,*

$$-\frac{1}{2}\arg f''(\tau_0)+\arg g(\tau_0)\not\equiv\frac{\pi}{2}\ (\operatorname{mod}\pi\mathbb{Z})\quad \text{или}\quad \operatorname{Im} f_0(\tau_0)\not\equiv 0\ (\operatorname{mod}\pi\mathbb{Z}). \tag{2.55}$$

Тогда для интеграла

$$\operatorname{Re} J_{n,\lambda}=\frac{1}{2}(J_{n,\lambda}+J_{n,-\lambda})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu_0-i\infty}^{\mu_0+i\infty} e^{nf(\tau)}\cos(\lambda\pi n\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

выполняется предельное соотношение

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|\operatorname{Re} J_{n,\lambda}|}{n}&=\operatorname{Re} f_0(\tau_0)\\&=\log\frac{2^{2(a-2rb)}|\tau_0+2r+1|^{b(2r+1)}|-\tau_0+2r+1|^{b(2r+1)}}{|\tau_0+1|^{a+b}|\tau_0-1|^{a+b}}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Более того, в случае

$$-\frac{1}{2}\arg f''(\tau_0)+\arg g(\tau_0)\equiv 0\ (\operatorname{mod}\pi\mathbb{Z})\quad \text{и}\quad \operatorname{Im} f_0(\tau_0)\equiv 0\ (\operatorname{mod}\pi\mathbb{Z}) \tag{2.57}$$

интеграл $J_{n,\lambda}$ *имеет вещественную асимптотику* (2.47) *и, значит, верхний предел в* (2.56) *можно заменить на обычный.*

Доказательство. Условие (2.55) обеспечивает ненулевую действительную часть коэффициента при $n^{-1/2}$ в асимптотической формуле (2.47) для бесконечной последовательности номеров n; именно на этой последовательности и достигается предельное соотношение (2.56). В случае (2.57) главный член в асимптотике (2.47) является вещественным числом, так что соотношение (2.56) с заменой верхнего предела на обычный следует непосредственно из (2.47).

Приступим к формулировке окончательных результатов о величине

$$\varkappa=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|I_n|}{n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|\tilde I_n|}{n} \tag{2.58}$$

(см. лемму 2.5). В случаях $b=1$ и $b=2$ результаты принимают простой вид, а верхние пределы в (2.58) меняются на обычные; поэтому мы выделяем эти случаи в отдельные утверждения.

Предложение 2.1. *Пусть* $b=1$, r *положительное целое,* $a>2r$ *нечетно и* $\mu_1\in(2r+1,+\infty)$ – *вещественный корень многочлена* (2.21). *Тогда*

$$\varkappa=\lim_{n\to\infty}\frac{\log|I_n|}{n}=\log\frac{2^{2(a-2r)}(\mu_1+2r+1)^{2r+1}(\mu_1-2r-1)^{2r+1}}{(\mu_1+1)^{a+1}(\mu_1-1)^{a+1}}. \tag{2.59}$$

Доказательство. В случае $b=1$ на контуре интегрирования для вычисления асимптотики интеграла $J_{n,1}$ в доказательстве леммы 2.9 (луч $\tau=\mu_0+it$, $t\leqslant 0$, и луч $\tau=t$, $t\geqslant\mu_0$, идущий по верхнему берегу разреза $[2r+1,+\infty)$) точка $\tau=\mu_1$ является единственным максимумом функции $\operatorname{Re} f(\tau)$. Отсюда, в частности, следует, что $f''(\mu_1)<0$ и, значит,

$$-\frac{1}{2}\arg f''(\mu_1)\equiv\frac{\pi}{2}\pmod{\pi\mathbb{Z}}.$$

Кроме того, при $b=1$ для функции (2.13) имеем

$$\arg g(\mu_1)=-\frac{\pi}{2}\qquad\text{и}\qquad \operatorname{Im} f_0(\mu_1)=-(2r+1)\pi.$$

Применяя теперь следствие 2.4 с $\lambda=1$ и $\tau_0=\mu_1$, получаем, что выполнено условие (2.57) и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|\operatorname{Re} J_{n,1}|}{n}=\operatorname{Re} f_0(\mu_1),$$

откуда согласно формуле $\tilde I_n=-\operatorname{Re} J_{n,1}$ (см. следствие 2.1) и лемме 2.5 получаем предельное соотношение (2.59).

Предложение 2.2. *Пусть $b=2$, r положительное целое, $a\geqslant 4r$ четно и $\mu_0\in(1,2r+1)$ – вещественный корень многочлена* (2.21). *Тогда*

$$\varkappa=\lim_{n\to\infty}\frac{\log|I_n|}{n}=\log\frac{2^{2(a-4r)}(\mu_0+2r+1)^{2(2r+1)}(-\mu_0+2r+1)^{2(2r+1)}}{(\mu_0+1)^{a+2}(\mu_0-1)^{a+2}}. \tag{2.60}$$

Доказательство. В случае $b=2$ имеем $\tilde I_n=-J_{n,0}$, а точка $\tau=\mu_0$ является единственным максимумом на контуре интегрирования $\tau=\mu_0+it$, $t\in\mathbb{R}$, для вычисления асимптотики интеграла $J_{n,0}$ в доказательстве леммы 2.9. Поэтому $f''(\mu_0)>0$ и, значит,

$$-\frac{1}{2}\arg f''(\mu_0)\equiv 0\pmod{\pi\mathbb{Z}}.$$

Как легко заметить,

$$\arg g(\mu_1)=0,\qquad \operatorname{Im} f_0(\mu_1)=0.$$

Применяя теперь следствие 2.4 с $\lambda=0$ и $\tau_0=\mu_0$, получаем, что выполнено условие (2.57) и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|J_{n,0}|}{n}=\operatorname{Re} f_0(\mu_0)=f_0(\mu_0),$$

откуда согласно лемме 2.5 получаем предельное соотношение (2.60).

Лемма 2.10. *Пусть вещественный корень $\mu_1\in(2r+1,+\infty)$ многочлена* (2.21) *удовлетворяет неравенству*

$$\mu_1\leqslant 2r+1+\min\biggl\{\frac{br(r+1)}{2(a+b)},\frac{r(r+1)}{3(2r+1)}\biggr\}. \tag{2.61}$$

Тогда в области $\operatorname{Re}\tau>0$, $\operatorname{Im}\tau\geqslant 0$ на кривой (2.35) *функция $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ возрастает как функция от $\operatorname{Re}\tau$.*

Доказательство. Как было показано в доказательстве леммы 2.7 (см. также следствие 2.3), на гладкой кривой (2.35) в области $\operatorname{Re}\tau > 0$, $\operatorname{Im}\tau \geqslant 0$ величина $\rho = |\tau - (2r+1)|/2$, $\tau = x + iy$, может быть представлена как неявно заданная функция от x, $\mu_0 \leqslant x \leqslant \mu_1$, которая непрерывно дифференцируема и возрастает. Пользуясь формулами (2.29), (2.30), на кривой (2.35) после дифференцирования по x получаем

$$\begin{aligned}2\rho\rho'\biggl(\frac{b}{\rho^2+(2r+1)x}-\frac{b}{\rho^2}+\frac{a+b}{\rho^2+rx-r(r+1)}-\frac{a+b}{\rho^2+(r+1)x-r(r+1)}\biggr)\\+\biggl(\frac{b(2r+1)}{\rho^2+(2r+1)x}+\frac{(a+b)r}{\rho^2+rx-r(r+1)}-\frac{(a+b)(r+1)}{\rho^2+(r+1)x-r(r+1)}\biggr)=0\end{aligned}$$

или после несложных преобразований

$$2\rho\rho' x\biggl(\frac{b(2r+1)}{|\tau\pm(2r+1)|^2}-\frac{a+b}{|\tau\pm 1|^2}\biggr)=\frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau\pm(2r+1)|^2}+\frac{(a+b)(r(r+1)-\rho^2)}{|\tau\pm 1|^2}. \tag{2.62}$$

Таким образом, на кривой (2.35) функцию $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ можно рассматривать как функцию от x, $\mu_0 \leqslant x \leqslant \mu_1$; в соответствии с формулами (2.29)

$$\tilde{f}_0(x) := 2\operatorname{Re} f_0(\tau) = \log\frac{\rho^{2b(2r+1)}(\rho^2+(2r+1)x)^{b(2r+1)}}{(\rho^2+rx-r(r+1))^{a+b}(\rho^2+(r+1)x-r(r+1))^{a+b}},$$

откуда с помощью (2.29) и (2.62) находим

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0'(x) &= 2\rho\rho'\biggl(\frac{b(2r+1)}{\rho^2}+\frac{b(2r+1)}{\rho^2+(2r+1)x}\\&\qquad-\frac{a+b}{\rho^2+rx-r(r+1)}-\frac{a+b}{\rho^2+(r+1)x-r(r+1)}\biggr)\\&\qquad+\biggl(\frac{b(2r+1)^2}{\rho^2+(2r+1)x}-\frac{(a+b)r}{\rho^2+rx-r(r+1)}-\frac{(a+b)(r+1)}{\rho^2+(r+1)x-r(r+1)}\biggr)\\&=32\rho\rho'(2\rho^2+(2r+1)x)\biggl(\frac{b(2r+1)}{|\tau\pm(2r+1)|^2}-\frac{a+b}{|\tau\pm1|^2}\biggr)\\&\qquad+16(2r+1)\biggl(\frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau\pm(2r+1)|^2}+\frac{(a+b)(r(r+1)-\rho^2)}{|\tau\pm1|^2}\biggr)\\&\qquad+\frac{64\rho\rho'(a+b)r(r+1)}{|\tau\pm1|^2}-\frac{32(a+b)r(r+1)x}{|\tau\pm1|^2}\\&=\frac{32(\rho^2+(2r+1)x)}{x}\biggl(\frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau\pm(2r+1)|^2}+\frac{(a+b)(r(r+1)-\rho^2)}{|\tau\pm1|^2}\biggr)\\&\qquad+\frac{32(a+b)r(r+1)}{|\tau\pm1|^2}(2\rho\rho'-x).\end{aligned} \tag{2.63}$$

На кривой (2.35) функция $\rho=\rho(x)$ возрастает, так что $\rho'\geqslant 0$. Следовательно, продолжая цепочку (2.63), получаем

$$\begin{aligned}\tilde f_0'(x)&\geqslant\frac{32(\rho^2+(2r+1)x)}{x}\,\frac{b(2r+1)\rho^2}{|\tau\pm(2r+1)|^2}+32(2r+1)\frac{(a+b)(r(r+1)-\rho^2)}{|\tau\pm 1|^2}\\&\quad-\frac{32(a+b)r(r+1)x}{|\tau\pm1|^2}\\&=\frac{2b(2r+1)}{x}-\frac{2(a+b)((2r+1)\rho^2+r(r+1)x-r(r+1)(2r+1))}{(\rho^2+rx-r(r+1))(\rho^2+(r+1)x-r(r+1))}.\end{aligned}$$

Выберем

$$\varepsilon=\min\biggl\{\frac{br(r+1)}{2(a+b)},\frac{r(r+1)}{3(2r+1)}\biggr\};\tag{2.64}$$

по условию $\varepsilon\geqslant\mu_1-2r-1$. Согласно локализации кривой (2.35) (см. следствие 2.3) имеем

$$2r+1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 2r+1+\varepsilon,\qquad 0<\rho\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned}\tilde f_0'(x)&>\frac{2b(2r+1)}{2r+1+\varepsilon}-\frac{2(a+b)((2r+1)\varepsilon/4+r(r+1))\varepsilon}{r(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)}\\&>2(2r+1)\biggl(\frac{b}{2r+1+\varepsilon}-\frac{(a+b)(2r+1+\varepsilon)\varepsilon}{4r(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)}\biggr)\\&=2(2r+1)\cdot\frac{4br(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)-\varepsilon(a+b)(2r+1+\varepsilon)^2}{4r(r+1)(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)(2r+1+\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{2.65}$$

Пользуясь теперь неравенствами

$$\begin{aligned}br(r+1)&\geqslant\frac{\varepsilon}{2}(a+b),&&\text{если }\ \varepsilon\leqslant\frac{br(r+1)}{2(a+b)},\\8(r-\varepsilon)(r+1-\varepsilon)&>(2r+1+\varepsilon)^2,&&\text{если }\ \varepsilon\leqslant\frac{r(r+1)}{3(2r+1)},\end{aligned}$$

из (2.64), (2.65) окончательно заключаем, что $\tilde f_0'(x)>0$. Это означает, что функция $\operatorname{Re}f_0(\tau)$ как функция от $x=\operatorname{Re}\tau$ возрастает на кривой (2.35), что и требовалось доказать.

