TOPOLOGIE

Prof. Dr. B.J.J. Moonen

Radboud Universiteit Nijmegen

Versie van 31 oktober 2013

VOORAF

Deze syllabus is geschreven als tekst bij het tweedejaars college Topologie aan de UvA. Het onderwerp van dit vak is de elementaire topologie. Ik beschouw dit als een inleidend vak; het gaat er vooral om een taal te leren. Om toch iets zichtbaar te maken van wat hierna komt, in de richting van de algebraïsche topologie, heb ik een inleiding opgenomen in de theorie van de fundamentaalgroep. Typisch verschijnsel: de stof wordt meteen een stuk minder formeel, meer meetkundig, en al na de eerste berekeningen en voorbeelden komen er leuke toepassingen. Voor een verdere uitdieping, waarbij ook het standpunt van de overdekkingsruimten aan bod komt, verwijs ik naar het vak Algebraïsche Topologie.

Ik vermijd in deze syllabus zoveel mogelijk alle subtiliteiten die te maken hebben met verzamelingenleer, gewoon omdat ik ze niet interessant genoeg vind voor een eerste college topologie. Ik ga derhalve op een volstrekt naïeve manier om met de grondslagen van de verzamelingenleer, en ik behandel geen voorbeelden (van het soort "wel aftelbaar compact maar niet compact") die gebruik maken van ordinaalgetallen etc. Voor dergelijke aspecten verwijs ik naar andere leerboeken.

Waar het de terminologie betreft ben ik soms, bij gebrek aan een algemeen geaccepteerde standaard, gedwongen een keuze te maken. Meestal komt de hier gebruikte terminologie overeen met Bourbaki (zie de literatuurverwijzingen); uitzondering: voor "compact" veronderstel ik niet dat de ruimte Hausdorffs is, dus mijn "compact" is Bourbaki's "quasi-compact". Verder gebruik ik consequent "wegsamenhangend" en vermijd ik de term "boogsamenhangend", omdat "arc connected" in sommige literatuur een strictere betekenis heeft.

Bij het samenstellen van de opgaven heb ik veelvuldig geleend uit een collectie opgaven die in de jaren 80 zijn verzameld door Rob Schrauwen, in die tijd promovendus aan de Universiteit Utrecht. Verder wil ik Jochen Heinloth, Said el Marzguioui, Eric Opdam en Maarten Solleveld bedanken voor hun suggesties en correcties. Uiteraard houd ik mij bij iedereen van harte aanbevolen voor verdere opmerkingen.

Ben Moonen
december 2008

INHOUD

HOOFDSTUK 1

Basisbegrippen en eerste voorbeelden

1.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een *topologie op* X is een collectie $\mathscr{T}$ van deelverzamelingen van X die voldoet aan de volgende eisen:

(i) $\emptyset \in \mathscr{T}$ en $X \in \mathscr{T}$;

(ii) als $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ een collectie van deelverzamelingen van X is en $U_\alpha \in \mathscr{T}$ voor elke $\alpha \in A$, dan is ook $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ een element van $\mathscr{T}$;

(iii) als $V_1, \ldots, V_n$ elementen zijn van $\mathscr{T}$, dan is ook $\cap_{j=1}^n V_j$ een element van $\mathscr{T}$.

1.2. Definitie. Een verzameling voorzien van een topologie noemen we een *topologische ruimte*.

1.3. Opmerking. Om in te zien dat een collectie $\mathscr{T}$ voldoet aan voorwaarde (iii) volstaat het na te gaan dat de doorsnede van twee verzamelingen in $\mathscr{T}$ weer in $\mathscr{T}$ ligt. Anders gezegd: s we mogen conditie (iii) vervangen door:

(iii)$'$ als V en W elementen zijn van $\mathscr{T}$, dan is ook $V \cap W$ een element van $\mathscr{T}$.

1.4. Terminologie. Als een topologie $\mathscr{T}$ op een verzameling X gegeven is, dan noemen we de deelverzamelingen $U \subseteq X$ die in $\mathscr{T}$ zitten de *open* deelverzamelingen, of de open delen. (Ook zeggen we wel: "U is open in X".) De definitie kan dus als volgt worden gelezen: Een topologie op X geef je door een collectie van deelverzamelingen van X aan te wijzen, die je de open deelverzamelingen noemt, waarbij moet gelden:

(i) $\emptyset$ en X zijn open;

(ii) de vereniging van (een mogelijk oneindige collectie) open verzamelingen is weer open;

(iii) de doorsnede van een eindig aantal open delen is weer open.

We noemen een deelverzameling $C \subseteq X$ een *gesloten* deelverzameling als het complement $X \setminus C$ open is in X. Let wel: een deelverzameling van X kan zowel open als gesloten zijn. Bijvoorbeeld: $\emptyset$ en X zijn zowel open als gesloten. Net zo goed kan het gebeuren dat een deelverzameling open noch gesloten is.

In de praktijk schrijven we vaak "Zij X een topologische ruimte" en hebben we het gewoon over de open of gesloten delen van X. Daarmee bedoelen we dan dat op de verzameling X een topologie gegeven is, zonder dat we deze expliciet benoemen. Als het wel van belang is om de topologie expliciet te maken dan zeggen we bijvoorbeeld: "Zij $\mathscr{T}$ een topologie op de verzameling X", of dan geven we op een andere manier aan wat de topologie op X is.

1.5. Lemma. *Zij X een topologische ruimte. Dan geldt:*

(i) *$\emptyset$ en X zijn gesloten;*

(ii) *de doorsnede van (een mogelijk oneindige collectie) gesloten delen van X is weer gesloten;*

(iii) *de vereniging van een eindig aantal gesloten delen is weer gesloten.*

Bewijs. De bewering in (i) volgt direct uit de definities.

Voor (ii), zij $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ een collectie van gesloten deelverzamelingen van X. Laat $U_\alpha := X \setminus C_\alpha$. Dan is $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ een collectie open delen, dus vanwege conditie (ii) in Definitie 1.1 is ook $U := \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ open in X. Maar U is precies het complement van $\cap_{\alpha \in A} C_\alpha$, dus deze laatste verzameling is gesloten.

Het bewijs van (iii) gaat analoog: als $D_1, \ldots, D_n$ gesloten zijn in X, dan is $V_j := X \setminus D_j$ open in X, dus ook $V := V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ is open. Maar V is het complement van $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$, dus deze laatste verzameling is gesloten. □

We kunnen een topologie ook geven door te specificeren wat de gesloten deelverzamelingen zijn. Preciezer: stel $\mathscr{C}$ is een collectie van deelverzamelingen van X, en noem een deelverzameling $C \subseteq X$ gesloten als $C \in \mathscr{C}$. Stel dat de gesloten deelverzamelingen voldoen aan voorwaarden (i)–(iii) uit Lemma 1.5. Dan is $\mathscr{T} := \bigl\{U \subseteq X \bigm| X \setminus U \in \mathscr{C}\bigr\}$ een topologie op X.

1.6. Voorbeeld. Op $\mathbb{R}$ hebben we de "gewone" topologie, gegeven door de verzamelingen die open zijn in de gebruikelijke zin van het woord. Dus: $U \subseteq \mathbb{R}$ is open als er voor elke $u \in U$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $]u - \varepsilon, u + \varepsilon[\subseteq U$. Het is een eenvoudige opgave om na te gaan dat dit inderdaad voldoet aan de voorwaarden in Definitie 1.1. We noemen deze topologie de *Euclidische topologie*.

1.7. Voorbeeld. Als X een verzameling is en we nemen $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$, de machtsverzameling van X, dan is ten duidelijkste voldaan aan de voorwaarden in Definitie 1.1. De topologie die zo wordt verkregen heet de *discrete topologie* op X. Per definitie is dus elke deelverzameling van X open in deze topologie.

1.8. Voorbeeld. Een ander voorbeeld krijgen we door $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ te nemen. Met andere woorden: $\emptyset$ en X zijn de enige open deelverzamelingen van X. Wederom is het eenvoudig na te gaan dat dit een topologie definieert. We noemen dit de *indiscrete topologie* op X.

1.9. Voorbeeld. Neem een verzameling X, en noem een deelverzameling $C \subseteq X$ gesloten als C een *eindige* deelverzameling is, of als $C = X$. De zo verkregen collectie $\mathscr{C} = \bigl\{C \subseteq X \bigm| C \text{ is eindig}\bigr\} \cup \{X\}$ van gesloten delen, voldoet aan voorwaarden (i)–(iii) uit Lemma 1.5, zoals gemakkelijk na te gaan is. Zoals hierboven uitgelegd, definieert dit dus een topologie op X, die we de *co-eindige topologie* noemen. De naam refereert eraan dat een niet-lege deelverzameling $U \subseteq X$ open is in deze topologie, precies dan als U het complement is van een eindige deelverzameling.

1.10. Deze voorbeelden maken duidelijk dat er op een gegeven verzameling X meerdere topologieën kunnen bestaan. Bijvoorbeeld, op $\mathbb{R}$ hebben we nu al vier verschillende topologieën: Euclidisch, discreet, indiscreet en co-eindig. We kunnen proberen om topologieën met elkaar te vergelijken. Bijvoorbeeld is duidelijk dat de discrete topologie "meer" open verzamelingen heeft dan de Euclidische topologie. De terminologie is als volgt.

1.11. Definitie. Zij X een verzameling. Als $\mathscr{T}_1$ en $\mathscr{T}_2$ topologieën op X zijn, dan zeggen we dat $\mathscr{T}_1$ *fijner* is dan $\mathscr{T}_2$, als elke deelverzameling $U \subseteq X$ die open is in $\mathscr{T}_2$ ook open is in $\mathscr{T}_1$. Anders gezegd: $\mathscr{T}_1$ is fijner dan $\mathscr{T}_2$ als $\mathscr{T}_1 \supseteq \mathscr{T}_2$ als deelverzamelingen van $\mathscr{P}(X)$. Als $\mathscr{T}_1$ fijner is dan $\mathscr{T}_2$, dan zeggen we ook dat $\mathscr{T}_2$ *grover* is dan $\mathscr{T}_1$.

Merk op dat "fijner dan" hier eigenlijk betekent: "fijner dan of even fijn".

1.12. Voorbeeld. De discrete topologie op X is fijner dan elke andere topologie. De indiscrete topologie is grover dan elke andere.

1.13. Voorbeeld. De vier reeds genoemde topologieën op $\mathbb{R}$ verhouden zich als volgt:

$$\mathscr{T}_{\text{discreet}} \supseteq \mathscr{T}_{\text{Eucl}} \supseteq \mathscr{T}_{\text{co-eindig}} \supseteq \mathscr{T}_{\text{indiscreet}} .$$

Ga dit zelf na!

Dit laatste voorbeeld moet niet de indruk wekken dat twee topologieën altijd vergelijkbaar zijn. We zullen al gauw voorbeelden tegenkomen van topologieën die niet onderling vergelijkbaar zijn, ook op de verzameling $\mathbb{R}$.

1.14. Opmerking. De volgende eigenschappen mogen duidelijk zijn.
(i) Als $\mathscr{T}_1$ fijner is dan $\mathscr{T}_2$ en $\mathscr{T}_2$ is fijner dan $\mathscr{T}_3$, dan is ook $\mathscr{T}_1$ fijner dan $\mathscr{T}_3$.
(ii) Als $\mathscr{T}_1$ fijner is dan $\mathscr{T}_2$ en $\mathscr{T}_2$ is fijner dan $\mathscr{T}_1$, dan zijn $\mathscr{T}_1$ en $\mathscr{T}_2$ gelijk.

1.15. Er zijn diverse situaties waarbij we uit een of meer topologische ruimten een nieuwe topologische ruimte kunnen construeren. Zo zullen we later zien, dat als X_1 en X_2 topologische ruimten zijn, er op de produktruimte $X_1 \times X_2$ weer een natuurlijke topologie is. Het geval dat we hier zullen bekijken is dat van een topologische ruimte X en een deelverzameling $Y \subseteq X$. Zoals we zullen zien "erft" Y een topologie van X.

1.16. Lemma. *Zij X een topologische ruimte, $Y \subseteq X$ een deelverzameling. Noem een deelverzameling $V \subseteq Y$ open in Y als er een open $U \subseteq X$ bestaat zo dat $V = U \cap Y$. Dan is de collectie van deelverzamelingen $V \subseteq Y$ die open zijn in Y een topologie op Y.*

Nota bene: als V open is in Y dan hoeft dit niet te betekenen dat V open is in X, dus we dienen goed te onderscheiden of we V opvatten als een deelverzameling van X, danwel als een deelverzameling van Y. Vandaar dat we meestal zeggen "V is open *in* X", danwel "V is open *in* Y", om aan te geven welk van de twee gevallen we bekijken.

Bewijs. Allereerst is duidelijk dat $\emptyset$ en Y open zijn in Y; immers $\emptyset = \emptyset \cap Y$ en $Y = X \cap Y$. Stel vervolgens dat we een collectie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ hebben van deelverzamelingen $V_\alpha \subseteq Y$ die open zijn in Y. Per definitie betekent dit, dat er open $U_\alpha \subseteq X$ bestaan zo dat $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Maar dan is $\cup_{\alpha \in A} V_\alpha = \big(\cup_{\alpha \in A} U_\alpha\big) \cap Y$, dus de vereniging van de verzamelingen V_α is weer open in Y. Op soortgelijke manier, als $V_1, \ldots, V_n$ open zijn in Y, schrijf $V_i = U_i \cap Y$ voor een open $U_i \subseteq X$; dan is $V_1 \cap \cdots \cap V_n = \big(U_1 \cap \cdots \cap U_n\big) \cap Y$, en omdat $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ open is in X toont dit aan dat $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ open is in Y. Dit laat zien dat de gegeven definitie inderdaad een topologie op Y oplevert. $\square$

1.17. Definitie. We noemen de in Lemma 1.16 beschreven topologie de *op Y geïnduceerde topologie*, of ook wel de *deelruimte topologie*.

1.18. Voorbeeld. Beschouw $\mathbb{R}$ met de Euclidische topologie, en bekijk de deelverzameling $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Dan is de op $\mathbb{Z}$ geïnduceerde topologie de discrete topologie. Immers, als $n \in \mathbb{Z}$ dan is $U = \big]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\big[$ open in $\mathbb{R}$ en $U \cap \mathbb{Z} = \{n\}$. Dus voor elke $n \in \mathbb{Z}$ is $\{n\} \subset \mathbb{Z}$ open in de geïnduceerde topologie, en daaruit volgt direct dat de geïnduceerde topologie op $\mathbb{Z}$ de discrete topologie is. De op de deelverzameling $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ geïnduceerde topologie is zeker niet de discrete topologie. Immers, als $q \in \mathbb{Q}$ en $U =]q-a, q+b[\subset \mathbb{R}$ is een open interval om q, dan heeft $U \cap \mathbb{Q}$ oneindig veel elementen.

1.19. Voorbeeld. Stel we geven een verzameling X de co-eindige topologie. Als $Y \subseteq X$ dan is de geïnduceerde topologie op Y gelijk aan de co-eindige topologie op Y.

Opgaven bij hoofdstuk 1.

Opgave 1.1. Als X een verzameling is met $\#X = 2$, hoeveel verschillende topologieën op X zijn er dan? Maak een diagram van alle topologieën op X, waarbij je voor elk tweetal aangeeft of de ene topologie al dan niet fijner is dan de andere. Hoeveel topologieën zijn er als $\#X = 3$?

Opgave 1.2. Zij X een verzameling met tenminste twee elementen. Kies een willekeurige niet-lege deelverzameling $U \subsetneq X$. Laat zien dat $\mathscr{T} = \{\emptyset, U, X\}$ een topologie is op X. Laat ook zien dat verschillende keuzes van U leiden tot onvergelijkbare topologieën.

Opgave 1.3. Met een *rechterhalflijn* in $\mathbb{R}$ bedoelen we een interval van de vorm $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.

(i) Laat zien dat
$$\mathscr{T} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\text{rechterhalflijnen in } \mathbb{R}\}$$
een topologie is. We noemen deze de *rechterhalflijnentopologie*. (Op soortgelijke manier is er de linkerhalflijnentopologie, met als open verzamelingen de halflijnen van de vorm $]-\infty, b[$, alsmede $\emptyset$ en $\mathbb{R}$.)

(ii) Vergelijk de rechterhalflijnentopologie, qua fijnheid, met de topologieën op $\mathbb{R}$ die genoemd zijn in Voorbeeld 1.13.

(iii) Is de collectie
$$\mathscr{T}' := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\text{gesloten halflijnen van de vorm } [a, \infty[\}$$
ook een topologie op $\mathbb{R}$?

Opgave 1.4. Zij $\mathscr{T}$ een topologie op een *eindige* verzameling X. Definieer een nieuwe deelverzameling $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{P}(X)$ door te stellen dat $V \in \mathscr{T}'$ dan en slechts dan als $X \setminus V \in \mathscr{T}$. Laat zien dat $\mathscr{T}'$ weer een topologie definieert op X.

Opgave 1.5. *De co-aftelbare topologie.* Gegeven een verzameling X, noem een verzameling $U \subseteq X$ open als $U = \emptyset$ of als het complement $X \setminus U$ een aftelbare verzameling is. Laat zien dat dit een topologie geeft op X.

Opgave 1.6. Gegeven is een topologische ruimte X en een deelverzameling $Y \subseteq X$. We geven Y de geïnduceerde topologie. Gegeven is verder een deelverzameling $Z \subseteq Y$.

(i) Laat zien: Z is gesloten in Y dan en slechts dan als er een gesloten $W \subseteq X$ bestaat zo dat $Z = W \cap Y$.

(ii) Schrijf $\mathscr{T}_X$ voor de topologie op X en $\mathscr{T}_Y$ voor de geïnduceerde topologie op Y. Laat zien dat de door $\mathscr{T}_X$ geïnduceerde topologie op $Z \subseteq X$ dezelfde is als de door $\mathscr{T}_Y$ geïnduceerde topologie op $Z \subseteq Y$.

HOOFDSTUK 2

Het inwendige, de afsluiting en de rand

Zij X een topologische ruimte met topologie $\mathscr{T}$.

2.1. Definitie. Als $x \in X$ dan noemen we een open verzameling $U \subseteq X$ met $x \in U$ een *open omgeving* van x.

2.2. Definitie. Zij A een deelverzameling van X. Dan definiëren we het *inwendige van A*, notatie A° of $\mathrm{inw}(A)$, als de vereniging van alle open deelverzamelingen $U \subseteq X$ die geheel bevat zijn in A. Dus:

$$A^\circ := \bigcup_{U \text{ open}, U \subseteq A} U \,.$$

Een punt $a \in A^\circ$ heet een *inwendig punt* van A.

Het volgt direct uit de definities dat een punt $a \in A$ een inwendig punt is dan en slechts dan als er een open omgeving van a is die geheel bevat is in A.

2.3. Propositie. *Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte X. Dan is het inwendige A° de grootste open deelverzameling van X die bevat is in A.*

Bewijs. Het is duidelijk dat A° open is, want per definitie is het een vereniging van open deelverzamelingen. Anderzijds, als $U \subseteq X$ open is en U is bevat in A, dan is $U \subseteq A^\circ$. $\square$

2.4. Gevolg. *Een deelverzameling $A \subseteq X$ is open dan en slechts dan als $A = A^\circ$.*

2.5. Voorbeeld. Neem $X = \mathbb{R}$ met de Euclidische topologie. Het inwendige van de deelverzameling $[0,1] \subset \mathbb{R}$ is het open interval $]0,1[$. De verzamelingen $]0,1]$ en $[0,1[$ hebben ook $]0,1[$ als inwendige. Het inwendige van $[0,\infty[$ is $]0,\infty[$. Het inwendige van de deelverzameling $\mathbb{Q}$ is leeg.

2.6. Voorbeeld. Neem nu $X = \mathbb{R}$ met de co-eindige topologie, en beschouw een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{R}$. Als het complement $\mathbb{R} \setminus A$ eindig is, dan is A open en wegens Gevolg 2.4 is $A = A^\circ$. Als $\mathbb{R} \setminus A$ oneindig is, dan is er geen enkele niet-lege open deelverzameling van X die bevat is in A, en in dit geval vinden we dat $A^\circ = \emptyset$.

2.7. Definitie. Zij A een deelverzameling van X. Dan definiëren we de *afsluiting van A*, notatie $\overline{A}$, als de doorsnede van alle gesloten deelverzamelingen $C \subseteq X$ die A omvatten. Dus:

$$\overline{A} := \bigcap_{C \text{ gesloten}, A \subseteq C} C \,.$$

2.8. Propositie. *Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte X. Dan is de afsluiting $\overline{A}$ de kleinste gesloten deelverzameling van X die A bevat.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $\overline{A}$ gesloten is, want per definitie is het een doorsnede van gesloten deelverzamelingen. Anderzijds, als $C \subseteq X$ gesloten is en C omvat A, dan is $C \supseteq \overline{A}$. $\square$

2.9. Gevolg. *Een deelverzameling $A \subseteq X$ is gesloten dan en slechts dan als $A = \overline{A}$.*

2.10. Definitie. We zeggen dat een deelverzameling $A \subseteq X$ *dicht ligt in* X, of een *dichte deelverzameling* is als $\overline{A} = X$.

2.11. Voorbeeld. De rationale getallen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ liggen dicht in $\mathbb{R}$ voor de Euclidische topologie, en ook het complement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ligt dicht.

2.12. Definitie. Zij A een deelverzameling van X. Dan definiëren we de *rand van* A, notatie ∂A, als

$$\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ .$$

Een punt $a \in \partial A$ heet een *randpunt* van A.

2.13. Propositie. *Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte X.*

(i) *Er geldt dat $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$ en $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.*

(ii) *Er geldt dat $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

(iii) *Een punt $x \in X$ ligt in $\overline{A}$ dan en slechts dan als elke open omgeving U van x een niet-lege doorsnede heeft met A.*

(iv) *Een punt $x \in X$ ligt in ∂A dan en slechts dan als voor elke open omgeving U van x geldt dat $U \cap A \neq \emptyset$ en $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.*

Bewijs. Het bewijs van (i) is een eenvoudige oefening die we aan de lezer laten en (ii) volgt direct uit (i) en de definitie van ∂A. Uit Propositie 2.8 volgt dat een punt $x \in X$ *niet* in $\overline{A}$ ligt d.e.s.d.a. er een open omgeving van x is die disjunct is van A, en (iii) is gewoon de omkering hiervan. Bewering (iv), tenslotte, volgt direct uit (ii) en (iii). □

2.14. Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een *open overdekking van* X is een collectie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ van open deelverzamelingen van X zo dat $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

2.15. Lemma. *Zij $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ een open overdekking van de topologische ruimte X.*

(i) *Als $Y \subseteq X$, dan is Y open in X dan en slechts dan als $Y \cap U_\alpha$ open is in U_α voor elke $\alpha \in A$.*

(ii) *Als $Z \subseteq X$, dan is Z gesloten in X dan en slechts dan als $Z \cap U_\alpha$ gesloten is in U_α voor elke $\alpha \in A$.*

Bewijs. (i) Als $Y \subseteq X$ open is, dan is $Y \cap U_\alpha$ open in U_α, per definitie van de op U_α geïnduceerde topologie. Voor het omgekeerde, stel dat $Y_\alpha := Y \cap U_\alpha$ open is in U_α voor elke $\alpha \in A$. Per definitie is er dan een open $Y'_\alpha \subseteq X$ zo dat $Y_\alpha = Y'_\alpha \cap U_\alpha$. Maar we hebben aangenomen dat U_α open is in X, dus ook Y_α is open *in* X. Maar dan is $Y = \cup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ een vereniging van open deelverzamelingen van X, dus Y is open in X.

(ii) Pas (i) toe met $Y = X \setminus Z$. □

Als afsluiting van dit hoofdstuk voeren we een eerste zogenaamde "scheidings-eigenschap" in. Later zullen we enkele gerelateerde eigenschappen tegenkomen; zie Hoofdstuk 9.

2.16. Definitie. Een topologische ruimte X heet een *Hausdorffruimte* als er voor elk tweetal punten $x, y \in X$ met $x \neq y$, open omgevingen $x \in U \subseteq X$ en $y \in V \subseteq X$ bestaan met $U \cap V = \emptyset$.

Als X een Hausdorffruimte is dan zeggen we ook wel "X is Hausdorffs".

2.17. Voorbeelden.

(i) Neem $X = \mathbb{R}$ met de rechterhalflijnentopologie. Als U en V niet-lege open deelverzamelingen zijn van X dan is $U \cap V \neq \emptyset$. Hieruit volgt meteen dat X niet Hausdorffs is.

(ii) Als X een oneindige verzameling is, dan is X niet Hausdorffs voor de co-eindige topologie. Het argument is hetzelfde als in (ii).

(iii) Stel $\mathscr{T}_1$ en $\mathscr{T}_2$ zijn topologieën op X met $\mathscr{T}_2$ fijner dan $\mathscr{T}_1$. Dan geldt:

$$(X, \mathscr{T}_1) \quad \text{is Hausdorffs} \qquad \Longrightarrow \qquad (X, \mathscr{T}_2) \quad \text{is Hausdorffs}\,,$$

zoals onmiddellijk volgt uit de definitie.

2.18. Propositie. *Zij X een Hausdorffruimte. Dan is elke 1-punts verzameling $\{x\} \subseteq X$ gesloten.*

Bewijs. Laat $x \in X$ en schrijf $W := X \setminus \{x\}$. We willen laten zien dat W open is. Maar als $y \in W$ dan is $x \neq y$, dus de Hausdorff-eigenschap zegt dat er open omgevingen U van x en V van y bestaan met $U \cap V = \emptyset$. Maar dan is V bevat in W. Dus voor elke $y \in W$ is er een open omgeving van y die geheel bevat is in W. Dit betekent dat $W = W^\circ$, dus W is open. $\square$

Opgaven bij hoofdstuk 2.

Opgave 2.1. Zij X een topologische ruimte en laat A, $B \subseteq X$.

(i) Toon aan dat $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ en $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(ii) Toon aan dat $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ en $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, en geef voorbeelden waaruit blijkt dat deze inclusies in het algemeen strict zijn.

Opgave 2.2. Zij X een topologische ruimte. In deze opgave schrijven we, voor een deelverzameling $A \subseteq X$,

$$\begin{aligned} \complement A &:= X \setminus A && \text{voor het complement van } A,\\ iA &:= A^\circ && \text{voor het inwendige van } A,\\ aA &:= \overline{A} && \text{voor de afsluiting van } A. \end{aligned}$$

Zodoende krijgen we drie afbeeldingen $\complement$, i, a: $\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$.

(i) Toon aan dat de volgende relaties gelden:

$$\complement\complement = \mathrm{id}\,, \quad ii = i\,, \quad aa = a\,, \quad \complement i = a\complement\,, \quad \complement a = i\complement\,.$$

(ii) Toon aan dat $iaia = ia$ en $aiai = ai$.

(iii) Toon aan dat, beginnend met een deelverzameling $A \subseteq X$, we door middel van de operaties a en i ten hoogste 7 verschillende deelverzamelingen van X kunnen maken.

(iv) Toon aan dat, beginnend met een deelverzameling $A \subseteq X$, we door middel van de operaties $\complement$, a en i ten hoogste 14 verschillende deelverzamelingen van X kunnen maken. Laat zien dat je deze ook allemaal kunt maken door alleen $\complement$ en a te gebruiken.

(v) Geef een voorbeeld van een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ (Euclidische topologie) waarvoor je inderdaad 14 verschillende verzamelingen krijgt door middel van de drie operaties.

Opgave 2.3. Bepaal het inwendige, de afsluiting en de rand van de verzameling positieve rationale getallen $\mathbb{Q}_{>0} \subset \mathbb{R}$ in elk van de volgende topologieën:
(1) de discrete topologie;
(2) de Euclidische topologie;
(3) de rechterhalflijnentopologie (zie Opgave 1.3);
(4) de co-eindige topologie;
(5) de co-aftelbare topologie (zie Opgave 1.5).

Opgave 2.4. *De uitgesloten-punt-topologie.* Zij X een verzameling en kies een element $P \in X$. Laat

$$\mathscr{T}_P := \{U \subset X \mid P \notin U\} \cup \{X\}.$$

(i) Laat zien dat $\mathscr{T}_P$ een topologie is.
(ii) Laat zien dat $\mathscr{T}_P$ en $\mathscr{T}_Q$ niet vergelijkbaar zijn als $P \neq Q$.
(iii) Als $A \subseteq X$, geef een expliciete formule voor $\overline{A}$.

Opgave 2.5. Gegeven zijn twee topologieën $\mathscr{T}_1$ en $\mathscr{T}_2$ op een verzameling X, met $\mathscr{T}_1$ fijner dan $\mathscr{T}_2$. Als $A \subseteq X$, schrijf $\mathrm{inw}_i(A)$ voor het inwendige van A in de topologie $\mathscr{T}_i$. Op soortgelijke manier, schrijf $\mathrm{afsl}_i(A)$ en $\partial_i(A)$ voor de afsluiting en de rand van A m.b.t. $\mathscr{T}_i$.
(i) Laat zien dat $\mathrm{inw}_2(A) \subseteq \mathrm{inw}_1(A)$, en geef een voorbeeld waaruit blijkt dat deze inclusie in het algemeen strict is.
(ii) Geef, en bewijs, een soortgelijke bewering voor de afsluitingen.
(iii) Laat zien dat $\partial_1(A) \subseteq \partial_2(A)$.

Opgave 2.6. Zij X een topologische ruimte en laat $A \subseteq X$. Een punt $x \in X$ heet een *verdichtingspunt van A*, of ook wel een *ophopingspunt*, als iedere open omgeving van x een punt $y \in A$ bevat met $y \neq x$. De verzameling van verdichtingspunten van A noteren we met A'.
(i) Bewijs dat $A' \subseteq \overline{A}$.
(ii) Bewijs dat $\overline{A} = A \cup A'$.
(iii) Bewijs dat $A \subseteq X$ gesloten is dan en slechts dan als $A' \subseteq A$.

Opgave 2.7. Zij X een topologische ruimte. Als A en B open deelverzamelingen zijn die dicht liggen in X, bewijs dat dan ook $A \cap B$ dicht ligt. (Je kunt dit nog iets aanscherpen: het is voldoende te eisen dat een van beide deelverzamelingen open is.) Concludeer dat een eindige doorsnede van open dichte deelverzamelingen weer dicht ligt. Laat aan de hand van een voorbeeld zien, dat als A en B willekeurige deelverzamelingen van X zijn die dicht liggen, $A \cap B$ niet dicht hoeft te zijn in X.

HOOFDSTUK 3

De topologie voortgebracht door een basis

In de praktijk komen we vaak de volgende situatie tegen. Stel je hebt een verzameling X en een collectie $\mathscr{Q}$ van deelverzamelingen van X. Stel nu je wilt een topologie maken op X waarin alle deelverzamelingen $U \subseteq X$ uit de collectie $\mathscr{Q}$ open zijn. Natuurlijk bestaat zo'n topologie, want bijvoorbeeld de discrete topologie op X voldoet aan de gestelde eis. Maar wat als je de topologie "zo zuinig mogelijk" wilt maken? We bewijzen eerst dat er een grofste topologie is waarin alle $U \in \mathscr{Q}$ open zijn.

3.1. Lemma. *Zij X een verzameling. Zij $\{\mathscr{U}_\beta\}_{\beta \in B}$ een collectie topologieën op X. Dan is $\mathscr{T} := \cap_{\beta \in B} \mathscr{U}_\beta$ weer een topologie op X.*

De doorsnede $\cap_{\beta \in B} \mathscr{U}_\beta$ nemen we binnen de machtsverzameling $\mathscr{P}(X)$ van X. (Bedenk dat een topologie een deelverzameling is van $\mathscr{P}(X)$.) Meer concreet betekent dit dat $\mathscr{T}$ de topologie op X is gegeven door de volgende regel: een deelverzameling $U \subseteq X$ is open in $\mathscr{T}$ dan en slechts dan als U open is in *elk* van de topologieën $\mathscr{U}_\beta$. Merk op dat $\mathscr{T}$ dus de fijnste topologie op X is die grover is dan elk van de gegeven topologieën $\mathscr{U}_\beta$.

Bewijs. Allereerst zien we dat $\emptyset \in \mathscr{T}$ en $X \in \mathscr{T}$; immers, voor elke $\beta \in B$ zijn $\emptyset$ en X open in $\mathscr{U}_\beta$.

Als $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een collectie van deelverzamelingen van X is met $U_\alpha \in \mathscr{T}$ voor alle α, dan is ook de vereniging $U := \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ een element van $\mathscr{T}$. Immers, als $\beta \in B$ dan is elk van de verzamelingen U_α open in de topologie $\mathscr{U}_\beta$ en dus is ook U open in $\mathscr{U}_\beta$. Conclusie: U is open in elk van de topologieën $\mathscr{U}_\beta$, en per definitie van $\mathscr{T}$ geldt dus dat $U \in \mathscr{T}$.

Op soortgelijke manier zien we dat ook een doorsnede van eindig veel elementen van $\mathscr{T}$ weer in $\mathscr{T}$ ligt. Stel maar dat $U_1, \ldots, U_n$ elementen zijn van de collectie $\mathscr{T}$. Als $\beta \in B$ dan zijn $U_1, \ldots, U_n$ open in de topologie $\mathscr{U}_\beta$, en dus is ook $V := U_1 \cap \cdots \cap U_n$ open in $\mathscr{U}_\beta$. Conclusie: V is open in $\mathscr{U}_\beta$ voor elke $\beta \in B$ en per definitie van $\mathscr{T}$ betekent dit dat $V \in \mathscr{T}$. □

3.2. Propositie. *Zij X een verzameling, en zij $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}(X)$ een collectie van deelverzamelingen van X. Dan is er een "grofst mogelijke" topologie op X met de eigenschap dat alle deelverzamelingen $U \in \mathscr{Q}$ open zijn. Preciezer: er bestaat een topologie $\mathscr{T}$ zo dat geldt:*
(a) *elke $U \in \mathscr{Q}$ is open in $\mathscr{T}$;*
(b) *als $\mathscr{U}$ een topologie op X is zo dat elke $U \in \mathscr{Q}$ open is in $\mathscr{U}$, dan is $\mathscr{U}$ fijner dan $\mathscr{T}$.*

Bewijs. Zij $\mathfrak{T}$ de verzameling van alle topologieën $\mathscr{U}$ op X met de eigenschap dat elke $U \in \mathscr{Q}$ open is in $\mathscr{U}$. Met andere woorden:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X) \;\middle|\; \mathscr{U} \text{ is een topologie en } \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{U} \right\}.$$

Merk op dat $\mathfrak{T}$ niet leeg is, want de discrete topologie is een element van $\mathfrak{T}$. Volgens het voorgaande lemma is $\mathscr{T} := \cap_{\mathscr{U} \in \mathfrak{T}} \mathscr{U}$ weer een topologie op X, en dan is duidelijk uit de constructie dat $\mathscr{T}$ inderdaad de gestelde eigenschappen (a) en (b) heeft. □

Het nadeel van deze propositie is dat de gevonden topologie $\mathscr{T}$ niet expliciet gemaakt wordt, hetgeen het lastig maakt om met $\mathscr{T}$ te werken. Gelukkig is het mogelijk om concreet te beschrijven wat de open verzamelingen in $\mathscr{T}$ zijn; zie Gevolg 3.17 hieronder. Voor we zover zijn moet er een beetje gewerkt worden. We kijken eerst naar het geval dat de voorgeschreven collectie van open verzamelingen aan een extra voorwaarde voldoet; in dat geval blijkt dat we de topologie $\mathscr{T}$ heel concreet kunnen beschrijven.

3.3. Definitie. Zij X een verzameling. Een *basis* voor een topologie op X is een collectie $\mathscr{B}$ van deelverzamelingen van X met de volgende eigenschappen:
(i) voor elke $x \in X$ is er een $B \in \mathscr{B}$ zo dat $x \in B$;
(ii) als B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$ en $x \in B_1 \cap B_2$, dan is er een $B_3 \in \mathscr{B}$ met $x \in B_3$ en $B_3 \subseteq (B_1 \cap B_2)$.

Als $\mathscr{T}$ de grofste topologie op X is zo dat alle $B \in \mathscr{B}$ open zijn in $\mathscr{T}$, dan zeggen we dat $\mathscr{B}$ een *basis is voor* $\mathscr{T}$. Ook zeggen we dat $\mathscr{T}$ de *door* $\mathscr{B}$ *voortgebrachte topologie* is.

3.4. Propositie. *Zij $\mathscr{B}$ een basis voor een topologie op een verzameling X. Zij $\mathscr{T}$ de door $\mathscr{B}$ voortgebrachte topologie. Als $U \subseteq X$ een deelverzameling is, dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*
(i) *U is open in $\mathscr{T}$;*
(ii) *voor elke $x \in U$ is er een $B \in \mathscr{B}$ zo dat $x \in B$ en $B \subseteq U$;*
(iii) *U kan geschreven worden als een vereniging van verzamelingen B_α uit de collectie $\mathscr{B}$.*

NB: zoals steeds is onze conventie, dat een lege vereniging van verzamelingen de lege verzameling is. Dus $U = \emptyset$ voldoet aan voorwaarde (iii).

Bewijs. Dat (ii) en (iii) equivalent zijn is evident. Verder is duidelijk dat (iii) $\Rightarrow$ (i), want per definitie is elke B_α uit de collectie $\mathscr{B}$ open in $\mathscr{T}$. Om in te zien dat (i) $\Rightarrow$ (ii) redeneren we als volgt. Zij $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{P}(X)$ de collectie van alle deelverzamelingen $U \subseteq X$ die eigenschap (ii) hebben. *Claim:* $\mathscr{T}'$ is een topologie op X.

Voordat we deze claim bewijzen, laten we eerst inzien hoe daaruit de implicatie (i) $\Rightarrow$ (ii) volgt. Merk allereerst op dat elke $B \in \mathscr{B}$ deel uitmaakt van de collectie $\mathscr{T}'$. Dus als $\mathscr{T}'$ een topologie is, dan volgt, per definitie van $\mathscr{T}$, dat $\mathscr{T}'$ fijner is dan $\mathscr{T}$. Maar dat betekent precies dat elke $U \subseteq X$ die open is in de topologie $\mathscr{T}$ ook in de collectie $\mathscr{T}'$ zit, en dus, per definitie van $\mathscr{T}'$, aan (ii) voldoet. Dit is precies wat we willen aantonen.

Rest dus nog de claim te bewijzen. Het is duidelijk dat $U = \emptyset$ en $U = X$ voldoen aan (ii). Stel vervolgens dat $\{U_\alpha\}$ een collectie deelverzamelingen van X is die allemaal voldoen aan (ii). We moeten inzien dat dan ook $U = \cup_\alpha U_\alpha$ aan (ii) voldoet. Welnu, als $x \in U$, dan is er een α met $x \in U_\alpha$, en omdat U_α aan (ii) voldoet bestaat er een $B \in \mathscr{B}$ met $X \in B \subseteq U_\alpha \subseteq U$.

Tenslotte moeten we aantonen dat als U_1 en U_2 deelverzamelingen zijn van X die beide voldoen aan (ii), dan voldoet ook $U_1 \cap U_2$ aan (ii). Als $x \in U_1 \cap U_2$ dan volgt uit de aannamen dat er $B_j \in \mathscr{B}$ zijn ($j = 1, 2$) met $x \in B_j \subseteq U_j$. Volgens (ii) uit Definitie 3.3 is er dan een $B_3 \in \mathscr{B}$ met $x \in B_3$ en $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Dit bewijst dat ook $U_1 \cap U_2$ voldoet aan voorwaarde (ii). Dit bewijst onze claim, en daarmee de propositie. □

3.5. Voorbeeld. Laat $X = \mathbb{R}$. We noemen een deelverzameling $B \subseteq \mathbb{R}$ een open interval als er a, $b \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zijn zo dat $B =]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Dus,

$$\emptyset, \quad \mathbb{R}, \quad]-\infty, 3[\,, \quad]-2.064\,, \sin(2)[\quad \text{en} \quad]1 + \log(\pi), \infty[$$

zijn voorbeelden van open intervallen, maar

$$\mathbb{Q}\,, \quad [0,\infty[\quad \text{en} \quad]1,2[\,\cup\,]3,4[$$

zijn geen open intervallen. Het is niet moeilijk na te gaan dat de collectie $\mathscr{B}$ van alle open intervallen voldoet aan voorwaarden (i) en (ii) uit Definitie 3.3; derhalve is $\mathscr{B}$ een basis voor een topologie op $\mathbb{R}$. De door $\mathscr{B}$ voortgebrachte topologie $\mathscr{T}$ op $\mathbb{R}$ is natuurlijk niets anders dan de Euclidische topologie uit Voorbeeld 1.6. Immers, elk open interval is open in de Euclidische topologie, dus $\mathscr{T}$ is grover dan $\mathscr{T}_{\mathrm{Eucl}}$. Omgekeerd zien we uit eigenschap (ii) hierboven dat elke deelverzameling $U \subseteq \mathbb{R}$ die open is in de Euclidische topologie, ook open is in $\mathscr{T}$. Dus geldt inderdaad dat $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\mathrm{Eucl}}$.

Er zijn veel interessante voorbeelden waarin een topologie gedefinieerd wordt door een basis aan te geven. Als eerste generaliseren we het vorige voorbeeld naar verzamelingen X voorzien van een afstandsbegrip.

3.6. Definitie. Zij X een verzameling. Een *metriek op* X is een functie

$$d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

die voldoet aan de volgende voorwaarden:
(i) $d(x,y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$;
(ii) *symmetrie:* $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle x, $y \in X$;
(iii) *driehoeksongelijkheid:* $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ voor alle x, y, $z \in X$.

Een verzameling voorzien van een metriek heet een *metrische ruimte*.

3.7. Een metriek op een verzameling X geeft aanleiding tot een topologie op X. Allereerst definiëren we, voor $x \in X$ en een reëel getal $r \geqslant 0$,

$$B(x,r) := \bigl\{ y \in X \bigm| d(x,y) < r \bigr\}\,.$$

We noemen dit de *open bol met straal* r *en middelpunt* x. Merk op: als $r = 0$ dan is $B(x,r) = \emptyset$.

We beweren dat de collectie

$$\mathscr{B} := \bigl\{ B(x,r) \bigm| x \in X\,, r > 0 \bigr\}$$

een basis is voor een topologie op X. Het is evident dat voldaan is aan voorwaarde (i) uit Definitie 3.3. Rest nog om in te zien dat ook aan (ii) is voldaan. Stel je hebt x, x_1, $x_2 \in X$ en r_1, $r_2 > 0$ zo dat

$$x \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)\,.$$

Neem een reëel getal $\rho > 0$ met $\rho < r_1 - d(x_1,x)$ en $\rho < r_2 - d(x_2,x)$, bijvoorbeeld $\rho = (1/2)\cdot \min\bigl\{r_1 - d(x_1,x), r_2 - d(x_2,x)\bigr\}$. Dan is $B(x,\rho)$ een open bol om x met $B(x,\rho) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. Immers: als $d(x,y) < \rho$ dan volgt uit de driehoeksongelijkheid dat

$$d(x_1,y) \leqslant d(x_1,x) + \rho < r_1 \qquad \text{en} \qquad d(x_2,y) \leqslant d(x_2,x) + \rho < r_2\,,$$

zodat inderdaad $y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. Dit bewijst onze bewering.

De topologie die door de basis $\mathscr{B}$ van open bollen wordt voortgebracht noemen we de *door de metriek geïnduceerde topologie* op X, of de *metrische topologie* op X.

De equivalentie (i) $\Leftrightarrow$ (ii) uit Prop. 3.4 betekent dat een deelverzameling $U \subseteq X$ open is, dan en slechts dan als er voor elke $x \in U$ een reëel getal $r > 0$ bestaat zo dat $B(x, r) \subseteq U$.

3.8. Voorbeeld. De *Euclidische metriek* op $\mathbb{R}^n$ is de metriek gegeven door

$$d\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

De geïnduceerde topologie heet de *Euclidische topologie* op $\mathbb{R}^n$.

Merk op dat verschillende metrieken dezelfde topologie kunnen induceren. Bijvoorbeeld, stel we nemen reële getallen $c_1, \ldots, c_n > 0$ en definiëren een metriek d' op $\mathbb{R}^n$ door

$$d'\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = \sqrt{c_1 \cdot (x_1 - y_1)^2 + \cdots + c_n \cdot (x_n - y_n)^2}\ . \tag{1}$$

Als niet alle c_j gelijk zijn aan 1 dan is d' een andere metriek dan d, maar de geïnduceerde topologie is wel dezelfde; zie opgave 3.1.

3.9. Opmerking. Een topologische ruimte $(X, \mathscr{T})$ heet *metriseerbaar* als er een metriek op X bestaat zo dat $\mathscr{T}$ de aan de metriek geassocieerde topologie is. Merk op dat een metriseerbare ruimte Hausdorffs is. Immers, als d een metriek is op X en we hebben twee punten $x \neq y$, dan is $d := d(x, y) > 0$ en het volgt gemakkelijk uit de driehoeksongelijkheid dat de open bollen $B(x, d/3)$ en $B(y, d/3)$ disjunct zijn. Dit betekent dat we voorbeelden kennen van topologische ruimten die *niet* metriseerbaar zijn, want we hebben reeds voorbeelden gezien van ruimten die niet Hausdorffs zijn. Het is een interessant probleem om een handig criterium te vinden waarmee je kunt beslissen of een topologische ruimte al dan niet metriseerbaar is. We komen hier op terug in Hoofdstuk 9.

3.10. Het begrip *basis voor een topologie* kan op twee verschillende manieren gebruikt worden. Allereerst kan het zijn dat je een basis als uitgangspunt neemt voor de definitie van een topologie. Dat is eigenlijk wat we hierboven gedaan hebben. In dit geval begin je met een basis $\mathscr{B}$ voor een topologie, zoals gedefinieerd in 3.3, en definieer je vervolgens een topologie $\mathscr{T}$ als de topologie die door $\mathscr{B}$ wordt voortgebracht.

Het kan ook zijn dat je al een topologie $\mathscr{T}$ op een verzameling X hebt, en dat je het vervolgens hebt over "een basis voor de (gegeven!) topologie $\mathscr{T}$". Namelijk: gegeven een topologie $\mathscr{T}$ op X en een collectie $\mathscr{B}$ van deelverzamelingen van X, dan zeg je dat $\mathscr{B}$ een basis is voor $\mathscr{T}$, als $\mathscr{B}$ een basis is in de zin van Definitie 3.3 en als bovendien $\mathscr{T}$ gelijk is aan de door $\mathscr{B}$ voortgebrachte topologie. Met behulp van Prop. 3.4 kun je dit concreter maken. De conclusie is de volgende.

3.11. Propositie. *Zij gegeven een topologie $\mathscr{T}$ op een verzameling X. Dan is een collectie $\mathscr{B}$ van deelverzamelingen van X een basis voor $\mathscr{T}$ dan en slechts dan als er voldaan is aan de volgende twee voorwaarden:*

(a) *elke $B \in \mathscr{B}$ is open in $\mathscr{T}$;*
(b) *als $U \subseteq X$ open is in $\mathscr{T}$ en $x \in U$, dan is er een $B \in \mathscr{B}$ zo dat $x \in B \subseteq U$.*

De beide interpretaties van het begrip "basis" zijn natuurlijk uitwisselbaar; het enige verschil is of je de basis als uitgangspunt neemt, danwel de topologie die door die basis wordt voortgebracht.

Als toepassing van het begrip "basis" definiëren we de produkttopologie op een produkt van twee topologische ruimten. We zullen dit later generaliseren naar het produkt van een willekeurige collectie topologische ruimten; zie Definitie 4.12 in het volgende hoofdstuk.

3.12. Definitie. Laten X en Y topologische ruimten zijn. Dan definiëren we de *produkttopologie* op de verzameling $X \times Y$ als de topologie die wordt voortgebracht door de basis

$$\mathscr{B} := \bigl\{U \times V \subseteq X \times Y \bigm| U \subseteq X \text{ open in } X\,,\ V \subseteq Y \text{ open in } Y\bigr\}\,.$$

Laten we nagaan dat de gegeven collectie inderdaad een basis is. Allereerst is duidelijk dat de verzamelingen $B \in \mathscr{B}$ heel $X \times Y$ overdekken, want $X \times Y$ is zelf een element uit de collectie $\mathscr{B}$. Vervolgens merken we op dat $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, hetgeen aantoont dat voor B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$ de doorsnede $B_1 \cap B_2$ weer een element is van de collectie $\mathscr{B}$. Daaruit volgt direct dat voldaan is aan voorwaarde (ii) uit Definitie 3.3. Dus de collectie $\mathscr{B}$ is inderdaad een basis voor een topologie, en zodoende is de gegeven definitie zinvol.

3.13. Voorbeeld. Neem $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, allebei met de Euclidische topologie. We identificeren $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ met $\mathbb{R}^{m+n}$. We beweren dat de produkttopologie op $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gewoon de Euclidische topologie op $\mathbb{R}^{m+n}$ is. Om te begrijpen wat er aan de hand is, kijken we eerst naar het geval $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Typische voorbeelden van elementen in de basis $\mathscr{B}$ voor de produkttopologie zijn de open rechthoeken

$$]a,b[\, \times \,]c,d[\, = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| a < x < b \quad \text{en} \quad c < y < d\bigr\}\,.$$

Typische voorbeelden van open basisverzamelingen voor de Euclidische topologie zijn de open bollen

$$B\bigl((t,u),\rho\bigr) := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (x-t)^2 + (y-u)^2 < \rho^2\bigr\}\,.$$

Dus de twee bases die we gebruiken zijn zeker niet dezelfde! Desondanks zijn de topologieën die door deze bases worden voortgebracht wel dezelfde. In een plaatje zie je dat al snel; het idee is dat je een open bol kunt schrijven als een vereniging van open rechthoeken, en dat, omgekeerd, elke open rechthoek te schrijven is als een vereniging van open bollen.

Terug naar het algemenere geval, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. De bewering is dat de produkttopologie op $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dezelfde is als de Euclidische topologie op $\mathbb{R}^{m+n}$. Anders gezegd: we beweren dat de collectie $\mathscr{B}$ van verzamelingen van de vorm $U \times V$ een basis is voor de Euclidische topologie. In Prop. 3.11 hebben we gezien hoe je dit kunt nagaan. Ten eerste willen we inzien dat elke verzameling van de vorm $U \times V$, voor open $U \subseteq \mathbb{R}^m$ en $V \subseteq \mathbb{R}^n$, open is in de Euclidische topologie op $\mathbb{R}^{m+n}$. (In het geval $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$: een open rechthoek is te schrijven als vereniging van open bollen.) Welnu, als $(x,y) \in U \times V$ dan zijn er positieve reële getallen r en s zo dat

$B(x,r) \subseteq U$ en $B(y,s) \subseteq V$. Neem $\rho := \min\{r,s\}$; dan is $B\big((x,y),\rho\big) \subseteq U \times V$, en dit toont aan dat $U \times V$ inderdaad open is in de Euclidische topologie op $\mathbb{R}^{m+n}$. De tweede conditie is dat er voor elke open $W \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ en $w = (x,y) \in W$ een $B \in \mathscr{B}$ moet zijn met $w \in B \subseteq W$. (In het geval $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$: rond elk punt w binnen een open verzameling W van $\mathbb{R}^2$ kun je een open rechthoek kunnen vinden die helemaal bevat is in W.) Kies nu allereerst een open bol $B(w,r)$ om w die helemaal bevat is in W. Dan zijn $B(x,\frac{r}{2})$ en $B(y,\frac{r}{2})$ open bollen om x en y in $\mathbb{R}^m$, respectievelijk $\mathbb{R}^n$ en het is gemakkelijk na te gaan dat $B(x,\frac{r}{2}) \times B(y,\frac{r}{2}) \subseteq B\big((x,y),r\big)$. Dit besluit het bewijs van onze bewering dat de produkttopologie op $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gelijk is aan de Euclidische topologie.

3.14. Opmerking. Zoals het vorige voorbeeld ten duidelijkste illustreert, is het in het algemeen natuurlijk *niet* zo dat elke open verzameling van $X \times Y$ (in de produkttopologie) van de vorm $U \times V$ is.

Als volgende gaan we kijken wat er gebeurt als je voorwaarde (ii) uit Definitie 3.3 laat vallen.

3.15. Definitie. Zij X een verzameling. Een *subbasis* voor een topologie op X is een collectie $\mathscr{S}$ van deelverzamelingen van X met de eigenschap dat $\cup_{S\in\mathscr{S}} S = X$.

3.16. Propositie. *Zij $\mathscr{S}$ een subbasis voor een topologie op een verzameling X. Definieer $\mathscr{B}$ als de collectie van alle deelverzamelingen $B \subseteq X$ die te schrijven zijn als doorsnede van een eindig aantal verzamelingen in de collectie $\mathscr{S}$. Met andere woorden:*

$B \in \mathscr{B}$ dan en slechts dan als er $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathscr{S}$ bestaan zo dat $B = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$.

Dan is $\mathscr{B}$ een basis voor een topologie op X en de door $\mathscr{B}$ voortgebrachte topologie $\mathscr{T}$ is de grofste topologie op X met de eigenschap dat elke $S \in \mathscr{S}$ open is in $\mathscr{T}$.

We noemen $\mathscr{B}$ de aan de subbasis $\mathscr{S}$ geassocieerde basis en $\mathscr{T}$ de door $\mathscr{S}$ voortgebrachte topologie.

Bewijs. Het is evident dat voldaan is aan conditie (i) uit Def. 3.3, aangezien elke $x \in X$ bevat is in een deelverzameling $S \subseteq X$ uit de collectie $\mathscr{S}$. Maar als B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$, dan is ook $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$, en dus kun je in (ii) van Def. 3.3 gewoon $B_3 = B_1 \cap B_2$ nemen. Dit toont aan dat $\mathscr{B}$ een basis is. Zij nu $\mathscr{T}'$ de grofste topologie waarvoor alle $S \in \mathscr{S}$ open zijn (zie Prop. 3.2). Het is duidelijk uit de definitie van de collectie $\mathscr{B}$ dat elke $B \in \mathscr{B}$ open is in $\mathscr{T}'$, en dus is $\mathscr{T}'$ fijner dan $\mathscr{T}$. Anderzijds is evident dat elke $S \in \mathscr{S}$ open is in de topologie $\mathscr{T}$ zodat ook $\mathscr{T}$ fijner is dan $\mathscr{T}'$. Dus inderdaad $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. $\square$

Met deze Propositie kunnen we een antwoord formuleren op het probleem dat we aan het begin van het hoofdstuk geformuleerd hebben.

3.17. Gevolg. *Zij X een verzameling en $\mathscr{Q}$ een willekeurige collectie van deelverzamelingen van X. Zij $\mathscr{T}$ de grofste topologie op X met de eigenschap dat elke $U \in \mathscr{Q}$ open is in $\mathscr{T}$. Als $V \subseteq X$ dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

(i) *V is open in $\mathscr{T}$;*

(ii) *voor elke* $x \in V$ *bestaan er* $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{Q}$ *(met* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$*) zo dat* $x \in (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \subseteq V$*;*
(iii) V *kan geschreven worden als een (mogelijk oneindige) vereniging van eindige doorsneden* $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ *met* U_i *uit de collectie* $\mathscr{Q}$*.*

Bewijs. De collectie $\mathscr{S} := \mathscr{Q} \cup \{X\}$ is een subbasis en het is evident dat $\mathscr{T}$ ook de grofste topologie is zo dat elke $U \in \mathscr{S}$ open is in $\mathscr{T}$. (We voegen de verzameling X toe aan de collectie $\mathscr{Q}$ om er zeker van te zijn dat de verzamelingen in onze collectie heel X overdekken; dit is immers de enige eis die we opleggen aan een subbasis!) Zij $\mathscr{B}$ de aan $\mathscr{S}$ geassocieerde basis. Dan is een deelverzameling $B \subseteq X$ een element van $\mathscr{B}$ dan en slechts dan als je B kunt schrijven als een eindige doorsnede $B = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ met $U_i \in \mathscr{Q}$. (De conventie is dat de doorsnede van een lege collectie deelverzamelingen van X gelijk is aan X.) Pas nu Proposities 3.4 en 3.16 toe. □

3.18. Wat we in 3.10 gezegd hebben over bases, geldt ook voor subbases. Dus, je kunt een subbasis als uitgangspunt nemen en dan kijken naar de daardoor voortgebrachte topologie. Evengoed kan het zijn dat je al een topologie $\mathscr{T}$ op X gegeven hebt en dat je wilt kijken naar een subbasis voor de gegeven topologie $\mathscr{T}$. Het analogon van Prop. 3.11 is het volgende resultaat. Het bewijs ervan is een eenvoudige toepassing van Gevolg 3.17.

3.19. Propositie. *Zij gegeven een topologie* $\mathscr{T}$ *op een verzameling* X*. Dan is een collectie* $\mathscr{S}$ *van deelverzamelingen van* X *een subbasis voor* $\mathscr{T}$ *dan en slechts dan als er voldaan is aan de volgende twee voorwaarden:*
(a) *elke* $S \in \mathscr{S}$ *is open in* $\mathscr{T}$*;*
(b) *voor elke open* $U \subseteq X$ *en* $x \in U$ *zijn er een eindig aantal verzamelingen* $S_1, \ldots, S_n$ *in de collectie* $\mathscr{S}$ *te vinden, zo dat* $x \in (S_1 \cap \cdots \cap S_n) \subseteq U$*.*

3.20. Voorbeeld. Zij gegeven een verzameling X en een deelverzameling $U \subseteq X$. Dan is $\mathscr{T} = \{\emptyset, U, X\}$ een topologie op X (zie ook Opg. 1.2) en dit is de grofste topologie waarvoor U open is.

Als volgende voorbeeld, stel dat je twee deelverzamelingen U_1, $U_2 \subseteq X$ hebt. Dan is de grofste topologie waarvoor U_1 en U_2 allebei open zijn de topologie

$$\mathscr{T} = \{\emptyset, U_1 \cap U_2, U_1, U_2, U_1 \cup U_2, X\}\,.$$

Met drie verzamelingen U_1, U_2, $U_3 \subseteq X$ wordt het al lastiger om de door $\{U_1, U_2, U_3, X\}$ voortgebrachte topologie helemaal uit te schrijven. Zie Opgave 1.2.

Opgaven bij hoofdstuk 3.

Opgave 3.1. Laat zien dat de topologie op $\mathbb{R}^n$ die wordt geïnduceerd door de metriek d' in (1) niet afhangt van de keuze van de coëfficiënten $c_j \in \mathbb{R}_{>0}$.

Opgave 3.2. Zij (X, d) een metrische ruimte en $A \subseteq X$ een deelverzameling. Als $x \in X$ dan definiëren we de afstand van x tot A door $d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$. Bewijs dat $d(x, A) = 0$ dan en slechts dan als $x \in \overline{A}$.

Opgave 3.3. *"De metriek van het Franse spoorwegnet"*. Laat $X = \mathbb{R}^2$. Voor $x = (x_1, x_2) \in X$, schrijf $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Definieer d: $X \times X \to \mathbb{R}$ door

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{als } x \text{ en } y \text{ lineair afhankelijk zijn;} \\ |x|+|y| & \text{als } x \text{ en } y \text{ lineair onafhankelijk zijn.} \end{cases}$$

(i) Toon aan dat d een metriek is op X. Begrijp je de titel van deze opgave?
(ii) Teken enkele voorbeelden van niet-lege open bollen $B(x,r)$. (Er zijn drie types.)
(iii) Laat zien dat de door de metriek d geïnduceerde topologie strict fijner is dan de Euclidische topologie op $\mathbb{R}^2$.

Opgave 3.4. Een *speld* in $\mathbb{R}$ is een half-open interval $[a,b[\subseteq \mathbb{R}$. Zij $\mathscr{B}$ de collectie van alle spelden in $\mathbb{R}$, dus

$$\mathscr{B} := \big\{[a,b[\;\big|\; a,b \in \mathbb{R}\big\}.$$

(i) Laat zien dat $\mathscr{B}$ een basis is voor een topologie op $\mathbb{R}$.

De door $\mathscr{B}$ voortgebrachte topologie heet de *speldentopologie*. De topologische ruimte ($\mathbb{R}$, speldentopologie) heet ook wel de *Sorgenfrey rechte*.

(ii) Vergelijk de speldentopologie met de Euclidische topologie en met de rechterhalflijnentopologie uit Opgave 1.3.

Opgave 3.5. Zij X een topologische ruimte en zij $\Delta \subseteq X \times X$ de diagonaal; dus $\Delta = \big\{(x,x) \;\big|\; x \in X\big\}$. Bewijs dat X Hausdorffs is dan en slechts dan als Δ gesloten is in $X \times X$.

Opgave 3.6. Gegeven zijn topologische ruimten X en Y en deelverzamelingen $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$.

(i) Laat zien dat $(A \times B)^\circ$, het inwendige van $A \times B$ in de produkttopologie op $X \times Y$, gelijk is aan $A^\circ \times B^\circ$.
(ii) Laat zien dat $\overline{A \times B}$, de afsluiting van $A \times B$ in de produkttopologie op $X \times Y$, gelijk is aan $\overline{A} \times \overline{B}$.

(Vergelijk dit met Opgave 4.5.)

Opgave 3.7. Gegeven zijn een verzameling X en drie deelverzamelingen U_1, U_2, $U_3 \subseteq X$. Als $I \subseteq \{1,2,3\}$, schrijf $U_I := \cap_{i \in I} U_i$. Bijvoorbeeld: $U_\emptyset = X$ en $U_{123} = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Neem aan dat voor alle $I \subsetneq J \subseteq \{1,2,3\}$ geldt dat $U_J \subsetneq U_I$. Hoeveel open verzamelingen zijn er in de door de subbasis $\{U_1, U_2, U_3, X\}$ voortgebrachte topologie op X ? [*Hint:* teken een Venn-diagram.]

Opgave 3.8. Voorzie $\mathbb{R}$ van de speldentopologie (zie Opgave 3.4) en neem op $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de produkttopologie (dus "Sorgenfrey rechte $\times$ Sorgenfrey rechte"). Geef een voorbeeld van een lijn $\ell \subset \mathbb{R}^2$ zo dat de geïnduceerde topologie op ℓ de discrete topologie is.

Opgave 3.9. Zij (X,d) een metrische ruimte. Een deelverzameling $A \subset X$ heet *begrensd* t.a.v. de metriek d als er een $R > 0$ bestaat zo dat $d(a_1, a_2) < R$ voor alle a_1, $a_2 \in A$. Als A een begrensde en niet-lege verzameling is dan definiëren we zijn *diameter* als $\operatorname{diam}(A) := \sup\big\{d(a_1,a_2) \;\big|\; a_1, a_2 \in A\big\}$. Als A een begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is (met de Euclidische metriek), bewijs dat $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(\partial A)$. Is het altijd waar dat $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\partial A)$?

Opgave 3.10. *"De p-adische metriek".* Zij p een priemgetal. Voor een $x \in \mathbb{Q}^*$ schrijven we $\mathrm{ord}_p(x) := n$ als je x kunt schrijven als $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$ met a, $b \in \mathbb{Z}$ allebei niet deelbaar door p. Vervolgens definiëren we

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p(x)} & \text{als } x \neq 0; \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

(i) Definieer $d\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ door $d(x,y) = |x-y|_p$. Bewijs dat d een metriek is op $\mathbb{Q}$.
(ii) Bewijs de volgende sterkere vorm van de driehoeksongelijkheid: als x, y, $z \in \mathbb{Q}$, dan geldt dat $d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}$.
(iii) Laat zien dat $d(x,z) = \max\{d(x,y), d(y,z)\}$ als $d(x,y) \neq d(y,z)$.
(iv) Beschouw de (gesloten) eenheidsschijf $C := \{x \in \mathbb{Q} \mid d(0,x) \leqslant 1\}$. Laat zien dat *elk* punt van C het middelpunt is van C !
(De wiskundige H. Voskuil schrijft in zijn proefschrift: "So a p-adic circle C has the property that any point $v_0 \in C$ is the centre of C and so its boundary is nowhere. This comes very close to the description of God given in [B. Pascal, *Œuvres complètes*] pensée 199(72).")

Opgave 3.11. Zij n een natuurlijk getal. Laat $X := \{0,1\}^n$. Definieer $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ door

$$d\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) := \#\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid x_i \neq y_i\}.$$

(Dus als $x = (x_1,\ldots,x_n)$ en $y = (y_1,\ldots,y_n)$ dan is $d(x,y)$ het aantal plaatsen waarop de rijtjes x en y verschillen.)
(i) Laat zien dat d een metriek is op X. Deze metriek heet de *Hamming afstand*.

Een deelverzameling $C \subseteq X$ heet een *code van lengte n.* Als e een natuurlijk getal is, dan zeggen we dat de code "e-foutenverbeterend" is als er voor elk tweetal verschillende elementen x, $y \in C$ geldt dat $\bar{B}(x,e) \cap \bar{B}(y,e) = \emptyset$, waarbij $\bar{B}(x,e) := \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant e\}$ de gesloten bol met straal e om x is.
(ii) Laat zien dat de code e-foutenverbeterend is dan en slechts dan als $d(x,y) \geqslant 2e+1$ voor alle x, $y \in C$.

Achtergrond: Codes worden bijvoorbeeld gebruikt bij transport van data over een kanaal waarop ruis kan optreden. Je probeert de code zo in te richten dat een bepaalde mate van verstoring door ruis nog gecorrigeerd kan worden. Zie bijvoorbeeld de voordracht "Codes" door Prof. G. van der Geer, beschikbaar op `www.science.uva.nl/~geer` .

HOOFDSTUK 4

Continue afbeeldingen

4.1. Definitie. Laten $(X_1, \mathscr{T}_1)$ en $(X_2, \mathscr{T}_2)$ twee topologische ruimten zijn.

(i) Een afbeelding $f\colon X_1 \to X_2$ heet *continu* (ten aanzien van de gegeven topologieën) als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X_2$ geldt dat $f^{-1}(U) \subseteq X_1$ open is in X_1.

(ii) Een afbeelding $f\colon X_1 \to X_2$ heet een *homeomorfisme* als f bijectief is en zowel f als de inverse afbeelding $f^{-1}\colon X_2 \to X_1$ continu zijn.

Zoals al eerder opgemerkt, worden in de praktijk de topologieën op X_1 en X_2 vaak niet expliciet genoemd.

Twee topologische ruimten X_1 en X_2 heten *homeomorf* als er een homeomorfisme van X_1 naar X_2 bestaat. Het begrip "homeomorfie" moet gezien worden als het begrip "isomorfisme van topologische ruimten".

Uiteraard verwachten we dat het hier gedefinieerde begrip "continuiteit" voor ruimten voorzien van een metriek, equivalent is met het begrip zoals dat in de analyse wordt gebruikt. Dit is inderdaad het geval. Voordat we dit bewijzen geven we een nuttig lemma dat betrekking heeft op continuïteit in het geval dat de topologie op X_2 gegeven wordt in termen van een basis of een subbasis.

4.2. Lemma. *Laten $(X_1, \mathscr{T}_1)$ en $(X_2, \mathscr{T}_2)$ twee topologische ruimten zijn en zij $f\colon X_1 \to X_2$ een afbeelding.*

(i) *Zij $\mathscr{B}_2$ een basis voor de topologie $\mathscr{T}_2$. Dan is f continu dan en slechts dan als voor elke $B \in \mathscr{B}_2$ geldt dat het inverse beeld $f^{-1}(B)$ open is in X_1.*

(ii) *Zij $\mathscr{S}_2$ een subbasis voor de topologie $\mathscr{T}_2$. Dan is f continu dan en slechts dan als voor elke $S \in \mathscr{S}_2$ geldt dat het inverse beeld $f^{-1}(S)$ open is in X_1.*

Bewijs. (i) De "slechts dan" bewering is duidelijk. Stel nu dat $f^{-1}(B) \subseteq X_1$ open is voor elke $B \in \mathscr{B}_2$. Als $U \subseteq X_2$ open is dan is U volgens Prop. 3.4 te schrijven als een vereniging $U = \cup_{\alpha\in A} B_\alpha$ met $B_\alpha \in \mathscr{B}_2$ voor elke α. Maar dan is $f^{-1}(U) = \cup_{\alpha\in A} f^{-1}(B_\alpha)$ een vereniging van open delen van X_1 en is dus weer open. Dus f is continu.

(ii) Ook hier is de "slechts dan" bewering duidelijk. Neem aan dat $f^{-1}(S)$ open is voor alle $S \in \mathscr{S}_2$. Als $\mathscr{B}_2$ de aan $\mathscr{S}_2$ geassocieerde basis is en $B \in \mathscr{B}_2$, dan volstaat het wegens (i) aan te tonen dat $f^{-1}(B)$ open is in X_1. Maar B is te schrijven als een eindige doorsnede $B = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ met $S_i \in \mathscr{S}_2$ voor alle i, en dan is $f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(S_n)$ een eindige doorsnede van open delen, dus weer open. $\square$

4.3. Gevolg. *Laten (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten zijn. Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding. Dan is f continu ten aanzien van de metrische topologieën op X en Y dan en slechts dan als er voor elke $x \in X$ en elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq B\big(f(x),\varepsilon\big)$.*

Anders gezegd: f is continu d.e.s.d.a. er voor elke $x \in X$ en $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat geldt:

$$d_X(x,\xi) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y\big(f(x), f(\xi)\big) < \varepsilon\,, \qquad \text{voor alle } \xi \in X. \tag{1}$$

Dit zegt dus dat het continuïteitsbegrip voor metrische ruimten overeenstemt met het begrip zoals dat in de Analyse wordt gebruikt.

Bewijs van het Gevolg. De collectie van alle open bollen $B(x,r)$ met $x \in X$ en $r > 0$ is een basis voor de topologie op X, en voor de topologie op Y geldt de analoge uitspraak. Volgens (i) van Lemma 4.2 is f continu dan en slechts dan als voor elke $y \in Y$ en $\varepsilon > 0$ geldt dat $f^{-1}\big(B(y,\varepsilon)\big)$ open is in X. Maar dit laatste betekent gewoon dat er bij elke $x \in X$ met $d_Y\big(f(x),y\big) < \varepsilon$ een $\delta > 0$ te vinden is zo dat geldt:

$$d_X(x,\xi) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y\big(y, f(\xi)\big) < \varepsilon\,, \qquad \text{voor alle } \xi \in X. \tag{2}$$

Conclusie: f is continu d.e.s.d.a. er voor alle $\varepsilon > 0$ en voor alle punten $x \in X$ en $y \in Y$ met $d_Y\big(f(x),y\big) < \varepsilon$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat (2) geldt.

Stel nu f is continu. Gegeven $x \in X$ en $\varepsilon > 0$, pas het voorgaande toe met $y = f(x)$. Dan is $d_Y\big(f(x),y\big) = 0 < \varepsilon$, dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat (2) geldt. Maar omdat $y = f(x)$ is in dit geval (2) hetzelfde als (1).

Omgekeerd, stel dat er voor elke $x \in X$ en $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat (1) geldt. Stel je hebt punten $x \in X$ en $y \in Y$ en een $\varepsilon > 0$ zo dat $d_Y\big(f(x),y\big) < \varepsilon$. Kies een $\varepsilon' > 0$ zo dat $d_Y\big(f(x),y\big) + \varepsilon' < \varepsilon$. Pas (1) toe met ε'; dit geeft een $\delta > 0$ zo dat $d_Y\big(f(x),f(\xi)\big) < \varepsilon'$ voor alle $\xi \in X$ met $d_X(x,\xi) < \delta$. Maar vanwege de driehoeksongelijkheid geldt dan ook voor alle $\xi \in X$ met $d_X(x,\xi) < \delta$ dat $d_Y\big(y,f(\xi)\big) \leqslant d_Y\big(y,f(x)\big) + d_Y\big(f(x),f(\xi)\big) < d_Y\big(f(x),y\big) + \varepsilon' < \varepsilon$. Dus f is continu. $\square$

Er zijn een heel aantal elementaire eigenschappen van continue functies, die overeenkomen met wat we gewend zijn uit de Analyse. We geven er hier een paar.

4.4. Propositie. *Laten X, Y en Z topologische ruimten zijn.*

(i) *De identiteit* $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ *is continu.*

(ii) De samenstelling van twee continue afbeeldingen is weer continu: *Als $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ continu zijn, dan is ook $g \circ f\colon X \to Z$ continu.*

(iii) Constante afbeeldingen zijn continu: *Als $f\colon X \to Y$ een constante afbeelding is, dus $f(X) = \{y\}$ voor een $y \in Y$, dan is f continu.*

(iv) Inclusie-afbeeldingen zijn continu: *Als $A \subseteq X$ een deelverzameling is, en we geven A de deelruimte topologie (= geïnduceerde topologie), dan is de inclusie-afbeelding $i\colon A \hookrightarrow X$ continu.*

(v) De restrictie van een continue afbeelding is weer continu: *Als $f\colon X \to Y$ continu is en $A \subseteq X$ is een deelverzameling, dan is de restrictie $f_{|A}\colon A \to Y$ weer continu. (Hier voorzien we A van de geïnduceerde topologie.)*

(vi) *Als $f\colon X \to Y$ continu is en $B \subseteq Y$ is een deelverzameling met $f(X) \subseteq B$, dan is f, opgevat als een afbeelding $f\colon X \to B$, ook weer continu. (Hier voorzien we B van de geïnduceerde topologie.)*

(vii) "Continuïteit is lokaal op het domein": *Als $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ een open overdekking is van X en $f\colon X \to Y$ is een afbeelding zo dat elk van de restricties $f_{|U_\alpha}\colon U_\alpha \to Y$ continu is, dan is f continu.*

Bewijs. (i) Triviaal. (ii) Zij $W \subseteq Z$ open, dan is $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\big(g^{-1}(W)\big)$. Maar g is continu, dus $g^{-1}(W)$ is open in Y, en omdat f ook continu is, is $f^{-1}\big(g^{-1}(W)\big)$ open in X.

(iii) Als $V \subseteq Y$ en f is constant dan is $f^{-1}(V) = X$ of $f^{-1}(V) = \emptyset$, en deze zijn allebei open in X. (iv) Dit volgt onmiddellijk uit de definitie van de geïnduceerde topologie. (v) Geef A de geïnduceerde topologie en zij $i\colon A \hookrightarrow X$ de inclusie-afbeelding. Er geldt $f_{|A} = f \circ i$. Pas nu (ii) en (iv) toe. (vi) Schrijf, om verwarring te voorkomen, $F\colon X \to B$ voor de afbeelding gegeven door f. Als $V \subseteq B$ open is in B dan is er, per definitie van de geïnduceerde topologie, een open $W \subseteq Y$ met $V = B \cap W$. Maar dan is $F^{-1}(V) = f^{-1}(W)$ en omdat f continu is, is deze verzameling open in X. (vii) Pas (i) van Lemma 2.15 toe. □

4.5. Definitie. Een continue afbeelding $i\colon X \to Y$ heet een *inbedding* als i injectief is en een homeomorfisme geeft van X naar zijn beeld $i(X) \subset Y$, waarbij we $i(X)$ voorzien van de deelruimte topologie.

Een inbedding is dus een afbeelding i die de volgende drie eigenschappen heeft: (a) i is continu, (b) i is injectief, en (c) voor alle open $U \subseteq X$ is er een open $V \subseteq Y$ met $U = i^{-1}(V)$.

4.6. Stel we hebben topologische ruimten $(X, \mathscr{T})$ en $(Y, \mathscr{U})$ en een continue afbeelding $f\colon X \to Y$.

Zij $\mathscr{T}'$ een topologie op X die *fijner* is dan $\mathscr{T}$. Dan volgt onmiddellijk uit de definities dat f ook continu is met betrekking tot $\mathscr{T}'$. Wanneer we echter $\mathscr{T}$ vervangen door een grovere topologie, dan kan het gebeuren dat f niet langer continu is. Daarmee ligt de vraag voor de hand of er een grofst mogelijke topogie op X bestaat waarvoor de gegeven afbeelding f nog continu is. Zoals we zodadelijk zullen zien, is het antwoord hierop bevestigend.

We kunnen ook de topologie op Y veranderen. Het is duidelijk dat als $\mathscr{U}'$ een topologie op Y is die *grover* is dan $\mathscr{U}$, de afbeelding f ook continu is met betrekking tot de topologie $\mathscr{U}'$ op Y. Dit leidt tot de vraag of er een fijnst mogelijke topologie op Y bestaat waarvoor f continu is.

We formuleren een antwoord op de beide gestelde vragen in een algemenere context, waarbij we niet een enkele afbeelding beschouwen maar een hele collectie afbeeldingen.

4.7. Propositie.
(i) *Zij gegeven een verzameling X, een collectie van topologische ruimten $\{(Y_\alpha, \mathscr{U}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ en een collectie van afbeeldingen (van verzamelingen) $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$. Dan bestaat er een grofste topologie op X waarvoor elk van de afbeeldingen f_α continu is.*
(ii) *Zij gegeven een collectie van topologische ruimten $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}$, een verzameling Y en een collectie van afbeeldingen (van verzamelingen) $g_\alpha\colon X_\alpha \to Y$. Dan bestaat er een fijnste topologie op Y waarvoor elk van de afbeeldingen g_α continu is.*

Bewijs. Het bewijs van (i) is een onmiddellijke toepassing van Propositie 3.2. Immers, zij $\mathscr{Q}$ de collectie van alle deelverzamelingen van X van de vorm $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, met $\alpha \in A$ en U_α open in Y_α. Als $\mathscr{T}$ een topologie is op X dan geldt:

$$\text{elk van de afbeeldingen } f_\alpha\colon (X, \mathscr{T}) \to (Y_\alpha, \mathscr{U}_\alpha) \text{ is continu} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{T}\,.$$

Dus als $\mathscr{T}$ de grofste topologie is op X met de eigenschap dat $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{T}$ (zie Prop. 3.2), dan is $\mathscr{T}$ ook de grofste topologie op X waarvoor elk van de afbeeldingen f_α continu is.

In (ii) kunnen we direct de definitie geven van de gezochte topologie. Namelijk: definieer een topologie $\mathscr{U}$ op Y door te stellen dat $V \subseteq Y$ open is dan en slechts dan als elk van de verzamelingen $g_\alpha^{-1}(V) \subseteq X_\alpha$ open is. Het is een eenvoudige opgave om na te gaan dat dit inderdaad een topologie is. (Doe dit zelf!) Anderzijds is duidelijk dat we $\mathscr{U}$ niet kunnen vervangen door een strict fijnere topologie zonder de continuïteit van een van de afbeeldingen g_α te verliezen. Dus $\mathscr{U}$ voldoet aan het gevraagde. $\square$

4.8. Opmerking. Stel we hebben een enkele afbeelding $f\colon X \to Y$, met Y een topologische ruimte. In dit geval kunnen we in (i) nog wat specifieker zijn. Namelijk, de grofste topologie $\mathscr{T}$ op X waarvoor f continu is, wordt beschreven door de regel dat een deelverzameling $U \subset X$ open is, dan en slechts dan als er een open $V \subset Y$ is met $U = f^{-1}(V)$. We hebben in het bewijs van (i) gezien dat de collectie

$$\mathscr{Q} := \{f^{-1}(V) \mid V \subset Y \text{ open}\}$$

bevat is in $\mathscr{T}$ en dat $\mathscr{T}$ de door $\mathscr{Q}$ voortgebrachte topologie is. Anderzijds is in dit geval gemakkelijk na te gaan dat $\mathscr{Q}$ een topologie is op X; dus $\mathscr{T} = \mathscr{Q}$.

4.9. Voorbeeld. Zij X een topologische ruimte, en zij $Y \subseteq X$ een deelverzameling. Schrijf $i\colon Y \hookrightarrow X$ voor de inclusie-afbeelding. Dan is de op Y geïnduceerde topologie (zie Definitie 1.17) de grofste topologie op Y waarvoor de afbeelding i continu is. Ga dit zelf na!

4.10. Voorbeeld. Laten X_1 en X_2 topologische ruimten zijn. Schrijf $\mathrm{pr}_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ voor de projektie op de i-de faktor (voor $i \in \{1, 2\}$); dus $\mathrm{pr}_i\big((x_1, x_2)\big) = x_i$.

Als we $X_1 \times X_2$ de produkttopologie geven dan zij de beide projekties pr_i continu. Immers, als $U_1 \subseteq X_1$ open is dan is $\mathrm{pr}_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2$ en dit is open in de produkttopologie. Analoog voor de tweede projektie.

We kunnen nog preciezer zijn. Namelijk: de produkttopologie op $X_1 \times X_2$ is de grofste topologie waarvoor allebei de projekties continu zijn. Om dit in te zien, stel maar dat $\mathscr{T}$ een topologie is op $X_1 \times X_2$ zo dat de beide pr_i continu zijn met betrekking tot $\mathscr{T}$. Dan betekent dit dat $U_1 \times X_2$ open is in $\mathscr{T}$ voor alle open $U_1 \subseteq X_1$, en ook dat $X_1 \times U_2$ open is in $\mathscr{T}$ voor alle open $U_2 \subseteq X_2$. Maar omdat $U_1 \times U_2 = (U_1 \times X_2) \cap (X_1 \times U_2)$, volgt hieruit dat ook $U_1 \times U_2 \in \mathscr{T}$ voor alle open $U_i \subseteq X_i$, en dit impliceert dat $\mathscr{T}$ fijner is dan de produkttopologie.

Met deze opmerking in gedachten gaan we de produkttopologie invoeren op het produkt van een willekeurige collectie topologische ruimten. Allereerst brengen we in herinnering wat het Cartesisch produkt is van een willekeurige collectie van verzamelingen.