Предложение 2.3. *Пусть a,b,r – целые положительные числа, $a+b$ четно, $b\geqslant 3$, $a\geqslant 2rb$, и вещественный корень $\mu_1\in(2r+1,+\infty)$ многочлена* (2.21) *удовлетворяют условию* (2.61). *Положим*

$$\varkappa:=\log\frac{2^{2(a-2rb)}|\tau_0+2r+1|^{b(2r+1)}|-\tau_0+2r+1|^{b(2r+1)}}{|\tau_0+1|^{a+b}|\tau_0-1|^{a+b}},$$

где τ_0 – комплексный корень многочлена (2.21) *в области $\operatorname{Re}\tau>0$, $\operatorname{Im}\tau>0$ с максимально возможной частью $\operatorname{Re}\tau_0$. Пусть, кроме того, выполнено условие* (2.55). *Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|I_n|}{n}=\varkappa.\tag{2.66}$$

Доказательство. Согласно (2.61) имеем $\mu_1 - (2r+1) < r/3$, так что условия (2.37), (2.46) выполнены. По лемме 2.10 наибольшее значение функции $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ на корнях многочлена (2.21) достигается при $\tau = \tau_0$, для которого $\lambda = k = b-2$. Согласно следствию 2.4 асимптотика интеграла (2.20) определяется вкладом величины $\operatorname{Re} J_{n,b-2}$, так как вклады остальных величин экспоненциально малы по сравнению с $\operatorname{Re} J_{n,b-2}$, а коэффициент c_{b-2} в представлении (2.20) ненулевой в соответствии с утверждением б) леммы 2.2. Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|\tilde{I}_n|}{n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|\operatorname{Re} J_{n,b-2}|}{n} = \varkappa.$$

Применяя теперь лемму 2.5, получаем требуемое предельное соотношение (2.66).

§ 3. Оценки коэффициентов линейных форм

Первым результатом будет верхняя оценка для коэффициентов линейных форм.

Предложение 3.1. *Пусть a, b, r – целые положительные числа, $a+b$ четно, $a \geqslant 2rb$, линейные формы* (1.5) *определяются соотношениями* (1.2), (1.1). *Тогда для коэффициентов $\bar{A}_s$, $s=0$ или $s=b+1,\dots,a+b-1$, справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|\bar{A}_s|}{n} \leqslant 2b(2r+1)\log(2r+1) + 2(a-2rb)\log 2,\\ s=0 \text{ или } s=b+1,\dots,a+b-1 \text{ нечетно.}\end{gathered} \tag{3.1}$$

Более того, в случае четного a оценка (3.1) *точна*:

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \frac{\log|\bar{A}_s|}{n} = 2b(2r+1)\log(2r+1) + 2(a-2rb)\log 2,\\ s=b+1,\dots,a+b-1 \text{ нечетно.}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Доказательство. Воспользуемся разложением (1.6), в котором коэффициенты могут быть вычислены с помощью формул

$$A_{k,j} = \frac{1}{(a-j)!}\,\frac{\mathrm{d}^{a-j}}{\mathrm{d}t^{a-j}}\bigl(R(t)(t+k)^a\bigr)\bigg|_{t=-k}, \qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n, \quad j=1,2,\dots,a.$$

Прежде всего докажем, что

$$\max_{k=0,\pm1,\dots,\pm n} |A_{k,a}| = |A_{0,a}| = \frac{((2r+1)n)!^{2b}(2n)!^{a-2rb}}{n!^{2(a+b)}}. \tag{3.3}$$

Поскольку $|A_{k,a}| = |A_{-k,a}|$ для $k=0,1,\dots,n$, достаточно показать, что величина $|A_{k,a}|$ убывает с ростом k от 0 до n. Последнее утверждение проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned}\frac{|A_{k,a}|}{|A_{k-1,a}|} &= \frac{((2r+1)n+k)^b}{((2r+1)n-k+1)^b}\cdot\frac{(n-k+1)^{a+b}}{(n+k)^{a+b}}\\ &= \left(\frac{((2r+1)n+k)\cdot(n-k+1)}{((2r+1)n-k+1)\cdot(n+k)}\right)^b\cdot\left(\frac{n-k+1}{n+k}\right)^{a+b}\\ &= \left(\frac{(2r+1)n^2-k(k-1)+n(-2rk+2r+1)}{(2r+1)n^2-k(k-1)+n(2rk+1)}\right)^b\cdot\left(\frac{n-(k-1)}{n+k}\right)^{a+b}\\ &< 1, \qquad k=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Зафиксируем теперь целое k, $|k| \leqslant n$, и обозначим через $g_k(t)$ логарифмическую производную функции $R(t)(t+k)^a$:

$$g_k(t) = b \sum_{\substack{l=-(2r+1)n \\ l \ne k}}^{(2r+1)n} \frac{1}{t+l} - (a+b) \sum_{\substack{l=-n \\ l \ne k}}^{n} \frac{1}{t+l}.$$

Тогда для $j = 0, 1, 2, \dots$ модуль величины

$$\frac{1}{j!} \frac{\mathrm{d}^j g_k(t)}{\mathrm{d}t^j}\bigg|_{t=-k} = b \sum_{l=-(2r+1)n}^{-(n+1)} \frac{(-1)^j}{(l-k)^{j+1}} + b \sum_{l=n+1}^{(2r+1)n} \frac{(-1)^j}{(l-k)^{j+1}} - a \sum_{\substack{l=-n \\ l \ne k}}^{n} \frac{(-1)^j}{(l-k)^{j+1}}$$

ограничен сверху числом $2(2rb+a)n$ (каждое слагаемое в правой части тривиально оцениваем единицей). Применяя правило Лейбница для дифференцирования произведения, находим

$$\begin{aligned} A_{k,a-j} &= \frac{1}{j!} \frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}t^{j-1}} \bigl(g_k(t) \cdot R(t)(t+k)^a\bigr)\bigg|_{t=-k} \\ &= \frac{1}{j} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{1}{(j-1-m)!} \frac{\mathrm{d}^{j-1-m} g_k(t)}{\mathrm{d}t^{j-1-m}}\bigg|_{t=-k} \cdot A_{k,a-m}, \qquad j = 1, \dots, a-1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

откуда

$$\begin{aligned} |A_{k,a-j}| &\leqslant 2(2rb+a)n \cdot \frac{1}{j} \sum_{m=0}^{j-1} |A_{k,a-m}| \\ &\leqslant 2(2rb+a)n \cdot \max_{m=0,1,\dots,j-1} |A_{k,a-m}|, \qquad j = 1, \dots, a-1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Пользуясь методом математической индукции, из (3.5) получаем оценку

$$|A_{k,a-j}| \leqslant \bigl(2(2rb+a)n\bigr)^{j-1} |A_{k,a}|, \qquad j = 1, \dots, a.$$

Следовательно, в соответствии с (3.3) выполнено

$$|A_{k,a-j}| \leqslant \bigl(2(2rb+a)n\bigr)^{a-1} \frac{((2r+1)n)!^{2b} (2n)!^{a-2rb}}{n!^{2(a+b)}}, \\ k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad j = 1, \dots, a,$$

откуда согласно (1.11), (1.12)

$$|\bar{A}_s| \leqslant 2^{a+b-2} (2n+1)^2 \bigl(2(2rb+a)n\bigr)^{a-1} \frac{((2r+1)n)!^{2b} (2n)!^{a-2rb}}{n!^{2(a+b)}}, \\ s = 0 \text{ или } s = b+1, \dots, a+b-1. \tag{3.6}$$

Предельные соотношения (3.1) получаются из (3.6) с помощью формулы Стирлинга (2.17) для значений $\Gamma(z)=(z-1)!$ при целых положительных значениях $z\to\infty$.

Если параметр a является четным числом, то для четных j, $0\leqslant j<a$, из соотношений (3.4) при $k=0$ получаем $|A_{0,a-j}|\geqslant|A_{0,a}|$; кроме того, в случае четного a и нечетного s, $b<s<a+b$, все слагаемые в правой части (1.11) имеют одинаковый знак, значит,

$$|\bar{A}_s|\geqslant|A_{0,a}|,\qquad s=b+1,\dots,a+b-1\ \text{нечетно}.$$

Таким образом, при четном a применение формулы Стирлинга дает оценку асимптотики коэффициентов линейных форм (1.5) не только сверху, но и снизу. Это доказывает предельные соотношения (3.2) и завершает доказательство предложения.

Оценка (3.1) оказывается пригодной даже для нечетных значений параметра a. Однако результаты, полученные в § 2, позволяют вычислить асимптотику коэффициентов (1.11) и для нечетного a; именно этому и посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

Для целого положительного m в окрестности точки $t=0$ справедливо разложение

$$\left(\frac{\sin\pi t}{\pi}\right)^{2m}=\sum_{l=m}^{\infty}d_l^{(m)}t^{2l},\tag{3.7}$$

где $d_l^{(m)}$, $l=m,m+1,\dots,$ – некоторые вещественные числа, причем $d_m^{(m)}=1$.

Лемма 3.1. *Пусть a нечетно. Тогда коэффициенты линейной формы* (1.5) *удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned}\bar{A}_{2m+b}=&-\frac{(2m+b-1)!}{(2m)!\,(b-1)!}\,\frac{(-1)^b}{\pi i}\int_{iM-\infty}^{iM+\infty}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi}\right)^{2m}R(t)\,\mathrm{d}t\\&-\sum_{l=m+1}^{(a-1)/2}\frac{(2l)!\,(2m+b-1)!}{(2m)!\,(2l+b-1)!}d_l^{(m)}\bar{A}_{2l+b},\qquad m=1,2,\dots,\frac{a-1}{2},\end{aligned}\tag{3.8}$$

где $M>0$ – произвольная вещественная постоянная.

Доказательство. Для целого положительного m согласно (3.7)

$$\left(\frac{\sin\pi t}{\pi}\right)^{2m}=\left(\frac{\sin\pi(t+k)}{\pi}\right)^{2m}=\sum_{l=m}^{\infty}d_l^{(m)}(t+k)^{2l}$$

– разложение в окрестности точки $t=-k\in\mathbb{Z}$.