4.11. Stel we hebben een indexverzameling A en voor elke $\alpha \in A$ een verzameling X_α. Wat is dan de produktverzameling $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$?

Als de indexverzameling A eindig is, zeg $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, dan denken we aan $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \prod_{j=1}^{n} X_j$ als de verzameling van "rijtjes" $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ met $x_j \in X_j$ voor alle j. Als de indexverzameling aftelbaar oneindig is, zeg $A = \mathbb{N}$, dan denken we aan $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \prod_{j=1}^{\infty} X_j$ meestal als de verzameling van "oneindige rijtjes" $x = (x_1, x_2, \ldots)$ met $x_j \in X_j$ voor alle j. Maar wat als A bijvoorbeeld overaftelbaar is?

Informeel gezegd: om een element van $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ te geven, betekent dat je bij elke $\alpha \in A$ een element $x_\alpha \in X_\alpha$ kiest. Dus de elementen van $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ zijn eigenlijk functies, met dien verstande dat de waardenverzameling voor $f(\alpha)$ afhangt van α. Dit kunnen we op de volgende manier precies maken. Bekijk de disjunkte vereniging $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ van de verzamelingen X_α. Dan is $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ de verzameling van alle functies

$$x \colon A \to \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

met de eigenschap dat $x(\alpha) \in X_\alpha$ voor alle α. We zien dat dit inderdaad een natuurlijke generalisatie is van de "rijtjes" die we hiervoor bekeken, zeker als we afspreken om x_α te schrijven in plaats van $x(\alpha)$.

Als bijzonder geval hiervan zien we dat wanneer alle verzamelingen X_α dezelfde zijn, zeg $X_\alpha = X$ voor alle α, het produkt niets anders is dan de verzameling van alle functies $A \to X$. In dat geval wordt ook wel de notatie X^A gebruikt. Dus:

$$X^A = \prod_{\alpha \in A} X = \big\{\text{functies } f \colon A \to X\big\}\,.$$

Nu dan de beloofde definitie van de produkttopologie op een willekeurig produkt van topologische ruimten.

4.12. Definitie. Zij $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een collectie topologische ruimten en beschouw de produktverzameling $Y := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Schrijf $\mathrm{pr}_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ voor de projektie op de faktor X_α. Dan definiëren we de produkttopologie op Y als de grofste topologie op Y waarvoor elk van de projekties pr_α continu is.

4.13. Propositie. *Zij $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een collectie topologische ruimten. Schrijf $Y := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ en zij $\mathrm{pr}_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ de projektie op de faktor X_α.*

(i) *Zij $\mathscr{S}$ de collectie van alle deelverzamelingen van Y van de vorm*

$$\mathrm{pr}_a^{-1}(U_a) = \big\{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in Y \bigm| x_a \in U_a\big\}\,,$$

waarbij $a \in A$ en U_a een open deelverzameling is van X_a. Dan is $\mathscr{S}$ een subbasis voor de produkttopologie op Y.

(ii) *Zij $\mathscr{B}$ de collectie van alle deelverzamelingen van Y van de vorm*

$$\cap_{i=1}^n \mathrm{pr}_{a_i}^{-1}(U_{a_i}) = \big\{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in Y \bigm| x_{a_i} \in U_{a_i} \text{ voor alle } i = 1, \ldots, n\big\}\,,$$

waarbij $a_1, \ldots, a_n \in A$ een eindig rijtje indices is en U_{a_i} een open deelverzameling is van X_{a_i}. Dan is $\mathscr{B}$ een basis voor de produkttopologie op Y.

Bewijs. (i) Dit is een tautologie want per definitie is de produkttopologie de grofste topologie die alle verzamelingen van de vorm $\mathrm{pr}_a^{-1}(U_a)$ bevat. (ii) Merk op dat $\mathscr{B}$ de aan $\mathscr{S}$ geassocieerde basis is. □

We hadden de produkttopologie natuurlijk ook kunnen definiëren als de topologie voortgebracht door de subbasis $\mathscr{S}$, of als de topologie voortgebracht door de basis $\mathscr{B}$.

Voor alle duidelijkheid:

(a) De verzamelingen in de subbasis $\mathscr{S}$ krijg je door op precies *één* coördinaat een "open conditie voor te schrijven". Immers, als $a \in A$ en $U_a \subseteq X_a$, dan is

$$\mathrm{pr}_a^{-1}(U_a) = U_a \times \prod_{\alpha \in A, \alpha \neq a} X_\alpha = \bigl\{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in Y \bigm| x_a \in U_a\bigr\}.$$

In "functie-taal":

$$\mathrm{pr}_a^{-1}(U_a) = \left\{ x\colon A \to \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha \;\middle|\; \begin{array}{l} x_\alpha \in X_\alpha \text{ voor alle } \alpha \in A \\ \text{en bovendien } x_a \in U_a. \end{array} \right\}.$$

Dus bovenop de gebruikelijke voorwaarde dat $x_\alpha \in X_\alpha$ voor alle α, leg je bij precies één coördinaat (namelijk de coördinaat x_a) nog een extra conditie op, namelijk dat x_a in een gegeven open verzameling U_a zit. Speciaal geval: als $X_\alpha = X$ voor alle $\alpha \in A$, zodat $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = X^A = \{\text{functies } A \to X\}$, dan bestaat de subbasis uit alle verzamelingen van de vorm

$$\bigl\{f\colon A \to X \bigm| f(a) \in U_a\bigr\} \qquad \text{voor } a \in A \text{ en } U_a \text{ open in } X\,,$$

dus je legt inderdaad op precies één coördinaat een (open) conditie op aan je functies.

(b) De verzamelingen in de basis $\mathscr{B}$ krijg je door op een *eindig* aantal coördinaten een "open conditie voor te schrijven". Als de indexverzameling A oneindig is en je neemt open deelverzamelingen $U_\alpha \subseteq X_\alpha$, dan is het in het algemeen niet zo dat $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ open is in $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ in de produkttopologie; zie Opgave 4.5.

Tot besluit van dit hoofdstuk geven we nog twee begrippen die we zullen tegenkomen in de opgaven.

4.14. Definitie. Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. Dan heet f een *open* afbeelding als voor elke open $U \subseteq X$ het beeld $f(U)$ open is in Y. De afbeelding f heet een *gesloten* afbeelding als voor elke gesloten $C \subseteq X$ het beeld $f(C)$ gesloten is in Y.

Opgaven bij hoofdstuk 4.

Opgave 4.1. Laat zien dat continuïteit ook gedefinieerd kan worden in termen van gesloten verzamelingen. Preciezer: Laten X en Y topologische ruimten zijn, en zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als voor elke gesloten $C \subseteq Y$ het volledig origineel $f^{-1}(C)$ gesloten is in X.

Opgave 4.2. Zij $f\colon X \to Y$ een homeomorfisme van topologische ruimten, en zij $A \subseteq X$. Laat zien dat $f(A^\circ) = f(A)^\circ$, dat $f\bigl(\overline{A}\bigr) = \overline{f(A)}$ en dat $f\bigl(\partial A\bigr) = \partial f(A)$.

Opgave 4.3. Zij (X, d) een metrische ruimte. Gegeven een deelverzameling $A \subseteq X$, beschouw de functie $d(-, A)\colon X \to \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto d(x, A)$; vgl. Opgave (3.2). Bewijs dat deze functie $d(-, A)$ continu is.

Opgave 4.4. Laten X, Y_1 en Y_2 topologische ruimten zijn. Op $Y_1 \times Y_2$ nemen we de produkttopologie. Gegeven is een afbeelding $f\colon X \to Y_1 \times Y_2$. Schrijf $f(x) = \bigl(f_1(x), f_2(x)\bigr)$. Bewijs dat f continu is dan en slechts dan als $f_1\colon X \to Y_1$ en $f_2\colon X \to Y_2$ allebei continu zijn.

Opgave 4.5. Gegeven is een collectie topologische ruimten $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. We geven het produkt $Y := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ de produkttopologie.

(i) Voor elke $\alpha \in A$ geven we een gesloten deelverzameling $C_\alpha \subseteq X_\alpha$. Laat zien dat $\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$ een gesloten deelverzameling is van Y.

(ii) Voor elke $\alpha \in A$ geven we een niet-lege open deelverzameling $U_\alpha \subseteq X_\alpha$. Stel dat er oneindig veel indices $\alpha \in A$ zijn zo dat $U_\alpha \subsetneq X_\alpha$. (In het bijzonder veronderstelt dit dat A een oneindige verzameling is.) Laat zien dat $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ dan niet open is in Y.

Opgave 4.6.

(i) Laten X_1 en X_2 topologische ruimten zijn en kies een punt $x_2 \in X_2$. Beschouw de afbeelding $j_1\colon X_1 \to X_1 \times X_2$ gegeven door $j_1(\xi) = (\xi, x_2)$. Laat zien dat j_1 een homeomorfisme $X_1 \to X_1 \times \{x_2\}$ geeft en dus een inbedding is.

(ii) Nu generaliseren we dit naar een willekeurig produkt van topologische ruimten. Zij $Y = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ als in Opgave 4.5. We kiezen een index $a \in A$ en voor alle $\alpha \in A \setminus \{a\}$ geven we een punt $x_\alpha \in X_\alpha$. Beschouw de afbeelding $j_a\colon X_a \to Y$ die aan een punt $\xi \in X_a$ het element $y \in Y = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ toevoegt dat wordt gegeven door

$$y(\alpha) = \begin{cases} \xi & \text{als } \alpha = a \\ x_\alpha & \text{als } \alpha \neq a. \end{cases}$$

(We gebruiken hier de "functie-notatie" voor het element $y \in Y$.) Laat zien dat j_a een inbedding is.

Opgave 4.7. Zij $X := [0,1]^{\mathbb{R}}$, voorzien van de produkttopologie. Bewijs dat de deelverzameling

$$V := \bigl\{ f\colon \mathbb{R} \to [0,1] \bigm| \text{er zijn slechts eindig veel waarden } x \in \mathbb{R} \text{ waarvoor } f(x) \neq 0 \bigr\}$$

dicht ligt in X.

Opgave 4.8. Zij $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ een collectie topologische ruimten. Beschouw de disjuncte vereniging $Y := \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$, en schrijf $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow Y$ voor de inclusie-afbeelding van X_α in Y. (Verwar Y niet met de productruimte $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$!) We voorzien $Y = \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ van de fijnste topologie zo dat alle afbeeldingen i_α continu zijn; concreet betekent dit, dat een deelverzameling $U \subset Y$ open is dan en slechts dan als voor alle $\alpha \in A$ de doorsnede $U \cap X_\alpha$ open is in X_α.

(i) Zij Z een topologische ruimte. Gegeven is voor elke index α een continue afbeelding $f_\alpha\colon X_\alpha \to Z$. Toon aan dat er een unieke continue $g\colon Y \to Z$ bestaat zo dat $f_\alpha = g \circ i_\alpha$ voor alle α.

(ii) Gegeven is een topologische ruimte $(X, \mathscr{T})$ en een deelverzameling $A \subset X$. Laat $B := X \setminus A$. We geven A en B de geïnduceerde topologie. Schrijf vervolgens $Y = A \coprod B$ voor de disjuncte vereniging van A en B, met de hierboven ingevoerde topologie. Toon aan dat de natuurlijke bijectie $Y \to X$ een homeomorfisme is dan en slechts dan als A open en gesloten is in X. (Equivalent: A en B zijn allebei open in X.)

Opgave 4.9. Een topologische ruimte $(X, \mathscr{T})$ heet *metriseerbaar* als er een metriek op X bestaat zo dat $\mathscr{T}$ de aan de metriek geassocieerde topologie is.

(i) Gegeven zijn twee metriseerbare ruimten X en Y. Is dan ook $X \times Y$, met de produkttopologie, metriseerbaar? Licht je antwoord toe.

*(ii) Is het produkt van een willekeurige collectie metriseerbare ruimten weer metriseerbaar?

Opgave 4.10. Beschouw de begrippen: (i) continu, (ii) open en (iii) gesloten; zie Definities 4.1 en 4.14. Laat zien dat tussen deze begrippen onderling geen verbanden bestaan. Preciezer: geef voor iedere $n \in \{\text{i}, \text{ii}, \text{iii}\}$ een voorbeeld van een afbeelding $f\colon X \to Y$ tussen topologische ruimten die niet eigenschap (n) heeft maar wel de twee andere.

Opgave 4.11. Zij $f\colon X \to Y$ een bijectieve afbeelding tussen topologische ruimten.

(i) Toon aan: f is open $\Leftrightarrow$ f is gesloten $\Leftrightarrow$ de inverse afbeelding $f^{-1}\colon Y \to X$ is continu.

(ii) Stel dat f continu is. Toon aan: f is open $\Leftrightarrow$ f is gesloten $\Leftrightarrow$ f is een homeomorfisme.

Opgave 4.12. Beschouw de n-sfeer $S^n := \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \bigm| x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\big\}$. Laat $P := (0, 0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ (de "noordpool") en laat $V := \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \bigm| x_{n+1} = 0\big\} \cong \mathbb{R}^n$. Beschouw de afbeelding $s\colon S^n \setminus \{P\} \to V$ gegeven door

$$s(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Deze afbeelding heet de *stereografische projectie*. (Zie 10.7 voor een plaatje.)

(i) Ga na: als $Q \in S^n \setminus \{P\}$ dan is $s(Q)$ het snijpunt van de lijn door P en Q met het vlak V.

(ii) Bewijs dat s een homeomorfisme geeft van $S^n \setminus \{P\}$ met $\mathbb{R}^n$.

HOOFDSTUK 5

Samenhang en wegsamenhang

5.1. Definitie. Een topologische ruimte X heet *onsamenhangend* of *niet samenhangend* als er niet-lege open deelverzamelingen U, $V \subset X$ bestaan zo dat $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$. Een topologische ruimte X heet *samenhangend* als X niet onsamenhangend is.

Met andere woorden: X is onsamenhangend als X niet op een niet-triviale manier te schrijven is als een disjuncte vereniging van open deelverzamelingen.

5.2. Opmerking. Volgens deze definitie is de lege verzameling een samenhangende ruimte. In sommige literatuur wordt voor samenhangendheid geëist dat de ruimte niet-leeg is. In principe gaat het hier slechts om een conventie. Bij sommige resultaten hieronder (zoals Proposities 5.8 en 5.9) moet het geval van een lege verzameling apart beschouwd worden. Om de bewijzen niet onnodig formeel te maken, zullen we dit detail aan de lezer overlaten.

5.3. Opmerking. Een ruimte X is samenhangend d.e.s.d.a. $\emptyset$ en X de enige deelverzamelingen zijn van X die zowel open als gesloten zijn.

5.4. Voorbeeld. Het eenheidsinterval $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ is samenhangend in de Euclidische topologie. Om dit in te zien, stel maar dat I onsamenhangend was. Schrijf $I = U \cup V$ met U en V niet-leeg, open en disjunct. We mogen aannemen dat $1 \in V$. (Verwissel anders de rollen van U en V.) Laat

$$c = \sup\{x \in [0, 1] \bigm| x \in U\}\,.$$

Als $c \in U$ dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\ \subseteq U$ maar dat geeft een tegenspraak met de keuze van c. (Merk op: de aanname dat $c \in U$ impliceert in het bijzonder dat $c < 1$.) Dus moet c een element zijn van V. Merk op dat $c > 0$ want $c = 0$ geeft een tegenspraak met de aanname dat U een niet-lege open deelverzameling van I is. Maar ook in dit geval krijgen we een tegenspraak want dan is er een $\varepsilon' > 0$ zo dat $]c - \varepsilon', c + \varepsilon'[\ \subseteq V$ en ook dat is in tegenspraak met de keuze van c. Conclusie: I is samenhangend.

Zie Voorbeeld 5.11 voor een uitbreiding naar willekeurige intervallen.

5.5. Zij X een topologische ruimte en $A \subseteq X$ een niet-lege deelverzameling. Laat $\mathscr{T}_A$ de op A geïnduceerde topologie zijn. Als we zeggen dat A samenhangend is dan bedoelen we daarmee dat $(A, \mathscr{T}_A)$ een samenhangende ruimte is. Als we proberen dit concreter te maken, dan vinden we: A is niet samenhangend dan en slechts dan als er open deelverzamelingen U, $V \subset X$ zijn met

(a) $A \subseteq U \cup V$,
(b) $A \cap U \neq \emptyset$ en $A \cap V \neq \emptyset$, en
(c) $A \cap U \cap V = \emptyset$.

5.6. Voorbeeld. De verzameling $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ is niet samenhangend (voor de Euclidische topologie). Immers, als $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ een *irrationaal* getal is dan zijn $U :=]-\infty, x[$ en $V :=]x, \infty[$ disjuncte open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q} \subset U \cup V$.

5.7. Voorbeeld. Een verzameling X met $\#X > 1$ is onsamenhangend als we X de discrete topologie geven. Voor de indiscrete topologie is elke verzameling samenhangend. Als we een niet-lege verzamling X de co-eindige topologie geven dan geldt: X is samenhangend als $\#X = 1$, onsamenhangend als $\#X$ eindig is maar $\#X > 1$ (want dan is de co-eindige topologie dezelfde als de discrete topologie), en samenhangend als $\#X$ oneindig is.

5.8. Propositie. ("Het continue beeld van een samenhangende ruimte is weer samenhangend.") *Laat $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding zijn. Als X samenhangend is dan is ook $f(X) \subseteq Y$ samenhangend.*

Bewijs. Stel $f(X)$ is niet samenhangend. Dan zijn er open U en V in Y met:
- (a) $f(X) \subseteq U \cup V$,
- (b) $f(X) \cap U \neq \emptyset$ en $f(X) \cap V \neq \emptyset$, en
- (c) $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$.

Maar dan zijn $f^{-1}(U)$ en $f^{-1}(V)$ niet-lege en disjuncte open delen van X die samen heel X overdekken en dit is in tegenspraak met de aanname dat X samenhangend is. $\square$

Dit resultaat kan gezien worden als een generalisatie van de middelwaardestelling. Immers, als X samenhangend is en $f\colon X \to \mathbb{R}$ is continu (voor de gewone topologie op $\mathbb{R}$), dan zegt de propositie dat $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ samenhangend is. Hieruit volgt dat als er x, $y \in X$ zijn met $f(x) < f(y)$ en c is een reëel getal met $f(x) < c < f(y)$, dan is er ook een $z \in X$ met $f(z) = c$. Immers, als dit niet zo zou zijn, dan waren $U := \left]-\infty, c\right[$ en $V := \left]c, \infty\right[$ open delen van $\mathbb{R}$ waarvoor (a), (b) en (c) hierboven gelden en dit weerspreekt de samenhangendheid van $f(X)$.

5.9. Propositie. *Als $A \subseteq X$ samenhangend is dan is ook de afsluiting $\overline{A} \subseteq X$ samenhangend.*

Bewijs. Stel $\overline{A}$ is niet samenhangend. Dan zijn er open U, $V \subseteq X$ met:
- (a) $\overline{A} \subseteq U \cup V$,
- (b) $\overline{A} \cap U \neq \emptyset$ en $\overline{A} \cap V \neq \emptyset$, en
- (c) $\overline{A} \cap U \cap V = \emptyset$.

Maar dan geldt ook:
- (a') $A \subseteq U \cup V$,
- (b') $A \cap U \neq \emptyset$ en $A \cap V \neq \emptyset$, en
- (c') $A \cap U \cap V = \emptyset$

in tegenspraak met de aanname dat A samenhangend is. $\square$

5.10. Propositie. *Zij X een topologische ruimte. Gegeven is een collectie $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ van samenhangende deelverzamelingen van X. Gegeven is verder dat voor elk tweetal indices α, $\beta \in I$ geldt dat $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$. Dan is ook de verzameling $\cup_{\alpha \in I} W_\alpha$ samenhangend.*

Als speciaal geval hiervan: als W en W' samenhangende deelverzamelingen zijn van een topologische ruimte X met $W \cap W' \neq \emptyset$ dan is ook de vereniging $W \cup W'$ samenhangend. Merk op dat de conditie dat $W \cap W' \neq \emptyset$ essentieel is; bijvoorbeeld zijn $[0,1]$ en $[2,3]$ samenhangende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ maar hun vereniging $[0,1] \cup [2,3]$ is ten duidelijkste niet samenhangend.

Bewijs. Laat $Y := \cup_{\alpha \in I} W_\alpha$ en stel Y is niet samenhangend. Kies open U, $V \subset X$ zo dat $Y \subseteq U \cup V$, dat $Y \cap U \neq \emptyset$ en $Y \cap V \neq \emptyset$ en $Y \cap U \cap V = \emptyset$. Dan bestaan er indices α, $\beta \in I$ zo dat $W_\alpha \cap U \neq \emptyset$ en $W_\beta \cap V \neq \emptyset$. Vanwege de aanname dat $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ kunnen we een punt $P \in W_\alpha \cap W_\beta$ kiezen. Eventueel na verwisseling van de rollen van U en V mogen we aannemen dat $P \in U$. Maar dan krijgen we een tegenspraak met de samenhangendheid van W_β; immers: $W_\beta \subseteq U \cup V$ en $W_\beta \cap U \cap V = \emptyset$, terwijl $W_\beta \cap U \neq \emptyset$ en ook $W_\beta \cap V \neq \emptyset$. Deze tegenspraak toont aan dat Y samenhangend is, hetgeen te bewijzen was. $\square$

5.11. Voorbeeld. Alle intervallen in $\mathbb{R}$ zijn samenhangend (voor de Euclidische topologie). Anders gezegd: als a en b reële getallen zijn met $a < b$ dan zijn de intervallen

$$[a, b]\ , \quad]a, b]\ , \quad [a, b[\ , \quad]a, b[$$

en ook de intervallen

$$\mathbb{R} =]{-\infty}, \infty[\ , \quad]{-\infty}, a]\ , \quad]{-\infty}, a[\ , \quad [a, \infty[\ , \quad]a, \infty[$$

allemaal samenhangend. Voor de gesloten intervallen $[a, b]$ volgt dit uit Voorbeeld 5.4 samen met Prop. 5.8, aangezien $[a, b]$ het beeld is van het eenheidsinterval onder de continue afbeelding $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto a + (b - a)x$. Dat intervallen als $]a, b]$ en $]a, b[$ samenhangend zijn volgt dan uit Prop. 5.10 door te schrijven

$$]a, b] = \cup_{a<y<b}\, [y, b] \quad \text{en} \quad]a, b[= \cup_{a<y<\frac{a+b}{2}<z<b}\, [y, z]\ .$$

Op soortgelijke manier zien we dat de overige intervallen samenhangend zijn.

5.12. Zij X een topologische ruimte. We voeren een relatie "$\sim$" op X in door te stellen dat $x \sim y$ dan en slechts dan als er een samenhangende verzameling $A \subseteq X$ bestaat zo dat $x, y \in A$.

We gaan aantonen dat de relatie $\sim$ een equivalentierelatie is. Om te beginnen is duidelijk dat $x \sim x$ voor alle $x \in X$, want elke 1-punts verzameling $\{x\}$ is samenhangend. Ook is duidelijk dat de relatie $\sim$ symmetrisch is. Om de transitiviteit te bewijzen, stel dat $x \sim y$ en $y \sim z$. Kies een samenhangende $A \subseteq X$ met x, $y \in A$ en een samenhangende $B \subseteq X$ met y, $z \in B$. Merk op dat $y \in A \cap B$, dus $A \cap B \neq \emptyset$. Volgens de vorige propositie is $A \cup B$ weer samenhangend en omdat x, $z \in A \cup B$ zien we dat $x \sim z$. Dit toont aan dat $\sim$ inderdaad een equivalentierelatie is.

5.13. Definitie. Zij X een topologische ruimte. De equivalentieklassen voor de hierboven geïntroduceerde equivalentierelatie $\sim$ heten de *samenhangscomponenten* in X.

Zoals altijd het geval is bij een equivalentierelatie, vormen de equivalentieklassen een partitie van X. In het onderhavige geval betekent dit dat X de disjuncte vereniging is van zijn samenhangscomponenten. Bij elke $x \in X$ is er dus een unieke samenhangscomponent van X die x bevat, en deze is niets anders dan de equivalentieklasse van x onder de relatie $\sim$.

5.14. Voorbeeld. Laat $X = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x, 0) \bigm| x \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(0, y) \bigm| y \in \mathbb{R}\big\}$, het complement in $\mathbb{R}^2$ van de x-as en de y-as. Dan heeft X vier samenhangscomponenten, te weten de vier kwadranten.

5.15. Definitie. Een topologische ruimte X heet *totaal onsamenhangend* als voor alle x, $y \in X$ met $x \neq y$ geldt dat $x \not\sim y$. Anders gezegd: X is totaal onsamenhangend als de samenhangscomponenten van X allemaal 1-punts verzamelingen zijn.

5.16. Voorbeeld. Beschouw $\mathbb{Q}$ met de Euclidische topologie en bekijk rationale getallen $q_1 \neq q_2$. Als $A \subseteq \mathbb{Q}$ een deelverzameling is met q_1, $q_2 \in A$, dan is A niet samenhangend. Immers, we mogen aannemen dat $q_1 < q_2$ en dan bestaat er een irrationaal getal r met $q_1 < r < q_2$. Maar dan zijn $U :=]-\infty, r[\cap \mathbb{Q}$ en $V :=]r, \infty[\cap \mathbb{Q}$ open delen van $\mathbb{Q}$ waarvoor (a), (b) en (c) uit 5.5 gelden. Dus A is inderdaad niet samenhangend. Dit laat zien dat $\mathbb{Q}$ een totaal onsamenhangende ruimte is.

5.17. Voorbeeld. Een verzameling met de discrete topologie is totaal onsamenhangend. Merk op dat het omgekeerde niet geldt: als een ruimte X totaal onsamenhangend is dan wil dat nog niet zeggen dat de topologie op X de discrete topologie is. Immers, de Euclidische topologie op $\mathbb{Q}$ is zeer zeker niet de discrete topologie.

5.18. Propositie. *De samenhangscomponenten van een topologische ruimte X zijn de maximale samenhangende deelverzamelingen van X. Anders gezegd: als $A \subseteq X$ een samenhangscomponent is, dan is A samenhangend en er bestaat geen samenhangende deelverzameling $B \subseteq X$ die A strict omvat.*

Bewijs. Als $B \subseteq X$ een samenhangende deelverzameling is dan volgt onmiddellijk uit de definitie van de relatie $\sim$ dat alle punten van B equivalent zijn met elkaar. Dus als $x \in B$ en $A(x) \subseteq X$ is de samenhangscomponent van X die x bevat dan is $B \subseteq A(x)$.

Als $A \subseteq X$ een samenhangscomponent is en $B \subseteq X$ is een samenhangende verzameling met $A \subseteq B$, dan volgt uit het vorige dat $A = B$. Rest dus alleen nog te bewijzen dat elke samenhangscomponent A samenhangend is. Kies daartoe een element $x \in A$; dan is A de samenhangscomponent van x. Per definitie is er voor elke $y \in A$ een samenhangende verzameling $W_y \subseteq X$ zo dat x, $y \in W_y$. Uit het voorgaande volgt dat $W_y \subseteq A$. Dus $A = \cup_{y \in A} W_y$. Op de collectie $\{W_y\}_{y \in A}$ kunnen we Prop. 5.10 toepassen want voor y, $y' \in A$ is $x \in W_y \cap W_{y'}$. De conclusie is dat A samenhangend is, hetgeen we wilden aantonen. $\square$

In het bijzonder merken we op dat X samenhangend is dan en slechts dan als er maar één samenhangscomponent is (d.w.z., als alle punten van X equivalent zijn onder $\sim$).

5.19. Gevolg. *De samenhangscomponenten van een topologische ruimte X zijn gesloten in X.*

Bewijs. Zij $A \subseteq X$ een samenhangscomponent. Dan is $A \subseteq \overline{A} \subseteq X$ en wegens Prop. 5.9 is $\overline{A}$ weer samenhangend. Prop. 5.18 geeft dan dat $A = \overline{A}$, d.w.z., A is gesloten. $\square$

Zoals blijkt uit Voorbeeld 5.16 zijn de samenhangscomponenten van een ruimte X in het algemeen niet open in X. Vergelijk Gevolg 5.19 ook met Opmerking 5.28 hierna.

5.20. Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een *pad* in X is een continue afbeelding $\gamma\colon [0,1] \to X$. (Hierbij geven we $[0,1]$ gewoon de Euclidische topologie.) We noemen $\gamma(0) \in X$ het beginpunt van het pad en $\gamma(1)$ het eindpunt en we zeggen dat γ een weg is van $\gamma(0)$ naar $\gamma(1)$. Een pad in X wordt ook wel een *weg* in X genoemd. Als $\gamma(0) = \gamma(1) =: b$ dan noemen we het pad γ ook wel een *lus* en dan heet b het *basispunt* van de lus.

5.21. Stel $\gamma_1\colon [0,1] \to X$ is een weg van x_0 naar x_1 en $\gamma_2\colon [0,1] \to X$ is een weg van x_1 naar een punt x_2. Dan kunnen we de wegen γ_1 en γ_2 samenstellen tot een weg van x_0 naar x_2. Namelijk, definieer een afbeelding $\gamma_1 \star \gamma_2$: $[0,1] \to X$ door

$$\big(\gamma_1 \star \gamma_2\big)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{als } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ \gamma_2(2t-1) & \text{als } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Merk op dat $\gamma_1 \star \gamma_2$ welgedefinieerd is voor $t = 1/2$, dankzij de aanname dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. We laten het aan de lezer over om na te gaan dat $\gamma_1 \star \gamma_2$ weer continu is, en dus is het een pad van x_0 naar x_2.

5.22. Zij X een topologische ruimte. We introduceren een nieuwe relatie $\sim_{\text{wsh}}$ op X door te stellen dat $x \sim_{\text{wsh}} y$ dan en slechts dan als er een pad bestaat van x naar y. We beweren dat $\sim_{\text{wsh}}$ weer een equivalentierelatie is. Het is duidelijk dat $x \sim_{\text{wsh}} x$ voor alle x want de constante afbeelding $[0,1] \to X$ met waarde x is een pad van x naar x. Als er een pad γ van x naar y bestaat dan bestaat er ook een pad van y naar x; neem maar het pad γ': $[0,1] \to X$ gegeven door $\gamma'(t) = \gamma(1-t)$. ("Het pad γ in omgekeerde tijd doorlopen.") Tenslotte zien we dat $\sim_{\text{wsh}}$ transitief is door de samenstelling van paden te gebruiken.

5.23. Definitie. Zij X een topologische ruimte. De equivalentieklassen voor de hierboven geïntroduceerde equivalentierelatie $\sim_{\text{wsh}}$ heten de *wegsamenhangscomponenten* in X.

5.24. Definitie. Een topologische ruimte heet *wegsamenhangend* als elk tweetal punten van X equivalent is onder $\sim_{\text{wsh}}$; d.w.z. als er voor alle x en y in X een pad bestaat van x naar y.

5.25. Propositie. *De equivalentierelatie $\sim_{\text{wsh}}$ is fijner dan de equivalentierelatie $\sim$; dat wil zeggen: als x_1, $x_2 \in X$ dan geldt*

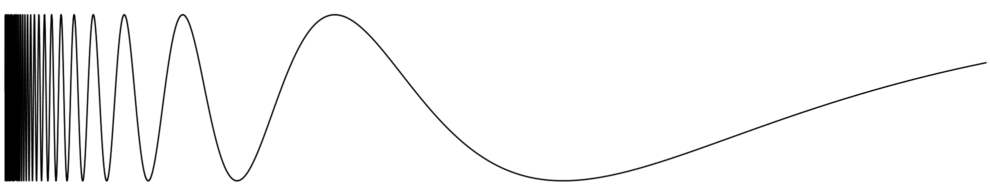
$$x_1 \sim_{\text{wsh}} x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 \sim x_2\,.$$

Bewijs. Stel $x \sim_{\text{wsh}} y$. Dat betekent dat er een pad γ: $[0,1] \to X$ bestaat van x naar y. Uit Prop. 5.8 en Voorbeeld 5.4 volgt dat $\Gamma := \gamma\big([0,1]\big) \subseteq X$ samenhangend is. Maar x, $y \in \Gamma$ dus $x \sim y$. □

5.26. Gevolg. *Een wegsamenhangende ruimte is samenhangend.*

5.27. Voorbeeld. We geven nu een voorbeeld dat aantoont dat een samenhangende ruimte in het algemeen *niet* wegsamenhangend is. Daartoe bekijken we de afbeelding $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $x \mapsto \big(x, \sin(1/x)\big)$. Dit is een continue afbeelding en met Prop. 5.8 zien we dat het beeld $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ samenhangend is. Uit Prop. 5.9 volgt dan dat ook de afsluiting $\overline{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^2$ samenhangend is. We gaan aantonen dat $\overline{\Gamma}$ echter *niet* wegsamenhangend is.

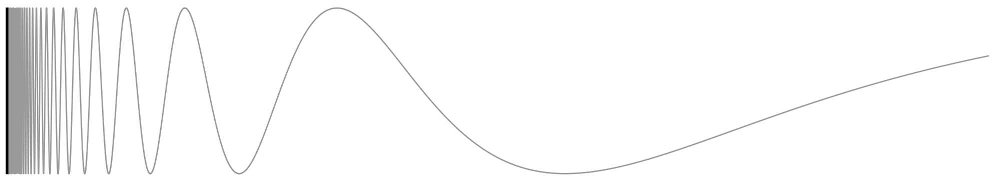
In een plaatje ziet Γ er zo uit:



Er geldt

$$\partial\Gamma = \{(0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\} \qquad \text{zodat} \qquad \overline{\Gamma} = \Gamma \coprod \{(0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}\,.$$

Omdat de printer geen oneindige resolutie heeft (en onze ogen evenmin) kunnen we niet precies zien wat er gebeurt in de buurt van de y-as, dus hier is nog eens hetzelfde plaatje, waarbij we Γ in grijs tekenen en de rand $\partial\Gamma$ in zwart:



Informeel gezegd is de reden dat $\overline{\Gamma}$ niet wegsamenhangend is, dat je met een pad niet de oversteek kunt maken van een punt in $\partial\Gamma$ naar een punt in Γ. Met andere woorden: $\partial\Gamma$ hangt "los" van Γ in de zin van wegsamenhang. (In de getekende plaatjes is dit niet echt te zien.)

Het bewijs dat $\overline{\Gamma}$ niet wegsamenhangend is, gaat als volgt. Stel dat $\overline{\Gamma}$ wegsamenhangend was. In het bijzonder was er dan een pad $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Gamma}$ met $\gamma(0) = (0,0)$ en $\gamma(1) = \big(1, \sin(1)\big)$. Schrijf $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$; anders gezegd, laat $\gamma_i := \mathrm{pr}_i \circ \gamma$ waarbij $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de i-de projektie is. Dan zijn γ_1 en γ_2 continue functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$. Laat $\tau := \inf\{x \in [0,1] \mid \gamma_1(x) > 0\}$. De continuïteit van γ_1 impliceert dat $\gamma_1(\tau) = 0$; in het bijzonder is $\tau < 1$.

Zij nu een $\varepsilon > 0$ gegeven met $\tau + \varepsilon < 1$. We gaan aantonen dat er, gegeven zo een ε, elementen x, $y \in]\tau, \tau+\varepsilon[$ bestaan zo dat $\gamma_2(x) = -1$ en $\gamma_2(y) = +1$. Dit geeft een tegenspraak met de continuïteit van γ_2 en de conclusie is dan dat onze aanname over de wegsamenhang van $\overline{\Gamma}$ onjuist was.

Uit de definitie van τ volgt dat er een $t \in]\tau, \tau+\varepsilon[$ bestaat zo dat $\gamma_1(t) > 0$. Nu is γ_1 continu, dus als we $n \in \mathbb{N}$ zo kiezen dat

$$0 < \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi} < \frac{1}{(2n-\frac{1}{2})\pi} < \gamma_1(t)$$

dan volgt uit de middelwaardestelling dat er x, $y \in]\tau, t[$ bestaan zo dat $\gamma_1(x) = 1/\big((2n-1/2)\pi\big)$ en $\gamma_1(y) = 1/\big((2n+1/2)\pi\big)$. Maar dan is inderdaad $\gamma_2(x) = \sin\big((2n-1/2)\pi\big) = -1$ en $\gamma_2(y) = \sin\big((2n+1/2)\pi\big) = +1$, dus we krijgen de gewenste tegenspraak.

5.28. Opmerking. De wegsamenhangscomponenten van een topologische ruimte X zijn in het algemeen noch open noch gesloten in X. Dat de wegsamenhangscomponenten in het algemeen niet open zijn zal niet als een verrassing komen, want ook samenhangscomponenten zijn in het algemeen niet open. Zo volgt uit Prop. 5.25 dat in Voorbeeld 5.16 de wegsamenhangscomponenten dezelfde zijn als de samenhangscomponenten, en deze zijn in dit voorbeeld niet open. Maar in tegenstelling tot de samenhangscomponenten zijn de wegsamenhangscomponenten in het algemeen ook niet gesloten. Zo zien we in Voorbeeld 5.27 dat de ruimte $\overline{\Gamma}$ twee wegsamenhangscomponenten heeft, te weten Γ en $\{(0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ (ga na!), en Γ is niet gesloten in $\overline{\Gamma}$.

5.29. Propositie. *Beschouw topologische ruimten X en Y, en geef $X \times Y$ de produkttopologie.*
(i) *Als X en Y samenhangend zijn dan is ook $X \times Y$ samenhangend.*
(ii) *Als X en Y wegsamenhangend zijn dan is ook $X \times Y$ wegsamenhangend.*

Bewijs. (i) Voor $(x, y) \in X \times Y$, definieer

$$K_{(x,y)} := \big(\{x\} \times Y\big) \cup \big(X \times \{y\}\big)\,.$$

Dan volgt uit Prop. 5.10 dat $K_{(x,y)}$ samenhangend is, want het is de vereniging van $\{x\} \times Y$ en $X \times \{y\}$ die beide samenhangend zijn en die een niet-lege doorsnede hebben. Vervolgens merken we op dat $X \times Y$ de vereniging is van de verzamelingen $K_{(x,y)}$, waarbij bovendien voor alle (x, y) en $(x', y') \in X \times Y$ geldt dat $K_{(x,y)} \cap K_{(x',y')} \neq \emptyset$. Door nogmaals Prop. 5.10 toe te passen volgt dat $X \times Y$ samenhangend is.

(ii) Beschouw twee punten $P = (x_1, y_1)$ en $Q = (x_2, y_2)$. Als X en Y wegsamenhangend zijn dan is er een pad γ in X van x_1 naar x_2 en een pad δ in Y van y_1 naar y_2. Dan is de afbeelding $[0, 1] \to X \times Y$ gegeven door $t \mapsto \big(\gamma(t), \delta(t)\big)$ een pad van P naar Q. $\square$

5.30. Gevolg *Beschouw topologische ruimten $X_1, \ldots, X_n$.*
(i) *Als elke X_i samenhangend is dan is ook $X_1 \times \cdots \times X_n$ samenhangend.*
(ii) *Als elke X_i wegsamenhangend is dan is ook $X_1 \times \cdots \times X_n$ wegsamenhangend.*

Bewijs. Gebruik volledige inductie naar n en pas Prop. 5.29 toe. $\square$

Algemener is het waar dat een *willekeurig* produkt van samenhangende ruimten weer samenhangend is, en analoog voor wegsamenhang. We zullen dit niet bewijzen. (Het hier gegeven bewijs voor twee factoren is gemakkelijk te generaliseren.)

5.31. Voorbeeld. Beschouw de groep

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ en } ad - bc \neq 0 \right\}.$$

We kunnen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ opvatten als een open deelverzameling van $\mathbb{R}^4$ voor de Euclidische topologie, en daarmee hebben we een geïnduceerde topologie op $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. De groep $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ met deze (Euclidische) topologie is een voorbeeld van een *topologische groep*; zie Opgave 5.11 voor meer uitleg bij dit begrip. In feite heeft $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ zelfs een natuurlijke structuur van een C^∞-variëteit en is daarmee een voorbeeld van een Liegroep. We zullen hier niet verder op ingaan.

Het is gemakkelijk in te zien dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ niet samenhangend kan zijn. Immers, de determinantafbeelding $\det\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ is continu en surjectief, terwijl $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ niet samenhangend is.

We beweren dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ precies twee samenhangscomponenten heeft, te weten

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ := \big\{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\big|\; \det(A) > 0\big\} \quad \text{en} \quad \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^- := \big\{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\big|\; \det(A) < 0\big\}\,.$$

Merk op dat de afbeelding $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gegeven door

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A$$

een homeomorfisme is dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^-$ verwisselt. Dus het volstaat aan te tonen dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ samenhangend is, want dan is ook $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^-$ samenhangend en omdat duidelijk is dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de disjuncte vereniging is van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^-$ volgt onze bewering.

We gaan nu aantonen dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ wegsamenhangend (en dus zeker ook samenhangend) is. Dit doen we in een paar stappen. We beginnen met een willekeurig element $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$.

Stap 1. Er is een $A' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ met $A \sim_{\mathrm{wsh}} A'$. Schrijf $\delta := \sqrt{\det(A)}$ en neem $A' = 1/\delta \cdot A$. Om in te zien dat $A \sim_{\mathrm{wsh}} A'$, beschouw het pad $[0,1] \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ gegeven door $t \mapsto \delta^{-t} \cdot A$; dit is een continu pad van A naar A'.

Stap 2. Er is een $A'' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ met $A \sim_{\mathrm{wsh}} A''$ en zo dat de eerste kolomvector van A'' lengte 1 heeft. Neem de matrix A' die we in stap 1 hebben gevonden. Zij ℓ de lengte van de eerste kolomvector van A'. Kijk nu naar het pad $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gegeven door

$$\gamma(t) = A' \cdot \begin{pmatrix} \ell^{-t} & 0 \\ 0 & \ell^t \end{pmatrix} .$$

Dan is $\gamma(0) = A'$ en $A'' := \gamma(1)$ is een matrix in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ waarvan de eerste kolom lengte 1 heeft.

Stap 3. Er is een $\varphi \in \mathbb{R}$ zo dat

$$A \sim_{\mathrm{wsh}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} .$$

Om dit in te zien, begin met de matrix A'' uit stap 2. Schrijf deze als $A'' = \big(v; w\big)$ waarbij v en w kolomvectoren zijn (met $|v| = 1$ per constructie). Kijk nu naar het pad $[0,1] \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gegeven door $t \mapsto \big(v; w - t \cdot \langle v, w\rangle \cdot v\big)$, waarbij $\langle\ ,\ \rangle$ het gewone inprodukt op $\mathbb{R}^2$ is. Dit is een continu pad van A'' naar een matrix $A^{(3)} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ zo dat de eerste kolomvector van $A^{(3)}$ lengte 1 heeft en zo dat de kolomvectoren van $A^{(3)}$ loodrecht op elkaar staan. Dus als we schrijven

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(met a, b, c, $d \in \mathbb{R}$) dan weten we dat $a^2 + b^2 = 1$, dat $ac + bd = 0$ en dat $ad - bc = 1$. Een dergelijke matrix is van de vorm $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$ voor een $\varphi \in \mathbb{R}$.

Stap 4, laatste stap: Er geldt dat $A \sim_{\mathrm{wsh}} \mathrm{id}$. Immers, de afbeelding $[0,1] \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gegeven door

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\varphi) & -\sin(t\varphi) \\ \sin(t\varphi) & \cos(t\varphi) \end{pmatrix}$$

is een continu pad van de eenheidselement in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ naar het element $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$ dat we in de vorige stap hebben gevonden.

Daarmee is bewezen dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \amalg \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^-$ de opdeling van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ in zijn samenhangscomponenten is. (In feite hebben we bewezen dat deze ook de wegsamenhangscomponenten van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ zijn. Zie ook Opgave 6.2.) Algemener is het waar dat $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ precies twee samenhangscomponenten heeft. Maar bijvoorbeeld $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ is wegsamenhangend; zie Opgave 5.12 voor het geval $n = 2$.

Opgaven bij hoofdstuk 5.

Opgave 5.1. Laat $T := \{0, 1\}$ met de discrete topologie. Bewijs dat een topologische ruimte X onsamenhangend is dan en slechts dan als er een continue en surjectieve afbeelding $X \to T$ bestaat.

Opgave 5.2. Gegeven is een topologische ruimte X en een samenhangende deelverzameling A.
(i) Als B een deelverzameling van X is met $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, toon aan dat B samenhangend is.
(ii) Laat met een voorbeeld zien dat A° niet samenhangend hoeft te zijn.

Opgave 5.3. Bepaal van elk van de volgende topologische ruimten de samenhangscomponenten:
(i) $\mathbb{R}$ met de rechterhalflijnentopologie (zie Opg. 1.3);
(ii) de Sorgenfrey rechte (zie Opg. 3.4);
(iii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ met de Euclidische topologie;
(iv) een verzameling X met een topologie $\mathscr{T}$ zo dat $\#\mathscr{T} = 3$ (zie Opg. 1.2);
(v) een verzameling X met de uitgesloten-punt-topologie $\mathscr{T}_P$ voor een $P \in X$ (zie Opg. 2.4).

Opgave 5.4. (De tussenwaardestelling) Zij X een samenhangende topologische ruimte en zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding, waarbij we $\mathbb{R}$ de Euclidische topologie geven. Gegeven zijn punten $x, y \in X$ met $f(x) < f(y)$. Bewijs dat er voor elk reëel getal c met $f(x) \leqslant c \leqslant f(y)$ een $z \in X$ bestaat met $f(z) = c$.

Opgave 5.5. We bekijken $\mathbb{R}^n$ met de Euclidische topologie.
(i) Laat $P \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ samenhangend is als $n \geqslant 2$.
(ii) Bewijs dat $\mathbb{R}$ niet homeomorf is met $\mathbb{R}^n$ als $n \geqslant 2$.

Opgave 5.6. Gegeven zijn twee samenhangende deelverzamelingen A en B van een topologische ruimte, zo dat $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Bewijs dat $A \cup B$ samenhangend is.

Opgave 5.7.
(i) Toon aan dat $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ totaal onsamenhangend is. (Topologie = Euclidische topologie.)
(ii) Toon aan dat $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ wegsamenhangend is.

Opgave 5.8. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding. Als X wegsamenhangend is, laat zien dat dan ook $f(X) \subseteq Y$ wegsamenhangend is.

Opgave 5.9. Gegeven zijn twee samenhangende topologische ruimten X en Y en echte deelverzamelingen $A \subsetneq X$ en $B \subsetneq Y$. Bewijs dat $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ samenhangend is.

Opgave 5.10. Gegeven is een topologische ruimte X en een surjectieve afbeelding $f\colon X \to Y$. We geven Y de quotiënttopologie; dit is per definitie de fijnste topologie op Y zo dat f continu is. (Zie Hoofdstuk 11 voor meer over de quotiënttopologie.) Gegeven is dat Y samenhangend is en ook dat voor elke $y \in Y$ de deelverzameling $f^{-1}(y) \subseteq X$ samenhangend is. Bewijs dat X samenhangend is.

Opgave 5.11. Een *topologische groep* is een groep G die voorzien is van een topologie, zo dat de afbeeldingen

$$\begin{aligned} m\colon G \times G \to G \quad &\text{gegeven door} \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \\ i\colon G \to G \quad &\text{gegeven door} \quad g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

continu zijn.

(i) Zij G een topologische groep. Voor $a \in G$ definiëren we de "linkstranslatie" $t_a\colon G \to G$ als de afbeelding gegeven door $t_a(g) = ag$. Laat zien dat t_a een homeomorfisme is van G naar zichzelf.

(ii) Bewijs dat een topologische groep G Hausdorffs is d.e.s.d.a. het eenheidselement $e \in G$ een gesloten punt is. (Gebruik Opgave 3.5.)

(iii) Zij $G^0 \subset G$ de samenhangscomponent die het eenheidselement e bevat. Laat zien dat G^0 een ondergroep is van G.

(iv) Als $H \subset G$ een ondergroep is die open is, laat zien dat H ook gesloten is.

Opgave 5.12. We voorzien $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ van de Euclidische topologie, verkregen door $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ op te vatten als een open deel van $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$. Imiteer de methode uit Voorbeeld 5.31 om aan te tonen dat $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ wegsamenhangend is.

Opgave 5.13. (Een klassieke puzzel) Er waren eens drie mannen, Aart, Berend en Cees, die het niet goed met elkaar konden vinden. Elk van hen woonde in zijn eigen huis. Ook waren er drie café's, de alfalfa, de betablokker en de gammastraal geheten. Elk van de heren wilde een pad hebben van zijn huis naar elk van de drie café's, maar vanwege de slechte onderlinge verstandhouding wilden ze dit zo doen dat geen van de paadjes een kruising heeft met een ander paadje (afgezien van begin- en eindpunten natuurlijk). Leg uit waarom de heren er niet uitkomen. Kun je bedenken hoe een formeel argument eruit zou moeten zien? [*Hint:* Laat $\Theta := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \bigm| -1 \leqslant x \leqslant 1\big\}$. Zij S^2 de 2-sfeer. Als $i\colon \Theta \hookrightarrow S^2$ een inbedding is dan bestaat $S^2 \setminus i(\Theta)$ uit precies 3 samenhangscomponenten. Pas dit toe om een argument te krijgen. Ter waarschuwing: voor een bewijs van de bewering dat $S^2 \setminus i(\Theta)$ precies 3 componenten heeft, zijn resultaten nodig die we niet behandeld hebben. Kijk maar eens bij Wikipedia onder "Jordan curve theorem".]

Opgave 5.14. (Een variant) Er waren eens drie mannen, Aart, Berend en Cees, die het niet goed met elkaar konden vinden. Elk van hen woonde in zijn eigen huis. Ze leefden op een planeet die de vorm had van een torus (fietsband/donut). Ook waren er [...(zie 5.13)...]. Laat in een plaatje zien hoe ze hun paadjes kunnen aanleggen.

HOOFDSTUK 6

Locale samenhang en locale wegsamenhang

6.1. Definitie. Een topologische ruimte X heet *locaal samenhangend* als er voor elke $x \in X$ en elke open omgeving U van x een *samenhangende* open omgeving V van x bestaat zo dat $V \subseteq U$.

6.2. Opmerking. Een equivalente definitie is: Een topologische ruimte X is locaal samenhangend als de collectie

$$\{V \subseteq X \mid V \text{ is open en samenhangend}\}$$

een basis is voor de topologie.

Vervangen we overal "samenhang" door "wegsamenhang" dan krijgen we het begrip "locaal wegsamenhangend":

6.3. Definitie. Een topologische ruimte X heet *locaal wegsamenhangend* als er voor elke $x \in X$ en elke open omgeving U van x een *wegsamenhangende* open omgeving V van x bestaat zo dat $V \subseteq U$.

Equivalent: de collectie

$$\{V \subseteq X \mid V \text{ is open en wegsamenhangend}\}$$

is een basis voor de topologie.

6.4. Propositie. *Als X locaal wegsamenhangend is dan is X ook locaal samenhangend.*

Bewijs. Dit is een onmiddellijk gevolg van Prop. 5.26. □

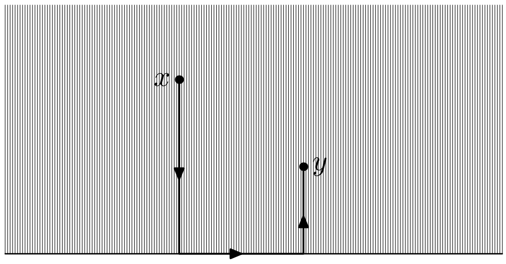
6.5. Opmerking. ls een ruimte X locaal samenhangend is, dan is ook elke open deelverzameling $U \subseteq X$ locaal samenhangend. Idem voor locaal wegsamenhangend.

6.6. Er bestaan in het algemeen geen implicaties tussen de eigenschappen "samenhangend" en "locaal samenhangend", en ook niet tussen de begrippen "wegsamenhangend" en "locaal wegsamenhangend". Om dit te illustreren kijken we eerst naar het voorbeeld van de ruimte $X = \,]0,1[\, \cup \,]2,3[$ met de Euclidische topologie. Ten duidelijkste is dit niet een samenhangende ruimte. Maar X is wel degelijk locaal samenhangend en zelfs locaal wegsamenhangend. Immers: als $x \in X$ en $U \subseteq X$ is een open omgeving van x, dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $V := \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq U$, en V is wegsamenhangend. Dus we zien dat in het algemeen

$$\text{locale wegsamenhang} \not\Rightarrow \text{wegsamenhang} \qquad \text{en} \qquad \text{locale samenhang} \not\Rightarrow \text{samenhang}\,.$$

6.7. Vervolgens bekijken we een voorbeeld waaruit blijkt dat, omgekeerd, (weg)samenhang in het algemeen geen locale (weg)samenhang impliceert. Daartoe nemen we de verzameling $X \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$X = \big(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big)\,.$$



Allereerst merken we op dat X wegsamenhangend is. Immers, als $x = (a, b)$ met $a \in \mathbb{Q}$ en $b \geqslant 0$ dan is duidelijk dat $x \sim_{\mathrm{wsh}} (a, 0)$. ("Loop over de halflijn $\{a\} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ naar beneden.") Maar ook is duidelijk dat alle punten van $\mathbb{R} \times \{0\}$ equivalent zijn onder $\sim_{\mathrm{wsh}}$. Dus X is inderdaad wegsamenhangend. Zie het plaatje, waarin we met een dikkere lijn een weg aangeven van een punt x naar een punt y.

De ruimte X is echter niet locaal samenhangend. Immers, neem een punt $x = (a, b) \in X$ met $b > 0$. Bekijk de open omgeving $U = B(x, b/2)$. We beweren dat er geen samenhangende open omgeving V van x is met $V \subseteq U$. Immers, als V een open omgeving is van x met $V \subseteq U$ dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(x, \varepsilon) \subseteq V$. Kies nu een irrationaal getal $\alpha \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ en laat $A := \bigl(]-\infty, \alpha[\, \times \mathbb{R}\bigr) \cap V$ en $B := \bigl(]\alpha, \infty[\, \times \mathbb{R}\bigr) \cap V$. Dan zijn A en B niet-lege open en disjuncte delen van V met $V = A \cup B$. (Ga zelf de details na.) Dit laat zien dat V inderdaad onsamenhangend is en we concluderen dat X niet locaal samenhangend is.

Dit voorbeeld laat zien dat in het algemeen

$$\text{wegsamenhang} \not\Rightarrow \text{locale wegsamenhang} \qquad \text{en} \qquad \text{samenhang} \not\Rightarrow \text{locale samenhang}\,.$$

6.8. Propositie. *Zij X een topologische ruimte die locaal wegsamenhangend is.*

(i) *De samenhangscomponenten van X zijn dezelfde als de wegsamenhangscomponenten. Anders gezegd: de equivalentierelaties $\sim$ en $\sim_{\mathrm{wsh}}$ zijn gelijk.*

(ii) *De (weg)samenhangscomponenten van X zijn open en gesloten in X.*

Bewijs. Eerst bewijzen we dat de wegsamenhangscomponenten in X open zijn. Zij daartoe $B \subseteq X$ een wegsamenhangcomponent. Uit de definitie van locale wegsamenhang volgt dat elke $x \in B$ een wegsamenhangende open omgeving V heeft. (Neem $U = X$ in Def. 6.1.) Omdat B de wegsamenhangscomponent van x is, is $V \subseteq B$. Dit toont aan dat elke $x \in B$ een open omgeving V heeft met $x \in V \subseteq B$. Dus B is open.

Zij nu $A \subseteq X$ een samenhangscomponent. Uit Prop. 5.25 weten we dat A een disjuncte vereniging is van wegsamenhangscomponenten. Maar deze zijn allemaal open, zoals net aangetoond, en uit Prop. 5.18 weten we dat A zelf samenhangend is. Dus A is een enkele wegsamenhangscomponent, hetgeen (i) bewijst.

Uit (i) volgt dat het in (ii) niet uitmaakt of we samenhangscomponenten beschouwen of wegsamenhangscomponenten. Verder hebben we al aangetoond dat de wegsamenhangscomponenten open zijn. Zij nu weer B een wegsamenhangscomponent. Dan is $X \setminus B$ een disjuncte vereniging van wegsamenhangscomponenten, en omdat deze allemaal open zijn is $X \setminus B$ open. Dus B is gesloten. Dit bewijst (ii). $\square$

Opgaven bij hoofdstuk 6.

Opgave 6.1. Beslis of de volgende topologische ruimten locaal samenhangend zijn:
(i) $\mathbb{R}$ met de rechterhalflijnentopologie;
(ii) de Sorgenfrey rechte;
(iii) een verzameling X met de uitgesloten-punt-topologie $\mathscr{T}_P$ voor een $P \in X$.

Licht je antwoorden toe.

Opgave 6.2. We voorzien de groep $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ van de Euclidische topologie. (Vat $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ op als een deelverzameling van alle $n \times n$ reële matrices en identificeer die ruimte met $\mathbb{R}^{n^2}$.) Laat zien dat de wegsamenhangscomponenten van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dezelfde zijn als de samenhangscomponenten.

Opgave 6.3. Zij X een locaal samenhangende topologische ruimte. Bewijs dat de samenhangscomponenten van X open en gesloten zijn in X. [*Hint:* imiteer het bewijs van Prop. 6.8.]

Opgave 6.4. In deze opgave mag je zonder verdere toelichting gebruik maken van het volgende feit:

> Het interval $[0, 1]$ kan niet geschreven worden als een aftelbare vereniging van disjuncte gesloten deelverzamelingen, anders dan de "triviale" schrijfwijze $[0, 1] = [0, 1]$.

Zij X een aftelbaar oneindige verzameling (bijvoorbeeld: $X = \mathbb{Z}$ of $X = \mathbb{Q}$). We voorzien X van de co-eindige topologie.
(i) Laat zien dat X locaal samenhangend is.
(ii) Zij Y een aftelbaar oneindige verzameling met de co-eindige topologie. Laat zien dat de enige continue afbeeldingen $\gamma\colon [0, 1] \to Y$ de constante afbeeldingen zijn. [*Hint:* gebruik het hierboven genoemde feit.]
(iii) Bewijs dat X *niet* locaal wegsamenhangend is.
(iv) Bepaal de samenhangscomponenten van X en ook de wegsamenhangscomponenten.

HOOFDSTUK 7

Compactheid

Zij X een topologische ruimte. Herinner dat we met een open overdekking van X een collectie $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ van open deelverzamelingen van X bedoelen, zo dat $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Gegeven zo een open overdekking en een deelverzameling $A' \subseteq A$, dan noemen we de deelcollectie $\mathscr{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ een *deeloverdekking* als $\mathscr{U}'$ zelf weer een open overdekking van X is, d.w.z. als $X = \cup_{\alpha\in A'} U_\alpha$.

7.1. Definitie. Een topologische ruimte X heet *compact* als er voor elke open overdekking $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ een eindig aantal indices $\alpha_1 \ldots, \alpha_n \in A$ bestaan zo dat $X = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$.

Met andere woorden: X is compact als elke open overdekking van X een eindige deeloverdekking heeft.

Een deelverzameling $Z \subseteq X$ noemen we compact als Z compact is in de geïnduceerde topologie. Concreet betekent dit: $Z \subseteq X$ is compact als er voor elke collectie $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ van open deelverzamelingen met $Z \subseteq \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ een eindig aantal indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ bestaan zo dat $Z \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$.

7.2. Voorbeelden.
(i) Als X eindig is dan is X compact, ongeacht de topologie op X.
(ii) Als $\mathscr{T}$ een topologie is met $\#\mathscr{T} < \infty$ dan is $(X, \mathscr{T})$ compact. In het bijzonder geldt dit voor de indiscrete topologie.
(iii) Een verzameling X met de discrete topologie is compact dan en slechts dan als X eindig is.

7.3. Opmerking. Als X en Y homeomorfe ruimten zijn dan geldt:

$$X \text{ is compact} \quad \Longleftrightarrow \quad Y \text{ is compact}\,.$$

Het bewijs hiervan is triviaal.

Hier is een minder triviaal voorbeeld:

7.4. Propositie. *Een gesloten interval* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *is compact in de Euclidische topologie.*

Bewijs. Stel $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ is een open overdekking van $X = [a, b]$. Definieer

$$C := \left\{ d \in [a, b] \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{er is een eindige collectie } A' \subseteq A \\ \text{zo dat } [a, d] \subseteq \cup_{\alpha\in A'} U_\alpha \end{array} \right\},$$

en laat

$$c := \sup\{x \in C\}\,.$$

Merk op dat $c > a$ want er is een $\alpha_0 \in A$ zo dat $a \in U_{\alpha_0}$ en dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $[a, a + \varepsilon[\subseteq U_{\alpha_0}$, en dus zeker $[a, a + \varepsilon[\subseteq C$.

We beweren dat noodzakelijk $c = b$. Immers, stel dat $c < b$. Kies een $\alpha_1 \in A$ zo dat $c \in U_{\alpha_1}$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subseteq U_{\alpha_1} \cap X$. Omdat $c - \frac{\varepsilon}{2} < c$ is er een eindige indexverzameling $A' \subseteq A$ zo dat $\left[a, c - \frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq \cup_{\alpha \in A'} U_\alpha$. Neem nu $A'' := A' \cup \{\alpha_1\}$. Dan is A'' natuurlijk nog steeds een eindige deelverzameling van A, en $\left[a, c + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq \cup_{\alpha \in A''} U_\alpha$. Dit is echter in tegenspraak met de keuze van c. Dus inderdaad $c = b$.

Kies tenslotte een index $\alpha_2 \in A$ zo dat $b \in U_{\alpha_2}$ en kies een $\varepsilon > 0$ zo dat $]b - \varepsilon, b] \subseteq U_{\alpha_2}$. Omdat $b - \frac{\varepsilon}{2} < c$, is er een eindige deelverzameling $A' \subseteq A$ zo dat $\left[a, b - \frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq \cup_{\alpha \in A'} U_\alpha$. Dan nemen we $A'' := A' \cup \{\alpha_2\}$ en vinden dat $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A''}$ een eindige deeloverdekking is van $\mathscr{U}$. Daarmee is bewezen dat $[a, b]$ compact is. $\square$

7.5. Propositie. *Als $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding is en X is compact, dan is ook het beeld $f(X) \subseteq Y$ compact.*

Bewijs. Zij $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een collectie open deelverzamelingen van Y met $f(X) \subseteq \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Dan is $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}_{\alpha \in A}$ een open overdekking van X en vanwege de compactheid van X is er een eindige deelverzameling $A' \subseteq A$ zo dat $X = \cup_{\alpha \in A'} f^{-1}(U_\alpha)$. Maar dan is $\mathscr{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ een eindige deeloverdekking van $\mathscr{U}$. $\square$

7.6. Propositie. *Als X compact is en $Z \subseteq X$ is gesloten in X, dan is Z compact.*

Bewijs. Stel $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ is een collectie open deelverzamelingen van X met $Z \subseteq \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Dan is $\mathscr{U}' = \mathscr{U} \cup \{X \setminus Z\}$ een open overdekking van X. Maar X is compact, dus er is een eindige deelverzameling $A' \subseteq A$ zo dat $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A'} \cup \{X \setminus Z\}$ een open overdekking is van X, en dan is $Z \subseteq \cup_{\alpha \in A'} U_\alpha$. $\square$

7.7. Propositie. *Als X een Hausdorffruimte is en $Z \subseteq X$ is compact, dan is Z gesloten in X.*

Bewijs. Het volstaat aan te tonen dat elke $x \in X \setminus Z$ een open omgeving U heeft met $U \subseteq X \setminus Z$. Kies $x \in X \setminus Z$. Als $z \in Z$ dan is zeker $x \neq z$ en omdat X Hausdorffs is, zijn er open omgevingen $U(z)$ van x en $V(z)$ van z met $U(z) \cap V(z) = \emptyset$. (We geven in de notatie aan dat deze open omgevingen afhangen van z.) Dan is $Z \subseteq \cup_{z \in Z} V(z)$. Omdat Z compact is, kunnen we punten $z_1, \ldots, z_n \in Z$ vinden zo dat $Z \subseteq V(z_1) \cup \cdots \cup V(z_n)$. Laat dan $U := U(z_1) \cap \cdots \cap U(z_n)$. Dan is U een open omgeving van x en $U \subseteq X \setminus Z$. $\square$

7.8. Lemma. *Zij $\mathscr{B}$ een basis voor de topologie op een ruimte X. Dan is X compact dan en slechts dan als elke open overdekking $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ met $U_\alpha \in \mathscr{B}$ voor elke α (dus: een deeloverdekking van de overdekking $\mathscr{B}$) een eindige deeloverdekking heeft.*

Bewijs. De "slechts dan" implicatie is triviaal. Neem nu aan dat elke open overdekking $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ met $U_\alpha \in \mathscr{B}$ voor elke α een eindige deeloverdekking heeft. Beschouw een open overdekking $\mathscr{V} = \{V_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ van X. Uit Propositie 3.4 weten we dat elke V_γ te schrijven is als een vereniging van basis-open verzamelingen; dus kunnen we schrijven

$$V_\gamma = \cup_{\alpha \in A(\gamma)} U_\alpha$$

met $U_\alpha \in \mathscr{B}$ voor elke α. Laat $A = \cup_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$. Dan is $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een open overdekking van X met basis-open verzamelingen. Volgens onze aanname is er dus een eindig aantal indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ te vinden zo dat $X = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$. Maar als $\alpha_i \in A(\gamma_i)$ dan geldt per constructie dat $U_{\alpha_i} \subseteq V_{\gamma_i}$ en dus is ook $X = V_{\gamma_1} \cup \cdots \cup V_{\gamma_n}$. Dit toont aan dat X compact is. $\square$

7.9. Stelling. (Stelling van Tychonoff.) *Als* $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *een collectie topologische ruimten is, en elk van de ruimten* X_γ *is compact, dan is ook de produktruimte* $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ *(met de produkttopologie) compact.*

We zullen alleen een bewijs geven voor het geval van een produkt $X\times Y$ van twee compacte ruimten. (Met volledige inductie volgt hieruit de stelling voor het geval van een eindig produkt.) Het bewijs in het algemene geval is moeilijker.

Bewijs. Stel X en Y zijn compact. Ons doel is te bewijzen dat $X\times Y$ compact is. Volgens het voorgaande Lemma volstaat het om aan te tonen dat elke overdekking $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ met open deelverzamelingen van de vorm

$$U_\alpha = V_\alpha \times W_\alpha\,, \qquad V_\alpha \text{ open in } X, \quad W_\alpha \text{ open in } Y$$

een eindige deeloverdekking heeft.

Als $x\in X$ dan is $\{x\}\times Y$ homeomorf met Y (zie Opgave 4.6) en is derhalve compact. (Vgl. Opmerking 7.3.) We kunnen dus een eindige deelverzameling $A(x)\subseteq A$ vinden zo dat

$$\{x\}\times Y \subseteq \cup_{\alpha\in A(x)} U_\alpha\,. \tag{1}$$

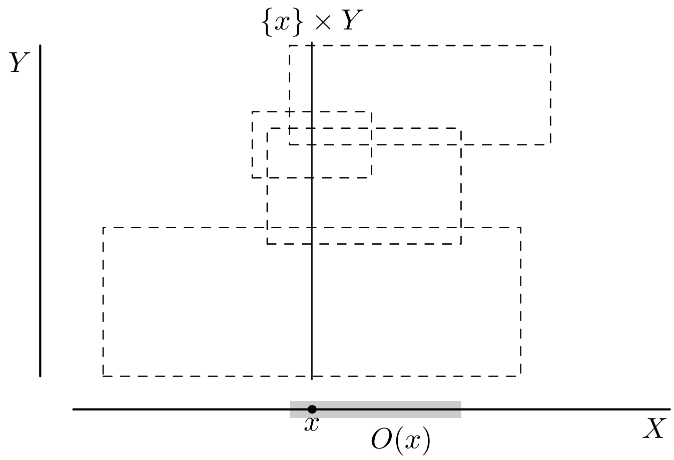
Bovendien mogen we aannemen dat $\big(\{x\}\times Y\big)\cap U_\alpha \neq \emptyset$ voor alle $\alpha\in A(x)$, want anders kunnen we de index α gewoon weglaten uit de collectie $A(x)$ zonder dat we de eigenschap (1) verliezen. Maar dan is

$$O(x) := \cap_{\alpha\in A(x)} V_\alpha$$

een open omgeving van x (want hier staat een eindige doorsnede van open omgevingen) en uit de constructie zien we dat (1) versterkt kan worden tot:

$$O(x)\times Y \subseteq \cup_{\alpha\in A(x)} U_\alpha\,. \tag{2}$$

In een plaatje:



De open verzamelingen $O(x)$ voor $x\in X$ vormen ten duidelijkste een open overdekking van X, aangezien $x\in O(x)$. Maar X is compact. Dus zijn er punten $x_1,\dots,x_m\in X$ zo dat $X = O(x_1)\cup\cdots\cup O(x_m)$. Laat $A' = A(x_1)\cup\cdots\cup A(x_m)$. Dan is A' een eindige deelverzameling van A en uit (2) zien we dat $X \times Y = \cup_{\alpha \in A'} U_\alpha$. Dit toont aan dat $X \times Y$ compact is, zoals de bewering was. □

7.10. Gevolg. *Een deelverzameling $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ is compact dan en slechts dan als Z gesloten en begrensd is.*

Bewijs. Stel Z is compact. Uit Prop. 7.7 volgt dat Z gesloten is. De collectie van open bollen $B(0,r)$ met $r \in \mathbb{R}_{>0}$ is een overdekking van $\mathbb{R}^n$; in het bijzonder overdekken deze bollen Z. Omdat Z compact verondersteld is, bestaat er een $r > 0$ zo dat $Z \subseteq B(0,r)$ en dat betekent precies dat Z begrensd is.

Omgekeerd, stel dat Z gesloten en begrensd is. Dan bestaat er een $N > 0$ zo dat $Z \subseteq [-N,N]^n$. Zoals we gezien hebben in Prop. 7.4, is het gesloten interval $[-N,N]$ compact, en uit de Stelling van Tychonoff volgt dat ook $[-N,N]^n$ compact is. (We hebben "Tychonoff" alleen nodig voor eindige produkten.) Uit Prop. 7.6 volgt nu dat Z compact is. □

7.11. Helaas wordt dit belangrijke gevolg vaak op de verkeerde manier onthouden. Namelijk, de bewering is *niet* dat in elke metrische ruimte "compact" hetzelfde is als "gesloten en begrensd". De reden hiervoor is, kort gezegd, dat compactheid een zuiver topologisch begrip is terwijl begrensdheid echt afhangt van de gekozen metriek.

Om dit preciezer te maken, beschouwen we een metrische ruimte (X,d) en een deelverzameling $Z \subseteq X$. Allereerst: wat bedoelen we eigenlijk als we zeggen dat Z begrensd is? Daartoe nemen we een willekeurig punt $P \in X$; dan zeggen we dat Z *begrensd* is als er een $r > 0$ bestaat zo dat $Z \subseteq B(P,r)$. Dit begrip hangt niet af van het gekozen punt P. Immers, als $P' \in X$ een ander punt is, laat $d := d(P,P')$; dan geldt voor alle $r > 0$ dat

$$B(P,r) \subseteq B(P', r+d) \qquad \text{en} \qquad B(P',r) \subseteq B(P, r+d)\,,$$

zoals onmiddellijk volgt uit de driehoeksongelijkheid. Dus als er een straal $r > 0$ is met $Z \subseteq B(P,r)$ dan is er ook een straal $r' > 0$ (namelijk $r' = r + d$) zo dat $Z \subseteq B(P',r')$ en vice versa. Onze notie van begrensdheid is dus inderdaad onafhankelijk van het gekozen punt. (Ga nu zelf na dat de hier gegeven definitie equivalent is met die uit Opgave 3.9.)

Als $Z \subseteq X$ compact is, dan is Z gesloten en begrensd. Deze implicatie is correct en het bewijs ervan is hetzelfde als in 7.10. Het is de omkering die in het algemeen niet geldt. Om dit in te zien doen we het volgende. Gegeven een metrische ruimte (X,d) kunnen we een nieuwe metriek d' op X construeren die dezelfde topologie geeft als d maar zo dat *elke* deelverzameling van X begrensd is ten aanzien van de metriek d'. De constructie zullen we zodadelijk geven. Neem nu een deelverzameling $Z \subseteq X$ die gesloten is maar niet begrensd ten aanzien van de metriek d. Voorbeelden daarvan zijn zeker te vinden; kijk bijvoorbeeld naar $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{Eucl}})$ en neem $Z = X$. Deze verzameling Z is dus niet compact. Als we nu overgaan op de nieuwe metriek d' dan verandert de topologie niet, dus onze verzameling Z is nog steeds gesloten en nog steeds niet compact. Maar in de nieuwe metriek is Z wel begrensd. Conclusie: in het algemeen impliceert "gesloten en begrensd" geen compactheid.

Een metriek d' die voldoet aan wat we willen kunnen we eenvoudig maken. Namelijk, definieer $d'\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ door

$$d'(x,y) := \min\bigl\{d(x,y), 1\bigr\}\,.$$

We controleren dat dit voldoet aan alle gestelde voorwaarden:

(a) *De functie d' is weer een metriek:* Het is duidelijk dat $d'(x,y) \geqslant 0$ en dat $d'(x,y) = 0$ d.e.s.d.a. $x = y$. Verder is duidelijk dat d' symmetrisch is. Voor de driehoeksongelijkheid merken we op dat $d'(x,z) \leqslant 1$ dus als $d'(x,y) + d'(y,z) \geqslant 1$ dan geldt zeker dat $d'(x,z) \leqslant d'(x,y)+d'(y,z)$. Maar als $d'(x,y)+d'(y,z) < 1$ dan is $d'(x,z) = d(x,z)$ en $d'(y,z) = d(y,z)$, en in dat geval is

$$d'(x,z) \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) = d'(x,y) + d'(y,z)\,,$$

zodat de driehoeksongelijkheid weer geldt.

(b) *De topologie geassocieerd aan d' is dezelfde als de topologie geassocieerd aan d:* Als $r < 1$ en $x \in X$ dan is de open bol $B(x,r)$ in de metriek d' dezelfde als de open bol $B(x,r)$ in de metriek d. Maar de collectie $\mathscr{B} = \bigl\{B(x,r) \bigm| x \in X\,, r < 1\bigr\}$ is een basis voor de metrische topologie. Dus de beide topologieën zijn gelijk.

(c) *In de metriek d' is elke deelverzameling van X begrensd:* Dit is duidelijk, want voor elk tweetal punten x, $y \in X$ geldt $d'(x,y) \leqslant 1$.

7.12. Het begrip compactheid is dermate belangrijk dat men het graag in allerlei verschillende situaties wil kunnen gebruiken. Ook wil men graag verschillende manieren hebben om compactheid te "herkennen". Het is natuurlijk beslist niet zo dat men altijd direct aan de hand van de definitie kan nagaan of een ruimte compact is! In Hoofdstuk 8 zullen we verder ingaan op compactheid voor metrische ruimten; zie in het bijzonder Stelling 8.20. Zoals we zullen zien, is compactheid voor metrische ruimten nauw gerelateerd aan *compleetheid*, waarmee we bedoelen dat elke Cauchyrij een limiet heeft. Zie Hoofdstuk 8 voor verdere details.

In de meetkunde is er nog een heel andere manier om tegen compactheid aan te kijken. Uitgangspunt is de opmerking dat als X een compacte ruimte is, elke continue afbeelding $f\colon X \to Y$ naar een Hausdorffruimte Y noodzakelijk een gesloten afbeelding is; zie Opgave 7.9.

Nu is er met geslotenheid van afbeeldingen iets verrassends aan de hand. Namelijk, als $f\colon X \to Y$ een gesloten afbeelding is en Z is een derde topologische ruimte, dan is het in het algemeen niet zo dat de afbeelding $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ weer gesloten is. Informeel gezegd: je kunt de geslotenheid van de afbeelding f verstoren door er een "factor tegenaan te plakken". (Een zuiver wiskundige zegt: "geslotenheid is niet stabiel onder basisuitbreiding", maar dat mag je direct weer vergeten.) Een voorbeeld van dit fenomeen is de afbeelding $f\colon \mathbb{R} \to \{*\}$ van $\mathbb{R}$ naar een 1-puntsruimte. Deze is ten duidelijkste gesloten. Echter, de afbeelding $f \times \mathrm{id}\colon \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \{*\}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}$ is de tweede projectie, $(x,y) \mapsto y$, en deze afbeelding is zeker niet gesloten want de hyperbool $\bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| xy = 1\bigr\}$ is gesloten in $\mathbb{R}^2$ maar zijn beeld is de verzameling $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ en deze is niet gesloten.

7.13. Definitie. Een continue afbeelding van topologische ruimten $f\colon X \to Y$ heet *proper* als voor elke topologische ruimte Z de afbeelding

$$f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$$

gesloten is.

De relatie met het begrip compactheid wordt gegeven door de volgende stelling.

7.14. Stelling. *Een topologische ruimte X is compact dan en slechts dan als de afbeelding $X \to \{*\}$ proper is.*

We zullen hier alleen het bewijs geven van de "slechts dan" bewering. Neem daartoe aan dat X compact is. We willen aantonen dat voor elke topologische ruimte Z de projectie-afbeelding $\mathrm{pr}_Z\colon X \times Z \to Z$ gesloten is. Neem $C \subseteq X \times Z$ gesloten en stel $z \in Z$ is een punt met $z \notin f(C)$. Voor elke $x \in X$ geldt dan dat $(x, z) \notin C$, en omdat C gesloten is bestaan er open omgevingen $U(x) \subseteq X$ van x en $V(x) \subseteq Z$ van z zo dat $\big(U(x) \times V(x)\big) \subseteq (X \times Z) \setminus C$. (We geven in de notatie aan dat deze omgevingen van x afhangen. Verder gebruiken we hier dat de open verzamelingen van de vorm $U \times V$ een basis vormen voor de produkttopologie.) De open verzamelingen $U(x)$ overdekken X; vanwege de compactheid van X bestaan er dus punten $x_1, \ldots, x_n$ zo dat $U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_n) = X$. Dan is $V := V(x_1) \cap \cdots \cap V(x_n)$ een open omgeving van z, en per constructie is $(X \times V) \subseteq (X \times Z) \setminus C$, dus $V \subseteq Z \setminus f(C)$. Dit bewijst dat $X \to \{*\}$ proper is.

Voor het bewijs van de omgekeerde implicatie verwijzen we naar Bourbaki, Topologie Générale, Chap. I.

De stelling suggereert dat we aan een propere afbeelding $f\colon X \to Y$ kunnen denken als "een familie van compacte ruimten, geparametriseerd door Y". Namelijk: als $y \in Y$ dan noemen we de ruimte $X_y := f^{-1}(y)$ wel de *vezel van f boven het punt y*. Dus bij elk punt $y \in Y$ hebben we een ruimte X_y, en we kunnen aan X denken als de totale "familie" van al deze ruimten X_y. De ruimte Y heeft dan de rol van de "parameterruimte". Uit de aanname dat f proper is volgt gemakkelijk dat voor elke $y \in Y$ ook de afbeelding $X_y \to \{y\}$ proper is, en volgens de stelling betekent dat precies dat X_y compact is. Zie ook Opgave 7.11. Dus een propere afbeelding is inderdaad een "familie van compacte ruimten".

Opgaven bij hoofdstuk 7.

Opgave 7.1. Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat een collectie $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de *eindige intersectie eigenschap* heeft (Engels: finite intersection property), als voor elke *eindige* collectie van indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in A geldt dat $C_{\alpha_1} \cap \cdots \cap C_{\alpha_n} \neq \emptyset$. Bewijs dat de volgende twee eigenschappen equivalent zijn:

(a) X is compact;

(b) voor elke collectie gesloten deelverzamelingen $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ die de eindige intersectie eigenschap heeft, is $\cap_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$.

Opgave 7.2. Wanneer is een deelverzameling $Z \subseteq \mathbb{R}$ compact in de rechterhalflijnentopologie? (Zie Opgave 1.3.) Formuleer een criterium en bewijs de correctheid ervan.

Opgave 7.3. Geef een voorbeeld van een topologische ruimte X en een compacte deelverzameling $C \subseteq X$ die niet gesloten is in X.

Opgave 7.4. Beschouw $\mathbb{R}$ met de Euclidische topologie.

(i) Laat zien: Als $C \subset \mathbb{R}$ een eindige vereniging is van gesloten intervallen, dan is C compact.

(ii) Geef een voorbeeld van een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}$ die *niet* te schrijven is als een eindige vereniging van gesloten intervallen. Licht je voorbeeld toe.

(iii) Is $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ met de Euclidische topologie een compacte ruimte? Motiveer je antwoord.

Opgave 7.5. Gegeven is een compacte ruimte X. Gegeven zijn verder een rij gesloten deelverzamelingen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ en een open deelverzameling $U \subseteq X$ zo dat $\left(\cap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \subseteq U$. Bewijs dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $\left(\cap_{n=1}^{N} C_n\right) \subseteq U$.

Opgave 7.6. Gegeven zijn een topologische ruimte X en compacte deelverzamelingen $C, C' \subseteq X$.

(i) Als X Hausdorffs is, bewijs dat $C \cap C'$ compact is.

(ii) Neem $X = [0,1] \times \{0,1\}$, met het produkt van de Euclidische topologie op $[0,1]$ en de indiscrete topologie op $\{0,1\}$. Laat zien dat

$$C := [0,1] \times \{0\} \qquad \text{en} \qquad C' := \big(]0,1[\times \{0\}\big) \cup \big\{(0,1),(1,1)\big\}$$

compacte deelverzamelingen van X zijn, maar dat hun doorsnede $C \cap C'$ niet compact is. Concludeer dat in (i) de conditie dat X Hausdorffs is i.h.a. niet gemist kan worden.