Для функции (1.1) ввиду (1.6) в окрестности точки $t=-k$, где $k=0,\pm1,\dots,\pm n$, имеем

$$R(t)=\frac{A_{k,a}}{(t+k)^a}+\frac{A_{k,a-1}}{(t+k)^{a-1}}+\dots+\frac{A_{k,1}}{t+k}+O(1)$$

и $R(t)=O(1)$ в окрестности $t=-k\in\mathbb{Z}$, $|k|>n$. Следовательно, для $m<a/2$ и любого целого k выполнено

$$\operatorname*{Res}_{t=-k}\biggl(\biggl(\frac{\sin\pi t}{\pi}\biggr)^{2m}R(t)\biggr)=\begin{cases}0, & \text{если } |k|>n,\\ \displaystyle\sum_{l=m}^{(a-1)/2}d_l^{(m)}A_{k,2l+1}, & \text{если } |k|\leqslant n.\end{cases}$$

Поэтому если замкнутый контур $\mathscr{L}$ обходит в положительном направлении точки $0,\pm1,\dots,\pm n$, то

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}}\biggl(\frac{\sin\pi t}{\pi}\biggr)^{2m}R(t)\,\mathrm{d}t&=(-1)^{b-1}\sum_{l=m}^{(a-1)/2}\frac{(2l)!\,(b-1)!}{(2l+b-1)!}d_l^{(m)}\bar{A}_{2l+b}\\&=(-1)^{b-1}\biggl(\frac{(2m)!\,(b-1)!}{(2m+b-1)!}\bar{A}_{2m+b}+\sum_{l=m+1}^{(a-1)/2}\frac{(2l)!\,(b-1)!}{(2l+b-1)!}d_l^{(m)}\bar{A}_{2l+b}\biggr)\end{aligned}\tag{3.9}$$

в соответствии с формулами (1.11) и соотношением $d_m^{(m)}=1$. Из (3.9) получаем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned}\bar{A}_{2m+b}=\frac{(2m+b-1)!}{(2m)!\,(b-1)!}\,&\frac{(-1)^b}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}}\biggl(\frac{\sin\pi t}{\pi}\biggr)^{2m}R(t)\,\mathrm{d}t\\&-\sum_{l=m+1}^{(a-1)/2}\frac{(2l)!\,(2m+b-1)!}{(2m)!\,(2l+b-1)!}d_l^{(m)}\bar{A}_{2l+b},\qquad m=1,2,\dots,\frac{a-1}{2}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

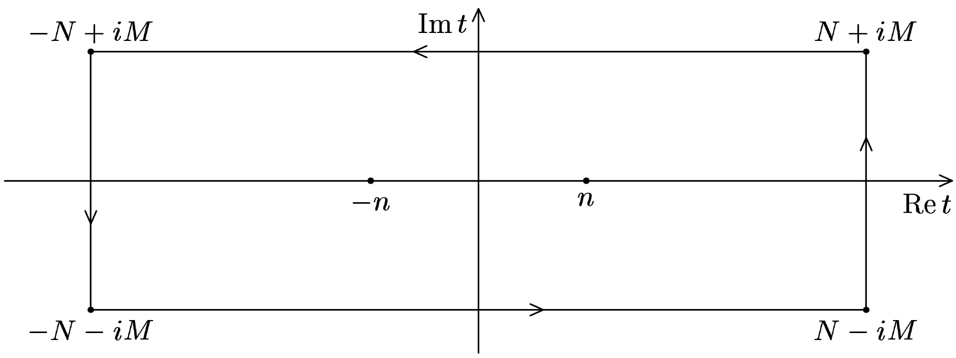

Рис. 8

Выберем теперь в качестве контура интегрирования $\mathscr{L}$ прямоугольник с вершинами $\pm N\pm iM$, где $M>0$ – фиксированная вещественная постоянная, а $N>n$ достаточно велико (см. рис. 8). При $N\to\infty$ на боковых сторонах прямоугольника выполнены оценки

$$\left|\frac{\sin\pi t}{\pi}\right|\leqslant\frac{e^{\pi M}}{\pi},\qquad R(t)=O(N^{-2}),$$

поэтому для $m = 1, 2, \dots, (a-1)/2$ имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{L}}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right)^{2m} R(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{iM+N}^{iM-N} + \int_{-iM-N}^{-iM+N}\right)\left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right)^{2m} R(t)\,\mathrm{d}t + O(N^{-1}) \qquad \text{при } N \to \infty, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где постоянная в $O(N^{-1})$ зависит только от M. Ввиду нечетности подынтегральной функции в (3.11) (см. (1.8)) и симметричности контура $\mathscr{L}$ относительно 0 достаточно провести интегрирование по одной половине контура, а затем удвоить полученный результат. Переходя теперь к пределу при $N \to \infty$, из соотношений (3.10) получаем требуемые рекуррентные формулы (3.8). Лемма доказана.

Как следует из леммы 3.1, асимптотическое поведение коэффициентов линейной формы (1.5) напрямую связано с асимптотикой интегралов

$$\begin{aligned} K_{n,m} &= \frac{1}{\pi i}\int_{iM-\infty}^{iM+\infty}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right)^{2m} R_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(-1)^{bn}}{\pi i}\int_{iM-\infty}^{iM+\infty}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right)^{2m+b} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\pm t + (2r+1)n+1)^b \Gamma(t-n)^{a+b}(2n)!^{a-2rb}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}}\,\mathrm{d}t, \qquad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

при $n \to \infty$, где мы воспользовались формулой (2.15). Так же, как и в § 2, считаем, что в t-плоскости сделаны разрезы $(-\infty, n]$ и $[(2r+1)n, +\infty)$.

Лемма 3.2 (ср. с [23, § 6.5]). *Для любого $y_0 > 0$ в области $\operatorname{Im} z \geqslant y_0$ выполнено асимптотическое равенство*

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + O\bigl(|z|^{-1}\bigr) + O\bigl(e^{-2\pi \operatorname{Im} z}\bigr). \tag{3.13}$$

Доказательство. Асимптотическое соотношение (2.17) справедливо в области $|\arg z| < \pi - \varepsilon$, но тождество

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\,\sin \pi z} = \frac{2\pi i}{z e^{-\pi i z}(1 - e^{2\pi i z})} \tag{3.14}$$

позволяет выписать асимптотику и в квадранте $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$. Делая в z-плоскости разрез $(-\infty, 0]$ и фиксируя главные значения аргумента, согласно (2.17), (3.14) в указанном квадранте имеем

$$\begin{aligned} \log\Gamma(z) &= \log(2\pi i) - \log z + \pi i z - \log(1 - e^{2\pi i z}) - \log\Gamma(-z) \\ &= \left(\log(2\pi) + \pi i\left(z + \frac{1}{2}\right) - \log z - \log(1 - e^{2\pi i z})\right) \\ &\quad - \left(\left(-z - \frac{1}{2}\right)(\log z - \pi i) + z + \log\sqrt{2\pi} + O\bigl(|z|^{-1}\bigr)\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + O\bigl(|z|^{-1}\bigr) + \log(1 - e^{2\pi i z}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Остается заметить, что в области $\operatorname{Im} z \geqslant y_0$ выполнено $|e^{-2\pi iz}| \leqslant u_0 := e^{-2\pi y_0} < 1$, так что для завершения доказательства формулы (3.13) остается воспользоваться в (3.15) соотношением $|\ln(1-u)| \leqslant C|u|$ для $|u| \leqslant u_0$ с некоторой постоянной C, зависящей только от u_0.

Лемма 3.3. *Пусть μ – положительная вещественная постоянная. Тогда при $n \to \infty$ для интегралов* (3.12) *выполнено*

$$K_{n,m} = \tilde{K}_{n,m} \cdot \frac{(-1)^{bn}(2\sqrt{\pi n}\,)^{a-2rb}2^b}{\pi^{2m}n^{a-1}} \cdot \bigl(1 + O(n^{-1}) + O(e^{-2\pi n\mu})\bigr),$$

где

$$\tilde{K}_{n,m} = \frac{1}{\pi i}\int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} \sin^{2m+b}\pi n\tau \cdot e^{nf(\tau)}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \tag{3.16}$$

а функции $f(\tau), g(\tau)$ определены равенствами (2.12), (2.13) (*см. также замечание* 2.1).

Доказательство. Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 2.5 с заменой асимптотики (2.17) на (3.13) для интегрирования по контуру $\operatorname{Im} t = M = \mu n$, $\mu > 0$.

Лемма 3.4. *Пусть вещественный корень $\mu_1 \in (2r+1, +\infty)$ многочлена* (2.21) *удовлетворяет условию* (2.61), *а минимальный по абсолютной величине мнимый корень $\eta_1 \in (0, +i\infty)$ – условию*

$$|\eta_1| < \min\biggl\{\sqrt{3}, \frac{\log(r^2+r)}{\pi}\biggr\}. \tag{3.17}$$

Тогда при $n \to \infty$ для интегралов (3.16) *выполнено*

$$\begin{aligned} |\tilde{K}_{n,(a-1)/2}| &= \frac{|g(\eta_1)|}{|f''(\eta_1)|^{1/2}2^{a+b-1/2}\pi^{1/2}n^{1/2}}e^{n\operatorname{Re} f_0(\eta_1)}\bigl(1 + O(n^{-1})\bigr), \\ |\tilde{K}_{n,m}| &= |\tilde{K}_{n,(a-1)/2}| \cdot O(e^{-2\pi n\mu}), \qquad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2} - 1, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где постоянная μ определена равенством $i\mu = \eta_1$.

Доказательство. Согласно лемме 2.7 корню $i\mu = \eta_1$ многочлена (2.21) отвечает $\lambda = a + b - 1$ в уравнении (2.22).

Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \sin^{2m+b}\pi n\tau &= \biggl(\frac{e^{\pi in\tau} - e^{-\pi in\tau}}{2i}\biggr)^{2m+b} \\ &= \chi_m \frac{(-1)^{(a+b)/2}}{2^{a+b-1}i}e^{-\pi i(a+b-1)n\tau} + \sum_{l=1}^{a+b-1} h_{m,l}ie^{-\pi i(a+b-2l-1)n\tau}, \\ &\qquad m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \end{aligned}$$

где

$$\chi_m = \begin{cases} 1, & \text{если}\, m = \dfrac{a-1}{2}, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

а $h_{m,l}$, $m = 1, \dots, (a-1)/2$, $l = 1, \dots, a+b-1$, – некоторые вещественные коэффициенты, и запишем интегралы (3.16) в виде

$$\begin{gathered} \tilde{K}_{n,m} = -\chi_m \frac{(-1)^{(a+b)/2}}{2^{a+b-1}\pi} J_{n,a+b-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{a+b-1} h_{m,l} J_{n,a+b-2l-1}, \\ m = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \end{gathered} \tag{3.19}$$

где

$$J_{n,k} = \int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} e^{n(f(\tau)-k\pi i\tau)} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad k = 0, \pm 1, \dots, \pm(a+b-1). \tag{3.20}$$

Изучим сначала асимптотику интеграла $J_{n,a+b-1}$. Для этого заметим, что путь интегрирования проходит через точку перевала $\eta_1 = i\mu$, и докажем, что точка $x = 0$ является максимумом функции

$$\tilde{f}(x) = \operatorname{Re}(f(\tau) - (a+b-1)\pi i\tau)\big|_{\tau = x+i\mu}. \tag{3.21}$$

Имеем

$$\tilde{f}'(x) = \operatorname{Re}(f'(\tau) - (a+b-1)\pi i)\big|_{\tau = x+i\mu} = \operatorname{Re} f'(x+i\mu)$$

и, значит, единственными кандидатами в точки максимума функции (3.21), кроме $x = 0$, являются $x = \pm x_0$, где $x_0 + i\mu$ – та точка пересечения луча $\tau = x + i\mu$, $x > 0$, с кривой $\operatorname{Re} f'(\tau) = 0$ в области $\operatorname{Re}\tau > 0$ (см. рис. 4), в которой $\operatorname{Re} f'(\tau)$ меняет знак с $+$ на $-$ (если таковая существует). С другой стороны,

$$f(\tau) - (a+b-1)\pi i\tau = f_0(\tau) + f'(\tau)\tau - (a+b-1)\pi i\tau$$

для функции $f_0(\tau)$, определенной в (2.48); поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\pm x_0) = \tilde{f}(x_0) &= \operatorname{Re} f_0(x_0 + i\mu) - \mu \operatorname{Im} f'(x_0 + i\mu) + (a+b-1)\pi\mu \\ &< \operatorname{Re} f_0(\mu_1) + (a+b-1)\pi\mu \end{aligned} \tag{3.22}$$