Opgave 7.7. Gegeven zijn topologische ruimten X en Y. We voorzien $X \times Y$ van de produkttopologie. We schrijven $\mathrm{pr}_X \colon X \times Y \to X$ en $\mathrm{pr}_Y \colon X \times Y \to Y$ voor de projectie-afbeeldingen.

(i) Zij $C \subseteq X \times Y$ een gesloten deelverzameling. Gegeven is dat er compacte deelverzamelingen $K \subseteq X$ en $K' \subseteq Y$ bestaan zo dat $\mathrm{pr}_X(C) \subseteq K$ en $\mathrm{pr}_Y(C) \subseteq K'$. Bewijs dat C compact is.

Vanaf nu nemen we aan dat X en Y allebei Hausdorffs zijn.

(ii) Zij $A \subseteq X \times Y$ een deelverzameling met de eigenschap dat $\mathrm{pr}_X(A)$ en $\mathrm{pr}_Y(A)$ allebei compact zijn. Toon aan dat $\overline{A}$ compact is.

(iii) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat A zelf niet compact hoeft te zijn.

Opgave 7.8. Geef een voorbeeld van een compacte deelverzameling $C \subset \mathbb{R}$ die oneindig veel samenhangscomponenten heeft.

Opgave 7.9. Zij $f \colon X \to Y$ een continue afbeelding van een compacte ruimte X naar een Hausdorffse ruimte Y. Bewijs dat f een gesloten afbeelding is. Als f bovendien bijectief is, bewijs dan dat f een homeomorfisme is.

Opgave 7.10. "Een Hausdorffse compacte ruimte is minimaal Hausdorffs en maximaal compact". Gegeven is een topologische ruimte $(X, \mathscr{T})$ die Hausdorffs is en compact.

(i) Als $\mathscr{T}'$ een topologie is op X die strict fijner is dan $\mathscr{T}$, toon aan dat $(X, \mathscr{T}')$ niet compact is. [*Hint:* gebruik Opgave 7.9.]

(ii) Als $\mathscr{T}''$ een topologie is op X die strict grover is dan $\mathscr{T}$, toon aan dat $(X, \mathscr{T}'')$ niet Hausdorffs is. [*Hint:* gebruik Opgave 7.9.]

Opgave 7.11. Zij $f \colon X \to Y$ een propere afbeelding. Laat zien dat voor elke $Z \subseteq Y$ de geïnduceerde afbeelding $f^{-1}(Z) \to Z$ weer proper is.

HOOFDSTUK 8

Aftelbare compactheid en rijcompactheid

Het begrip compactheid is dermate belangrijk in de wiskunde, dat het zinvol is om het vanuit verschillende gezichtspunten te onderzoeken. Aan het einde van Hoofdstuk 7 hebben we al een alternatieve manier gezien om compactheid te beschrijven. In dit hoofdstuk onderzoeken we de relatie met begrippen en resultaten uit de Analyse. Zo weten we dat voor deelverzamelingen $X \subset \mathbb{R}^n$ (met de Euclidische topologie) compactheid gekarakteriseerd kan worden door de Bolzano-Weierstraß eigenschap: X is compact dan en slechts dan als elke rij in X een convergente deelrij heeft. In dit hoofdstuk gaan we onderzoeken of deze eigenschap ook voor algemenere topologische ruimten equivalent is met compactheid. We zullen zien dat dit het geval is voor ruimten die aan bepaalde aftelbaarheidsaxioma's voldoen. We beginnen met deze laatste.

8.1. Definitie. Zij X een topologische ruimte en zij $x \in X$. Zij $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een collectie open omgevingen van x. Dan heet $\mathscr{U}$ een *omgevingsbasis* van x als er voor elke open omgeving V van x een α bestaat zo dat $U_\alpha \subseteq V$.

8.2. Definitie. Een topologische ruimte X voldoet aan het *eerste aftelbaarheidsaxioma* als elk punt $x \in X$ een aftelbare omgevingsbasis heeft.

8.3. Voorbeeld. Elke metrische ruimte voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. Immers, als $x \in X$ dan vormt de collectie van open bollen $B(x, 1/n)$ met $n \in \mathbb{N}$ een omgevingsbasis van x.

8.4. Opmerking. Zij X een topologische ruimte en zij $x \in X$. Als x een aftelbare omgevingsbasis $\mathscr{U} = \{U_1, U_2, \ldots\}$ heeft, dan bestaat er ook een aftelbare omgevingsbasis met de extra eigenschap dat $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$. Immers, definiëren we $U_i' := U_1 \cap \cdots \cap U_i$, dan is gemakkelijk na te gaan dat $\mathscr{U}' = \{U_1', U_2', \ldots\}$ weer een omgevingsbasis is van x, en per constructie geldt $U_1' \supseteq U_2' \supseteq \cdots$.

8.5. Definitie. Een topologische ruimte X voldoet aan het *tweede aftelbaarheidsaxioma* als er een aftelbare basis bestaat voor de topologie op X.

8.6. Voorbeeld. De ruimte $\mathbb{R}^m$ met de Euclidische topologie voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Immers, de collectie van alle open bollen $B(x, 1/n)$ met $x \in \mathbb{Q}^m$ en $n \in \mathbb{N}$ is een aftelbare basis.

Het tweede aftelbaarheidsaxioma is veel sterker dan het eerste. Bijvoorbeeld, niet elke metrische ruimte voldoet aan het tweede axioma; zie Opgave 8.1.

8.7. Propositie. *Zij X een topologische ruimte die voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.*

(i) *Elke open overdekking van X heeft een aftelbare deeloverdekking.*
(ii) *Er is een aftelbare deelverzameling van X die dicht ligt in X.*

Bewijs. (i) Omdat X voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma, is er een aftelbare basis $\mathscr{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ voor de topologie. Zij nu $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ een open overdekking van X. Laat

$$J := \bigl\{ i \in I \bigm| \exists\alpha \in A:\ B_i \subseteq U_\alpha \bigr\}$$

en kies voor elke $i \in J$ een index $\alpha(i)$ met $B_i \subseteq U_{\alpha(i)}$. Bij elke $x \in X$ kiezen we een $\alpha_x \in A$ zo dat $x \in U_{\alpha_x}$; vervolgens kiezen we een index $i_x \in I$ zo dat $x \in B_{i_x} \subset U_{\alpha_x}$. Dan is $i_x \in J$ en $x \in U_{\alpha(i_x)}$. Dus als $A' := \bigl\{\alpha(i) \bigm| i \in J\bigr\} \subseteq A$ dan is $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ een deeloverdekking van $\mathscr{U}$. Merk nu op dat A' aftelbaar is.

(ii) Kies voor elke $i \in I$ een willekeurig punt $x_i \in B_i$. Dan is $V := \bigl\{x_i \bigm| i \in I\bigr\}$ een aftelbare deelverzameling van X en we beweren dat V dicht ligt in X. Stel maar van niet; dan is er een punt $y \in X \setminus \overline{V}$ en een $i \in I$ met $y \in B_i \subseteq X \setminus \overline{V}$ maar dat is in tegenspraak met het feit dat $x_i \in B_i \cap V$. □

Een ruimte die voldoet aan (i) van de Propositie heet een *Lindelöf ruimte*.

8.8. Definitie. Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij elementen in een topologische ruimte X en zij $\xi \in X$.

(i) We zeggen dat de rij (x_n) *convergeert naar* ξ, of dat ξ een *limiet* is van de rij (x_n), als er voor elke open omgeving U van ξ een index $N(U)$ bestaat zo dat $x_n \in U$ voor alle $n \geqslant N(U)$. Een rij (x_n) heet *convergent* als deze een limiet heeft.

(ii) We zeggen dat ξ een *ophopingspunt* is van de rij (x_n), als er voor elke open omgeving U van ξ oneindig veel indices n zijn zo dat $x_n \in U$.

8.9. Opmerking. Een rij (x_n) kan meer dan 1 limiet hebben! Bijvoorbeeld: als de topologie op X de indiscrete topologie is, dan is *elk* punt van X een limiet van elke rij (x_n). Als de ruimte Hausdorffs is, dan heeft een rij hoogstens 1 limiet; zie Opgave 8.4. Als de rij (x_n) een deelrij heeft die convergeert naar een punt ξ, dan is ξ een ophopingspunt van de rij. Het omgekeerde geldt in het algemeen niet (anders dan je op het eerste oog misschien zou denken); zie echter Lemma 8.14 hierna. Verwar het begrip "ophopingspunt van een rij" niet met het in Opgave 2.6 ingevoerde begrip "ophopingspunt van een deelverzameling".

8.10. Definitie. Een topologische ruimte X heet *aftelbaar compact* als elke aftelbare open overdekking $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ (d.w.z., een open overdekking met een aftelbare indexverzameling A) een eindige deeloverdekking heeft.

Als X compact is, dan is X natuurlijk ook aftelbaar compact. De omkering geldt niet. Wanneer we aftelbaar oneindige overdekkingen beschouwen, dan zullen we de indexverzameling A doorgaans identificeren met $\mathbb{N}$; we noteren de overdekking dan als $X = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$.

8.11. Propositie. *Een topologische ruimte X is aftelbaar compact dan en slechts dan als elke rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een ophopingspunt heeft.*

Bewijs. Zij $X = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ een aftelbare open overdekking en stel dat deze *niet* een eindige deeloverdekking heeft. In het bijzonder geldt voor alle $n \geqslant 1$ dat $\cup_{i=1}^{n} U_i$ niet de hele ruimte X is. Dit betekent dat we een rij elementen $x_1, x_2, \ldots$ kunnen kiezen, zo dat $x_n \notin \cup_{i=1}^{n} U_i$. Geen enkel punt $\xi \in X$ kan ophopingspunt zijn van deze rij. Immers, gegeven $\xi \in X$ is er een index N zo dat $\xi \in U_N$. Per constructie geldt dat $x_n \notin U_N$ voor alle $n \geqslant N$. Dus er zijn slechts eindig veel termen in de rij die in U_N liggen, en dit betekent dat ξ geen ophopingspunt is. Dit bewijst de "dan" bewering.

Voor de "slechts dan" bewering, stel dat X aftelbaar compact is. Neem een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X en stel dat deze geen ophopingspunt heeft. Als $\xi \in X$, dan is ξ per aanname geen ophopingspunt van de rij, hetgeen betekent dat ξ een open omgeving U_ξ heeft zo dat de verzameling $E(\xi) := \bigl\{n \in \mathbb{N} \bigm| x_n \in U_\xi\bigr\}$ eindig is. Zij nu $\mathscr{E}$ de verzameling van alle *eindige* deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, en voor $E \in \mathscr{E}$ (dus $E \subset \mathbb{N}$ een eindige deelverzameling), zij

$$U_E := \bigcup_{\substack{\xi\in X\\ E(\xi)=E}} U_\xi\,.$$

Ten duidelijkste zijn deze verzamelingen U_E open, en ze overdekken X. Omdat $\mathscr{E}$ aftelbaar is en X aftelbaar compact is, bestaan er $E_1,\ldots,E_m \in \mathscr{E}$ zo dat $X = U_{E_1}\cup\cdots\cup U_{E_m}$. Dit is echter onmogelijk, want de E_i zijn eindig, dus er is zeker een index $n \in \mathbb{N}$ met $n \notin E_1\cup\cdots\cup E_m$, en uit de constructie volgt dan dat $x_n \notin U_{E_1}\cup\cdots\cup U_{E_m}$. Deze tegenspraak bewijst de "slechts dan" bewering. □

8.12. Opmerking. Zij A een aftelbaar oneindige verzameling (bijvoorbeeld $A = \mathbb{N}$). In het bewijs hebben we gebruikt dat de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van A weer aftelbaar is. Verwar dit niet met de verzameling van alle deelverzamelingen van A ($= \mathscr{P}(A)$, de machtsverzameling van A); deze is overaftelbaar, zoals Cantor aantoonde.

8.13. Definitie. Een topologische ruimte X heet *rijcompact* als elke rij in X een convergente deelrij heeft.

8.14. Lemma. *Zij X een topologische ruimte die voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in X en zij $\xi \in X$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent:*
(a) *De rij (x_n) heeft een deelrij die convergeert naar ξ.*
(b) *Het punt ξ is een ophopingspunt van de rij (x_n).*

Bewijs. De implicatie (a) ⇒ (b) is duidelijk uit de definitie van convergentie. Stel nu dat ξ een ophopingspunt is van de rij (x_n). Omdat X aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet, heeft het punt ξ een aftelbare omgevingsbasis. Dat wil gewoon zeggen dat er een rij $U_1, U_2, \ldots$ van open omgevingen van ξ bestaat, zo dat er voor elke open omgeving V van ξ een index j is met $U_j \subseteq V$. Bovendien mogen we aannemen dat $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$; zie Opmerking 8.4. Aan de hand hiervan construeren we een deelrij van (x_n) die naar ξ convergeert. Omdat ξ een ophopingspunt is, bestaat er een index n_1 zo dat $x_{n_1} \in U_1$. Vervolgens kiezen we een index $n_2 > n_1$ zo dat $x_{n_2} \in U_2$. Dit herhalen we; als we $x_{n_1},\ldots,x_{n_i}$ al gekozen hebben, kies dan een index $n_{i+1} > n_i$ zo dat $x_{n_{i+1}} \in U_{i+1}$. (Vanwege de aanname dat (b) geldt, is er steeds zo een index.) We beweren nu dat de deelrij $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergeert naar ξ. Immers, als V een open omgeving van ξ is, kies dan een index j zo dat $U_j \subseteq V$. Per constructie geldt dan voor alle $i \geqslant j$ dat $x_{n_i} \in V$, want $x_{n_i} \in U_i \subseteq U_j$. Dus de geconstrueerde deelrij convergeert inderdaad naar ξ. □

8.15. Stelling. *Zij X een topologische ruimte.*
(i) *Als X rijcompact is, dan is X ook aftelbaar compact.*

(ii) *Als X aftelbaar compact is en voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma, dan is X ook rijcompact.*
(iii) *Als X aftelbaar compact is en voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma, dan is X ook compact.*

Samenvattend hebben we de volgende relaties:

$$\text{compact} \;\underset{\Longleftarrow}{\overset{+2^{\mathrm{e}}\mathrm{AA}}{\Longrightarrow}}\; \text{aftelbaar compact} \;\underset{\Longleftarrow}{\overset{+1^{\mathrm{e}}\mathrm{AA}}{\Longrightarrow}}\; \text{rijcompact.}$$

Bewijs. Bewering (i) volgt uit Propositie 8.11, (ii) volgt uit Lemma 8.14 en (iii) volgt direct uit (i) van Propositie 8.7. □

8.16. Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte.
(i) Een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heet een *Cauchyrij* als er bij elke $\varepsilon > 0$ een index N bestaat zo dat $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ voor alle m, $n \geqslant N$.
(ii) De metrische ruimte (X, d) heet *compleet* (of ook: X is compleet t.a.v. de metriek d) als elke Cauchyrij in X convergent is.

8.17. Opmerking. Als (x_n) een Cauchyrij is die een convergente deelrij $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ heeft, zeg met $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \xi$, dan convergeert ook de volledige rij (x_n) naar ξ. Immers, gegeven $\varepsilon > 0$ is er een index N zo dat $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ voor alle m, $n \geqslant N$ en ook een index I zo dat $d(x_{n_i}, \xi) < \varepsilon/2$ voor alle $i \geqslant I$; uit de driehoeksongelijkheid volgt dan dat $d(x_m, \xi) < \varepsilon$ voor alle $m \geqslant N$.

Een metrische ruimte kan gecompleteerd worden. Anders gezegd: voor elke metrische ruimte (X, d) bestaat er een complete metrische ruimte $(\hat{X}, \hat{d})$ en een isometrische inbedding $i\colon X \hookrightarrow \hat{X}$ zo dat $i(X)$ dicht ligt in $\hat{X}$. Zie Opgave 8.8 voor de details. Zonder bewijs vermelden we nog dat deze completering op isometrie na uniek is.

Het ligt voor de hand dat compleetheid gerelateerd is aan compactheid. Nu is het zeker niet zo dat de beide begrippen equivalent zijn. Bijvoorbeeld, $\mathbb{R}$ met de Euclidische afstand is wel compleet maar niet compact. Om de precieze relatie tussen de beide begrippen te kunnen geven hebben we nog een definitie nodig.

8.18. Definitie. Een metrische ruimte (X, d) heet *totaal begrensd* als er bij elke $\varepsilon > 0$ een eindige overdekking van X is met open bollen met straal ε.

Een totaal begrensde ruimte is begrensd want als X kan worden overdekt door N open bollen met straal 1 dan is $\operatorname{diam}(X) \leqslant N$. De omkering geldt niet; bijvoorbeeld, als d de Euclidische metriek is op $\mathbb{R}$ en we definiëren een metriek d' door $d'(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ (zie 7.11), dan is $\mathbb{R}$ ten duidelijkste begrensd t.a.v. de metriek d' maar niet totaal begrensd.

8.19. Lemma. *Een metrische ruimte (X, d) die totaal begrensd is voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ kunnen we een eindig aantal punten $x_{n,1}, \ldots, x_{n,N(n)}$ kiezen zo dat de open bollen $B(x_{n,i}, 1/n)$ de hele ruimte X overdekken. Laat $\mathscr{B}$ de collectie van alle bollen $B(x_{n,i}, 1/n)$ zijn voor $n \in \mathbb{N}$ en $1 \leqslant i \leqslant N(n)$. Ten duidelijkste is $\mathscr{B}$ een aftelbare collectie, dus we zijn klaar als we kunnen aantonen dat $\mathscr{B}$ een basis is. Het is duidelijk dat $\mathscr{B}$ een overdekking van X is.

Zij nu U een open omgeving van een punt $y \in X$. We willen aantonen dat er een $B \in \mathscr{B}$ is met $y \in B \subset U$. Per definitie van de topologie bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(y, \varepsilon) \subset U$. Kies een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $1/n < \varepsilon/2$. Per constructie is er een index $i \in \{1, \ldots, N(n)\}$ zo dat $y \in B(x_{n,i}, 1/n)$; maar dan is duidelijk uit de driehoeksongelijkheid dat $B(x_{n,i}, 1/n) \subset B(y, \varepsilon)$. $\square$

8.20. Stelling. *Zij (X, d) een metrische ruimte. Dan is X compact voor de metrische topologie dan en slechts dan als X compleet is en totaal begrensd.*

Bewijs. Stel X is compact. Omdat een metrische ruimte voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma, volgt uit Stelling 8.15 dat X rijcompact is. Dus als (x_n) een Cauchyrij is, dan heeft deze een convergente deelrij, en zoals hierboven opgemerkt volgt daaruit dat de (volledige) rij convergent is. Verder is X totaal begrensd, want als $\varepsilon > 0$ dan heeft de overdekking $X = \cup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$ een eindige deeloverdekking.

Stel nu dat X compleet is en totaal begrensd. Vanwege Stelling 8.15 en Lemma 8.19 volstaat het te bewijzen dat X rijcompact is. Omdat X compleet is volstaat het te bewijzen dat elke rij (x_n) in X een deelrij heeft die Cauchy is. Kies eerst een eindig aantal open bollen B_i met straal 1 die X overdekken. Tenminste een van deze bollen, zeg bol B_{j_1}, bevat oneindig veel van de punten x_n; zij dan $J_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_{j_1}\}$. Vervolgens kiezen we een eindig aantal open bollen met straal $1/2$ die X overdekken. Tenminste een van deze bollen, zeg bol B_{j_2}, bevat oneindig veel van de punten x_n met $n \in J_1$; zij dan $J_2 := \{n \in J_1 \mid x_n \in B_{j_2}\}$. Deze procedure herhalen we. Als we J_m al gekozen hebben, kies dan een overdekking van X met eindig veel open bollen met straal $1/(m+1)$. Tenminste een van deze bollen, zeg bol $B_{j_{m+1}}$, bevat oneindig veel van de punten x_n met $n \in J_m$; zij dan $J_{m+1} := \{n \in J_m \mid x_n \in B_{j_{m+1}}\}$. Op deze manier krijgen we een keten van oneindige indexverzamelingen $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$. Kies indices $n_1 < n_2 < \cdots$ met $n_i \in J_i$. We beweren dat (x_{n_i}) een Cauchyrij is. Immers, als $\varepsilon > 0$ gegeven is, kies $k \in \mathbb{N}$ zo dat $1/k < \varepsilon/2$. Als $i, j \geqslant k$ dan zitten n_i en n_j allebei in J_k (want $n_i \in J_i \subseteq J_k$, en net zo voor n_j) en per constructie is er dan een bol met straal $1/k$ die x_{n_i} en x_{n_j} bevat. Dus $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \varepsilon$. $\square$

8.21. Opmerking. Zij (X, d) een complete metrische ruimte. Als $A \subset X$ gesloten is, dan is A compleet voor de geïnduceerde metriek (de beperking van d tot $A \times A$). Omgekeerd, als $A \subset X$ compleet is voor de geïnduceerde metriek, dan is A gesloten in X. Omdat $\mathbb{R}^n$ compleet is voor de Euclidische metriek, vinden we het bekende feit terug dat een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ compact is, dan en slechts dan als A gesloten en begrensd is. Merk overigens op, dat $\mathbb{R}$ *gedefinieerd is* als de completering van $\mathbb{Q}$ voor de Euclidische topologie, dus het feit dat $\mathbb{R}$ compleet is, is niet een stelling maar volgt direct uit de definitie. (Zie Opgave Completering voor de constructie van de completering en zie in het bijzonder onderdeel (x) van die opgave.)

Als laatste onderwerp van dit hoofdstuk willen we voor metrische ruimten de relatie geven tussen compactheid en uniforme continuïteit. Ter herinnering geven we de definitie.

8.22. Definitie. Laten (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten zijn. Een afbeelding $f \colon X \to Y$ heet *uniform continu* als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle x, $x' \in X$ met $d_X(x, x') < \delta$ geldt dat $d_Y\bigl(f(x), f(x')\bigr) < \varepsilon$.

8.23. Lemma. *Zij (X, d) een compacte metrische ruimte. Als $\mathscr{U}$ een open overdekking van X is, dan bestaat er een getal $\delta > 0$ zo dat er voor elke begrensde verzameling $A \subset X$ met* $\operatorname{diam}(A) < \delta$ *een $U \in \mathscr{U}$ is met $A \subseteq U$.*

Bewijs. Omdat X compact is, zijn er $U_1, \ldots, U_N \in \mathscr{U}$ die X overdekken. Laat $C_i := X \setminus U_i$, en definieer een functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} d(x, C_i)\,.$$

Met andere woorden, $f(x)$ is de gemiddelde afstand van x tot de verzamelingen C_i. Dan is f continu, en omdat de doorsnede van de verzamelingen C_i leeg is, geldt dat $f(x) > 0$ voor alle $x \in X$. (Gebruik Opgaven 3.2 en 4.3.) Omdat $f(X) \subset \mathbb{R}$ compact is, bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $f(x) > \delta$ voor alle x. Stel nu dat $A \subset X$ een deelverzameling is met $\operatorname{diam}(A) < \delta$. Kies een punt $x \in A$, en merk op dat $A \subseteq B(x, \delta)$. Anderzijds is er een index i zo dat $d(x, C_i) \geqslant f(x)$, en dus $d(x, C_i) \geqslant \delta$. Maar dan is $A \subseteq U_i$. $\square$

Voor een alternatief bewijs, zie Opgave 8.9. Een getal δ als in het lemma heet een *Lebesgue getal* voor de overdekking $\mathscr{U}$. Om hier gevoel voor te krijgen, teken maar eens een compacte verzameling $X \subset \mathbb{R}^2$ en een eindige open overdekking $\mathscr{U}$. Zie je in het plaatje wat je voor δ kunt nemen?

8.24. Stelling. *Laten (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten zijn. Als X compact is, dan is elke continue afbeelding $f\colon X \to Y$ uniform continu.*

Bewijs. Gegeven $\varepsilon > 0$ en $\xi \in X$, laat $U_\xi := \{x \in X \mid d_Y\big(f(x), f(\xi)\big) < \varepsilon/2\}$; met andere woorden, $U_\xi = f^{-1}\big(B(f(\xi), \varepsilon/2)\big)$. Dan is $\mathscr{U} := \{U_\xi\}_{\xi \in X}$ een open overdekking van X. Het lemma zegt dat er een Lebesgue getal δ bestaat voor deze overdekking. Wanneer nu $d_X(x, x') < \delta$ dan heeft de verzameling $A := \{x, x'\}$ diameter $< \delta$, zodat A bevat is in een van de open verzamelingen U_ξ. Maar dan liggen $f(x)$ en $f(x')$ binnen een bol met straal $\varepsilon/2$, zodat $d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$. $\square$

Opgaven bij hoofdstuk 8.

Opgave 8.1. Zij X een verzameling en definieer een functie $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ door

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

(i) Laat zien dat d een metriek is.
(ii) Welke topologie geeft deze metriek?
(iii) Voldoet X met deze topologie aan het tweede aftelbaarheidsaxioma? (Het antwoord hangt af van $\#X$.)

Opgave 8.2. Afkorting: "iAA" voor "het $i$de aftelbaarheidsaxioma" ($i = 1, 2$).
(i) Als X voldoet aan iAA, laat zien dat ook elke deelruimte van X aan iAA voldoet.
(ii) Als X en Y voldoen aan iAA, laat zien dat ook $X \times Y$ aan iAA voldoet.

Opgave 8.3.

(i) Zij (X, d) een metrische ruimte. Stel er bestaat een aftelbare deelverzameling $A \subseteq X$ die dicht ligt in X. Laat zien dat X voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.

We beschouwen de Sorgenfrey rechte $X = \mathbb{R}$ met de speldentopologie; zie Opgave 3.4.

(ii) Laat zien dat de Sorgenfreyrechte voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

(iii) Laat zien dat de Sorgenfreyrechte niet voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. [*Hint:* Stel $\mathscr{B}$ is een basis voor de topologie. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $[x, x+1[$ een open omgeving van x, en er moet dus een $B \in \mathscr{B}$ zijn met $x \in B \subseteq [x, x+1[$. Leid hieruit af dat $\mathscr{B}$ niet aftelbaar kan zijn.]

(iv) Laat zien dat de Sorgenfrey rechte een aftelbare dichte deelverzameling bevat.

(v) Bewijs dat de Sorgenfrey rechte niet metriseerbaar is.

Opgave 8.4. Als (x_n) een rij is in een Hausdorffruimte, bewijs dat deze rij hoogstens 1 limiet kan hebben.

Opgave 8.5. Zij X een topologische ruimte met de eigenschap dat elke 1-punts verzameling $\{x\} \subseteq X$ gesloten is. (Dit heet ook wel het T_1 axioma; zie Hoofdstuk 9.) Zij $A \subseteq X$ een deelverzameling. Dan is een punt $x \in X$ een ophopingspunt van A dan en slechts dan als voor elke open omgeving U van x geldt dat $A \cap U$ een oneindige verzameling is.

Opgave 8.6. Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte X. Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij elementen van A en zij $\xi \in X$ een ophopingspunt van deze rij.

(i) Bewijs dat $\xi \in \overline{A}$.

(ii) Stel dat $a_i \neq a_j$ als $i \neq j$. Bewijs dat ξ een ophopingspunt van de verzameling A is.

(iii) Geef een voorbeeld van een situatie waarbij ξ wel ophopingspunt is van een rij in A maar niet een ophopingspunt is van de verzameling A.

(iv) Stel X voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma, en zij y een ophopingspunt van A. Laat zien dat er een rij in A bestaat die convergeert naar y.

Opgave 8.7. Bepaal van de volgende ruimten of ze compleet zijn of niet:

(a) $\mathbb{R}$ met de Euclidische afstand,

(b) $[0, 1]$ met de Euclidische afstand,

(c) $\mathbb{Q}$ met de Euclidische afstand,

(d) $\mathbb{R}$ met de metriek d' gegeven door $d'(x, y) = \min\bigl\{|x - y|, 1\bigr\}$.

Opgave 8.8. Het onderwerp van deze opgave is de *completering* van een metrische ruimte. Zij (X, d) een metrische ruimte.

(i) Laat zien dat elke convergente rij een Cauchyrij is.

(ii) Laat zien dat elke Cauchyrij begrensd is.

(iii) Als (x_n) en (y_n) Cauchyrijen zijn, laat zien dat $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ bestaat.

Definieer $\mathrm{Cauchy}(X) \subset X^{\mathbb{N}}$ als de verzameling van alle Cauchyrijtjes in X. Als (x_n), $(y_n) \in \mathrm{Cauchy}(X)$ dan schrijven we $(x_n) \sim (y_n)$ als $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

(iv) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is op de verzameling $\mathrm{Cauchy}(X)$.

(v) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ als in onderdeel (iii) alleen afhangt van de klassen van (x_n) en (y_n) modulo $\sim$. (Dus: als $(x_n) \sim (x'_n)$ en $(y_n) \sim (y'_n)$ dan is $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$.)

Definieer nu $\hat{X} := \mathrm{Cauchy}(X)/\sim$, de verzameling van equivalentieklassen in $\mathrm{Cauchy}(X)$ onder de equivalentierelatie $\sim$. Definieer een afbeelding $\hat{d}\colon \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ door

$$\hat{d}\Big((x_n) \bmod \sim, (y_n) \bmod \sim\Big) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,.$$

Definieer verder een afbeelding $i\colon X \to \hat{X}$ door $i(x) = (x, x, x, \ldots) \bmod \sim$.

(vi) Laat zien dat $\hat{d}$ een welgedefinieerde metriek is op $\hat{X}$.

(vii) Laat zien dat i een injectieve afbeelding is met $\hat{d}\big(i(x), i(y)\big) = d(x, y)$ voor alle $x, y \in X$.

(viii) Laat zien dat $i(X)$ dicht ligt in $\hat{X}$.

(ix) Zij gegeven een metrische ruimte (Z, δ) en een deelverzameling $Y \subset Z$ die dicht ligt. Gegeven is verder dat elke Cauchyrij in Y een limiet heeft in Z. Toon aan dat Z compleet is.

(x) Laat zien dat $\big(\hat{X}, \hat{d}\big)$ een complete metrische ruimte is.

De ruimte $\hat{X}$ heet de *completering van* X. Er zijn ook andere constructies van een completering; bijvoorbeeld kun je X inbedden in de ruimte van alle begrensde functies $X \to \mathbb{R}$ en dan gebruiken dat deze laatste ruimte compleet is ten aanzien van de “sup norm”. Zie bijvoorbeeld het boek van Munkres, § 43. Het uiteindelijke resultaat is onafhankelijk van de gebruikte constructie, want men kan laten zien dat de completering van een metrische ruimte op isometrie na uniek is. Opmerking: het lichaam $\mathbb{R}$ der reële getallen is per definitie de completering van $\mathbb{Q}$ met betrekking tot de Euclidische metriek.

Opgave 8.9. In deze opgave willen we een ander bewijs voor Lemma 8.23 aangeven. Zij $\mathscr{U}$ een open overdekking van de compacte metrische ruimte (X, d). Neem $U_1, \ldots, U_N \in \mathscr{U}$ die X overdekken. Kies voor elk punt $x \in X$ een $\varepsilon_x > 0$ zo dat $B(x, \varepsilon_x)$ bevat is in een van deze open verzamelingen U_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Omdat X compact is, kun je een eindig aantal punten $x_1, \ldots, x_m$ vinden zo dat $X = \cup_{i=1}^m B(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$. Laat zien dat we in Lemma 8.23 voor δ het minimum van $\frac{\varepsilon_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon_{x_m}}{2}$ kunnen nemen.

Opgave 8.10.

(i) Laat $A := [-10, 10] \subset \mathbb{R}$. Zij $\mathscr{U}$ de collectie van alle open intervallen $]n-1, n+1[$ met $n \in A$ een geheel getal. Bepaal een Lebesgue getal voor deze overdekking. Is er een grootste Lebesgue getal?

(ii) Laat $A := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| \leqslant 10 \text{ en } |y| \leqslant 10\big\}$. Zij $\mathscr{U}$ de collectie van alle open bollen $B(P, 1)$ waarbij $P \in A$ een punt is met gehele coördinaten. Bepaal een Lebesgue getal voor deze overdekking.

HOOFDSTUK 9

Scheidingsaxioma's

9.1. Zij X een topologische ruimte. Herinner dat we met een open omgeving van een punt $x \in X$ een open deelverzameling $U \subseteq X$ bedoelen zo dat $x \in U$. Algemener, zij $A \subseteq X$ een willekeurige deelverzameling. Dan noemen we een open $U \subseteq X$ met $A \subseteq U$ een *open omgeving van* A.

9.2. Definitie Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat X voldoet aan axioma

- T_1 als alle 1-punts verzamelingen $\{x\}$ gesloten zijn in X;
- T_2 als X Hausdorffs is, d.w.z. als er bij elk tweetal punten x, $y \in X$ met $x \neq y$, open omgevingen U van x en V van y bestaan met $U \cap V = \emptyset$;
- T_3 als er voor elk punt $x \in X$ en elke gesloten deelverzameling $C \subset X$ met $x \notin C$, open omgevingen U van x en V van C bestaan met $U \cap V = \emptyset$;
- T_4 als er voor elk tweetal niet-lege gesloten delen C, $D \subset X$ met $C \cap D = \emptyset$, open omgevingen U van C en V van D bestaan met $U \cap V = \emptyset$.

De letter "T" refereert aan het Duitse woord "Trennung".

9.3. Definitie Een topologische ruimte X heet *regulier* als X voldoet aan axioma's T_1 en T_3 en heet *normaal* als X voldoet aan axioma's T_1 en T_4.

9.4. Lemma *Er gelden de implicaties*

$$\big(\mathrm{T}_4 + \mathrm{T}_1\big) \Rightarrow \big(\mathrm{T}_3 + \mathrm{T}_1\big) \Rightarrow \mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_1 \qquad \textit{(dus: normaal} \Rightarrow \textit{regulier} \Rightarrow \textit{Hausdorffs} \Rightarrow \mathrm{T}_1\textit{)}.$$

Bewijs. Triviaal. □

9.5. Opmerking. Het is in het algemeen niet waar dat eigenschap T_4 eigenschap T_3 impliceert; zie Opgave 9.1.

9.6. Propositie. *Als X metriseerbaar is, dan is X normaal.*

Bewijs. Zij d een metriek op X die de topologie geeft. We weten al dat X Hausdorffs is. Laten nu C en D disjuncte gesloten en niet-lege deelverzamelingen van X zijn. Herinner uit Opgaven 3.2 en 4.3 dat we een continue functie $d(-,C)\colon X \to \mathbb{R}$ hebben, gegeven door $d(x,C) := \inf\big\{d(x,y) \bigm| y \in C\big\}$. Evenzo hebben we een continue functie $d(-,D)$. Definieer

$$U := \big\{x \in X \bigm| d(x,C) < d(x,D)\big\} \qquad \text{en} \qquad V := \big\{x \in X \bigm| d(x,D) < d(x,C)\big\}\,.$$

Dan zijn U en V open in X (geef zelf het argument) en $U \cap V = \emptyset$. Rest nog aan te tonen dat $C \subseteq U$ en $D \subseteq V$. Als $c \in C$ dan is $d(c,C) = 0$; anderzijds is $c \notin \overline{D}$ want $X \setminus D$ is een open omgeving van c die disjunct is van D, en volgens Opgave 3.2 is dus $d(c,D) > 0$. Dus inderdaad $C \subseteq U$. Op dezelfde manier zien we dat $D \subseteq V$. □

9.7. Propositie. *Als X compact en Hausdorffs is, dan is X normaal.*

Bewijs. Laten C en D niet-lege gesloten delen van X zijn met $C \cap D = \emptyset$. Voor elk paar $(c,d) \in C \times D$ bestaan er open omgevingen $U(c,d)$ van c en $V(c,d)$ van d die disjunct zijn. Kies nu eerst een punt $c \in C$ vast. Dan is $\bigl\{V(c,d)\bigr\}_{d\in D}$ een open overdekking van D, en omdat D compact is (wegens Propositie 7.6), kunnen we een eindig aantal punten $d_1,\ldots,d_n$ in D vinden zo dat $D \subseteq V(c,d_1) \cup \cdots \cup V(c,d_n)$. Nemen we nu

$$\mathscr{U}(c) := U(c,d_1) \cap \cdots \cap U(c,d_n) \qquad \text{en} \qquad \mathscr{V}(c) := V(c,d_1) \cup \cdots \cup V(c,d_n)$$

dan is $\mathscr{U}(c)$ een open omgeving van c en $\mathscr{V}(c)$ is een open omgeving van D, en bovendien is $\mathscr{U}(c) \cap \mathscr{V}(c) = \emptyset$. (Dit toont aan dat X regulier is.) Nu gaan we de compactheid van C gebruiken. Namelijk, $\bigl\{\mathscr{U}(c)\bigr\}_{c\in C}$ is een open overdekking van C, en wegens de compactheid van C (zie weer Propositie 7.6) bestaan er $c_1,\ldots,c_m \in C$ zo dat $C \subseteq \mathscr{U}(c_1) \cup \cdots \cup \mathscr{U}(c_m)$. Neem nu

$$\mathscr{U} := \mathscr{U}(c_1) \cup \cdots \cup \mathscr{U}(c_m) \qquad \text{en} \qquad \mathscr{V} := \mathscr{V}(c_1) \cap \cdots \cap \mathscr{V}(c_m)\,;$$

dan is $\mathscr{U}$ een open omgeving van C en $\mathscr{V}$ is een open omgeving van D, en bovendien is duidelijk uit de constructie dat $\mathscr{U} \cap \mathscr{V} = \emptyset$. $\square$

Voorwaarde T_4 kan ook op andere manieren geformuleerd worden. Merk op dat voorwaarde (c) in het volgende lemma in eerste instantie sterker lijkt dan T_4 maar het dus niet is.

9.8. Lemma. *Zij X een topologische ruimte. Dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

(a) *X voldoet aan axioma T_4;*

(b) *als $C \subseteq X$ gesloten is en O is een open omgeving van C dan bestaat er een open verzameling U met $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O$;*

(c) *als C en D disjuncte gesloten delen van X zijn dan bestaan er open omgevingen U van C en V van D met $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Bewijs. (a) $\Rightarrow$ (b): pas T_4 toe op C en $D := X \setminus O$. (b) $\Rightarrow$ (c): Pas eerst (b) toe op C en $X \setminus D$; dit geeft een open U met $C \subseteq U$ en $\overline{U} \cap D = \emptyset$. Pas vervolgens (b) toe op D en $X \setminus \overline{U}$; dit geeft een open V met $D \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq (X \setminus \overline{U})$ en dus $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. (c) $\Rightarrow$ (a): triviaal. $\square$

We komen nu toe aan een paar interessante resultaten van Urysohn en Tietze. We zullen alleen een bewijs geven van het Lemma van Urysohn. Volledige bewijzen van de andere twee resultaten zijn bijvoorbeeld te vinden in het boek van Munkres.

9.9. Lemma van Urysohn. *Zij X een normale ruimte. Als A en B disjuncte gesloten deelverzamelingen van X zijn, dan bestaat er een continue afbeelding $f\colon X \to \mathbb{R}$ met $f(a) = 0$ voor alle $a \in A$ en $f(b) = 1$ voor alle $b \in B$.*

Bewijs. Laat $J := \mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigl\{x \in \mathbb{Q} \bigm| 0 \leqslant x \leqslant 1\bigr\}$. Het idee van het bewijs is als volgt. Allereerst gaan we voor elke $q \in J$ een open verzameling $U_q \subseteq X$ kiezen op zo een manier dat geldt:

$$q < r \quad \Longrightarrow \quad \overline{U}_q \subseteq U_r\,. \tag{$*$}$$

en bovendien:

$$U_1 = X \setminus B \qquad \text{en} \qquad A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_1\,.$$

Bij deze constructie zullen we de normaliteit van X gebruiken; de precieze details doen we zo. Vervolgens definiëren we $U_q := \emptyset$ als $q \in \mathbb{Q}_{<0}$ en $U_q := X$ als $q \in \mathbb{Q}_{>1}$. Daarmee hebben we voor *elke* $q \in \mathbb{Q}$ een open verzameling U_q, en het is gemakkelijk na te gaan dat de relatie $(*)$ nog steeds geldt.

Definieer nu een functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) := \inf\{q \in \mathbb{Q} \mid x \in U_q\}\,.$$

Merk op dat $x \notin U_q$ als $q < 0$ en $x \in U_q$ als $q > 1$; zodoende is f welgedefinieerd en $f(x) \in [0,1]$. Merk verder op dat $f(a) = 0$ als $a \in A$ en $f(b) = 1$ als $b \in B$.

De functie f heeft de volgende eigenschappen: (1) als $x \in \overline{U}_q$ dan is $f(x) \leqslant q$, (2) als $x \notin U_q$ dan is $f(x) \geqslant q$. Immers, als $x \in \overline{U}_q$ dan geldt wegens $(*)$ dat $x \in U_r$ voor alle rationale getallen $r > q$ en uit de definitie van f volgt dan direct dat $f(x) \leqslant q$. Verder merken we op dat $f(x) < q$ impliceert dat $x \in U_q$, en eigenschap (2) is gewoon de omkering hiervan.

Nu kunnen we zonder veel moeite bewijzen dat de functie f continu is. Laat $x \in X$. We zijn klaar als we voor alle c, $d \in \mathbb{R}$ met $c < f(x) < d$ een open omgeving V van x kunnen vinden zo dat $f(V) \subseteq \,]c,d[$. Kies rationale getallen q, r met $c < q < f(x) < r < d$, en laat $V := U_r \setminus \overline{U}_q$. Uit eigenschappen (1) en (2) volgt direct dat $x \in V$. Anderzijds, als $v \in V$ dan is zeker $f(v) \leqslant r$ en wegens (2) ook $f(v) \geqslant q$; derhalve is $f(V) \subseteq \,]c,d[$, hetgeen we wilden aantonen.

Rest nu alleen nog de constructie van de verzamelingen U_q voor $q \in J := \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Schrijf de verzameling J als $J = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ met $q_1 = 1$ en $q_2 = 0$ (en alle andere elementen in willekeurige volgorde). We gaan de verzamelingen U_{q_n} kiezen met inductie naar n. We beginnen met $U_1 := X \setminus B$. Volgens Lemma 9.8 bestaat er een open verzameling U_0 met $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_1$. Daarmee zijn U_{q_1} en U_{q_2} dus gekozen. Stel nu dat we de verzamelingen U_{q_n} al gekozen hebben voor $n \leqslant m$, op zo een manier dat steeds de relatie $(*)$ geldt. Als volgende willen we $U_{q_{m+1}}$ kiezen. Onder de getallen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ is er een grootste die kleiner is dan q_{m+1}; met andere woorden, er is een $r \in \{q_1, \ldots, q_m\}$ zo dat $r < q_{m+1}$ en zo dat voor alle indices $i \in \{1, \ldots, m\}$ geldt dat ofwel $q_i \leqslant r$, ofwel $q_i > q_{m+1}$. Evenzo is er een kleinste $s \in \{q_1, \ldots, q_m\}$ die groter is dan q_{m+1}; d.w.z., $s > q_{m+1}$ en voor alle indices $i \in \{1, \ldots, m\}$ geldt dat ofwel $q_i \geqslant s$, ofwel $q_i < q_{m+1}$. Volgens de inductiehypothese geldt dat $\overline{U}_r \subseteq U_s$. Nu passen we weer Lemma 9.8 toe; dit geeft ons een open verzameling $U_{q_{m+1}}$ met $\overline{U}_r \subseteq U_{q_{m+1}} \subseteq \overline{U}_{q_{m+1}} \subseteq U_s$. De constructie is erop gemaakt dat de relatie $(*)$ nog steeds geldt; met deze inductieve procedure krijgen we dus de verzamelingen U_q, en daarmee is het bewijs compleet. □

9.10. Tietze's extensiestelling. *Zij X een normale ruimte en C een gesloten deelverzameling van X. Zij gegeven een continue afbeelding $f_C\colon C \to \mathbb{R}$. Dan bestaat er een continue functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ met $f_{|C} = f_C$.*

Merk op dat het Lemma van Urysohn eenvoudig volgt uit Tietze's extensie stelling; pas de laatste maar toe op de deelverzameling $C = A \amalg B$ en de functie f_C gegeven door $f(x) = 0$ als $x \in A$ en $f(x) = 1$ als $x \in B$. De meeste bewijzen van Tietze's stelling gebruiken echter het Urysohn lemma.

Op het eerste gezicht lijken deze resultaten misschien erg voor de hand liggend. Als je dat denkt, probeer dan maar zonder hulp van een boek een bewijs te geven, en je zult ontdekken dat het toch niet zo simpel ligt. De voorwaarde dat X een normale ruimte is kan in het algemeen ook niet gemist worden.

We sluiten het hoofdstuk af met een stelling die voldoende voorwaarden geeft voor de metriseerbaarheid van een ruimte.

9.11. Urysohn's metriseerbaarheid stelling. *Als X een reguliere ruimte is die voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma, dan is X metriseerbaar.*

Merk op dat dit resultaat niet scherp is, want niet elke metrische ruimte voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.

Opgaven bij hoofdstuk 9.

Opgave 9.1. Construeer een topologische ruimte met 3 elementen die wel voldoet aan axioma T_4 maar niet aan T_3.

Opgave 9.2. Bewijs dat een gesloten deelruimte van een normale ruimte zelf ook weer normaal is.

Opgave 9.3. Zij X een Hausdorffse compacte ruimte en laat

$$\mathscr{C}(X) := \bigl\{ f\colon X \to \mathbb{R} \bigm| f \text{ is continu} \bigr\} .$$

Omdat voor continue functies f en g ook de som $f+g$ en het product $f \cdot g$ continu zijn, is $\mathscr{C}(X)$ een commutatieve ring met eenheidselement. In deze opgave willen we aantonen dat we uit deze ring de ruimte X kunnen reconstrueren. We schrijven $\mathrm{Max}\bigl(\mathscr{C}(X)\bigr)$ voor de verzameling van maximale idealen van $\mathscr{C}(X)$.

(i) Toon aan dat voor iedere deelverzameling $A \subset X$ de verzameling

$$I_A := \bigl\{ f \in \mathscr{C}(X) \bigm| f(a) = 0 \text{ voor alle } a \in A \bigr\}$$

een ideaal van $\mathscr{C}(X)$ is.

(ii) Bewijs dat voor elk punt $x \in X$ het ideaal $I_x := I_{\{x\}}$ een maximaal ideaal van $\mathscr{C}(X)$ is.

(iii) Toon aan dat voor $x, y \in X$ met $x \neq y$ geldt dat $I_x \neq I_y$.

Uit de voorgaande onderdelen concluderen we dat we een welgedefinieerde en injectieve afbeelding $\varphi\colon X \hookrightarrow \mathrm{Max}\bigl(\mathscr{C}(X)\bigr)$ hebben, gegeven door $x \mapsto I_x$.

Als volgende gaan we aantonen dat deze afbeelding φ ook surjectief is. Zij dus $\mathfrak{m} \subset \mathscr{C}(X)$ een maximaal ideaal. Ons doel is te bewijzen dat er een $x \in X$ is met $\mathfrak{m} = I_x$. Gegeven een deelverzameling $F \subset \mathscr{C}(X)$, definieer $V(F) \subset X$ door

$$V(F) := \bigl\{ x \in X \bigm| f(x) = 0 \text{ voor alle } f \in F \bigr\} .$$

Als $F = \{f\}$ dan schrijven we $V(f)$ in plaats van $V(\{f\})$.

(iv) Laat $f \in \mathfrak{m}$. Toon aan dat $V(f)$ gesloten en niet leeg is.

(v) Laat $f, g \in \mathfrak{m}$. Toon aan dat $V(f) \cap V(g) \neq \emptyset$. [*Hint:* $f^2 + g^2 \in \mathfrak{m}$.]

(vi) Toon aan dat $V(\mathfrak{m})$ niet leeg is. [*Hint:* gebruik dat X compact is.]

(vii) Laat $x \in V(\mathfrak{m})$. Toon aan dat $\mathfrak{m} = I_x$.

De conclusie is dus dat we een bijectie $\varphi \colon X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}\big(\mathscr{C}(X)\big)$ hebben. In het laatste gedeelte van de opgave willen we nagaan hoe je de topologie op X uit de ring $\mathscr{C}(X)$ kunt reconstrueren.

(viii) Toon aan dat voor elke deelverzameling $F \subset \mathscr{C}(X)$ de verzameling $V(F) \subset X$ gesloten is.

(ix) Toon aan dat voor iedere gesloten deelverzameling $A \subset X$ geldt dat $A = V(I_A)$.

(x) Noem een deelverzameling $Z \subset \mathrm{Max}\big(\mathscr{C}(X)\big)$ gesloten als er een ideaal $I \subset \mathscr{C}(X)$ is zo dat $Z = \big\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathscr{C}(X)) \bigm| I \subseteq \mathfrak{m}\big\}$. Laat zien dat dit een topologie op $\mathrm{Max}\big(\mathscr{C}(X)\big)$ definieert en dat met deze topologie de afbeelding φ een homeomorfisme is.

HOOFDSTUK 10

Locale compactheid

10.1. Definitie. Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte X. Dan heet een deelverzameling $B \subseteq X$ een *omgeving* van A als A bevat is in het inwendige van B.

Merk op dat dit consistent is met de terminologie "open omgeving" die we eerder hebben ingevoerd. Als speciaal geval: een omgeving van een punt $x \in X$ is een deelverzameling $B \subseteq X$ met $x \in B^\circ$.

10.2. Definitie. Een topologische ruimte X heet *locaal compact* als elk punt $x \in X$ een compacte omgeving heeft.

Uiteraard is elke compacte ruimte ook locaal compact. Het omgekeerde geldt niet. Bijvoorbeeld, $\mathbb{R}^n$ met de Euclidische topologie is locaal compact maar niet compact. Het begrip locale compactheid zoals hier gedefinieerd, is eigenlijk alleen de goede "locale versie van compactheid" voor Hausdorffruimten. Zie ook het einde van dit hoofdstuk en Opgave 10.3.

10.3. Voorbeeld. De ruimte $\mathbb{Q}$ is niet locaal compact voor de Euclidische topologie. Immers, de enige compacte deelverzamelingen van $\mathbb{Q}$ zijn de eindige verzamelingen en deze hebben een leeg inwendige.

Als X een topologische ruimte is die niet compact is, dan is het vaak nuttig om een inbedding van X te hebben in een compacte topologische ruimte, die dan een *compactificatie* van X wordt genoemd. Zo een compactificatie kun je in het algemeen op meerdere manieren kiezen. Voor locaal compacte Hausdorffruimten is er een procedé dat "zo zuinig mogelijk" werkt, als volgt.

10.4. Stelling. *Zij X een locaal compacte Hausdorffruimte. Dan bestaat er een compacte Hausdorffruimte X^* en een punt $P \in X^*$ zo dat X homeomorf is met $X^* \setminus \{P\}$. Bovendien is het paar (X^*, P) op homeomorfie na uniek bepaald, in de volgende zin: Stel we hebben compacte Hausdorffruimten X_1^* en X_2^*, punten $P_i \in X_i^*$ en homeomorfismen $f_1\colon X \to X_1^* \setminus \{P_1\}$ en $f_2\colon X \to X_2^* \setminus \{P_2\}$. Dan is er een uniek homeomorfisme $g\colon X_1^* \to X_2^*$ met $g(P_1) = P_2$ en $g \circ f_1 = f_2$.*

De compactificatie X^* heet de 1-puntscompactificatie, of ook wel de Alexandroffcompactificatie van X.

Bewijs. Als verzamelingen nemen we $X^* := X \amalg \{*\}$, waarbij we met $\{*\}$ gewoon een verzameling met 1 element bedoelen. Nu definiëren we op X^* een topologie, door te stellen dat de open verzamelingen de volgende zijn:

(a) alle open verzamelingen $U \subseteq X$ (opgevat als deelverzameling van X^*);

(b) alle verzamelingen van de vorm $V^* := V \cup \{*\}$ waarbij V een verzameling is van X zo dat $X \setminus V$ compact is. Merk op dat de aanname dat $X \setminus V$ compact is, impliceert dat V open is in X.

Allereerst gaan we na dat dit inderdaad een topologie op X^* definieert. Het is duidelijk dat $\emptyset$ en X^* allebei open zijn. Als $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een collectie open verzamelingen van type (a) is, dan is ook $\cup U_\alpha$ een open verzameling van type (a). Als $\{V_\beta^*\}_{\beta\in B}$ een collectie open verzamelingen van type (b) is, dus met $V_\beta^* = V_\beta \cup \{*\}$ en $X \setminus V_\beta$ compact, dan is ook $V := \cup_{\beta\in B} V_\beta$ open en uit Propositie 7.6 volgt dat $X \setminus V$ weer compact is; zodoende is $V^* = \cup_{\beta\in B} V_\beta^*$ weer open van type (b). Om na te gaan dat een vereniging van open verzamelingen weer open is, hoeven we nu dus alleen nog maar in te zien dat, voor U open van type (a) en V^* open van type (b), ook $U \cup V^*$ open is in X^*; dit volgt gemakkelijk uit Propositie 7.6. Op soortgelijke manier zien we dat de doorsnede van een eindig aantal open delen weer open is; de details daarvan laten we aan de lezer. De conclusie is dat we inderdaad een topologie hebben op X^*.

Het is duidelijk dat de geïnduceerde topologie op $X = X^* \setminus \{*\}$ de topologie is waar we mee begonnen zijn, dus de natuurlijke inclusie $i\colon X \hookrightarrow X^*$ geeft een homeomorfisme van X naar $X^* \setminus \{*\}$.

Als volgende gaan we na dat X^* Hausdorffs is. Neem punten $x \neq y$ in X^*. We mogen veronderstellen dat $x \in X$. Als ook $y \in X$, dan volgt uit het feit dat de inclusie i een homeomorfisme is, dat er disjuncte open U en V in X^* bestaan met $x \in U$ en $y \in V$. Neem nu aan dat $y = *$. Omdat X locaal compact is, bestaat er een compacte omgeving C van x; in dit geval is $x \in C^\circ$ en $y \in X^* \setminus C$ en per constructie zijn deze verzamelingen open en disjunct.

Vervolgens willen we inzien dat X^* compact is. Stel daartoe dat we een open overdekking $X^* = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ hebben. Kies een index $a \in A$ zo dat $* \in U_a$. Dan moet U_a een open verzameling van type (b) zijn, dus we kunnen schrijven $U_a = V^* = V \cup \{*\}$ waarbij V een open deelverzameling van X is met $X \setminus V$ compact. Er zijn derhalve indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ zo dat $(X \setminus V) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m}$, en dan is duidelijk dat $X^* = U_a \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m}$. Dus X^* is inderdaad compact.

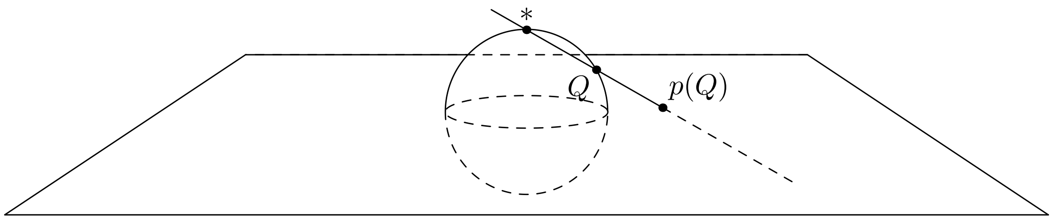
Tenslotte bewijzen we dat het paar $\big(X^*, P\big)$ op homeomorfie na uniek bepaald is. Stel dus we hebben compacte Hausdorffruimten X_1^* en X_2^*, punten $P_i \in X_i^*$ en homeomorfismen $f_1\colon X \to X_1^* \setminus \{P_1\}$ en $f_2\colon X \to X_1^* \setminus \{P_2\}$. Het is duidelijk dat er een unieke bijectie (van verzamelingen) $g\colon X_1^* \to X_2^*$ is met $g(P_1) = P_2$ en $g \circ f_1 = f_2$, en we moeten aantonen dat g een homeomorfisme is. Op symmetriegronden volstaat het te bewijzen dat g continu is. Zij nu U open in X_2^*. Als $P_2 \notin U$ dan is $g^{-1}(U)$ de deelverzameling van $X_1^* \setminus \{P_1\}$ die onder het homeomorfisme f_1 correspondeert met $f_2^{-1}(U) \subseteq X$; derhalve is $g^{-1}(U)$ open in $X_1^* \setminus \{P_1\}$, en dus open in X_1^*. (Gebruik dat X_1^* Hausdorffs is.) Stel nu dat $P_2 \in U$. Laat $C := X_2^* \setminus U$. Dan is C gesloten in de compacte Hausdorffruimte X_2^*, dus wegens Proposities 7.6 en 7.7 is C compact. Dus ook $f_2^{-1}(C)$ is compact (want f_2 geeft een homeomorfisme tussen $f_2^{-1}(C)$ en C), dus ook $g^{-1}(C) = f_1\big(f_2^{-1}(C)\big)$ is compact, dus $g^{-1}(C)$ is gesloten in X_2^* (wederom Propositie 7.7), dus $g^{-1}(U) = X_1^* \setminus g^{-1}(C)$ is open in X_1^*. □

10.5. Voorbeeld. Wat gebeurt er als X zelf compact is? In dat geval vinden we uit de constructie van X^* dat X^* de disjuncte vereniging is van X en de eenpuntsverzameling $\{*\}$, niet alleen als verzameling maar echt als topologische ruimte. Anders gezegd: X en $\{*\}$ zijn allebei open en gesloten in X^*.

10.6. Voorbeeld. Neem $X = \mathbb{R}$ met de Euclidische topologie. De 1-puntscompactificatie $\mathbb{R}^*$ is in dat geval homeomorf met de cirkel S^1,waarbij we $\mathbb{R}$ inbedden in S^1 door $x \mapsto \big(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\big)$. Het "punt in oneindig" dat we aan $\mathbb{R}$ toevoegen is dus het punt $(0,1) \in S^1$. Om in te zien dat S^1 inderdaad de 1-puntscompactificatie van $\mathbb{R}$ is, kunnen we gewoon de "universele eigenschap" gebruiken. Immers, het is duidelijk dat S^1 een compacte Hausdorffruimte is en dat $\mathbb{R}$ homeomorf is met $S^1 \setminus \{(0,1)\}$; uit de stelling volgt dan dat S^1 "de" 1-puntscompactificatie van $\mathbb{R}$ is.

Het bewijs van Stelling 10.4 geeft een "abstracte" constructie van X^*. Zoals we echter in het voorbeeld zien, kunnen we soms ook heel concreet zeggen welke ruimte dit is. Bovendien laat het voorbeeld zien hoe nuttig het tweede gedeelte van de stelling is. Namelijk, als je eenmaal "weet" (of "kunt raden") hoe de 1-puntscompactificatie van een ruimte X eruit ziet, dan is het bewijs dat je antwoord het correcte is meestal een trivialiteit. Het enige dat je hoeft na te gaan is dat de gevonden kandidaat voor X^* inderdaad een compacte Hausdorffruimte is, en dat X homeomorf is met $X^* \setminus \{P\}$ voor een punt $P \in X^*$. Als illustratie geven we een generalisatie van het vorige voorbeeld naar hogere dimensies.

10.7. Voorbeeld. Neem $X = \mathbb{R}^n$. Beschouw de n-sfeer S^n en neem $* = (0, \ldots, 0, 1)$. Identificeer $\mathbb{R}^n$ met $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$. We hebben een afbeelding "stereografische projectie" $p\colon S^n \setminus \{*\} \to \mathbb{R}^n$ door aan een punt $Q \in S^n \setminus \{*\}$ het snijpunt toe te voegen van de lijn door $*$ en Q met het hypervlak $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.



Zie ook Opgave 4.12, waar we gezien hebben dat stereografische projectie een homeomorfisme geeft tussen $S^n \setminus \{*\}$ en $\mathbb{R}^n$. Omdat S^n een compacte Hausdorffruimte is concluderen we, precies op dezelfde manier als in het vorige voorbeeld, dat de 1-puntscompactificatie van $\mathbb{R}^n$ homeomorf is met S^n.

De 1-puntscompactificatie van een locaal compacte Hausdorffruimte is in zekere zin de "minimale" compactificatie. Er zijn in het algemeen ook andere manieren mogelijk om een ruimte te compactificeren. Zonder hier verder op in te kunnen gaan noemen we nog de *Stone-Čech compactificatie* van een normale ruimte X. Dit is een compactificatie $X \hookrightarrow \beta(X)$ met de eigenschap dat elke continue afbeelding $f\colon X \to C$ van X naar een compacte Hausdorffruimte C uniek uitbreidt tot een continue afbeelding $\beta(X) \to C$. Voor verdere behandeling hiervan verwijzen we naar de literatuur.

10.8. Ter afsluiting van dit hoofdstuk kijken we nog een keer terug naar de definitie van locale compactheid in 10.2. Het probleem met deze definitie is dat het eigenlijk helemaal niet duidelijk is dat dit een *locaal* begrip is. In analogie met de manier waarop we in 6.1 locale samenhang hebben gedefinieerd, zouden we bij locale compactheid eigenlijk willen dat er bij elke gegeven open omgeving U van x een compacte $C \subseteq U$ bestaat met $x \in C^\circ$. De volgende propositie laat zien dat in een Hausdorffruimte deze ogenschijnlijk sterkere versie equivalent is met de versie uit 10.2.

10.9. Propositie. *Zij X een Hausdorffruimte. Dan zijn de volgende twee eigenschappen equivalent:*

(a) *X is locaal compact;*
(b) *voor elke $x \in X$ en elke open omgeving U van x, is er een compacte deelverzameling $C \subset U$ zo dat $x \in C^\circ$.*

Bewijs. De implicatie (b) $\Rightarrow$ (a) is triviaal. (Neem $U = X$.) Voor de omkering, neem aan dat X een locaal compacte Hausdorffruimte is en zij $X \hookrightarrow X^*$ de 1-puntscompactificatie. Zij U een open omgeving van x. Dan is $X^* \setminus U$ een gesloten deelverzameling van X^* die x niet bevat en omdat X^* een normale ruimte is (zie Prop. 9.7) zijn er disjuncte open $V, W \subset X^*$ met $x \in V$ en $(X^* \setminus U) \subseteq W$. Maar dan is $C := X^* \setminus W$ een deelverzameling van X die bevat is in U, en vanwege $x \in V \subseteq C$ is $x \in C^\circ$. Tenslotte merken we op dat C compact is, want het is een gesloten deelverzameling van de compacte ruimte X^*. □

10.10. Gevolg. *Als X een locaal compacte Hausdorffruimte is, dan is ook elke open $U \subseteq X$ locaal compact.*

Opgaven bij hoofdstuk 10.

Opgave 10.1. Zij X een locaal compacte Hausdorffruimte. Gegeven zijn punten $x, y \in X$ met $x \neq y$. Bewijs dat er open omgevingen U van x en V van y bestaan zo dat $\overline{U}$ en $\overline{V}$ compact zijn en $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Opgave 10.2. Zij A een gesloten deelverzameling van een locaal compacte ruimte X. Laat zien dat A (met de geïnduceerde topologie) weer locaal compact is.

Opgave 10.3. Zij $(X, \mathscr{T})$ een topologische ruimte. Kies een punt $P \in X$ en definieer

$$\mathscr{T}' := \{U \in \mathscr{T} \mid P \notin U\} \cup \{X\}\,.$$

Dan is $\mathscr{T}'$ de doorsnede van $\mathscr{T}$ en de uitgesloten-punt-topologie $\mathscr{T}_P$ van Opgave 2.4. Uit Lemma 3.1 volgt dat $\mathscr{T}'$ weer een topologie op X is.
(i) Laat zien dat $(X, \mathscr{T}')$ compact is. In het bijzonder is $(X, \mathscr{T}')$ locaal compact.
(ii) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat een open deelverzameling van een locaal compacte ruimte in het algemeen niet weer locaal compact is.

(Deel (ii) van deze opgave laat zien dat het begrip "locale compactheid" voor niet-Hausdorffse ruimten niet de verwachte eigenschappen heeft.)

HOOFDSTUK 11

De quotiënttopologie

11.1. Om te beginnen brengen we het begrip *equivalentierelatie* in herinnering. Zij X een verzameling. Een equivalentierelatie op X is een deelverzameling $R \subset X \times X$ die de volgende eigenschappen heeft:
(1) *reflexiviteit:* voor alle $x \in X$ is $(x, x) \in R$;
(2) *symmetrie:* als $(x, y) \in R$ dan ook $(y, x) \in R$;
(3) *transitiviteit:* als $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$ dan ook $(x, z) \in R$.

In de praktijk gebruiken we meestal een symbool als "$\sim$", en we stellen dat $x \sim y$ dan en slechts dan als $(x, y) \in R$. In deze notatie is een equivalentierelatie op een verzameling X een relatie $\sim$ met de volgende eigenschappen:
(1) *reflexiviteit:* voor alle $x \in X$ is $x \sim x$;
(2) *symmetrie:* voor alle x, $y \in X$ geldt: $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x$;
(3) *transitiviteit:* als $x \sim y$ en $y \sim z$ dan geldt ook $x \sim z$.

11.2. Als $\sim$ een equivalentierelatie op X is, dan schrijven we $\overline{X} = X/{\sim}$ voor de verzameling van equivalentieklassen. Er is een canonieke afbeelding $q\colon X \twoheadrightarrow \overline{X}$ die een element $x \in X$ stuurt naar zijn eigen equivalentieklasse. We noemen de afbeelding q ook wel de quotiëntafbeelding, of het "uitdelen naar de relatie $\sim$".

Omgekeerd, als $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ een surjectieve afbeelding is, dan krijgen we een equivalentierelatie $\sim_f$ op X door te stellen dat $x \sim_f y$ dan en slechts dan als $f(x) = f(y)$. De vezels van f zijn dus per definitie de equivalentieklassen voor deze relatie. De corresponderende deelverzameling $R \subset X \times X$ is het inverse beeld van de diagonaal $\Delta_Y \subset Y \times Y$ onder de afbeelding $f \times f\colon X \times X \to Y \times Y$.

Deze twee constructies zijn niet precies elkaars inverse. Beginnen we met een equivalentierelatie $\sim$ en nemen we de canonieke afbeelding $q\colon X \twoheadrightarrow \overline{X}$, dan is de equivalentierelatie $\sim_q$ dezelfde als de equivalentierelatie $\sim$ waarmee we zijn begonnen. Maar beginnen we met $f\colon X \to Y$ en vormen we $\sim_f$, dan is de bijbehorende $q\colon X \to \overline{X} = X/{\sim_f}$ niet letterlijk dezelfde als de afbeelding f waarmee we zijn begonnen. Er is echter wel een natuurlijke bijectie tussen $X/{\sim_f}$ en Y, en voor later gebruik formuleren we dit als een propositie. Het eenvoudige bewijs hiervan laten we over aan de lezer.

11.3. Propositie. *Zij $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ een surjectieve afbeelding, zij $\sim\, = \,\sim_f$ de door f gedefinieerde equivalentierelatie op X, en zij $q\colon X \to \overline{X} = X/{\sim}$ de quotiëntafbeelding. Dan is er een unieke bijectie $h\colon \overline{X} \to Y$ zo dat $h \circ q = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ \overline{X} \arrow[ur, dashed, "\wr", "\exists!\, h"'] & \end{tikzcd}$$

Tot zover hebben we het alleen nog maar gehad over equivalentierelaties en quotiënten in de context van verzamelingen. Nu willen we quotiënten van topologische ruimten invoeren.

11.4. Definitie. Zij X een topologische ruimte.

(i) Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan definiëren we de *quotiënttopologie* op $\overline{X} = X/{\sim}$ als de fijnste topologie waarvoor de canonieke afbeelding $q\colon X \to \overline{X}$ continu is.

(ii) Zij $f\colon X \to Y$ een surjectieve afbeelding van verzamelingen. Dan definiëren we de de *quotiënttopologie* op Y (ten aanzien van de afbeeling f) als de fijnste topologie waarvoor f continu is.

Concreet betekent de definitie in (i) dat een deelverzameling $V \subset \overline{X}$ open (resp. gesloten) is in de quotiënttopologie dan en slechts dan als het inverse beeld $q^{-1}(V)$ open (resp. gesloten) is in X. Evenzo geldt in (ii) dat een deelverzameling $V \subset Y$ open (resp. gesloten) is in de quotiënttopologie dan en slechts dan als het inverse beeld $f^{-1}(V)$ open (resp. gesloten) is in X.

Merk op dat de quotiënttopologie op $\overline{X}$ gewoon dezelfde is als de quotiënttopologie ten aanzien van de canonieke afbeelding $q\colon X \to \overline{X}$.

Het volgende resultaat is een topologisch analogon van de homomorfiestelling in de Algebra.

11.5. Propositie. *Zij X een topologische ruimte X en zij $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ een surjectieve afbeelding. We geven Y de quotiënttopologie. Zij $g\colon X \to Z$ een continue afbeelding zo dat voor alle x_1, $x_2 \in X$ met $f(x_1) = f(x_2)$ geldt dat ook $g(x_1) = g(x_2)$. Dan is er een unieke continue afbeelding $h\colon Y \to Z$ met $h \circ f = g$.*

Bewijs. Definieer $h\colon Y \to Z$ door $h(y) = g(x)$, waarbij x een willekeurig element van X is zo dat $f(x) = y$. (Omdat f surjectief is, bestaat zo een $x \in X$ altijd.) Wegens de aanname hangt $h(y)$ niet af van de keuze van x, dus h is welgedefinieerd. Ook is duidelijk dat h de unieke afbeelding is met $h \circ f = g$. Als $V \subseteq Z$ open is dan is $f^{-1}\big(h^{-1}(V)\big) = g^{-1}(V)$ open in X en per definitie van de quotiënttopologie op Y betekent dit dat $h^{-1}(V)$ open is in Y. Dus h is continu. $\square$

11.6. Definitie. We noemen een continue surjectie $f\colon X \to Y$ een *identificatie-afbeelding* als voor alle deelverzamelingen $V \subseteq Y$ geldt dat

$$V \text{ is open in } Y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(V) \text{ is open in } X. \tag{1}$$

11.7. Propositie. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue surjectie tussen topologische ruimten. Zij $\sim\, = \,\sim_f$ de bijbehorende equivalentierelatie op X en zij $q\colon X \to \overline{X}$ de quotiëntafbeelding. We voorzien $\overline{X}$ van de quotiënttopologie. Dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

(i) *f is een identificatie-afbeelding;*

(ii) *de topologie op Y is de quotiënttopologie t.a.v. de afbeelding f;*

(iii) *de bijectie $h\colon \overline{X} \to Y$ uit* Propositie 11.3 *is een homeomorfisme.*

Bewijs. De equivalentie van (i) en (ii) volgt direct uit de definities. Om in te zien dat (ii) en (iii) equivalent zijn, beschouw een deelverzameling $V \subset Y$ en laat $W = h^{-1}(V)$. Dan is $q^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ en uit de definitie van de quotiënttopologie op $\overline{X}$ volgt dat

$$W \text{ is open in } \overline{X} \quad \Leftrightarrow \quad q^{-1}(W) \text{ is open in } X \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(V) \text{ is open in } X.$$

Verder is h een homeomorfisme dan en slechts dan als voor alle $V \subset Y$ geldt dat

$$W = h^{-1}(V) \text{ is open in } \overline{X} \quad \Leftrightarrow \quad V \text{ is open in } Y.$$

We zien dat dit geldt dan en slechts dan als f een identificatie-afbeelding is. $\square$

11.8. Als $\sim$ een gegeven equivalentierelatie is op X, dan is een identificatie-afbeelding $f\colon X \to\ \to Y$ met $\sim_f\ =\ \sim$ niets anders dan een afbeelding die op homeomorfie na "hetzelfde" is als de quotiëntafbeelding $q\colon X \twoheadrightarrow \overline{X}$. In het bijzonder is q zelf een identificatie-afbeelding. In de praktijk zullen we echter zien dat we vaak een concretere beschrijving van het quotiënt hebben dan de abstract gedefinieerde ruimte $\overline{X} = X/{\sim}$. De situatie is wat dat betreft vergelijkbaar met die in de groepentheorie: Als N een normaaldeler is van een groep G dan is "het" quotiënt G/N de verzameling van nevenklassen modulo N waarop we een geïnduceerde groepsstructuur hebben. Maar in de praktijk hebben we voor het quotiënt vaak een concretere beschrijving. Zo is het bijvoorbeeld veel inzichtelijker om te zeggen dat het quotiënt van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ modulo zijn normaaldeler $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de groep $\mathbb{R}^*$ is, dan wanneer we $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ beschrijven als een "abstracte" verzameling van nevenklassen. Iets dergelijks geldt ook in de topologie.

Voordat we dit verduidelijken met een voorbeeld, geven we een resultaat dat ons in de praktijk vaak in staat stelt om snel aan te tonen dat een afbeelding een identificatie-afbeelding is.

11.9. Propositie. *Zij $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ een continue surjectie van topologische ruimten. Als f een open afbeelding is of een gesloten afbeelding dan is f een identificatie-afbeelding.*

Bewijs. Als f open is, dan is duidelijk dat is voldaan aan (1). Stel nu dat f een gesloten afbeelding is. Zij $V \subset Y$ en laat $W = Y \setminus V$. Omdat f surjectief is geldt dat $V = f\big(f^{-1}(V)\big)$ en $W = f\big(f^{-1}(W)\big) = f\big(X \setminus f^{-1}(V)\big)$. Als $f^{-1}(V)$ open is in X dan is $X \setminus f^{-1}(V)$ gesloten, dus W is gesloten, dus V is open. Samen met de continuïteit van f volgt hieruit dat ook in dit geval is voldaan aan (1). $\square$

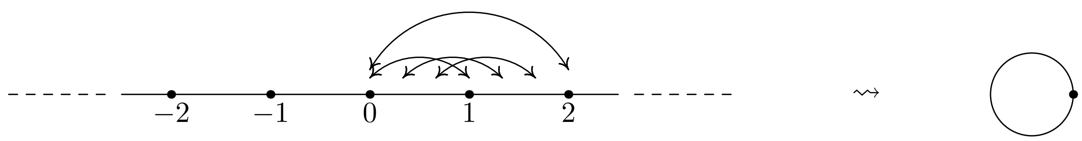
11.10. Gevolg. *Stel X is een compacte ruimte en Y is een Hausdorffruimte. Zij $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ een continue surjectie. Dan is f een identificatie-afbeelding.*

Bewijs. Uit Proposities 7.5, 7.6 en 7.7 volgt dat f een gesloten afbeelding is. Pas nu (i) van de Propositie toe. $\square$

11.11. Voorbeeld. Laat $X = \mathbb{R}$ met de Euclidische topologie. Voer een equivalentierelatie $\sim$ in door te stellen dat

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in \mathbb{Z}\,.$$

De quotiëntruimte $\mathbb{R}/{\sim}$ is een abstract gedefinieerde topologische ruimte. Intuïtief is wel duidelijk dat dit quotiënt homeomorf is met de cirkel $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.



Door gebruik te maken van het begrip identificatie-afbeelding, kunnen we dit precies maken. Bekijk daartoe de afbeelding

$$f\colon \mathbb{R} \to S^1 \qquad \text{gegeven door} \quad x \mapsto \big(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\big)\,.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat f een open (en ook gesloten) afbeelding is. Uit Propositie 11.9 volgt dat f een identificatie-afbeelding is. Verder is duidelijk dat $\sim_f\, = \,\sim$ en dus concluderen we dat $\mathbb{R}/\!\sim$ inderdaad homeomorf is met S^1.

11.12. Voorbeeld. De n-sfeer S^n en de n-dimensionale bol D^n zijn gegeven door

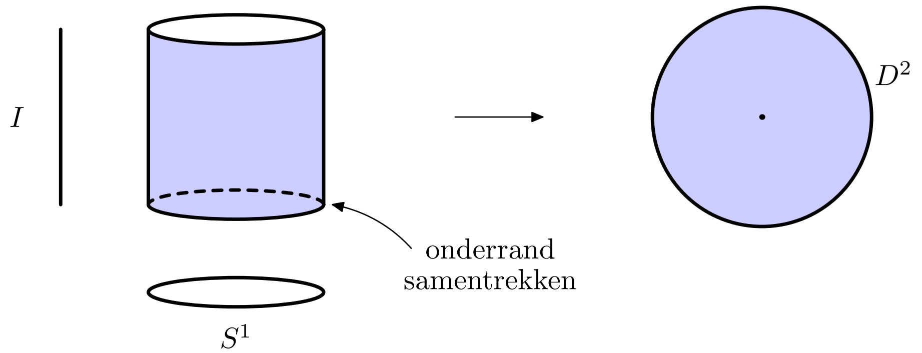
$$S^n := \big\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\big\}$$

en

$$D^n := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\big\}\,.$$

Merk op dat $\partial D^n = S^{n-1}$ voor alle $n \geqslant 1$. Merk ook op dat S^0 uit twee losse punten bestaat.

Zij $I = [0, 1]$ het eenheidsinterval. In de productruimte $S^n \times I$ knijpen we de deelverzameling $S^n \times \{0\}$ samen tot een punt. Meer formeel betekent dit, dat we de equivalentierelatie $\sim$ beschouwen waarbij twee punten $P = (x, a)$ en $Q = (y, b)$ van $S^n \times I$ equivalent zijn dan en slechts dan als $P = Q$ of $a = b = 0$. We voorzien $(S^n \times I)/\!\sim$ van de quotiënttopologie. De bewering is dat deze quotiëntruimte homeomorf is met D^{n+1}.



Om dit in te zien, kijken we naar de afbeelding

$$f\colon S^n \times I \to D^{n+1}$$

gegeven door $f\big((x_1, \dots, x_{n+1}), a\big) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_{n+1})$. We gaan gemakkelijk na dat f een continue surjectie is en dat $\sim\, = \,\sim_f$. Toepassen van Gevolg 11.10 geeft dan dat f een identificatie-afbeelding is en uit Propositie 11.7 volgt onze bewering.

11.13. Opmerking. De vorming van quotiënten betekent in de praktijk dat we binnen een topologische ruimte delen “aan elkaar plakken”. Vaak beschrijven we de equivalentierelatie door te zeggen welke punten van X we onderling willen identificeren. Een dergelijk plakrecept is in de praktijk vaak gemakkelijker te begrijpen dan wanneer we de corresponderende equivalentierelatie op de oorspronkelijke ruimte proberen uit te schrijven.

11.14. Propositie. *Zij* $R \subset X \times X$ *een equivalentierelatie op een topologische ruimte* X *en geef* $\overline{X} = X/R$ *de quotiënttopologie.*

(i) *Als* $\overline{X}$ *Hausdorffs is, dan is* R *gesloten in* $X \times X$.

(ii) *Als de quotiëntafbeelding* $q\colon X \to \overline{X}$ *een open afbeelding is en* R *is gesloten in* $X \times X$, *dan is* $\overline{X}$ *Hausdorffs.*

Opmerking: de voorwaarde in (ii) dat q open is kan in het algemeen niet worden weggelaten.

Bewijs. (i) De afbeelding $q \times q\colon X \times X \to \overline{X} \times \overline{X}$ is continu. Als $\overline{X}$ Hausdorffs is, dan is de diagonaal $\Delta \subset \overline{X} \times \overline{X}$ gesloten; zie Opgave 3.5. Merk nu op dat $R = (q \times q)^{-1}\big(\Delta\big)$.

(ii) Neem aan dat R gesloten is. Als q een open afbeelding is, dan geldt hetzelfde voor $q \times q$. (Ga dit zelf na.) Verder is het complement van Δ het beeld van $(X \times X) \setminus R$ onder de afbeelding $q \times q$. Daarmee zien we dat Δ gesloten is, dus $\overline{X}$ is Hausdorffs. $\square$

11.15. Voorbeeld. Zij X een topologische ruimte. Stel we hebben een groep G die werkt op de ruimte X door homeomorfismen. Hiermee bedoelen we dat we een werking $G \times X \to X$ hebben en dat voor elke $g \in G$ de afbeelding $\lambda_g\colon X \to X$ gegeven door $x \mapsto g \cdot x$ een homeomorfisme is. (Merk op dat de axioma's van een werking impliceren dat λ_g bijectief is met inverse $\lambda_{g^{-1}}$. Om aan te tonen dat G werkt door homeomorfismen hoeven we dus alleen nog maar na te gaan dat λ_g continu is voor alle $g \in G$.) Definieer een equivalentierelatie $\sim$ op X door te stellen dat $x_1 \sim x_2$ dan en slechts dan als x_1 en x_2 in dezelfde baan zitten. We noemen $X/{\sim}$ het quotiënt van X modulo de gegeven groepswerking, en we schrijven in dit geval meestal X/G in plaats van $X/{\sim}$.

De quotiëntafbeelding $q\colon X \twoheadrightarrow X/G$ is open. Immers, als $U \subset X$ open is dan is

$$q^{-1}\big(q(U)\big) = \bigcup_{g \in G} g(U)\,;$$

dit is een vereniging van open delen van X en is dus zelf ook open. Per definitie van de quotiënttopologie op X/G betekent dit dat $q(U)$ open is in X/G en dit toont aan dat q een open afbeelding is. In het bijzonder kunnen we nu Prop. 11.14 toepassen; dit geeft dat X/G Hausdorffs is dan en slechts dan als de verzameling

$$\big\{(x, g \cdot x) \bigm| x \in X\,, g \in G\big\}$$

gesloten is in $X \times X$.