согласно лемме 2.10 и неравенству $\operatorname{Im} f'(x_0 + i\mu) > 0$. Для оценки сверху величины $\operatorname{Re} f_0(\mu_1)$ воспользуемся неравенством

$$2r + 1 < \mu_1 \leqslant 2r + 1 + 2\varepsilon, \qquad \varepsilon := \frac{r(r+1)}{6(2r+1)}, \tag{3.23}$$

вытекающим из (2.61). Тогда

$$\operatorname{Re} f_0(\mu_1) < b(2r+1)\log((2r+1+\varepsilon)\varepsilon) - (a+b)\log((r+1)r) < -(a-2rb)\log(r^2+r),$$

поскольку $(2r+1+\varepsilon)\varepsilon < r(r+1)$ согласно (3.23). Продолжая оценку (3.22) и пользуясь неравенством (3.17), получим

$$\begin{aligned}\tilde f(\pm x_0) &< -(a-2rb)\log(r^2+r)+(a+b)\pi\mu\\ &\leqslant -(a-2rb)\log(r^2+r)+(a+b)\log(r^2+r)\\ &= b(2r+1)\log(r^2+r).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Теперь, чтобы оценить значение $\tilde f(0)$ снизу, применим неравенства

$$|i\mu\pm(2r+1)|>2r+1, \qquad |i\mu\pm1|\leqslant|i\sqrt3\pm1|=2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\tilde f(0)=\operatorname{Re}f_0(i\mu)&>2(a-2rb)\log2+2b(2r+1)\log(2r+1)-2(a+b)\log2\\ &=2b(2r+1)\log\biggl(r+\frac12\biggr)>b(2r+1)\log(r^2+r).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Сравнивая оценки (3.24), (3.25), получаем, что $\tilde f(0)>\tilde f(\pm x_0)$, так что точка перевала $\tau=i\mu$ действительно является максимумом функции $\operatorname{Re}(f(\tau)-(a+b-1)\pi i\tau)$ на контуре $\operatorname{Im}\tau=\mu$. Поэтому интеграл $J_{n,a+b-1}$ равен вкладу точки перевала $i\mu=\eta_1$:

$$\begin{aligned}J_{n,a+b-1}&=\frac{(2\pi)^{1/2}g(\eta_1)}{|f''(\eta_1)|^{1/2}n^{1/2}}e^{n\operatorname{Re}(f(\eta_1)-(a+b-1)\pi i\eta_1)}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr)\\ &=\frac{(2\pi)^{1/2}g(\eta_1)}{|f''(\eta_1)|^{1/2}n^{1/2}}e^{n\operatorname{Re}f_0(\eta_1)}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr),\end{aligned}\tag{3.26}$$

и аналогичная оценка справедлива для интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty}|e^{n(f(\tau)-(a+b-1)\pi i\tau)}g(\tau)|\,\mathrm d\tau=\frac{(2\pi)^{1/2}|g(\eta_1)|}{|f''(\eta_1)|^{1/2}n^{1/2}}e^{n\operatorname{Re}f_0(\eta_1)}\bigl(1+O(n^{-1})\bigr).\tag{3.27}$$

Для интегралов (3.20) с $k<a+b-1$ воспользуемся на контуре $\operatorname{Im}\tau=\mu$ соотношением

$$|e^{n(f(\tau)-k\pi i\tau)}g(\tau)|=|e^{n(f(\tau)-(a+b-1)\pi i\tau)}g(\tau)|\cdot e^{-(a+b-1-k)n\mu},$$

откуда в соответствии с (3.27), (3.26)

$$|J_{n,k}|\leqslant Ce^{-(a+b-1-k)n\mu}|J_{n,a+b-1}|, \qquad k=0,\pm1,\dots,\pm(a+b-1),\tag{3.28}$$

с некоторой постоянной $C>0$, не зависящей от n,k. (Неравенство (3.28) получается при интегрировании вдоль конечного отрезка, скажем $[i\mu-1,i\mu+1]$, поскольку вклад интеграла по оставшейся бесконечной части экспоненциально мал по сравнению с вкладом точки $i\mu$.) Подставляя теперь полученные оценки (3.26), (3.28) в равенства (3.19), получаем (3.18). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть a,b,r – целые положительные числа, a,b нечетны, $a>2rb$, и вещественный корень $\mu_1\in(2r+1,+\infty)$ многочлена* (2.21) *удовлетворяет условию* (2.61), *а минимальный по абсолютной величине мнимый корень $\eta_1\in(0,+i\infty)$ – условию* (3.17). *Тогда для коэффициентов $\bar{A}_s$ линейных форм* (1.5) *справедлива асимптотическая формула*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|\bar{A}_s|}{n}\leqslant\log\frac{2^{2(a-2rb)}|\eta_1+2r+1|^{b(2r+1)}|-\eta_1+2r+1|^{b(2r+1)}}{|\eta_1+1|^{a+b}|\eta_1-1|^{a+b}},\tag{3.29}$$

где $s=0$ или $s=b+1,\dots,a+b-1$ нечетно, причем в случае $s=a+b-1$ верхний предел можно заменить на обычный и неравенство – на равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|\bar{A}_{a+b-1}|}{n}=\operatorname{Re}f_0(\eta_1)$$

вытекает из формулы (3.8) при $m=(a-1)/2$, лемм 3.3 и 3.4. Для остальных нечетных s, $b<s<a+b-1$, оценки (3.29) следуют из лемм 3.1, 3.3, 3.4. В случае $s=0$ согласно (1.5) имеем

$$|\bar{A}_0|\leqslant|I|+\sum_{\substack{s\ \text{нечетно}\\ b<s<a+b}}|\bar{A}_s|\zeta(s),$$

откуда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|\bar{A}_0|}{n}\leqslant\max\{\operatorname{Re}f_0(\tau_0),\operatorname{Re}f_0(\eta_1)\},\tag{3.30}$$

где корень τ_0 многочлена (2.21) определен в предложении 2.3. По лемме 2.10 выполнено $\operatorname{Re}f_0(\tau_0)<\operatorname{Re}f_0(\mu_1)$, а неравенство $\operatorname{Re}f_0(\mu_1)<\operatorname{Re}f_0(\eta_1)$ (и даже более сильное) было доказано в лемме 3.4. Поэтому максимум в правой части (3.30) равен $\operatorname{Re}f_0(\eta_1)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оценки (3.29) столь незначительно улучшают оценки (3.1), что в приложениях к доказательству теорем 0.3, 0.4 мы их не используем. Однако тот факт, что асимптотика как линейных форм, так и их коэффициентов определяется значениями одной и той же функции $\operatorname{Re}f_0(\tau)$ на разных корнях одного и того же многочлена (2.21), является ожидаемым и отражает естественную природу вещей. (В случае четного a асимптотика коэффициентов линейных форм (1.5) определяется корнем $\eta_0=0$ многочлена (2.21) согласно предложению 3.1.)

§ 4. Уточненные оценки знаменателей линейных форм

Асимптотика знаменателей линейных форм (1.2) при $n\to\infty$, полученная в лемме 1.4, грубовата, хотя ее хватает для доказательства теоремы Ривоаля. Уточнение знаменателей опирается на следующее обобщение леммы 1.2.

ЛЕММА 4.1. *Пусть для некоторого многочлена $P(t)$, $\deg P(t)<m(n+1)$, рациональная функция*

$$R(t)=\frac{P(t)}{\bigl((t+s)(t+s+1)\cdots(t+s+n)\bigr)^m}$$

(в не обязательно несократимом представлении) удовлетворяет условиям

$$\frac{D_n^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\big(R(t)(t+k)^m\big)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=s,s+1,\dots,s+n,\quad j=0,1,\dots,m-1, \tag{4.1}$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1,2,\dots,n$. Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\frac{D_n^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\big(R(t)(t+k)^m\big)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=s,s+1,\dots,s+n. \tag{4.2}$$

Доказательство. Для целых $j=0,1,\dots,m-1$ включения (4.2) вытекают непосредственно из (4.1). Поэтому далее рассматриваем целое $j\geqslant m$.

Разложение рациональной функции $R(t)$ на простейшие дроби имеет вид

$$R(t)=\sum_{l=s}^{s+n}\biggl(\frac{B_{l,0}}{(t+l)^m}+\frac{B_{l,1}}{(t+l)^{m-1}}+\dots+\frac{B_{l,m-2}}{(t+l)^2}+\frac{B_{l,m-1}}{t+l}\biggr), \tag{4.3}$$

где

$$B_{k,j}=\frac{1}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\big(R(t)(t+k)^m\big)\bigg|_{t=-k},\qquad k=s,s+1,\dots,s+n,\quad j=0,1,\dots,m-1.$$

Согласно линейности операции дифференцирования, представлению (4.3) и включениям (4.1) достаточно показать, что

$$\frac{D_n^{j-q}}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\biggl((t+k)^m\frac{1}{(t+l)^{m-q}}\biggr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad q=0,1,\dots,m-1,\quad k,l=0,\pm1,\dots,\pm n. \tag{4.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned}(t+k)^m\frac{1}{(t+l)^{m-q}}&=\frac{((t+l)-(l-k))^m}{(t+l)^{m-q}}=\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\binom{m}{p}\frac{(t+l)^{m-p}(l-k)^p}{(t+l)^{m-q}}\\&=\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\binom{m}{p}(l-k)^p(t+l)^{q-p},\end{aligned}$$

$$q=0,1,\dots,m-1,\quad k,l=0,\pm1,\dots,\pm n,$$

откуда для целого $j\geqslant m$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\biggl((t+k)^m\frac{1}{(t+l)^{m-q}}\biggr)\bigg|_{t=-k}\\&\quad=\biggl(\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\binom{m}{p}\frac{(q-p)(q-p-1)\cdots(q-p-j+1)}{j!}\\&\qquad\times(l-k)^p(t+l)^{q-p-j}\biggr)\bigg|_{t=-k}\\&\quad=\frac{1}{(l-k)^{j-q}}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{p+j}\binom{m}{p}\frac{(p-q)_j}{j!}\end{aligned} \tag{4.5}$$

в случае $l \ne k$ и

$$\frac{1}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\biggl((t+k)^m\frac{1}{(t+l)^{m-q}}\biggr)=0$$

в случае $l=k$. Поскольку

$$\frac{D_n^{j-q}}{(l-k)^{j-q}}\in\mathbb{Z}\quad\text{ и }\quad\binom{m}{p}\frac{(p-q)_j}{j!}\in\mathbb{Z},$$
$$q=0,1,\dots,m-1,\quad p=0,1,\dots,m,\quad k,l=0,\pm1,\dots,\pm n,\ k\ne l,$$

из соотношений (4.5) вытекают включения (4.4). Лемма доказана.

Следующее утверждение, предваряющее изложение общего случая, усиливает включения (1.17).

Лемма 4.2. *Обозначим через $\mathscr{E}=\mathscr{E}_{n,m}$ множество простых чисел, делящих каждое из чисел*

$$B_{k,0}=\bigl(F(t)(t+k)^2\bigr)\big|_{t=-k}=\frac{(m+2n\pm k)!}{(m\pm k)!\,(n\pm k)!^2},\qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n,$$

где функция $F(t)$ определена в (1.15). *Положим*

$$\Pi=\Pi_{n,m}=\prod_{\substack{p\in\mathscr{E}\\ \sqrt{m+3n}<p\leqslant 2n}}p. \tag{4.6}$$

Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\Pi^{-1}\frac{D_{2n}^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(F(t)(t+k)^2\bigr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n. \tag{4.7}$$

Доказательство. Тот факт, что $\Pi^{-1}B_{k,0}\in\mathbb{Z}$, $k=0,\pm1,\dots,\pm n$ (включения (4.7) при $j=0$), следует из определения множества $\mathscr{E}$ и числа Π. Проверим включения (4.7) при $j=1$. Имеем

$$\begin{aligned}B_{k,1}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(F(t)(t+k)^2\bigr)\bigg|_{t=-k}\\ &=B_{k,0}\Biggl(\sum_{l=m+1}^{m+2n}\biggl(\frac{1}{t+l}+\frac{1}{t-l}\biggr)-2\sum_{\substack{l=-n\\ l\ne k}}^{n}\frac{1}{t+l}\Biggr)\Bigg|_{t=-k}\\ &=B_{k,0}\Biggl(\sum_{l=m+1}^{m+2n}\biggl(\frac{1}{l-k}-\frac{1}{l+k}\biggr)-2\sum_{\substack{l=-n\\ l\ne k}}^{n}\frac{1}{l-k}\Biggr),\qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Согласно лемме 1.3 выполнено $D_{2n}B_{k,1}\in\mathbb{Z}$, $k=0,\pm1,\dots,\pm n$, так что для p, взаимно простых с Π, имеем

$$\operatorname{ord}_p(\Pi^{-1}D_{2n}B_{k,1})=\operatorname{ord}_p(D_{2n}B_{k,1})\geqslant 0. \tag{4.9}$$

Пусть теперь простое p делит Π и, значит,

$$\operatorname{ord}_p \Pi = 1. \tag{4.10}$$

Для $p > \sqrt{m+3n}$ имеем $\operatorname{ord}_p(l \pm k) \leqslant 1$, где $(l \pm k)$ – любой из знаменателей в (4.8); поэтому

$$\operatorname{ord}_p\Biggl(\sum_{l=m+1}^{m+2n}\biggl(\frac{1}{l-k}-\frac{1}{l+k}\biggr) - 2\sum_{\substack{l=-n\\ l\ne k}}^{n}\frac{1}{l-k}\Biggr) \geqslant -1, \qquad k = 0, \pm1, \dots, \pm n. \tag{4.11}$$

Для $p \leqslant 2n$ выполнено

$$\operatorname{ord}_p D_{2n} \geqslant 1; \tag{4.12}$$

наконец, для $p \in \mathscr{E}$

$$\operatorname{ord}_p B_{k,0} \geqslant 1, \qquad k = 0, \pm1, \dots, \pm n. \tag{4.13}$$

Собирая оценки (4.10)–(4.13), с учетом (4.8) в случае p, делящего Π, получаем

$$\operatorname{ord}_p(\Pi^{-1} D_{2n} B_{k,1}) \geqslant 0. \tag{4.14}$$

Согласно (4.9) и (4.14) выполнено $\Pi^{-1} D_{2n} B_{k,1} \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \pm1, \dots, \pm n$, что доказывает включения (4.7) при $j = 1$. В случае $j \geqslant 2$ остается воспользоваться леммой 4.1 с $m = 2$.

Отметим, что в условиях леммы 4.2 для любого простого $p > \sqrt{m+3n}$ имеем

$$\operatorname{ord}_p B_{k,0} = \biggl\lfloor \frac{m+2n}{p} \pm \frac{k}{p} \biggr\rfloor - \biggl\lfloor \frac{m}{p} \pm \frac{k}{p} \biggr\rfloor - 2\biggl\lfloor \frac{n}{p} \pm \frac{k}{p} \biggr\rfloor, \qquad k = 0, \pm1, \dots, \pm n, \tag{4.15}$$

поскольку

$$\operatorname{ord}_p q! = \biggl\lfloor \frac{q}{p} \biggr\rfloor + \biggl\lfloor \frac{q}{p^2} \biggr\rfloor + \biggl\lfloor \frac{q}{p^3} \biggr\rfloor + \dotsb, \qquad q = 1, 2, \dots, \tag{4.16}$$

где $\lfloor\,\cdot\,\rfloor$ обозначает целую часть числа. Формулы (4.15) позволяют вычислять асимптотику множителя (4.6) при $n, m \to \infty$, так как

$$\{p \in \mathscr{E} : p > \sqrt{m+3n}\,\} = \Bigl\{p > \sqrt{m+3n} : \min_{k=0,\pm1,\dots,\pm n}\{\operatorname{ord}_p B_{k,0}\} \geqslant 1\Bigr\}. \tag{4.17}$$

В качестве примера рассмотрим самую простую версию функции (1.15) при $m = n$.

Лемма 4.3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\varpi_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \Pi_{n,n}}{n} = \psi\biggl(\frac12\biggr) - \psi\biggl(\frac13\biggr) + \psi(1) - \psi\biggl(\frac56\biggr) - 1 \approx 0.4820, \tag{4.18}$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

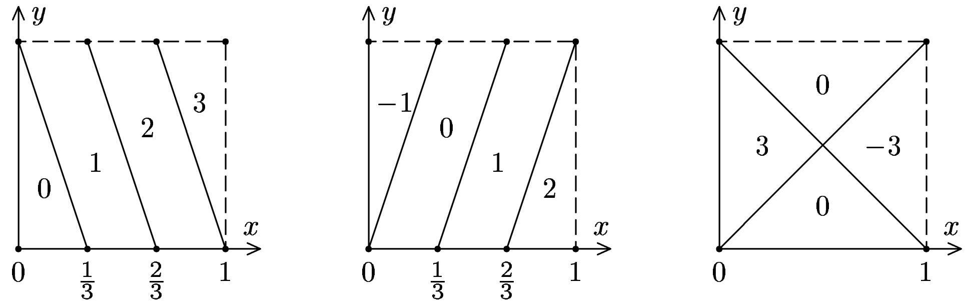

Рис. 9. Значения функций $\lfloor 3x+y\rfloor$, $\lfloor 3x-y\rfloor$ и $-3(\lfloor x+y\rfloor+\lfloor x-y\rfloor)$ внутри единичного квадрата

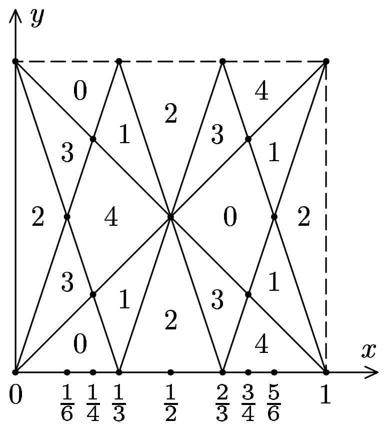

Рис. 10. Значения функции $\varphi_1(x,y)$ внутри единичного квадрата

Доказательство. Согласно (4.15) в случае $m=n$ и $p>2\sqrt{n}$ имеем

$$\min_{k=0,\pm1,\dots,\pm n}\{\operatorname{ord}_p B_{k,0}\}=\min_{|k/p|\leqslant|n/p|}\varphi_1\left(\frac{n}{p},\frac{k}{p}\right),\tag{4.19}$$

где

$$\varphi_1(x,y)=\lfloor 3x+y\rfloor+\lfloor 3x-y\rfloor-3\lfloor x+y\rfloor-3\lfloor x-y\rfloor.\tag{4.20}$$

Как несложно заметить, функция (4.20) периодична (с периодом 1) по каждому аргументу:

$$\varphi_1(x,y)=\varphi_1(\{x\},\{y\}),\qquad \{x\}=x-\lfloor x\rfloor;$$

поэтому достаточно вычислить значения этой функции внутри единичного квадрата. Согласно определению целой части числа слагаемые в правой части (4.20) меняют значения только при переходе через прямые $3x\pm y=\mathrm{const}\in\mathbb{Z}$ и $x\pm y=\mathrm{const}\in\mathbb{Z}$ (см. рис. 9), откуда получаем значения функции $\varphi_1(x,y)$ (рис. 10).

Проведем перпендикуляры к оси x через точки пересечения прямых, указанных на рис. 10. Тогда

$$\min_{|y|\leqslant x}\varphi_1(x,y)=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\varphi_1(\{x\},y)=\begin{cases}1, & \text{если } \{x\}\in E_1=\left[\dfrac13,\dfrac12\right)\cup\left[\dfrac56,1\right),\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}\tag{4.21}$$

Согласно (4.17) и (4.19) из (4.21) следует, что

$$\{p\in\mathscr{E}_{n,n}:p>2\sqrt{n}\}=\left\{p>2\sqrt{n}:\left\{\frac{n}{p}\right\}\in E_1\right\}$$

и, следовательно,

$$\Pi_{n,n} = \prod_{\substack{p:\{n/p\}\in E_1\\ 2\sqrt{n}<p\leqslant 2n}} p = \prod_{\substack{p:\{n/p\}\in E_1\\ p>2\sqrt{n}}} p \Bigg/ \prod_{2n<p\leqslant 3n} p. \tag{4.22}$$

Для знаменателя в правой части (4.22) имеем

$$\prod_{2n<p\leqslant 3n} p = \frac{D_{3n}}{D_{2n}}; \tag{4.23}$$

асимптотика числителя находится с помощью следующего утверждения (ср. с [25, теорема 4.3 и § 6], [26, лемма 3.2]).

Лемма 4.4. *Для любого $C>1$ и любого полуинтервала $[u,v)\subset(0,1)$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{p>\sqrt{Cn}\\ \{n/p\}\in[u,v)}} \log p = \psi(v)-\psi(u).$$

С помощью леммы 4.4 и соотношений (4.22), (4.23), (1.24) получаем требуемую асимптотику (4.18). Лемма 4.3 доказана.

Замечание 4.1. И без того несложное вычисление величины (4.21) можно вчетверо упростить. Как легко проверить, функция (4.20), помимо периодичности, инвариантна относительно преобразований

$$\vartheta_1\colon (x,y)\mapsto \biggl(x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}\biggr), \qquad \vartheta_2\colon (x,y)\mapsto (x,1-y) \tag{4.24}$$

(последнее отображение использует нечетность $\varphi_1(x,y)$ по аргументу y и сдвиг на 1). Поэтому значения функции (4.20) достаточно найти на квадрате $0\leqslant x,y<\frac{1}{2}$, а затем с помощью преобразований $\vartheta_1, \vartheta_1\circ\vartheta_2, \vartheta_2$ распространить найденное на единичный куб и по периодичности на всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

В качестве следующего объекта исследования рассмотрим рациональную функцию

$$G(t) = G_n(t) := \frac{(t\pm(n+1))\cdots(t\pm(n+2rn))}{\bigl(t(t\pm1)\cdots(t\pm n)\bigr)^{2r}}, \tag{4.25}$$

которая согласно лемме 1.3 и правилу Лейбница дифференцирования произведения удовлетворяет соотношениям

$$\frac{D_{2n}^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(G(t)(t+k)^{2r}\bigr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z}, \qquad k=0,\pm1,\dots,\pm n, \quad j=0,1,2,\dots. \tag{4.26}$$

Лемма 4.5. *Для каждого целого $r \geqslant 1$ существует последовательность целых $\Pi_n = \Pi_n^{(r)} \geqslant 1$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что для всех целых неотрицательных j выполнено*

$$\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(G(t)(t+k)^{2r}\bigr)\bigg|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \qquad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \tag{4.27}$$

и справедливо предельное соотношение

$$\varpi_r = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \Pi_n^{(r)}}{n} = -2\sum_{l=1}^{r}\biggl(\psi\Bigl(\frac{l}{r}\Bigr) + \psi\Bigl(\frac{l}{r+1/2}\Bigr)\biggr) - (4r+1)\sum_{l=1}^{r}\frac{1}{l} - 4r\gamma + 4r, \tag{4.28}$$

где $\gamma \approx 0.57712$ – постоянная Эйлера.