11.16. Voorbeeld. Zij $X = M_2(\mathbb{C})$, de ruimte van 2×2 matrices met complexe coëfficiënten. We voorzien X van de Euclidische topologie. (Merk op dat $M_2(\mathbb{C})$ in bijectie is met $\mathbb{C}^4$.) Definieer een equivalentierelatie $\sim$ op X door te stellen dat $A \sim B$ dan en slechts dan als de matrices A en B geconjugeerd zijn. We beweren dat de quotiëntruimte $X/{\sim}$ niet Hausdorffs is.

Merk op dat het vorige voorbeeld hier van toepassing is. Namelijk, we nemen $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, de groep van inverteerbare complexe $2{\times}2$ matrices en we laten G op X werken door $g{\cdot}A = gAg^{-1}$. De banen onder deze werking zijn (per definitie) de conjugatieklassen, zodat $X/{\sim} = X/G$. Om in te zien dat X/G in dit geval niet Hausdorffs is, volstaat het daarom aan te tonen dat

$$R := \big\{(A, gAg^{-1}) \bigm| A \in M_2(\mathbb{C})\,, g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\big\}$$

niet gesloten is in $M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C})$. Nu geldt voor $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dat

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dus we vinden dat

$$B := \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \,\middle|\, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

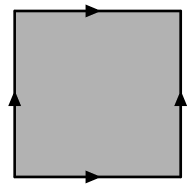
bevat is in R. Nu zit het paar

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

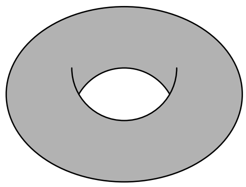
in de afsluiting van B maar niet in R want de matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ zijn niet geconjugeerd. De conclusie is dus dat R niet gesloten is, zodat X/G in dit voorbeeld niet Hausdorffs is.

Zie Opgave 11.5 voor een vervolg op dit voorbeeld.

11.17. Voorbeelden. Begin met het vierkant $I \times I$. Plak de twee horizontale randen op elkaar en plak ook de twee verticale randen op elkaar. Met andere woorden: identificeer $(0, y)$ met $(1, y)$ voor alle $y \in I$ en identificeer $(x, 0)$ met $(x, 1)$ voor alle $x \in I$.

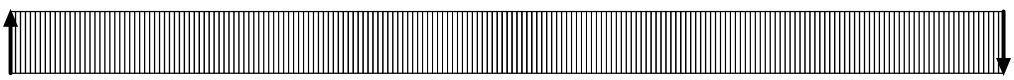


Het resultaat is een fietsband (hol van binnen), ook wel “torus” genoemd.

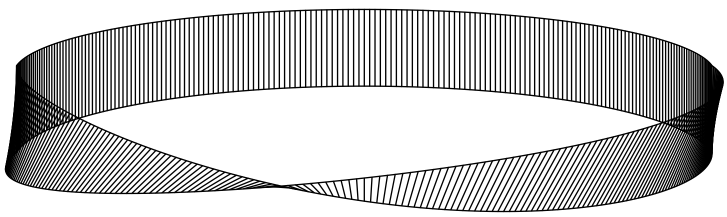


Merk op dat dit eigenlijk een product is van twee copieën van het vorige voorbeeld, en de conclusie is dan ook dat de torus homeomorf is met $S^1 \times S^1$. Zie ook Opgave 11.7.

11.18. Voorbeeld. De Möbiusband: begin met $[-N, N] \times I$ en plak de twee verticale randen “omgekeerd” op elkaar, d.w.z. identificeer $(-N, x)$ met $(N, 1 - x)$ voor alle $x \in I$. Dus we beginnen met

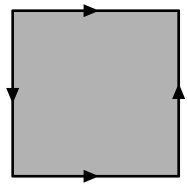


en na plakken (pijlen in de juiste richting op elkaar) krijgen we de Möbiusband:



Vatten we de Möbiusband M op als een deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ dan is de quotiënttopologie op M (gezien als quotiënt van $[-N, N] \times I \subset \mathbb{R}^2$) gewoon de Euclidische topologie.

11.19. Voorbeeld. De Kleinse fles: We beginnen weer met het vierkant $I \times I$. Ditmaal plakken we de horizontale randen op de gewone manier op elkaar en plakken we de verticale randen op de omgekeerde manier op elkaar: identificeer $(x, 0)$ met $(x, 1)$ en identificeer $(0, y)$ met $(1, 1-y)$.



Het resultaat heet de Kleinse fles. Net als de Möbiusband, is de Kleinse fles een voorbeeld van een niet-oriënteerbaar oppervlak. In tegenstelling tot de Möbiusband, kan de Kleinse fles niet in $\mathbb{R}^3$ worden ingebed. Plaatjes van de Kleinse fles (waarvan je er op het internet vele vindt) tonen daarom noodgedwongen een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ met zelfdoorsnijding. Een breipatroon voor een Kleinse fles kun je vinden op `http://www.warwick.ac.uk/~masda/knit_surfaces.pdf` .

11.20. Voorbeeld. Zij Y een topologische ruimte. Een continue functie $\varphi\colon \mathbb{R} \to Y$ heet *periodiek* (met periode 1) als $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dit is uiteraard equivalent met de eis dat $\varphi(x+n) = \varphi(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{Z}$. Voeren we een equivalentierelatie $\sim$ op $\mathbb{R}$ in door te stellen dat $x \sim y$ dan en slechts dan als $x - y \in \mathbb{Z}$, dan is periodiciteit van een functie φ hetzelfde als de eigenschap dat $x \sim y \;\Rightarrow\; \varphi(x) = \varphi(y)$. Verder hebben we gezien dat de afbeelding $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ gegeven door $x \mapsto \big(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\big)$ een identificatie-afbeelding is met $\sim_f = \sim$. Propositie 11.5 zegt nu dat een periodieke functie φ aanleiding geeft tot een continue functie $\psi\colon S^1 \to Y$. Omgekeerd, als $\psi\colon S^1 \to Y$ continu is dan is $\psi \circ f\colon \mathbb{R} \to Y$ continu en periodiek. We krijgen zo een bijectie tussen de verzameling van continue periodieke functies $\mathbb{R} \to Y$ en de verzameling van continue functies $S^1 \to Y$.

11.21. Zij $\sim$ een equivalentierelatie op een topologische ruimte X en zij $q\colon X \twoheadrightarrow \overline{X}$ de quotiëntafbeelding. Zij $A \subset X$ een deelverzameling en zij $q_A\colon A \twoheadrightarrow \overline{A} = A/{\sim}$ de canonieke quotiëntafbeelding van $\sim$ beperkt tot A. Er is een natuurlijke bijectie $j\colon \overline{A} \xrightarrow{\sim} q(A) \subset \overline{X}$ en Propositie 11.5 geeft dat j continu is. Zoals we weten uit Propositie 11.7, is $q\colon A \twoheadrightarrow q(A)$ een identificatie-afbeelding dan en slechts dan als j een homeomorfisme is. In het algemeen is dit niet het geval. Neem in Voorbeeld 11.11 maar $A = [0, 1[\subset \mathbb{R}$. In dat geval is de equivalentierelatie op A triviaal (voor $a_1, a_2 \in A$ geldt alleen $a_1 \sim a_2$ wanneer $a_1 = a_2$), dus $\overline{A} = A$. Van de andere kant is $q(A)$ de hele cirkel S^1. De afbeelding $x \mapsto \big(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\big)$ geeft wel een bijectie tussen A en S^1 maar dit is niet een homeomorfisme. Voor een ander voorbeeld zie Opgave 11.8.

Merk op dat we onder verdere aannamen op A en $\overline{X}$ wel al weten dat j een homeomorfisme is. Namelijk, als A compact is en $\overline{X}$ is Hausdorffs, dan hebben we in Gevolg 11.10 gezien dat $j\colon A \twoheadrightarrow q(A)$ een identificatie-afbeelding is. (Merk op dat $q(A) \subset X/{\sim}$ ook Hausdorffs is.) In de praktijk zijn we vooral geïnteresseerd in het geval dat $q(A) = \overline{X}$, hetgeen betekent dat elke equivalentieklasse in X een element van A bevat. In dat geval is namelijk de conclusie (nog steeds aannemende dat A compact is en $\overline{X}$ Hausdorffs) dat je de quotiëntruimte $\overline{X}$ ook kunt beschrijven als een quotiënt van een “kleinere” verzameling $A \subset X$. Zie Voorbeeld 11.23 hierna voor een concrete illustratie hiervan.

Om, terugkerend naar het algemene geval, verder te analyseren wanneer $j\colon \overline{A} \to q(A)$ een homeomorfisme is, voeren we het begrip verzadiging in. Namelijk, als $B \subset X$ een willekeurige deelverzameling is, dan definiëren we

$$\tilde{B} := \bigl\{x \in X \bigm| \text{er is een } b \in B \text{ met } x \sim b\bigr\}$$

en we noemen dit de verzadiging van B met betrekking tot de relatie $\sim$.

11.22. Propositie. *Zij $\sim$ een equivalentierelatie op een topologische ruimte X en zij $A \subset X$ een deelverzameling. Zij $q\colon X \twoheadrightarrow \overline{X}$ de quotiëntafbeelding en zij $j\colon \overline{A} \to q(A)$ de canonieke continue bijectie. Stel dat voldaan is aan een van de volgende voorwaarden:*
(a) *voor elke open $V \subset A$ is $\tilde{V} \subset X$ open;*
(b) *voor elke gesloten $C \subset A$ is $\tilde{C} \subset X$ gesloten.*

Dan is $j\colon \overline{A} \to q(A)$ een homeomorfisme. Als bovendien geldt dat elke equivalentieklasse in X een element van A bevat, dan geeft j een homeomorfisme $\overline{A} \to \overline{X}$.

Bewijs. Volgens Prop. 11.9 volstaat het aan te tonen dat j een open of gesloten afbeelding is. Stel eerst dat aan voorwaarde (a) voldaan is; we gaan aantonen dat j een open afbeelding is. Neem een open $V \subset A$. We willen inzien dat $j(V) \subset \overline{X}$ open is. Per definitie van de quotiënttopologie op $\overline{X}$ betekent dit dat we moeten aantonen dat het volledig origineel van $j(V)$ in X open is. Maar $q^{-1}\bigl(j(V)\bigr) = \tilde{V}$, dus uit (a) volgt dat $j(V)$ open is in $\overline{X}$ en dit bewijst dat j een open afbeelding is. Op precies dezelfde manier zien we dat als aan (b) voldaan is, j een gesloten afbeelding is.

Voor de laatste bewering van de propositie merken we op dat de aanname dat elke equivalentieklasse onder $\sim$ een element van A bevat, precies betekent dat $q(A) = \overline{X}$. □

11.23. Voorbeeld. De projectieve ruimte $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ is gedefinieerd als de verzameling van lijnen in $\mathbb{R}^{n+1}$ die door de oorsprong $O = (0,\dots,0)$ gaan. We hebben een surjectieve afbeelding $\psi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ die aan een punt $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ met $P \neq O$ de lijn door O en P toevoegt. We voorzien $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ van de quotiënttopologie; deze noemen we de *Euclidische topologie* op $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Als $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ een element is van $\mathbb{R}^{n+1}$ (let op de nummering) met $P \neq O$ dan schrijven we $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ voor de lijn door O en P. Wanneer we de notatie $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ gebruiken dan zal daarbij steeds geëist worden dat de “coördinaten” x_i niet allemaal nul zijn. Merk op dat

$$(x_0 : \cdots : x_n) = (y_0 : \cdots : y_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R}^* \text{ met } (y_0, y_1, \dots, y_n) = (cx_0, cx_1, \dots, cx_n)\,. \qquad (2)$$

Dit maakt de gebruikte notatie heel natuurlijk: het punt $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ hangt alleen af van de simultane verhouding van de coördinaten x_i. Gebruik makende van deze notatie kunnen we schrijven

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigl\{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \bigm| (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}\bigr\}\,,$$

met dien verstande dat verschillende schrijfwijzen $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ hetzelfde punt van $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ kunnen weergeven, als in (2). Merk op dat we bij een gegeven punt $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ niet kunnen spreken over de waarde van de $i$de coördinaat, omdat een dergelijke waarde niet eenduidig gedefinieerd is.

Schrijf $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$. We laten de groep $G := \mathbb{R}^*$ werken op X door

$$c \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (cx_0, cx_1, \ldots, cx_n)\,.$$

De conclusie van het bovenstaande is dat $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = X/G$. Gebruik makend van Voorbeeld 11.15 gaan we na dat $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ Hausdorffs is. Om dit in te zien moeten we nagaan dat

$$R := \bigl\{(x, c \cdot x) \in X^2 \bigm| x \in X\,, c \in \mathbb{R}^*\bigr\}$$

gesloten is in $X \times X$. Dit volgt onmiddellijk uit de opmerking dat

$$R = \Bigl\{\bigl((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_n)\bigr) \in X^2 \Bigm| x_i y_j - x_j y_i = 0 \quad \text{voor alle } i \text{ en } j\Bigr\}\,.$$

Beschouw nu de n-sfeer

$$S^n := \bigl\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \bigm| x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\bigr\}\,.$$

De samenstelling $f\colon S^n \hookrightarrow \bigl(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}\bigr) \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ is continu en surjectief want bij elk punt $P = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ kunnen we een $c \in \mathbb{R}^*$ vinden zo dat $(cx_0)^2 + \cdots + (cx_n)^2 = 1$; neem maar $c = (x_0^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2}$. Bijgevolg is $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ compact. Bovendien volgt uit Gevolg 11.10 dat $f\colon S^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ een identificatie-afbeelding is. Met andere woorden, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ is homeomorf met $S^n/{\sim}$. Verder rekenen we gemakkelijk na dat twee punten P, $Q \in S^n$ equivalent zijn dan en slechts dan als $P = Q$ of $P = -Q$. Dus $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ is (homeomorf met) de ruimte die we krijgen uit S^n door alle antipodale punten te identificeren.

Er is nog een derde beschrijving van $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ als een quotiënt. Definieer, voor $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, een deelverzameling $U_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ door

$$U_i := \bigl\{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \bigm| x_i \neq 0\bigr\}\,.$$

Merk op dat de waarde van de $i$de coördinaat weliswaar niet gedefinieerd is, maar dat de conditie "$x_i \neq 0$" wel zinvol is. De deelverzamelingen U_i zijn open want $\psi^{-1}(U_i)$ is open in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$. Verder is duidelijk dat $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Een punt $P \in U_i$ kan op unieke manier geschreven worden als

$$P = (x_0 : \cdots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n)\,.$$

Dit geeft een bijectie $\alpha_i\colon U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ door $\alpha_i(P) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ en je kunt nagaan dat dit een homeomorfisme is. De conclusie is dus dat we $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ook kunnen beschrijven door $n + 1$ copieën van de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ (namelijk de open delen U_i) aan elkaar te plakken.

Het is niet moeilijk om precies te beschrijven hoe je deze copieën van $\mathbb{R}^n$ aan elkaar moet plakken, behalve dat het notationeel een beetje lastig is. We beperken ons tot een concreet voorbeeld: Om $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ te krijgen neem je drie copieën van $\mathbb{R}^2$; noem deze V_0, V_1 en V_2. Op V_0 gebruik je als coördinaten (x_1, x_2); op V_1 coördinaten (y_1, y_2) en op V_2 coördinaten (z_1, z_2). Nu plak je V_0 en V_1 aan elkaar door de open deelverzameling

$$V_{0,1} := \big\{(x_1, x_2) \in V_0 \bigm| x_1 \neq 0\big\} \subset V_0$$

van V_0 te identificeren met de open deelverzameling

$$V_{1,0} := \big\{(y_1, y_2) \in V_1 \bigm| y_1 \neq 0\big\} \subset V_1$$

van V_1 via de bijectie $V_{0,1} \xrightarrow{\sim} V_{1,0}$ gegeven door $(x_1, x_2) \mapsto (1/x_1, x_2/x_1)$. De inverse bijectie stuurt $(y_1, y_2) \in V_{1,0}$ naar $(1/y_1, y_2/y_1)$. Om te begrijpen waar dit "plakrecept" vandaan komt, moeten we bedenken dat $(x_1, x_2) \in V_0$ in projectieve coördinaten staat voor het punt $(1 : x_1 : x_2)$ terwijl $(y_1, y_2) \in V_1$ in projectieve coördinaten het punt $(y_1 : 1 : y_2)$ is.

Op soortgelijke manier moeten we V_0 en V_2 aan elkaar plakken langs open delen, en evenzo V_1 en V_2. We laten het als oefening om dit helemaal uit te werken.

Elk van de open delen U_i (homeomorf met $\mathbb{R}^n$) heeft als complement een deelverzameling $Z_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ die homeomorf is met $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. We kunnen $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ opvatten als een compactificatie van (bijvoorbeeld) $U_0 \cong \mathbb{R}^n$. Het complement $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus U$ wordt dan het "hypervlak in oneindig" genoemd.

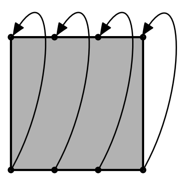
Opgaven bij hoofdstuk 11.

Opgave 11.1. Zij X een topologische ruimte, zij $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ een surjectieve afbeelding van verzamelingen, en geef Y de quotiënttopologie. Laat zien dat een deelverzameling $C \subseteq Y$ gesloten is dan en slechts dan als $f^{-1}(C)$ gesloten is in X.

Opgave 11.2. Zij $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ een surjectieve afbeelding tussen topologische ruimten. We nemen niet bij voorbaat aan dat f continu is! Laat zien dat de volgende beweringen equivalent zijn:
(1) f is een identificatie-afbeelding;
(2) als $V \subseteq Y$ dan is V open in Y dan en slechts dan als $f^{-1}(V)$ open is in X;
(3) als $g\colon Y \to Z$ een afbeelding is van Y naar een topologische ruimte Z dan geldt: g is continu dan en slechts dan als $g \circ f$ continu is.

Opgave 11.3. Zij $X = [0,1] \times [0,1]$ het vierkant in $\mathbb{R}^2$ met daarop de Euclidische topologie. Zij $X/{\sim}$ de quotiëntruimte die we verkrijgen door de onderrand vast te plakken op de bovenrand en door alle punten van de linkerrand samen te trekken tot een punt.

deze zijkant samentrekken tot een punt →



onderkant en bovenkant op elkaar plakken

Formeler: twee punten $P = (a, b)$ en $Q = (c, d)$ zijn equivalent onder $\sim$ dan en slechts dan als er voldaan is aan een van de volgende voorwaarden:

(a) $P = Q$;
(b) $a = c = 0$;
(c) $a = c$, $b = 0$ en $d = 1$;
(d) $a = c$, $b = 1$ en $d = 0$.

Bewijs dat $X/{\sim}$ homeomorf is met de cirkelschijf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. [*Hint:* maak gebruik van een identificatie-afbeelding.]

Opgave 11.4. Gegeven zijn twee topologische ruimten X_1 en X_2 en surjectieve afbeeldingen $f_i \colon X_i \twoheadrightarrow Y_i$. We geven de ruimten Y_i de quotiënttopologie. Laat verder $X := X_1 \times X_2$ met de produkttopologie, laat $Y := Y_1 \times Y_2$ en beschouw de surjectieve afbeelding $f = (f_1, f_2) \colon X \twoheadrightarrow Y$. Als $\mathscr{T}_1$ de produkttopologie is op $Y = Y_1 \times Y_2$ en $\mathscr{T}_2$ is de quotiënttopologie op Y ten aanzien van de equivalentierelatie $\sim_f$, laat zien dat $\mathscr{T}_2$ fijner is dan $\mathscr{T}_1$. Opmerking: $\mathscr{T}_1$ en $\mathscr{T}_2$ zijn in het algemeen niet gelijk!

Opgave 11.5. We bekijken de situatie als in Voorbeeld 11.16: Laat $X = M_2(\mathbb{C})$ en laat $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ werken op X door conjugatie. Als $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$ dan schrijven we $\mathrm{tr}(A) := a_1 + a_4$ voor het spoor van A en $\det(A) = a_1a_4 - a_2a_3$ voor de determinant. Zij $q \colon X \to X/G$ de quotiëntafbeelding.

(i) Beschouw de afbeelding $f \colon X \to \mathbb{C}^2$ gegeven door $f(A) = \big(\mathrm{tr}(A), \det(A)\big)$. Toon aan dat er een continue afbeelding $\overline{f} \colon X/G \to \mathbb{C}^2$ is zo dat $f = \overline{f} \circ q$.
(ii) Laat $\Delta := \{(t,d) \in \mathbb{C}^2 \mid t^2 - 4d = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Als $(t,d) \in \mathbb{C}^2$, toon aan dat $\overline{f}^{-1}(t,d)$ uit een enkel punt bestaat als $(t,d) \notin \Delta$ en uit twee punten als $(t,d) \in \Delta$. (Gebruik de theorie van Jordan normaalvormen.)
(iii) Laat $V := \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ en $U := \overline{f}^{-1}(V) \subset X/G$. Toon aan dat $\overline{f}$ beperkt tot een homeomorfisme $U \to V$. Kun je nu een soort “plaatje” bedenken van hoe de ruimte X/G eruit ziet?

Opgave 11.6. Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte X. Zij Y de ruimte die we krijgen uit X door A samen te trekken tot een punt. Anders gezegd: we hebben een identificatie-afbeelding $f \colon X \twoheadrightarrow Y$ en de bijbehorende equivalentierelate $\sim = \sim_f$ wordt gegeven door

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y \quad \text{of} \quad x \text{ en } y \text{ zitten allebei in } A\,.$$

(i) Neem aan dat X een reguliere ruimte is en dat A gesloten is in X. Toon aan dat Y Hausdorffs is.
(ii) Neem aan dat X een normale ruimte is en dat A gesloten is in X. Toon aan dat Y normaal is.

Opgave 11.7. Beschouw de volgende vier ruimten.

(a) Laat $T_1 := S^1 \times S^1$ met de produkttopologie.
(b) Laat $C := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$, en zij $T_2 := \{P \in \mathbb{R}^3 \mid d(P,C) = 1\}$ waarbij “d” de Euclidische metriek op $\mathbb{R}^3$ is. Dus C is de cirkel met straal 2 in het xy-vlak en T_2 bestaat uit alle punten die afstand 1 hebben tot C.
(c) Zij T_3 het quotiënt van het vierkant $I \times I$ (met $I := [0,1]$) dat we krijgen door $(x,0)$ te identificeren met $(x,1)$ en $(0,y)$ te identificeren met $(1,y)$, voor alle x, $y \in I$. We geven T_3 de quotiënttopologie.

(b) Zij $\sim$ de equivalentierelatie op $\mathbb{R}^2$ gegeven door:

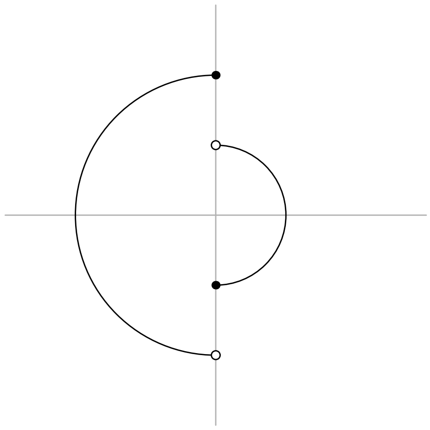
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_2 - x_1 \in \mathbb{Z} \text{ en } y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$$

en zij $T_4 := \mathbb{R}^2/\sim$, voorzien van de quotiënttopologie.

Laat zien dat deze ruimten onderling homeomorf zijn. (Teken plaatjes!)

Opgave 11.8. Laat $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, waarbij $O = (0,0)$. Zij $\psi \colon X \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de afbeelding $(x_0, x_1) \mapsto (x_0 : x_1)$ en zij $\sim = \sim_\psi$ de corresponderende equivalentierelatie op X. Neem

$$A := \left\{ \big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \big(2\cos(\varphi), 2\sin(\varphi)\big) \;\middle|\; \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$



Laat zien dat de natuurlijke afbeelding $A/\sim \; \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ een continue bijectie is maar niet een homeomorfisme.

HOOFDSTUK 12

De fundamentaalgroep

We schrijven in dit hoofdstuk steeds I voor het eenheidsinterval $[0,1]$ met de Euclidische topologie.

12.1. Definitie. Laten f_0, f_1: $X \to Y$ twee continue afbeeldingen tussen topologische ruimten zijn. Een *homotopie van f_0 naar f_1* is een continue afbeelding F: $X \times I \to Y$ zo dat $F(x,0) = f_0(x)$ en $F(x,1) = f_1(x)$ voor alle $x \in X$.

Twee continue afbeeldingen f_0 en f_1: $X \to Y$ heten *homotoop* als er een homotopie bestaat van f_0 naar f_1. We noteren dit als $f_0 \simeq f_1$.

Intuïtief is zo'n homotopie een "continue vervorming" van f_0 in f_1. Je kunt er ook aan denken als een continue "schaar" van functies. Om deze intuïtie te benadrukken schrijven we, gegeven een homotopie F, vaak f_t: $X \to Y$ voor de functie gegeven door $f_t(x) = F(x,t)$; merk op dat dit voor $t = 0$ en $t = 1$ inderdaad de functies f_0 en f_1 geeft.

12.2. Voorbeeld. Elke twee continue functies f_0, f_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zijn homotoop, want de afbeelding F: $\mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^n$ gegeven door $F(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$ is een homotopie van f_0 naar f_1.

12.3. Lemma. *De relatie "f_0 is homotoop met f_1" is een equivalentierelatie op de verzameling $C(X,Y)$ van alle continue afbeeldingen $X \to Y$.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $f \simeq f$ voor alle $f \in C(X,Y)$: neem F gegeven door $F(x,t) = f(x)$ voor alle $t \in I$. Als F een homotopie is van f_0 naar f_1 dan is de afbeelding $X \times I \to Y$ gegeven door $(x,t) \mapsto F(x, 1-t)$ een homotopie van f_1 naar f_0. (We noemen dit wel de omgekeerde homotopie.) Tenslotte, stel dat F een homotopie is van f_0 naar f_1 en dat G: $X \times I \to Y$ een homotopie is van f_1 naar f_2. Definieer dan de "samengestelde homotopie" $F \star G$: $X \times I \to Y$ door

$$(F \star G)(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{als } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ G(x,2t-1) & \text{als } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Dan is $F \star G$ een homotopie van f_0 naar f_2. □

In de praktijk willen we aan homotopieën vaak nog extra voorwaarden opleggen. Beschouw daartoe een ruimte X en een deelverzameling $A \subseteq X$. Laten f_0, f_1: $X \to Y$ twee continue afbeeldingen zijn met de eigenschap dat $(f_0)_{|A} = (f_1)_{|A}$. Dan kunnen we afspreken om alleen homotopieën F te beschouwen met de eigenschap dat $(f_t)_{|A}$ niet afhangt van $t \in I$, d.w.z., zo dat $F(a,t) = f_0(a)$ voor alle $a \in A$ en $t \in I$. Dit levert het volgende begrip op.

12.4. Definitie. Laten gegeven zijn twee topologische ruimten X en Y en een deelverzameling $A \subseteq X$. Laten f_0, f_1: $X \to Y$ twee continue afbeeldingen zijn met $(f_0)_{|A} = (f_1)_{|A}$. Een *homotopie van f_0 naar f_1 relatief A* is een continue afbeelding F: $X \times I \to Y$ zo dat $F(x,0) = f_0(x)$ en $F(x,1) = f_1(x)$ voor alle $x \in X$ en zo dat $F(a,t) = f_0(a)$ voor alle $a \in A$ en $t \in I$.

Twee continue afbeeldingen f_0 en f_1: $X \to Y$ heten *homotoop relatief A* als er een homotopie bestaat van f_0 naar f_1 relatief A. We noteren dit als $f_0 \simeq_A f_1$.

Intuïtief is zo'n homotopie een "continue vervorming" van f_0 in f_1 met de extra eis dat we de functies niet mogen veranderen op de deelverzameling A.

12.5. Definitie. Beschouw topologische ruimten X en Y en deelverzamelingen $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$. Met een continue afbeelding $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ bedoelen we een continue afbeelding $f\colon X \to Y$ zo dat $f(A) \subseteq B$. We noemen dit wel een continue afbeelding van het paar (X,A) naar het paar (Y,B) en we schrijven $C\big((X,A),(Y,B)\big)$ voor de verzameling van alle continue afbeeldingen $(X,A) \to (Y,B)$.

In het speciale geval dat $A = \{x_0\}$ en $B = \{y_0\}$ allebei uit 1 punt bestaan spreken we van continue afbeeldingen tussen ruimten met basispunt. Dus: een continue afbeelding $(X,x_0) \to (Y,y_0)$ is een continue afbeelding $f\colon X \to Y$ met $f(x_0) = y_0$.

12.6. Zij nu X een topologische ruimte en $x_0 \in X$ een basispunt. Een lus in X met basispunt x_0 (zie Definitie 5.20) is niets anders dan een continue afbeelding $\gamma\colon (I,\{0,1\}) \to (X,x_0)$. Als er geen verwarring dreigt over het basispunt, dan zullen we voortaan met een lus in X steeds een lus bedoelen met basispunt x_0.

Twee lussen γ_0 en γ_1 heten homotoop als er een homotopie $F\colon I \times I \to X$ van γ_0 naar γ_1 bestaat relatief $\{0,1\} \subset I$. Concreet betekent dit dat F een continue afbeelding is met $F(y,0) = \gamma_0(y)$ en $F(y,1) = \gamma_1(y)$ voor alle $y \in I$, en zo dat $F(0,t) = F(1,t) = x_0$ voor alle $t \in I$. Met andere woorden: voor elke $t \in I$ moet de functie $\gamma_t\colon I \to X$ gegeven door $\gamma_t(y) = F(y,t)$ weer een lus zijn met basispunt x_0.

12.7. Opmerking over notatie. Als we een homotopie van lussen bekijken, dan speelt het eenheidsinterval I een dubbele rol. Enerzijds is elke lus een continue afbeelding van I naar X, anderzijds is een homotopie een familie van lussen γ_t, geparametriseerd door $t \in I$. Om het risico van verwarring te minimaliseren zal ik meestal de letter y gebruiken als variabele voor een lus en zal ik de letter t gebruiken als parameter voor homotopieën. Dus een lus geven we als een functie $\gamma(y)$ en een homotopie van lussen noteren we steeds als een "familie" van lussen γ_t.

12.8. Definitie. Als X een topologische ruimte is en $x_0 \in X$ is een basispunt, dan definiëren we

$$\pi_1(X,x_0) := \big\{\text{homotopieklassen van lussen in } X \text{ met basispunt } x_0\big\}.$$

We noemen dit de *fundamentaalgroep* van X met basispunt x_0.

De naam fundamentaal*groep* moeten we nog rechtvaardigen; vooralsnog is $\pi_1(X,x_0)$ enkel een verzameling. Als γ een lus is in X met basispunt x_0 dan schrijven we vaak $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ voor de homotopieklasse van γ.

12.9. Zoals we gezien hebben in 5.21 kunnen we lussen samenstellen. Namelijk: stel γ_1 en γ_2 zijn lussen in X met basispunt x_0. Dan is de samenstelling $\gamma_1 \star \gamma_2$ ("eerst γ_1 dan γ_2") gedefinieerd door

$$(\gamma_1 \star \gamma_2)(y) = \begin{cases} \gamma_1(2y) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ \gamma_2(2y-1) & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

De cruciale opmerking is nu dat deze samenstelling van lussen welgedefinieerd is op homotopieklassen, zoals precies gemaakt in het volgende lemma.

12.10. Lemma. *Zij X een topologische ruimte met basispunt x_0 en beschouw lussen in X met basispunt x_0. Stel γ_1 is homotoop met γ_1' en γ_2 is homotoop met γ_2'. Dan is $\gamma_1 \star \gamma_2$ homotoop met $\gamma_1' \star \gamma_2'$.*

Bewijs. Zij $F_i\colon I \times I \to X$, voor $i \in \{1,2\}$, een homotopie van γ_i naar γ_i'. Definieer de continue afbeelding $G\colon I \times I \to X$ door

$$G(y,t) = \begin{cases} F_1(2y,t) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ F_2(2y-1,t) & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Nu ga je zonder problemen na dat G een homotopie is van $\gamma_1 \star \gamma_2$ naar $\gamma_1' \star \gamma_2'$. □

12.11. Gevolg. *De samenstelling van lussen induceert een bewerking*

$$\star\colon \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$$

door $[\gamma_1] \star [\gamma_2] := [\gamma_1 \star \gamma_2]$.

Het voorgaande lemma zegt immers precies dat de homotopieklasse $[\gamma_1 \star \gamma_2]$ niet afhangt van de gekozen representanten γ_1 en γ_2, alleen van hun klassen.

12.12. Stelling. *De verzameling $\pi_1(X,x_0)$ met de bewerking $\star$ is een groep.*

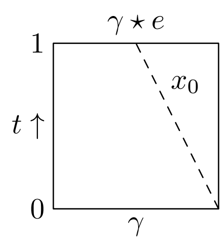
Bewijs. Het eerste dat we nagaan, is dat er een eenheidselement is. Definieer daartoe $e\colon I \to X$ als de triviale lus bij het basispunt x_0, d.w.z. de lus gegeven door $e(y) = x_0$ voor alle $y \in I$. ("Stilstaan in x_0".) We beweren dat $[e]$ een eenheidselement is voor de bewerking $\star$. Dus als γ een lus is, dan willen we inzien dat $e \star \gamma$ en $\gamma \star e$ allebei homotoop zijn met γ. Per definitie geldt

$$(\gamma \star e)(y) = \begin{cases} \gamma(2y) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ x_0 & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{en} \qquad (e \star \gamma)(y) = \begin{cases} x_0 & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ \gamma(2y-1) & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Nu is $F\colon I \times I \to X$ gegeven door

$$F(y,t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{2y}{2-t}\right) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{t}{2}, \\ x_0 & \text{als } 1 - \frac{t}{2} \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

een homotopie van γ naar $\gamma \star e$. Bijbehorend plaatje:

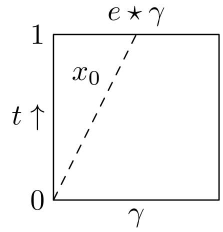


Het driehoekig gebied is het gebied met $1 - \frac{t}{2} \leqslant y \leqslant 1$; hierop is F constant met waarde x_0.

Op soortgelijke manier vinden we dat de afbeelding $F'\colon I \times I \to X$ gedefinieerd door

$$F'(y,t) = \begin{cases} x_0 & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant \frac{t}{2} \\ \gamma\left(\frac{2y-t}{2-t}\right) & \text{als } \frac{t}{2} \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

een homotopie is van γ naar $e \star \gamma$. Het bijbehorende plaatje is nu als volgt:



Conclusie: de klasse $[e]$ is inderdaad een 2-zijdig eenheidselement voor de bewerking $\star$.

Als volgende controleren we de associativiteit van de bewerking $\star$. Als γ_1, γ_2 en γ_3 lussen zijn, dan is

$$((\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3)\big(y\big) = \begin{cases} \gamma_1(4y) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/4, \\ \gamma_2(4y-1) & \text{als } 1/4 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ \gamma_3(2y-1) & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

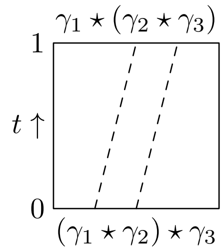
terwijl

$$(\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3))\big(y\big) = \begin{cases} \gamma_1(2y) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ \gamma_2(4y-2) & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 3/4, \\ \gamma_3(4y-3) & \text{als } 3/4 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Een homotopie tussen de beide lussen wordt gegeven door

$$G(y,t) = \begin{cases} \gamma_1\big(\frac{4y}{1+t}\big) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1+t}{4}, \\ \gamma_2(4y-1-t) & \text{als } \frac{1+t}{4} \leqslant y \leqslant \frac{2+t}{4}, \\ \gamma_3\big(\frac{4y}{2-t} - 1 - 2t\big) & \text{als } \frac{2+t}{4} \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Schematisch:



Conclusie: de bewerking $\star$ is associatief.

Tenslotte willen we aantonen dat elk element in $\pi_1(X, x_0)$ een inverse heeft. Als γ een lus is, bekijk dan de lus γ' gegeven door $\gamma'(y) := \gamma(1-y)$. Dus γ' is “de lus γ in omgekeerde richting doorlopen”. Dan is

$$\gamma \star \gamma'(y) = \begin{cases} \gamma(2y) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ \gamma(2-2y) & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

en de afbeelding $H\colon I \times I \to X$ gegeven door

$$H(y,t) = \begin{cases} \gamma\big((2-2t)y\big) & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ \gamma\big((2-2t)(1-y)\big) & \text{als } 1/2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

is een homotopie van $\gamma \star \gamma'$ naar e. Dit laat zien dat $[\gamma']$ een rechtsinverse is van $[\gamma]$. Verwisselen we hierin de rollen van γ en γ' (met de opmerking dat “ $(\gamma')' = \gamma$ ”) dan vinden we dat $[\gamma']$ ook een linksinverse is. Daarmee is het bewijs van de stelling compleet. $\square$

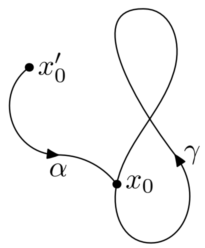
12.13. Opmerking. Zij $C \subseteq X$ de wegsamenhangscomponent die het basispunt x_0 bevat. Dan volgt onmiddellijk uit de definities dat $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C, x_0)$; immers: elke lus in X met basispunt x_0 is bevat in C. Dus de fundamentaalgroep geeft alleen maar informatie over de wegsamenhangscomponent van x_0 en "alles wat daarbuiten gebeurt blijft onzichtbaar". Om deze reden nemen we in de theorie van de fundamentaalgroep meestal aan dat we werken met een wegsamenhangende ruimte.

12.14. Propositie. ("De fundamentaalgroep is onafhankelijk van de keuze van het basispunt".) *Zij X een wegsamenhangende ruimte. Als x_0, $x_0' \in X$ dan zijn de groepen $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0')$ isomorf.*

Bewijs. Omdat X verondersteld is wegsamenhangend te zijn, bestaat er een pad α van x_0' naar x_0. Definieer dan een afbeelding

$$a\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0') \qquad \text{door} \qquad [\gamma] \mapsto \left[\alpha \star \gamma \star \alpha^{-1}\right],$$

waarbij α^{-1} het pad is van x_0 naar x_0' dat wordt gegeven door $\alpha^{-1}(y) := \alpha(1-y)$. Merk op dat $\alpha \star \gamma \star \alpha^{-1}$ inderdaad een lus is met basispunt x_0'.



Het is niet moeilijk na te gaan dat de afbeelding a welgedefinieerd is; d.w.z.: als $\gamma \sim \gamma'$ dan is $(\alpha \star \gamma \star \alpha^{-1}) \sim (\alpha \star \gamma' \star \alpha^{-1})$. (Het bewijs is analoog aan dat van Lemma 12.10.)

Vervolgens gaan we na dat a een homomorfisme is. Dit betekent dat we, voor lussen γ_1 en γ_2 met basispunt x_0, moeten inzien:

$$\alpha \star \gamma_1 \star \alpha^{-1} \star \alpha \star \gamma_2 \star \alpha^{-1} \qquad \text{is homotoop met} \qquad \alpha \star \gamma_1 \star \gamma_2 \star \alpha^{-1}\,. \tag{1}$$

Als $e = e(x_0)$ de triviale lus is met basispunt x_0, dan maak je een homotopie van $\alpha^{-1} \star \alpha$ naar e op soortgelijke manier als de homotopie H in het bewijs van Stelling 12.12. Dus $\left[\alpha^{-1} \star \alpha\right] = [e]$ in $\pi_1(X, x_0)$ en met wat hiervoor gezegd is volgt de relatie (1).

Tenslotte willen we inzien dat het homomorfisme a een isomorfisme is. Verwisselen we in het voorgaande de rollen van x_0 en x_0', en nemen we het pad α^{-1} van x_0 naar x_0', dan krijgen we een homomorfisme $a'\colon \pi_1(X, x_0') \to \pi_1(X, x_0)$, gegeven door $[\delta] \mapsto \left[\alpha^{-1} \star \delta \star \alpha\right]$. De bewering is dat a en a' elkaars inversen zijn. Bijvoorbeeld, $a' \circ a$ stuurt $[\gamma]$ naar de klasse van

$$\alpha^{-1} \star \alpha \star \gamma \star \alpha^{-1} \star \alpha$$

en met soortgelijke argumenten als hierboven zien we in dat deze lus homotoop is met de lus γ. Dus $a' \circ a$ is inderdaad de identiteit op $\pi_1(X, x_0)$. Verwisselen we de rollen van x_0 en x_0' dan zien we dat ook $a \circ a'$ de identiteit is op $\pi_1(X, x_0')$ en daarmee is het bewijs compleet. $\square$

12.15. Opmerking. Het isomorfisme $a\colon \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,x_0')$ in het bewijs hangt in het algemeen af van de keuze van het pad α. Zie Opgave 12.4.