Доказательство. Для $n \leqslant 2r$ положим $\Pi_n = 1$; тогда включения (4.27) следуют из (4.26), а на предел в (4.28) эта конечная часть последовательности никак не повлияет. Поэтому в дальнейшем будем считать $n > 2r$.

Для каждого простого p определим величину

$$\nu_p = \min_{k=0,\pm 1,\dots,\pm n} \biggl\{\operatorname{ord}_p \frac{((2r+1)n+k)!\,((2r+1)n-k)!}{(n+k)!^{2r+1}(n-k)!^{2r+1}}\biggr\}; \tag{4.29}$$

положим

$$\Pi_n = \prod_{p:\sqrt{(2r+2)n}<p\leqslant 2n} p^{\nu_p}. \tag{4.30}$$

Фиксируя целое k из интервала $|k| \leqslant n$, рассмотрим функцию

$$G_k(t) := G(t)(t+k)^{2r} \tag{4.31}$$

и покажем, что

$$\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j G_k(t)}{\mathrm{d}t^j}\bigg|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \qquad j = 0, 1, 2, \dots. \tag{4.32}$$

Согласно лемме 4.1 включения (4.32) достаточно доказать для $j \leqslant 2r$.

Для простых p, не делящих Π_n, согласно (4.26) имеем

$$\operatorname{ord}_p\biggl(\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j G_k(t)}{\mathrm{d}t^j}\bigg|_{t=-k}\biggr) = \operatorname{ord}_p\biggl(\frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j G_k(t)}{\mathrm{d}t^j}\bigg|_{t=-k}\biggr) \geqslant 0. \tag{4.33}$$

Пусть теперь простое p делит Π_n. Докажем индукцией по $j = 0, 1, \dots, 2r$, что и в этом случае

$$\operatorname{ord}_p\biggl(\Pi_n^{-1} \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j G_k(t)}{\mathrm{d}t^j}\bigg|_{t=-k}\biggr) \geqslant 0. \tag{4.34}$$

При $j = 0$ соотношение (4.34) вытекает из определения числа Π_n, поскольку

$$G_k(t)\big|_{t=-k} = \frac{((2r+1)n+k)!\,((2r+1)n-k)!}{(n+k)!^{2r+1}(n-k)!^{2r+1}}.$$

Докажем (4.34) для $j+1$, считая его доказанным для всех предыдущих j. Введем обозначение для логарифмической производной функции (4.31):

$$g_k(t)=\frac{G_k'(t)}{G_k(t)}=\sum_{\substack{l=-(2r+1)n\\ l\ne k}}^{(2r+1)n}\frac{1}{t+l}-(2r+1)\sum_{\substack{l=-n\\ l\ne k}}^{n}\frac{1}{t+l}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{(j+1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{j+1}G_k(t)}{\mathrm{d}t^{j+1}}&=\frac{1}{(j+1)!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(g_k(t)G_k(t)\bigr)\\ &=\frac{1}{j+1}\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{(j-m)!}\,\frac{\mathrm{d}^{j-m}g_k(t)}{\mathrm{d}t^{j-m}}\cdot\frac{1}{m!}\,\frac{\mathrm{d}^mG_k(t)}{\mathrm{d}t^m}. \qquad (4.35)\end{aligned}$$

Имеем

$$\operatorname{ord}_p\frac{1}{j+1}=0, \qquad (4.36)$$

так как $p>\sqrt{(2r+2)n}>2r+1\geqslant j+1$; далее, для $m<j$

$$\begin{aligned}&\operatorname{ord}_p\biggl(\frac{1}{(j-m)!}\,\frac{\mathrm{d}^{j-m}g_k(t)}{\mathrm{d}t^{j-m}}\bigg|_{t=-k}\biggr)\\ &\quad=\operatorname{ord}_p\Biggl(\sum_{\substack{l=-(2r+1)n\\ l\ne k}}^{(2r+1)n}\frac{(-1)^{j-m}}{(l-k)^{j-m+1}}-(2r+1)\sum_{\substack{l=-n\\ l\ne k}}^{n}\frac{(-1)^{j-m}}{(l-k)^{j-m+1}}\Biggr)\\ &\quad\geqslant-(j-m+1), \qquad (4.37)\end{aligned}$$

поскольку $p>\sqrt{(2r+2)n}$ и $|l-k|\leqslant(2r+2)n$ для всех знаменателей в (4.37);

$$\operatorname{ord}_p D_{2n}^{j-m+1}\geqslant j-m+1, \qquad (4.38)$$

так как $p\leqslant 2n$; наконец,

$$\operatorname{ord}_p\biggl(\Pi_n^{-1}\,\frac{D_{2n}^m}{m!}\,\frac{\mathrm{d}^mG_k(t)}{\mathrm{d}t^m}\bigg|_{t=-k}\biggr)\geqslant 0 \qquad (4.39)$$

по индукционному предположению. Подставляя $t=-k$ в (4.35) и применяя оценки (4.36)–(4.39), заключаем, что соотношение (4.34) выполнено для $j+1$. Тем самым, индукционный переход обоснован.

Собирая оценки (4.33) для $p\nmid\Pi_n$ и (4.34) для $p\mid\Pi_n$, приходим к выводу, что включения (4.32) и (4.27) справедливы для $j=0,1,\dots,2r$, а значит, и для всех целых неотрицательных j. Покажем, что для построенной последовательности Π_n, $n=1,2,\dots$, выполнено предельное соотношение (4.28).

Для каждого целого $n>2r$ и простого $p>\sqrt{(2r+2)n}$ согласно (4.29) и (4.16) выполнено

$$\nu_p=\min_{|k/p|\leqslant|n/p|}\varphi_r\biggl(\frac{n}{p},\frac{k}{p}\biggr), \qquad (4.40)$$

где функция

$$\varphi_r(x,y)=\lfloor(2r+1)x+y\rfloor+\lfloor(2r+1)x-y\rfloor-(2r+1)\lfloor x+y\rfloor-(2r+1)\lfloor x-y\rfloor \quad (4.41)$$

периодична (с периодом 1) по каждому аргументу. Проверим, что

$$\min_{y\in\mathbb{R}}\varphi_r(x,y)=\nu, \quad \text{если } \{x\}\in E_\nu, \qquad \nu=0,1,\dots,2r-1, \qquad (4.42)$$

где

$$\begin{aligned} E_{2l}&=\left[\frac{l}{2r},\frac{l+1}{2r+1}\right)\cup\left[\frac12+\frac{l}{2r},\frac12+\frac{l+1}{2r+1}\right), \qquad l=0,1,\dots,r-1,\\ E_{2l-1}&=\left[\frac{l}{2r+1},\frac{l}{2r}\right)\cup\left[\frac12+\frac{l}{2r+1},\frac12+\frac{l}{2r}\right), \qquad l=1,2,\dots,r. \end{aligned} \qquad (4.43)$$

Несложные вычисления и нечетность функции (4.41) показывают, что эта функция инвариантна относительно преобразований (4.24); поэтому для доказательства соотношений (4.42) достаточно ограничиться областью $0\leqslant x,y<\frac12$. В этой области

$$\min_{0\leqslant y<1/2}\varphi_r(x,y)=\min_{0\leqslant y\leqslant x}\varphi_r(x,y)=\min_{0\leqslant y\leqslant x}\bigl(\lfloor(2r+1)x+y\rfloor+\lfloor(2r+1)x-y\rfloor\bigr),$$

так как

$$-(2r+1)\lfloor x+y\rfloor-(2r+1)\lfloor x-y\rfloor=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant y\leqslant x<\frac12,\\ 2r+1, & \text{если } 0\leqslant x<y<\frac12.\end{cases}$$

Для завершения доказательства соотношений (4.42) остается вычислить значения функции $\lfloor(2r+1)x+y\rfloor+\lfloor(2r+1)x-y\rfloor$ в области $0\leqslant y\leqslant x<\frac12$ (см. рис. 11) по аналогии с рассуждениями, приведенными в лемме 4.3.

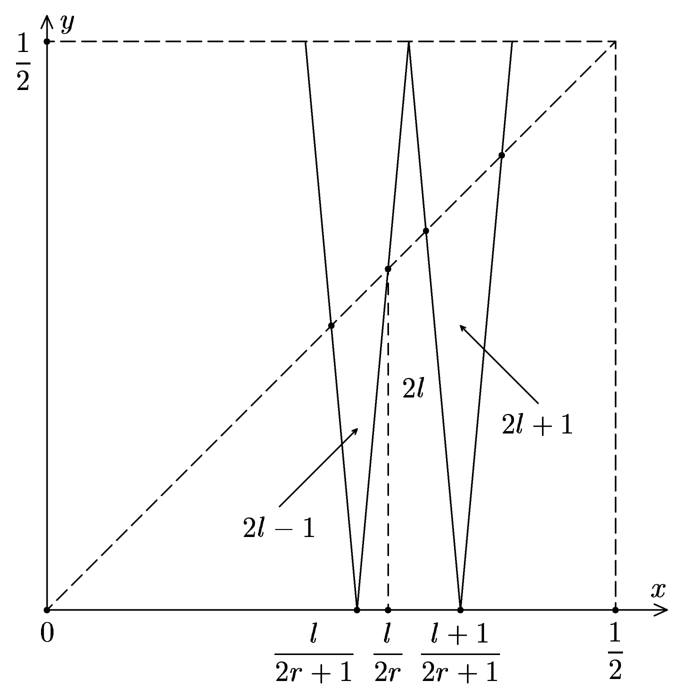

Рис. 11. Значения функции $\varphi_r(x,y)$ в области $0\leqslant y<x<\frac12$

Таким образом, согласно (4.30), (4.40) и (4.42), (4.43) выполнено

$$
\begin{aligned}
\Pi_n &= \prod_{\nu=1}^{2r-1} \prod_{\substack{p:\{n/p\}\in E_\nu \\ \sqrt{(2r+2)n}<p\leqslant 2n}} p^\nu \\
&= \Biggl(\prod_{\nu=1}^{2r-1} \prod_{\substack{p:\{n/p\}\in E_\nu \\ p>\sqrt{(2r+2)n}}} p^\nu\Biggr) \Bigg/ \Biggl(\prod_{l=1}^{r-1} \prod_{\frac{2r+1}{l+1}n<p\leqslant\frac{2r}{l}n} p^{2l} \cdot \prod_{l=1}^{r} \prod_{\frac{2r}{l}n<p\leqslant\frac{2r+1}{l}n} p^{2l-1}\Biggr),
\end{aligned}
$$

и для получения предельного соотношения (4.28) воспользуемся леммой 4.4, тождеством

$$
\psi(x)+\psi\biggl(x+\frac12\biggr) = -2\log 2 + 2\psi(2x)
$$

(см. далее формулу (4.47) при $r=2$) и соотношением

$$
\lim_{n\to\infty}\frac1n \sum_{\alpha n<p\leqslant\beta n} \log p = \beta-\alpha, \qquad \text{где } \alpha<\beta,
$$

вытекающим из асимптотического закона распределения простых чисел. Тогда

$$
\begin{aligned}
\varpi_r &= \sum_{l=1}^{r-1} 2l\biggl(\psi\biggl(\frac{l+1}{2r+1}\biggr)-\psi\biggl(\frac{l}{2r}\biggr)+\psi\biggl(\frac12+\frac{l+1}{2r+1}\biggr)-\psi\biggl(\frac12+\frac{l}{2r}\biggr) \\
&\qquad -\biggl(\frac{2r}{l}-\frac{2r+1}{l+1}\biggr)\biggr) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{r}(2l-1)\biggl(\psi\biggl(\frac{l}{2r}\biggr)-\psi\biggl(\frac{l}{2r+1}\biggr)+\psi\biggl(\frac12+\frac{l}{2r}\biggr)-\psi\biggl(\frac12+\frac{l}{2r+1}\biggr) \\
&\qquad -\biggl(\frac{2r+1}{l}-\frac{2r}{l}\biggr)\biggr) \\
&= 2\sum_{l=1}^{r-1} 2l\biggl(\psi\biggl(\frac{l+1}{r+1/2}\biggr)-\psi\biggl(\frac{l}{r}\biggr)\biggr) + 2\sum_{l=1}^{r}(2l-1)\biggl(\psi\biggl(\frac{l}{r}\biggr)-\psi\biggl(\frac{l}{r+1/2}\biggr)\biggr) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{r-1} 2l\biggl(\frac{2r}{l}-\frac{2r+1}{l+1}\biggr) - \sum_{l=1}^{r}(2l-1)\biggl(\frac{2r+1}{l}-\frac{2r}{l}\biggr) \\
&= 2\sum_{l=1}^{r}\psi\biggl(\frac{l}{r}\biggr)(2l-1-2l) + 4r\psi(1) + 2\sum_{l=1}^{r}\psi\biggl(\frac{l}{r+1/2}\biggr)\bigl(2(l-1)-(2l-1)\bigr) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{r}\frac1l\bigl(4rl-2(l-1)(2r+1)+(2l-1)\bigr) + 4r \\
&= -2\sum_{l=1}^{r}\biggl(\psi\biggl(\frac{l}{r}\biggr)+\psi\biggl(\frac{l}{r+1/2}\biggr)\biggr) - (4r+1)\sum_{l=1}^{r}\frac1l + 4r\psi(1) + 4r,
\end{aligned}
$$

и поскольку $\psi(1)=-\gamma$ (см., например, [27, § 1.1, формула (8)]), получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Для величины* (4.28) *справедливы оценки*

$$-\log(r+1)-4<\varpi_r-4r+(4r+1)\gamma<\log(r+1)+\frac{1}{r}+2; \qquad (4.44)$$

в частности,

$$\varpi_r=4r(1-\gamma)+O(\log r) \qquad \text{при } r\to\infty. \qquad (4.45)$$

Доказательство. В силу монотонного возрастания функции $\psi(x)$ на полуинтервале $(0,1]$ имеем

$$-\psi(1)+\sum_{l=1}^{r+1}\psi\biggl(\frac{l}{r+1}\biggr)<\sum_{l=1}^{r}\psi\biggl(\frac{l}{r+1/2}\biggr)<\sum_{l=1}^{r}\psi\biggl(\frac{l}{r}\biggr), \qquad (4.46)$$

при этом суммы в верхней и нижней оценках находятся с помощью формулы

$$\sum_{l=1}^{r}\psi\biggl(x+\frac{l-1}{r}\biggr)=-r\log r+r\psi(rx) \qquad (4.47)$$

(см., например, [27, § 1.1, формула (6)]).

Согласно неравенству (2.28) последовательность

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{r}-\log r$$

убывает, а последовательность

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{r}-\log(r+1)$$

возрастает; поэтому их общий предел γ заключен между элементами этих последовательностей, т.е.

$$\log r<\sum_{l=1}^{r}\frac{1}{l}-\gamma<\log(r+1). \qquad (4.48)$$

Подставляя полученные оценки (4.46)–(4.48) в (4.28), находим

$$-4r\log\frac{r+1}{r}-\log(r+1)<\varpi_r-4r+(4r+1)\gamma<(2r+1)\log\frac{r+1}{r}+\log(r+1)$$

и для завершения доказательства оценок (4.44) вновь воспользуемся неравенством (2.28). Предельное соотношение (4.45) вытекает непосредственно из (4.44). Лемма доказана.

Предложение 4.1. *Знаменатель* $\operatorname{den}(I_n)$ *линейной формы* (1.5) *является делителем числа* $\Pi_n^{-b}D_{2n}^{a+b-1}$, *где последовательность целых чисел* $\Pi_n=\Pi_n^{(r)}$, $n=1,2,\dots$, *определена в лемме* 4.5. *Таким образом,*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log\operatorname{den}(I_n)}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_{2n}^{a+b-1}-b\log\Pi_n}{n}=2(a+b-1)-b\varpi_r.$$

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 1.4 с заменой представления (1.22) на
$$R(t)=H_n(t)^{a-2rb}G_n(t)^b,$$
с применением лемм 1.3, 4.5 для функций (1.16), (4.25) и правила Лейбница дифференцирования произведения. Предложение доказано.

В заключение этого параграфа приведем несколько частных значений величины (4.28) (при $r=1$ см. формулу (4.18)):

$$\varpi_2\approx 2.01561,\quad \varpi_3\approx 3.64442,\quad \varpi_{10}\approx 15.38202,\quad \varpi_{50}\approx 82.98948,$$
$$\varpi_{100}\approx 1.67541\cdot 100,\quad \varpi_{1000}\approx 1.68956\cdot 1000,\quad \varpi_r\approx 4(1-\gamma)r\approx 1.69114\,r.$$

§ 5. Доказательство результатов о линейной независимости

Следующая теорема опирается на результаты, полученные в § 2 и § 4.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия предложения* 2.3, b *нечетно и, кроме того,*
$$\varkappa+2(a+b-1)-b\varpi_r<0,$$
где
$$\varpi_r=-2\sum_{l=1}^{r}\biggl(\psi\Bigl(\frac{l}{r}\Bigr)+\psi\Bigl(\frac{l}{r+1/2}\Bigr)\biggr)-(4r+1)\sum_{l=1}^{r}\frac{1}{l}-4r\gamma+4r.$$
Тогда среди чисел
$$\zeta(b+2),\ \zeta(b+4),\ \dots,\ \zeta(a+b-1) \tag{5.1}$$
по крайней мере одно иррационально.

Доказательство. Согласно лемме 1.1 для любого целого $n\geqslant 1$ величина (1.2) является линейной формой от 1 и чисел (5.1). Предполагая рациональность каждого из чисел (5.1) и обозначая их наименьший общий знаменатель через D, получаем, что $J_n=D|I_n|\operatorname{den}(I_n)$ является целым положительным числом для бесконечной последовательности индексов $n\geqslant 1$. Это противоречит предельному соотношению
$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log J_n}{n}\leqslant \varkappa+2(a+b-1)-b\varpi_r<0,$$
вытекающему из предложений 2.3 и 4.1.

Доказательство теоремы 0.1. Применим теорему 5.1, выбирая для каждого набора подходящие a,b и $r=1$. Отметим, что в любом из рассматриваемых далее случаев $\mu_1<3.05$, так что условие (2.61) выполнено.

Иррациональность по крайней мере одного числа из первого набора в (0.1) получается при выборе $a=19$ и $b=3$ в теореме 5.1. В этом случае $\mu_1\approx 3.04028$ и $\tau_0\approx 2.98027+0.02985i$, $\operatorname{Im}f_0(\tau_0)+3\pi\approx 0.09308\not\equiv 0\pmod{\pi\mathbb{Z}}$. Поэтому оценка
$$\varkappa+2(a+b-1)-b\varpi_r\approx -0.72567<0$$
и применение теоремы 5.1 доказывают требуемое.

Для второго набора в (0.1) полагаем $a = 33$, $b = 5$. Тогда

$$\mu_1 \approx 3.03309, \qquad \tau_0 \approx 3.00783 + 0.03046i, \qquad \operatorname{Im} f_0(\tau_0) + 9\pi \approx 0.14978,$$
$$\varkappa + 2(a+b-1) - b\varpi_r \approx -0.76662 < 0.$$

Наконец, полагая $a = 47$, $b = 7$ для третьего набора в (0.1), получаем

$$\mu_1 \approx 3.03043, \qquad \tau_0 \approx 3.01730 + 0.02406i, \qquad \operatorname{Im} f_0(\tau_0) + 15\pi \approx 0.16232,$$
$$\varkappa + 2(a+b-1) - b\varpi_r \approx -0.82928 < 0.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 0.2. Положим $a = 7b$, $r = 1$ для каждого нечетного $b \geqslant 3$ и обозначим через τ_b корень соответствующего многочлена (2.21) в области $\operatorname{Re}\tau > 0$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ с максимально возможной частью $\operatorname{Re}\tau_b$. Отметим, что корень многочлена (2.21) на интервале $(3, +\infty)$ совпадает с корнем многочлена

$$(\tau+3)(\tau-1)^8 - (\tau-3)(\tau+1)^8,$$

который равен $\mu_1 \approx 3.02472$. Так как условие (2.61) выполнено, по лемме 2.10 имеем неравенство $\operatorname{Re} f_0(\tau_b) \leqslant \operatorname{Re} f_0(\mu_1)$, откуда

$$\varkappa \leqslant b\varkappa_0 := b \log \frac{2^{2(a-2)}(\mu_1+3)^3(\mu_1-3)^3}{(\mu_1+1)^8(\mu_1-1)^8} \approx -15.56497\,b.$$

Поэтому

$$\varkappa + 2(a+b-1) - b\varpi_r < b\varkappa_0 + 16b - b\varpi_1 \approx -0.04701\,b < 0,$$

и для применения теоремы 5.1 остается убедиться в том, что условие (2.55) выполнено. Несложная проверка показывает, что функция

$$\begin{aligned} g_0(b) &= \operatorname{Im} f_0(\tau_b) + 3(b-2)\pi \\ &= 3b\bigl(\arg(\tau_b-3) + \arg(-\tau_b+3)\bigr) - 8b\bigl(\arg(\tau_b-1) + \arg(\tau_b+1)\bigr) + 3(b-2)\pi \\ &= 2b\bigl(3\arg(\tau_b-3) + 8\arg(\tau_b-1) - 16\arg(\tau_b+1)\bigr) \end{aligned}$$

как функция от $b \geqslant 3$ возрастает, откуда следует, что $g_0(b) \geqslant g_0(3) \approx 0.05935 > 0$. Кроме того, соотношения

$$\arg(-\tau_b+3) \sim \frac{b-2}{b}\pi, \quad |-\tau_b+3| \sim |\mu_1-3| \qquad \text{при } b \to \infty, \ b \text{ нечетно},$$

позволяют вычислить предел

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ b \text{ нечетно}}} g_0(b) < \pi.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} f_0(\tau_b) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathbb{Z}}$ и применение теоремы 5.1 завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 0.3. В соответствии с леммой 1.1 и предложением 4.1 для $b = 1$ построенные в (1.2) величины $\tilde{I}_n(a,r) = I_n D_{2n}^a/\Pi_n^{(r)}$ являются линейными формами от чисел $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a)$ с целыми коэффициентами. Согласно предложениям 2.1, 3.1, 4.1 значения α, β в критерии линейной независимости (см. введение) определяются как

$$\begin{aligned} \alpha(a,r) &= -\varkappa(a,r) - 2a + \varpi_r, \\ \beta(a,r) &= 2(2r+1)\log(2r+1) + 2(a-2r)\log 2 + 2a - \varpi_r, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где величина $\varkappa = \varkappa(a,r)$ задается соотношением (2.59). При $a = 145$, $r = 10$ и $a = 1971$, $r = 65$ получаем

$$\begin{aligned} \mu_1(145,10) - 21 &\approx 0.38013\cdot 10^{-4}, \qquad 1 + \frac{\alpha(145,10)}{\beta(145,10)} \approx 2.000397, \\ \mu_1(1971,65) - 131 &\approx 0.22019\cdot 10^{-10}, \quad\ 1 + \frac{\alpha(1971,65)}{\beta(1971,65)} \approx 3.000103, \end{aligned}$$

где $\mu_1(a,r)$ – вещественный корень многочлена (2.21) на интервале $(2r+1, +\infty)$ при $b = 1$. Из критерия линейной независимости заключаем, что

$$\delta(145) \geqslant 3, \qquad \delta(1971) \geqslant 4, \tag{5.3}$$

поскольку размерность пространства является целым числом. Кроме того, по теореме Апери $\delta(3) = 2$. Из полученных оценок вытекает утверждение теоремы.

Лемма 5.1. *Пусть целые положительные* a, r *удовлетворяют условиям*

$$a > 2(r+2)\log(r+1) + 1 \tag{5.4}$$

и $\mu_1 = \mu_1(a,r)$ *– вещественный корень многочлена*

$$h(\tau) = (\tau + 2r + 1)(\tau - 1)^{a+1} - (\tau - 2r - 1)(\tau + 1)^{a+1} \tag{5.5}$$

на интервале $(2r+1, +\infty)$. *Тогда*

$$0 < \mu_1 - (2r+1) < 2\varepsilon, \qquad \text{где} \quad \varepsilon := \frac{2r+1}{(r+1)^2} < 1. \tag{5.6}$$

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$h(2r+1) = 2^{a+2}(r+1)r^{a+1} > 0, \tag{5.7}$$

$$h(2r+1+2\varepsilon) = 2^{a+2}\big((2r+1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{a+1} - \varepsilon(r+1+\varepsilon)^{a+1}\big). \tag{5.8}$$

Ввиду (5.4) имеем

$$(r+1+\varepsilon)^{a-1} > (r+\varepsilon)^{a+1}, \tag{5.9}$$

так как

$$\begin{aligned}
&(a-1)\log(r+1+\varepsilon)-(a+1)\log(r+\varepsilon)\\
&\quad=(a-1)\log\left(1+\frac{1}{r+\varepsilon}\right)-2\log(r+\varepsilon)\\
&\quad>(a-1)\log\left(1+\frac{1}{r+1}\right)-2\log(r+1)\\
&\quad>\frac{a-1}{r+2}-2\log(r+1)=\frac{a-1-2(r+2)\log(r+1)}{r+2}>0.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(r+1+\varepsilon)^2&=\frac{(2r+1)(r+1+\varepsilon)^2}{(r+1)^2}\\
&>\frac{(2r+1)(r+1+\varepsilon)^2}{(r+1)^2}-\frac{\varepsilon(3r^2+4r+1+2\varepsilon r+\varepsilon)}{(r+1)^2}=2r+1+\varepsilon.
\end{aligned}\tag{5.10}$$

Подставляя неравенства (5.9), (5.10) в (5.8), получаем, что $h(2r+1+2\varepsilon)<0$. Сопоставляя полученное неравенство с (5.7), заключаем, что на интервале $(2r+1,\ 2r+1+2\varepsilon)$ действительно расположен корень многочлена (5.5). Поэтому требуемая локализация (5.6) вытекает из единственности вещественного корня μ_1 на интервале $(2r+1,+\infty)$ (лемма 2.7). Лемма доказана.

Следствие 5.1. *В предположениях леммы* 5.1 *пусть* $r>6$. *Тогда для величины* $\varkappa=\varkappa(a,r)$ *в* (2.59) *справедлива оценка*

$$\varkappa(a,r)<2(2r+1)\log(2r+1)-2(a+1)(1+\log r).$$

Доказательство. Поскольку $h(\mu_1)=0$, имеем

$$\varkappa=\log\frac{2^{2(a-2r)}(\mu_1+2r+1)^{2(2r+1)}(\mu_1-1)^{2(a+1)r}}{(\mu_1+1)^{2(a+1)(r+1)}},$$

откуда ввиду (5.6) выполнено

$$\begin{aligned}
&\frac{\varkappa}{2}-(a-2r)\log 2\\
&\quad=(2r+1)\log\left(1+\frac{2r}{\mu_1+1}\right)-(a+1)r\log\left(1+\frac{2}{\mu_1-1}\right)-(a-2r)\log(\mu_1+1)\\
&\quad<(2r+1)\log\left(1+\frac{r}{r+1}\right)-\frac{(a+1)r}{r+1}-(a-2r)\log(2r+2)\\
&\quad=(2r+1)\log(2r+1)-(a+1)\left(\frac{r}{r+1}+\log(r+1)\right)-(a-2r)\log 2\\
&\quad<(2r+1)\log(2r+1)-(a+1)(1+\log r)-(a-2r)\log 2.
\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались неравенством

$$\log\left(1+\frac{2}{\mu_1-1}\right) > \log\left(1+\frac{1}{r+\varepsilon}\right) > 2\log\left(1+\frac{1}{2r+1}\right) > \frac{1}{r+1}$$

(см. также (2.28) при $n=2r+1$), справедливым для $r>6$, поскольку

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{r+\varepsilon}-\left(1+\frac{1}{2r+1}\right)^2 &= \frac{r-4\varepsilon r-3r+1}{(r+\varepsilon)(2r+1)^2} \\ &= \frac{r^3-5r^2-7r-2}{(r+\varepsilon)(r+1)^2(2r+1)^2} > 0, \qquad \text{если } r>6. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Доказательство теоремы 0.4. Поскольку $\delta(a)$ является целым числом и

$$0.395\cdot\log 3\approx 0.43395, \qquad 0.395\cdot\log 145\approx 1.96581, \qquad 0.395\cdot\log 1971\approx 2.99659,$$

из теоремы Апери и оценок (5.3) вытекает справедливость неравенства (0.2) для всех нечетных $a<e^{4/0.395}$, т.е. $a<24999$. На самом деле, мы покажем, что для нечетных $a\geqslant 20737=12^4+1$ справедлива более сильная, чем (0.2), оценка

$$\delta(a) > \frac{\log a}{\log 12}, \tag{5.11}$$

или, что то же самое,

$$\delta(12^m+1) > m, \qquad m=4,5,6,\dots. \tag{5.12}$$

Для каждого $a=12^m+1$ выберем

$$r=\left\lfloor\frac{\log^2 12}{3}\cdot\frac{a}{\log^2 a}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{12^m+1}{3m^2}\right\rfloor, \qquad m=4,5,6,\dots,$$

и воспользуемся для оценки снизу размерности $\delta(a)$ критерием линейной независимости, формулами (5.2), а также неравенствами леммы 4.6 и следствия 5.1:

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geqslant 1+\frac{\alpha(a,r)}{\beta(a,r)} \\ &> \frac{2(a+1)(1+\log r)+2(a-2r)\log 2}{2(2r+1)\log(2r+1)+2(a-2r)\log 2+2a-4r(1-\gamma)+\log(r+1)+4+\gamma}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Тогда при $m=4,5,6,7$ оценка (5.12) следует непосредственно из (5.13):

m	$a=12^m+1$	$r=\left\lfloor\frac{a}{3m^2}\right\rfloor$	$\delta(a)$
4	20737	432	>4.00882
5	248833	3317	>5.15339
6	2985985	27648	>6.35168
7	35831809	243753	>7.58967

Для остальных значений m мы воспользуемся в неравенстве (5.13) тривиальными оценками

$$0 < \frac{r}{a} \leqslant \frac{1}{3m^2}, \qquad \frac{2r+1}{a} \leqslant \frac{2}{3m^2} + \frac{1}{a} \leqslant \frac{2}{m^2 \log 12},$$

$$\log r \geqslant \log \frac{12^m}{4m^2} = m \log 12 - 2\log 2 - 2\log m,$$

$$\log(2r+1) \leqslant \log(a-1) = m \log 12.$$

Тогда

$$\delta(a) = \delta(12^m+1) > \frac{m\log 12 - 2\log m + 1 - \log 2 - 1/(3m^2)}{1+\log 2 + 2/m} > \frac{m\log 12 - 2\log m}{1+\log 2+2/m}$$

и оценка (5.12) при $m \geqslant 8$ вытекает из монотонного возрастания функции

$$\Delta(m) = (m\log 12 - 2\log m) - m\left(1 + \log 2 + \frac{2}{m}\right) = m(\log 6 - 1) - 2\log m - 2$$

и положительности ее значения $\Delta(8) \approx 0.17519$ при $m = 8$. Теорема доказана.

Фактически мы доказали оценку (5.11) для всех нечетных $a \geqslant 3$, за исключением конечного множества $12^3 + 1 = 1729 \leqslant a \leqslant 1969$.

Список литературы

1. *Apéry R.* Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13.
2. *Van der Poorten A.* A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report // Math. Intelligencer. 1978/79. V. 1. № 4. P. 195–203.
3. *Beukers F.* A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. P. 268–272.
4. *Гутник Л. А.* Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // УМН. 1979. Т. 34. №3. С. 190; // Acta Arith. 1983. V. 42. №3. P. 255–264.
5. *Beukers F.* Padé approximations in number theory // Lecture Notes in Math. V. 888. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 90–99.
6. *Beukers F.* Irrationality proofs using modular forms // Astérisque. 1987. V. 147–148. P. 271–283.
7. *Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина и иррациональность $\zeta(3)$ // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 167–168.
8. *Нестеренко Ю. В.* Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №6. С. 865–880.
9. *Hata M.* A new irrationality measure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. 2000. V. 92. № 1. P. 47–57.
10. *Rhin G., Viola C.* The group structure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. 2001. V. 97. № 3. P. 269–293.
11. *Vasilyev D. V.* On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points. Preprint №1 (558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.
12. *Ball K.* Diophantine approximation of hypergeometric numbers. Preprint, 2000.
13. *Rivoal T.* La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270; // `http://arXiv.org/abs/math/0008051`.
14. *Rivoal T.* Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs. Thèse de Doctorat. Caen: Univ. de Caen, 2001.
15. *Ball K., Rivoal T.* Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs // Invent. Math. 2001. V. 146. № 1. P. 193–207.
16. *Нестеренко Ю. В.* О линейной независимости чисел // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1985. №1. С. 46–54.

17. *Хессами Пилеруд Т. Г.* Арифметические свойства значений гипергеометрических функций: Дис. … канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1999; О линейной независимости векторов с полилогарифмическими координатами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1999. №6. С. 54–56.
18. *Рухадзе Е. А.* Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. №6. С. 25–29.
19. *Зудилин В. В.* Об иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках // УМН. 2001. Т. 56. №2. С. 215–216.
20. *Никишин Е. М.* Об иррациональности значений функций $F(x,s)$ // Матем. сб. 1979. Т. 109. №3. С. 410–417.
21. *Нестеренко Ю. В.* Диофантовы приближения к дзета-функции Римана // Доклад на научно-исследовательском семинаре по теории чисел (4 октября 2000 г.). М.: МГУ, 2000.
22. *Ленг С.* Введение в теорию модулярных форм. М.: Мир, 1979.
23. *Де Брёйн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961.
24. *Yoshida M.* Hypergeometric function, my love. Aspects of Math. V. E32. Wiesbaden: Vieweg, 1997.
25. *Chudnovsky G. V.* On the method of Thue–Siegel // Ann. of Math. (2). 1983. V. 117. № 2. P. 325–382.
26. *Hata M.* Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 407. № 1. P. 99–125.
27. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
28. *Зудилин В. В.* Одно из чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально // УМН. 2001. Т. 56. №4. С. 149–150.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступило в редакцию
24.IV.2001