12.16. De berekening van de fundamentaalgroep van een ruimte is niet altijd eenvoudig. Zelfs voor een relatief simpele ruimte als S^1 zullen we hard moeten werken om het juiste antwoord te krijgen; zie het volgende hoofdstuk. Gelukkig zijn er een aantal goede technieken die ons in staat stellen om van veel ruimten de fundamentaalgroep te bepalen, al gaan de meeste daarvan buiten het bestek van deze syllabus. Zo is er de belangrijke Stelling van Van Kampen, die van toepassing is op ruimten die zijn verkregen door een aantal simpelere ruimten aan elkaar te plakken. Voor verdere behandeling daarvan verwijzen we naar het vak Algebraïsche Topologie.

Een belangrijk principe voor al deze verdere ontwikkelingen, is dat de fundamentaalgroep "functorieel" is. Dat betekent het volgende.

Stel we hebben een ruimte X met basispunt x_0 en een continue afbeelding $f\colon X \to Y$ naar een andere ruimte. Laat $y_0 := f(x_0)$. Als γ een lus in X is met basispunt x_0, dan is $f\circ\gamma\colon I \to Y$ een lus met basispunt y_0. Als γ homotoop is met γ', dan is $f\circ\gamma$ homotoop met $f\circ\gamma'$, want als $F\colon I\times I \to X$ een homotopie is van γ naar γ' dan is de afbeelding $f\circ F\colon I\times I \to Y$ een homotopie van $f\circ\gamma$ naar $f\circ\gamma'$. Zodoende krijgen we een welgedefinieerde afbeelding

$$f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0) \qquad \text{door} \quad [\gamma] \mapsto [f\circ\gamma]\,.$$

Deze afbeelding noemen we de door f geïnduceerde afbeelding op fundamentaalgroepen. Het is een homomorfisme van groepen, want $f\circ(\gamma_1 \star \gamma_2)$ is hetzelfde als $(f\circ\gamma_1)\star(f\circ\gamma_2)$.

12.17. Lemma. *Zij X een topologische ruimte en $x_0 \in X$ een basispunt. Beschouw continue afbeeldingen $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$, en laat $y_0 := f(x_0)$ en $z_0 := g(y_0)$. Dan is $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Z,z_0)$.*

Bewijs. Triviaal. □

12.18. Gevolg. *Als X en Y wegsamenhangende topologische ruimten zijn die homeomorf zijn dan is $\pi_1(X,x_0) \cong \pi(Y,y_0)$ voor elke keuze van basispunten x_0 en y_0.*

Bewijs. Kies een basispunt $x_0 \in X$ en een homeomorfisme $f\colon X \to Y$. Laat $y_0 := f(x_0)$. Het vorige lemma, toegepast op de samenstelling $f^{-1}\circ f$, zegt ons dat $(f^{-1})_*\circ f_* = \mathrm{id}$. Toegepast op de samenstelling $f\circ f^{-1}$ geeft het lemma de relatie $f_*\circ(f^{-1})_* = \mathrm{id}$. Dus $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ is inderdaad een isomorfisme. Bij een andere keuze van een basispunt in Y, pas Propositie 12.14 toe. □

We zullen dit resultaat dadelijk aanmerkelijk verbeteren. Er is namelijk een veel fijnere relatie op topologische ruimten, de zogenaamde homotopie-equivalentie, zie Definitie 12.20, die in de praktijk veel nuttiger is en waarvoor een analogon van het vorige Gevolg opgaat; zie Gevolg 12.22. Een sleutelstap is de opmerking dat "homotope afbeeldingen dezelfde afbeeldingen op fundamentaalgroepen induceren". Nu kan dit letterlijk genomen niet helemaal correct zijn. Stel maar dat f, $g\colon X \to Y$ homotope afbeeldingen zijn en kies een basispunt $x_0 \in X$. Dan induceert f een homomorfisme $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1\bigl(Y,f(x_0)\bigr)$ terwijl g een homomorfisme $g_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1\bigl(Y,g(x_0)\bigr)$ geeft. Wat nu als $f(x_0) \neq g(x_0)$? Dan kunnen f_* en g_* niet letterlijk hetzelfde zijn. Anderzijds hebben we in (het bewijs van) Propositie 12.14 gezien hoe we moeten omgaan met een verandering van basispunt, en als we dit hier toepassen dan is de conclusie dat, althans op een isomorfisme na, f_* en g_* wel degelijk "gelijk" zijn.

12.19. Stelling. *Zij X een topologische ruimte, $x_0 \in X$ een basispunt. Laten $f,\, g\colon X \to Y$ continue afbeeldingen zijn die homotoop zijn. Laat $y_0 := f(x_0)$ en $y_1 := g(x_0)$. Kies een homotopie $F\colon X \times I \to Y$ van f naar g, en beschouw het pad α in Y van y_0 naar y_1 gegeven door $\alpha(t) := F(x_0, t)$. Als $a\colon \pi_1(Y, y_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, y_0)$ het isomorfisme is dat wordt gegeven door $[\gamma] \mapsto [\alpha \star \gamma \star \alpha^{-1}]$ (zie het bewijs van* Prop. 12.14*), dan zijn de homomorfismen*

$$a \circ g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \qquad \text{en} \qquad f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

gelijk.

Als speciaal geval van de stelling, stel dat f en g homotoop zijn relatief $\{x_0\}$. Dan is $y_0 = y_1$ en α is het constante pad met waarde y_0. In dat geval is de conclusie dat $f_* = g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Bewijs. Zij γ een lus in X met basispunt x_0. Dan is $F \circ (\gamma, \mathrm{id})\colon I \times I \to Y$ een homotopie van $f \circ \gamma$ naar $g \circ \gamma$. Met dezelfde argumenten als in het bewijs van Propositie 12.14 volgt hieruit dat de lussen $f \circ \gamma$ en $\alpha \star (g \circ \gamma) \star \alpha^{-1}$ homotoop zijn, en bovendien is onze keuze van het pad α zo, dat de beide lussen homotoop zijn relatief $\{0, 1\}$. $\square$

12.20. Definitie. Een continue afbeelding $f\colon X \to Y$ heet een *homotopie-equivalentie* als er een continue $g\colon Y \to X$ bestaat zo dat $g \circ f$ homotoop is met id_X en $f \circ g$ homotoop is met id_Y. We zeggen dat twee ruimten X en Y homotopie-equivalent zijn, of dat X en Y hetzelfde homotopie-type hebben, als er een homotopie-equivalentie van X naar Y bestaat.

Zoals de naamgeving al suggereert, is de relatie "homotopie-equivalentie" een equivalentierelatie. Dit is niet moeilijk na te gaan.

Twee ruimten die homeomorf zijn, zijn natuurlijk ook homotopie-equivalent. Maar de relatie "homotopie-equivalentie" gaat veel verder dan het begrip homeomorfisme en staat veel dichter bij de intuïtie dat topologische ruimten "objecten van rubber" zijn.

12.21. Voorbeeld. Zij d de Euclidische metriek op $\mathbb{R}^2$. Zij d' de metriek op $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$d'\big((a,b),(c,d)\big) := \max\Big\{|a-c|, |b-d|\Big\}\,.$$

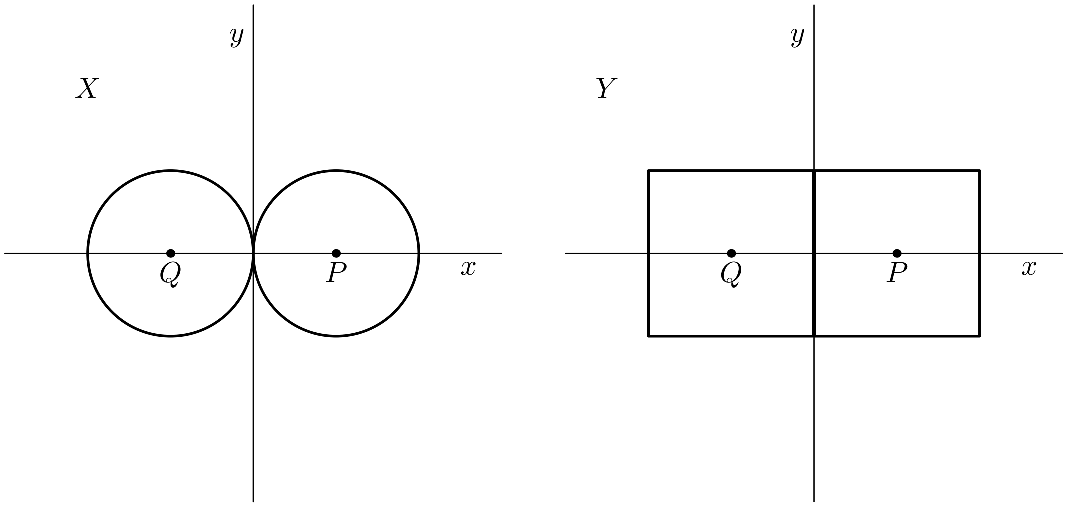
(Ga zelf na dat dit inderdaad een metriek is.) Laat $P := (1, 0)$ en $Q := (-1, 0)$ en bekijk

$$X := \big\{R \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; d(P,R) = 1\big\} \cup \big\{R \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; d(Q,R) = 1\big\}$$

en

$$Y := \big\{R \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; d'(P,R) = 1\big\} \cup \big\{R \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; d'(Q,R) = 1\big\}\,.$$

Plaatje:



Dan is X niet homeomorf met Y maar wel homotopie-equivalent met Y. Zie verder Opgave 12.5.

12.22. Gevolg (van Stelling 12.19). *Laten X en Y wegsamenhangende ruimten zijn. Als X en Y homotopie-equivalent zijn dan is $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ voor elke keuze van basispunten x_0 en y_0.*

Bewijs. Het enige probleem in het bewijs is dat we te maken krijgen met afbeeldingen die de gekozen basispunten niet respecteren. Afgezien van dit puur boekhoudkundige probleem, is het bewijs een eenvoudige toepassing van Stelling 12.19.

De aanname dat X en Y homotopie-equivalent zijn betekent dat er continue $f: X \to Y$ en $g: Y \to X$ bestaan zo dat $g \circ f$ en $f \circ g$ allebei homotoop zijn met de identiteit. Kies een basispunt x_0, laat $y_0 := f(x_0)$, laat $x_0' := g(y_0)$, en laat $y_0' := f(x_0')$. Bekijk de homomorfismen

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, x_0') \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0') \,. \tag{2}$$

Uit Stelling 12.19 volgt dat de samenstelling van de eerste twee afbeeldingen een isomorfisme is. Immers, als $F: X \times I \to X$ een homotopie is van id_X naar $g \circ f$, zij dan α het pad van x_0 naar x_0' gegeven door $\alpha(t) = F(x_0, t)$. Dan zegt Stelling 12.19 dat $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0')$ gelijk is aan het isomorfisme $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0')$ gegeven door $[\gamma] \mapsto [\alpha^{-1} \star \gamma \star \alpha]$. In het bijzonder is de linker-afbeelding $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ injectief.

Op soortgelijke manier zien we dat de samenstelling van de laatste twee afbeeldingen in (2) een isomorfisme is. In het bijzonder is $g_*: \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0')$ injectief. Maar $g_* \circ f_*$ is een isomorfisme, dus f_* is surjectief. Dit toont aan dat $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ een isomorfisme is. Als $y_0'' \in Y$ een willekeurig gekozen ander basispunt is, stel dan het gevonden isomorfisme f_* samen met een isomorfisme als in Propositie 12.14. □

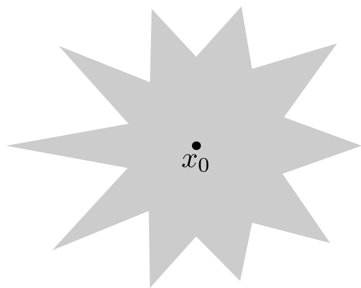
12.23. Definitie. Een wegsamenhangende topologische ruimte X heet *enkelvoudig samenhangend* als $\pi_1(X, x) = 0$ voor een (equivalent: alle) $x \in X$.

12.24. Definitie. Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als X homotopie-equivalent is met een punt.

Samentrekbaarheid betekent dus dat er een punt $x_0 \in X$ is en een homotopie $F\colon X \times I \to X$ van de constante afbeelding $X \to X$ met waarde x_0 naar de identiteit id_X. Merk op dat het bestaan van zo'n homotopie impliceert dat X wegsamenhangend is.

12.25. Gevolg. *Als X samentrekbaar is, dan is X enkelvoudig samenhangend.*

12.26. Voorbeeld. Een deelverzameling $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heet *stervormig* als er een punt $x_0 \in X$ is met de eigenschap dat voor elke $x \in X$ het lijnstuk tussen x_0 en x geheel bevat is in X. Elke convexe verzameling is stervormig, maar het omgekeerde is niet waar. De volgende figuur geeft een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ die wel stervormig is maar niet convex:



(Merk op dat de naam "stervormig" niet al te letterlijk genomen moet worden; in het dagelijks leven zul je een cirkelschijf of een vierkant niet snel als stervormig betitelen.)

Een stervormige deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is samentrekbaar. Immers, als $x_0 \in X$ een punt is als hierboven, definieer $F\colon X \times I \to X$ door $F(x,t) = x_0 + t \cdot (x - x_0)$, waarbij we opmerken dat $F(x,t)$ inderdaad in X ligt, vanwege de stervormigheid van X. Dan is F een homotopie van de constante afbeelding $X \to X$ met waarde x_0 naar de identiteit op X, en het bestaan van zo'n homotopie zegt precies dat X samentrekbaar is.

Voor elke punt-convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ geldt dus dat de fundamentaalgroep triviaal is. In het bijzonder is dit van toepassing op convexe verzamelingen zoals $\mathbb{R}^n$ zelf, open bollen, produkten van intervallen, etc.

12.27. Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een deelruimte $A \subseteq X$ heet een *retract* van X als er een continue afbeelding $r\colon X \to A$ bestaat met $r(a) = a$ voor alle $a \in A$. De afbeelding r wordt dan een *retractie van X op A* genoemd.

Als $r\colon X \to A$ een retractie is en $i\colon A \hookrightarrow X$ is de inclusie-afbeelding, dan geldt $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Derhalve is, voor een basispunt $a_0 \in A$, ook de samenstelling

$$\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, a_0)$$

de identiteit, hetgeen impliceert dat i_* injectief is.

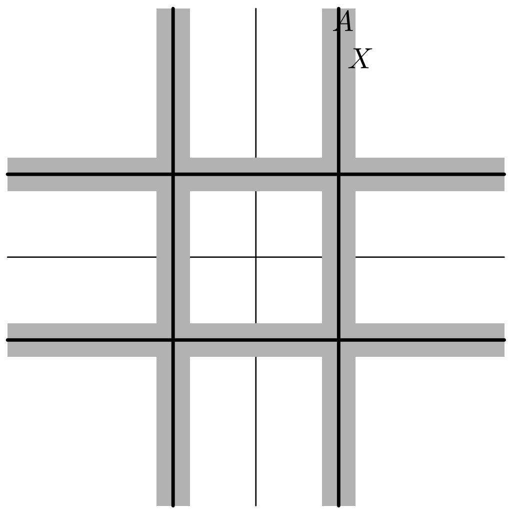
Merk op dat A zeker niet homotopie-equivalent hoeft te zijn met X, en dat i_* geen isomorfisme hoeft te zijn. Als A een retract is van X dan betekent dit, dat je alles wat "buiten A" ligt "plat kunt slaan". Bijvoorbeeld, als $x \in X$ een punt is dan is $\{x\} \subset X$ een retract.

Een veel sterker begrip krijgen we als we eisen dat het "platslaan" op een geleidelijke, continue, manier kan worden gedaan, zoals precies gemaakt in de volgende definitie.

12.28. Definitie. Zij X een topologische ruimte en $A \subseteq X$ een deelruimte. Een *deformatieretractie van X op A* is een homotopie $F\colon X \times I \to X$ relatief A van id_X naar een retractie $r\colon X \to A$. Als zo'n deformatieretractie bestaat dan noemen we A een *deformatieretract* van X.

Als A een deformatieretract is van X, dan is de inclusie-afbeelding $i\colon A \hookrightarrow X$ een homotopie-equivalentie. We hebben immers een retractie $r\colon X \to A$ zo dat $r \circ i = \mathrm{id}_A$ en zo dat $i \circ r$ homotoop is met id_X. In het bijzonder is $i_*\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ een isomorfisme. Dit maakt meteen ook duidelijk dat het begrip deformatieretract inderdaad veel sterker is dan het begrip retract: als X een ruimte is met $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$ voor een basispunt x_0, dan is $\{x_0\}$ wel een retract van X maar niet een deformatieretract.

12.29. Voorbeeld. Op $\mathbb{R}^2$ beschouwen we de Euclidische afstand d. Zij A de vereniging van de vier lijnen gegeven door $x = \pm 1$ en $y = \pm 1$. Kies een voldoende klein getal $\varepsilon > 0$ en defineer $X := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, A) < \varepsilon\}$.



Dus A is een figuur gemaakt uit vier wanden van dikte $= 0$, terwijl X opgebouwd is uit wanden die een echte dikte hebben. Dan is A een deformatieretractie van X. Het idee is dat je de wanden van X geleidelijk steeds dunner kunt maken.

Overigens is ook het vierkant $B \subset A$, gegeven door $B = \{(t, u) \in A \mid t^2 + u^2 \leqslant 2\}$, een deformatieretractie van X: ook de halflijnen die uit de hoekpunten $(\pm 1, \pm 1)$ "uitsteken" kunnen we geleidelijk "intrekken".

12.30. Voorbeeld. We hebben gezien (zie de opmerking na Definitie 12.24) dat een ruimte X samentrekbaar is dan en slechts dan als er een homotopie $F\colon X \times I \to X$ bestaat van de identiteit id_X naar een constante afbeelding $X \to X$ die alles naar een punt $x_0 \in X$ stuurt. We zeggen in dat geval dat de identiteit id_X nulhomotoop is. Merk op dat niet geëist wordt dat de homotopie F een homotopie relatief $\{x_0\}$ is.

Als er een punt $x_0 \in X$ bestaat zo dat $\{x_0\}$ een deformatieretract is van X dan is X samentrekbaar. De omkering geldt in het algemeen niet. (Zie bijvoorbeeld het boek van Hatcher, Opgave 6 van Hoofdstuk 0, voor een concreet voorbeeld.)

Opgaven bij hoofdstuk 12.

Opgave 12.1. Gegeven zijn topologische ruimten X en Y, een deelverzameling $A \subseteq X$ en een punt $y_0 \in Y$. Zij $\sim$ de equivalentierelatie op X gegeven door

$$x_1 \sim x_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2 \quad \text{of} \quad x_1,\, x_2 \in A\,.$$

Laat $\overline{X} := X/\sim$ ("X met A samengetrokken tot een punt") en geef $\overline{X}$ de quotiënttopologie. Zij tenslotte q: $X \to \overline{X}$ de quotiëntafbeelding, en laat $\alpha := q(A) \in \overline{X}$.

(i) Laat zien dat de afbeelding

$$C\big((\overline{X}, \alpha), (Y, y_0)\big) \to C\big((X, A), (Y, y_0)\big)$$

gegeven door $g \mapsto g \circ q$ een bijectie is.

(ii) Als $g_1,\ g_2 \in C\big((\overline{X}, \alpha), (Y, y_0)\big)$, laat zien dat g_1 homotoop is met g_2 relatief $\{\alpha\}$ dan en slechts dan als $g_1 \circ q$ homotoop is met $g_2 \circ q$ relatief A.

Zij nu S^1 de eenheidscirkel en kies een basispunt $s_0 \in S^1$.

(iii) Laat zien dat de fundamentaalgroep $\pi_1(Y, y_0)$ ook beschreven kan worden als de verzameling van homotopieklassen in $C\big((S^1, s_0), (Y, y_0)\big)$ relatief $\{s_0\}$. Hoe wordt de groepswet in deze beschrijving gegeven? (Teken een plaatje!)

Opgave 12.2. Beschouw een topologische ruimte X en twee punten $P,\ Q \in X$. Gegeven zijn twee paden α en β in X, allebei met beginpunt P en eindpunt Q. Schrijf β' voor het pad van Q naar P gegeven door $\beta'(y) = \beta(1-y)$, zodat $\gamma := \alpha \star \beta'$ een lus in X is met basispunt P. Zij tenslotte e_P de triviale lus met basispunt P, d.w.z. $e_P(y) = P$ voor alle $y \in I$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

(i) α is homotoop met β relatief $\{0, 1\}$;

(ii) γ is homotoop met e_P relatief $\{0, 1\}$, d.w.z.: γ en e_P zijn homotope lussen.

Opgave 12.3. Gegeven zijn twee wegsamenhangende ruimten X_1 en X_2. Kies basispunten $x_1 \in X_1$ en $x_2 \in X_2$. Als γ: $I \to X_1 \times X_2$ een lus is met basispunt (x_1, x_2), schrijf $\gamma(y) = \big(\gamma_1(y), \gamma_2(y)\big)$. Anders gezegd, γ_i: $I \to X_i$ (voor $i \in \{1, 2\}$) is de samenstelling $\mathrm{pr}_i \circ \gamma$, waarbij pr_i: $X_1 \times X_2 \to X_i$ de projectie op de i-de factor is.

Gegeven zijn nu twee lussen γ en γ' in $X_1 \times X_2$ met basispunt (x_1, x_2). Toon aan:

$$\gamma \text{ en } \gamma' \text{ zijn homotope lussen} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma_1 \text{ en } \gamma_1' \text{ zijn homotope lussen} \\ \gamma_2 \text{ en } \gamma_2' \text{ zijn homotope lussen} \end{cases}$$

Bewijs daarmee dat

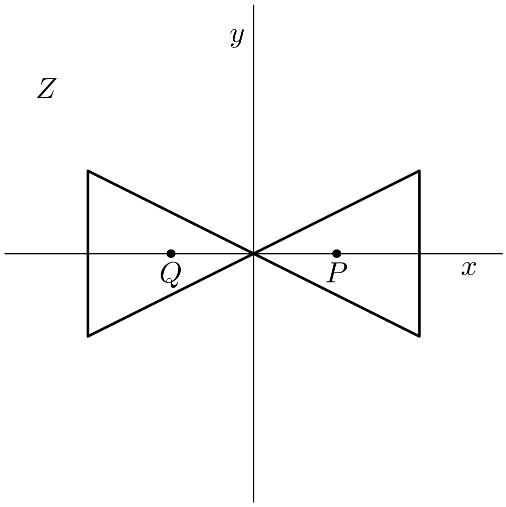
$$\pi_1\big(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)\big) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)\,.$$

Opgave 12.4. Zij X een wegsamenhangende ruimte. Kies twee basispunten x_0 en x_0' en laten α en β paden zijn van x_0' naar x_0. Schrijf a: $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0')$ voor het isomorfisme gegeven door $[\gamma] \mapsto [\alpha \star \gamma \star \alpha^{-1}]$ en b: $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0')$ voor het isomorfisme gegeven door $[\gamma] \mapsto [\beta \star \gamma \star \beta^{-1}]$. Zij $\varphi \in \pi_1(X, x_0)$ de klasse van de lus $\alpha^{-1} \star \beta$ en zij $\psi \in \pi_1(X, x_0')$ de klasse van de lus $\beta \star \alpha^{-1}$. Laat zien dat

$$b = \mathrm{Inn}(\psi) \circ a = a \circ \mathrm{Inn}(\varphi)$$

waarbij $\mathrm{Inn}(\psi)$ het inwendig automorfisme van $\pi_1(X, x_0')$ is dat wordt gegeven door het element ψ ("conjugatie met ψ") en $\mathrm{Inn}(\varphi)$ het inwendig automorfisme van $\pi_1(X, x_0)$ gegeven door het element φ.

Opgave 12.5. Bewijs de in Voorbeeld 12.21 gedane bewerkingen. [*Hint:* Om in te zien dat X niet homeomorf is met Y, merk op dat $X \setminus \{(0,0)\}$ onsamenhangend is. Om in te zien dat de beide ruimten wel homotopie-equivalent zijn kun je eventueel eerst laten zien dat Y homotopie-equivalent is met de volgende figuur Z.]



Opgave 12.6.

(i) Als X Hausdorffs is en $A \subseteq X$ is een retract van X, laat zien dat A gesloten is in X.

(ii) Beschouw de eenheidscirkel $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Laat zien dat S^1 een retract is van $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(iii) Als P, $Q \in \mathbb{R}^2$ met $P \neq Q$, laat zien dat $\{P,Q\}$ niet een retract is van $\mathbb{R}^2$.

Opgave 12.7. Als X een topologische ruimte is dan definiëren we $\pi_0(X)$ als de verzameling wegsamenhangscomponenten van X.

Herinner dat de 0-sfeer S^0 de ruimte $\{-1,1\}$ is met de discrete topologie. We kiezen $s_0 = 1 \in S^0$ als basispunt en we kiezen een basispunt $x_0 \in X$. Een continue afbeelding $\gamma\colon (S^0, s_0) \to (X, x_0)$ wordt volledig bepaald door het punt $\gamma(-1)$. Gegeven $x \in X$ zullen we $\gamma_x\colon S^0 \to X$ schrijven voor de afbeelding gegeven door $\gamma_x(-1) = x$ en $\gamma_x(1) = x_0$.

(i) Als x, $y \in X$, laat zien dat γ_x en γ_y homotoop zijn relatief $\{s_0\}$ dan en slechts dan als x en y in dezelfde wegsamenhangscomponent van X liggen.

Het resultaat uit onderdeel (i) laat zien dat $\pi_0(X)$ ook gedefinieerd kan worden als de verzameling van homotopieklassen van afbeeldingen $(S^0, s_0) \to (X, x_0)$. Dit (enigszins kunstmatige) standpunt suggereert een verwantschap met de fundamentaalgroep. (Vgl. Opgave 12.1 onderdeel (iii).) Merk echter op dat $\pi_0(X)$ niet afhangt van de keuze van een basispunt. In het algemeen heeft $\pi_0(X)$ geen natuurlijke groepsstructuur.

Als $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding is, zij $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ de geïnduceerde afbeelding op wegsamenhangscomponenten.

(ii) Als f_1, $f_2\colon X \to Y$ homotoop zijn, toon aan dat $f_{1,*} = f_{2,*}$. Concludeer dat $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ een bijectie is als f een homotopie-equivalentie is.

(iii) Zij A een deelverzameling van een ruimte X. Schrijf $i\colon A \hookrightarrow X$ voor de inclusie-afbeelding. Als A een retract is van X, laat zien dat $i_*\colon \pi_0(A) \to \pi_0(X)$ injectief is.

(iv) Toon aan dat i_* een bijectie is wanneer A een deformatieretract is van X.

Opgave 12.8.

(i) Gegeven zijn continue afbeeldingen f_0, $f_1\colon X \to Y$ en g_0, $g_1\colon Y \to Z$ zo dat $f_0 \simeq f_1$ en $g_0 \simeq g_1$. Toon aan dat $(g_0 \circ f_0) \simeq (g_1 \circ f_1)$.

(ii) Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding. Gegeven is dat er een continue $g\colon Y \to X$ bestaat zo dat $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ en dat er een continue $h\colon Y \to X$ bestaat zo dat $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$. Toon aan dat $g \simeq h$ en dat f een homotopie-equivalentie is.

(iii) Zij weer $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding. Gegeven is nu dat er continue afbeeldingen g, $h\colon Y \to X$ bestaan zo dat $g \circ f$ en $f \circ h$ homotopie-equivalenties zijn. Toon aan dat f een homotopie-equivalentie is.

HOOFDSTUK 13

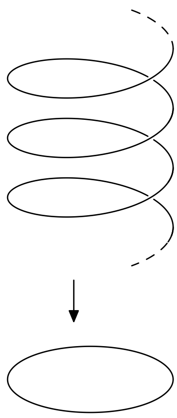
Voorbeelden en toepassingen van fundamentaalgroepen

In dit hoofdstuk geven we enkele niet-triviale voorbeelden van fundamentaalgroepen, alsmede een paar toepassingen. Wat we behandelen is slechts het topje van de ijsberg! De fundamentaalgroep is een krachtig gereedschap, en de stof die hier behandeld is geeft slechts een eerste inleiding. Met wat meer techniek, zoals behandeld in de Algebraïsche Topologie, komen ook meer voorbeelden en toepassingen binnen bereik, zoals bijvoorbeeld de bestudering van knopen.

13.1. We beginnen met de berekening van de fundamentaalgroep van de cirkel S^1. Als basispunt nemen we $s_0 = (1, 0)$. (Uit Propositie 12.14 weten we dat de keuze van het basispunt er eigenlijk niet toe doet.) Bekijk de afbeelding

$$p\colon \mathbb{R} \to S^1 \qquad \text{gegeven door} \qquad u \mapsto \big(\cos(2\pi u), \sin(2\pi u)\big)\,.$$

Meetkundig stellen we ons hierbij voor dat we de getallenrechte $\mathbb{R}$ “om de cirkel S^1 wikkelen”.

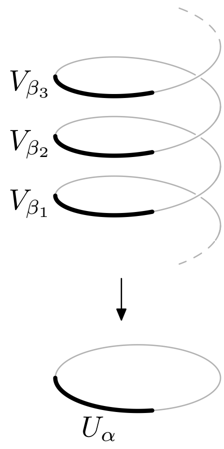


Als Z een topologische ruimte is en $h\colon Z \to S^1$ is een continue afbeelding, dan noemen we een continue afbeelding $\tilde{h}\colon Z \to \mathbb{R}$ met $h = p \circ \tilde{h}$ een *lift* of *lifting* van h. De manier waarop we zullen proberen vat te krijgen op de fundamentaalgroep van S^1, is dat we lussen in S^1 liften tot paden in $\mathbb{R}$. Het nut hiervan is dat we paden in $\mathbb{R}$ makkelijker kunnen bestuderen, dankzij het feit dat $\mathbb{R}$ samentrekbaar is.

De afbeelding p is een voorbeeld van wat een *topologische overdekking* genoemd wordt. (In dit geval is p zelfs de zogeheten “universele overdekking”; dit begrip speelt een belangrijke rol in de meer geavanceerde theorie van de fundamentaalgroep.) Dit betekent dat er een open overdekking $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ van S^1 bestaat zo dat voor elke $\alpha \in A$ het volledig origineel $p^{-1}(U_\alpha)$ geschreven kan worden als een (in het algemeen oneindige) disjuncte vereniging, zeg

$$p^{-1}(U_\alpha) = \coprod_{\beta \in B} V_\beta\,,$$

waarbij elke V_β onder p homeomorf is met U_α.



Informeel gezegd: het volledig origineel van elke U_α ziet eruit als een "stapel pannekoeken" waarbij elke pannekoek een copie is van U_α.

Voor de afbeelding p is zo'n overdekking $\mathscr{U}$ gemakkelijk concreet aan te geven. Bijvoorbeeld: als P en Q twee verschillende punten zijn op S^1 dan heeft de overdekking $S^1 = (S^1 \setminus \{P\}) \cup (S^1 \setminus \{Q\})$ de bedoelde eigenschap.

Het volgende lemma maakt essentieel gebruik van deze speciale eigenschap van de afbeelding p. Omdat de details tamelijk veel werk kosten, slaan we het bewijs over.

13.2. Lemma. *Zij Y een topologische ruimte en $F\colon Y \times I \to S^1$ een continue afbeelding. Schrijf $f_t(y) := F(y,t)$. Stel we hebben een lift $\tilde{f}_0\colon Y \to \mathbb{R}$ van de afbeelding f_0. Dan is er een unieke lift $\tilde{F}\colon Y \times I \to \mathbb{R}$ van F zo dat $\tilde{F}(y,0) = \tilde{f}_0(y)$ voor alle $y \in Y$.*

13.3. Gevolg.

(i) *Als γ een pad is in S^1 met basispunt s_0 en $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ is een punt met $p(x_0) = s_0$, dan is er een uniek pad $\tilde{\gamma}$ in $\mathbb{R}$ dat γ lift (d.w.z. $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$) en dat x_0 als beginpunt heeft.*

(ii) *Stel γ_0 en γ_1 zijn paden in S^1 met beginpunt s_0 en $F\colon I \times I \to S^1$ is een homotopie van γ_0 naar γ_1 relatief $\{0\}$, d.w.z. met $F(0,t) = s_0$ voor alle $t \in I$. Als $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ een punt is met $p(x_0) = s_0$, dan is er een unieke lifting $\tilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ van F met $\tilde{F}(0,t) = x_0$ voor alle $t \in I$.*

De homotopie F in (ii) kunnen we schrijven als een familie van paden γ_t, elk met beginpunt s_0. De afbeelding $\tilde{\gamma}_t\colon I \to \mathbb{R}$ gegeven door $\tilde{\gamma}_t(y) := \tilde{F}(y,t)$ is een lift van γ_t tot een pad in $\mathbb{R}$ met beginpunt x_0. In het bijzonder is $\tilde{\gamma}_0$ (resp. $\tilde{\gamma}_1$) het unieke pad met beginpunt x_0 dat γ_0 (resp. γ_1) lift, en $\tilde{F}$ is dus een homotopie van $\tilde{\gamma}_0$ naar $\tilde{\gamma}_1$.

Bewijs. (i) Pas het lemma toe met Y een punt. (ii) We passen het lemma toe met $Y = I$. We beginnen met de homotopie $F\colon I \times I \to S^1$ en schrijven $\gamma_t(y) := F(y,t)$. Volgens (i) bestaat er een unieke lift $\tilde{\gamma}_0\colon I \to \mathbb{R}$ van γ_0 met beginpunt x_0. Het lemma geeft dan een unieke lift $\tilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ van F zo dat $\tilde{F}(y,0) = \tilde{\gamma}_0(y)$. Dan is $t \mapsto \tilde{F}(0,t)$ een pad in $\mathbb{R}$ met beginpunt x_0 dat een lift is van het constante pad in S^1 met waarde s_0. Vanwege de uniciteit in (i) impliceert dit dat $\tilde{F}(0,t) = x_0$ voor alle $t \in I$. $\square$

13.4. Stelling. *De fundamentaalgroep van de cirkel* S^1 *is isomorf met* $\mathbb{Z}$. *De lus* $\varphi\colon I \to S^1$ *gegeven door* $\varphi(y) = \big(\cos(2\pi y), \sin(2\pi y)\big)$ *is een voortbrenger.*

Bewijs. Definieer $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, s_0)$ door $n \mapsto [\varphi]^n$. Het is evident dat Φ een homomorfisme van groepen is. Merk op dat $[\varphi]^n$ gelijk is aan de klasse in $\pi_1(S^1, s_0)$ gegeven door de lus $\varphi^n\colon y \mapsto \big(\cos(2\pi ny), \sin(2\pi ny)\big)$. (Dus φ^n is "n keer rondlopen over de cirkel".)

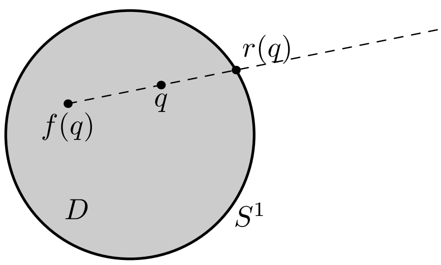
We willen aantonen dat Φ surjectief is. Zij γ een lus in S^1 met basispunt s_0. Volgens (i) van Gevolg 13.3 is er een uniek pad $\tilde{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}$ dat γ lift en dat $0 \in \mathbb{R}$ als beginpunt heeft. Dan is $\tilde{\gamma}(1)$ een element van $\mathbb{R}$ met $p\big(\tilde{\gamma}(1)\big) = s_0$, hetgeen niets anders betekent dan dat $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$. Bewering: als $\tilde{\gamma}(1) = n$ dan is $[\gamma] = [\varphi]^n$ in $\pi_1(S^1, s_0)$. Om dit in te zien, beschouw de afbeelding $\tilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ gegeven door $\tilde{F}(t, y) = (1-t) \cdot \tilde{\gamma}(y) + tny$. Dan is $\tilde{F}$ een homotopie van $\tilde{\gamma}$ naar het pad $y \mapsto ny$. Dit laatste pad is de unieke lifting van φ^n met beginpunt 0. Dus de afbeelding $F\colon I \times I \to S^1$ gegeven door $F = p \circ \tilde{F}$ is een homotopie van γ naar φ^n. Het bestaan van zo'n homotopie zegt precies dat $[\gamma] = [\varphi^n]$.

Tenslotte willen we aantonen dat Φ injectief is. Stel dat $[\varphi]^n = [e]$. Dat betekent dat er een homotopie van lussen $F\colon I \times I \to S^1$ bestaat van $\gamma_0 := [e]$ naar $\gamma_1 := [\varphi^n]$. Merk op: als we zeggen dat F een homotopie van lussen is, dan bedoelen we echt dat F een homotopie is relatief $\{0, 1\} \subset I$, dus dat $F(0, t) = F(1, t) = s_0$ voor alle $t \in I$. Zij $\tilde{\gamma}_i$ het unieke pad in $\mathbb{R}$ met beginpunt 0 dat γ_i lift. Concreet: $\tilde{\gamma}_0$ is het constante pad met waarde 0 en $\tilde{\gamma}_1\colon I \to \mathbb{R}$ is het pad gegeven door $y \mapsto ny$. Volgens (ii) van Gevolg 13.3 is er een unieke $\tilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ die F lift en met $\tilde{F}(0, t) = 0$ voor alle $t \in I$. Dan is de afbeelding $I \to \mathbb{R}$ gegeven door $t \mapsto \tilde{F}(1, t)$ continu, en we weten dat $\tilde{F}(1, 0) = 0$ en $\tilde{F}(1, 1) = n$. Anderzijds, omdat $\tilde{F}$ een lift is van F en $F(1, t) = s_0$ voor alle t, moet gelden dat $\tilde{F}(1, t) \in \mathbb{Z}$ voor alle t. Dus de afbeelding $t \mapsto \tilde{F}(1, t)$ is constant, en we conluderen dat $n = 0$. Dit betekent precies dat $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$, dus Φ is injectief. $\square$

We besluiten met een paar toepassingen.

13.5. Stelling. (Fixpuntstelling van Brouwer.) *Zij* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *de gesloten eenheidsschijf, d.w.z.* $D = \big\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a^2 + b^2 \leqslant 1\big\}$. *Dan heeft elke continue afbeelding* $f\colon D \to D$ *een vast punt. Met andere woorden: voor elke continue afbeelding* $f\colon D \to D$ *bestaat er een punt* $P \in D$ *met* $f(P) = P$.

Bewijs. Het bewijs is een prachtige toepassing van de behandelde stof. We gaan uit van het ongerijmde: stel $f\colon D \to D$ is een afbeelding die geen fixpunten heeft. Deze aanname stelt ons in staat om een afbeelding $r\colon D \to S^1$ te definiëren, als volgt. Als $q \in D$, bekijk dan de halflijn h in $\mathbb{R}^2$ die begint in het punt $f(q)$ en die gaat door de punten $f(q)$ en q. Merk op: omdat $q \neq f(q)$, bepalen deze twee punten inderdaad een unieke lijn. Definieer nu $r(q)$ als het snijpunt van de halflijn h met de rand $S^1 = \partial D$.



We kunnen de afbeelding r natuurlijk ook in coördinaten beschrijven maar dat is weinig verhelderend. Dan is $r\colon D \to S^1$ een continue afbeelding, en als $q \in S^1$ dan is duidelijk dat $r(q) = q$. Anders gezegd, als $i\colon S^1 = \partial D \hookrightarrow D$ de inclusie-afbeelding is, dan is $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$. Nu kijken we naar de geïnduceerde afbeeldingen op fundamentaalgroepen:

$$\pi_1(S^1, s_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D, s_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, s_0)\,,$$

waarbij we als basispunt bijvoorbeeld het punt $s_0 = (1, 0)$ nemen. We weten dat $\pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$ en omdat $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ is $r_* \circ i_*$ de identiteit op $\pi_1(S^1, s_0)$. Anderzijds weten we dat $\pi_1(D, s_0) = \{1\}$, want D is convex en dus samentrekbaar. (Zie Voorbeeld 12.26.) Dus de identiteitsafbeelding op de groep $\mathbb{Z}$ zou factoriseren via de triviale groep, en dit is natuurlijk absurd! Uit deze tegenspraak volgt de stelling. $\square$

13.6. Stelling. (Hoofdstelling van de Algebra.) *Het lichaam $\mathbb{C}$ is algebraïsch afgesloten.*

Bewijs. Zij $p \in \mathbb{C}[x]$ een polynoom, $p \neq 0$. We willen aantonen dat p een nulpunt heeft, tenzij p een constant polynoom is. We nemen aan dat p *geen* nulpunt heeft in $\mathbb{C}$; onze taak is dan om aan te tonen dat p constant is. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat p monisch is; schrijf

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\,,$$

met $a_i \in \mathbb{C}$. Kies een $r \in \mathbb{R}$ met $r > 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$. Definieer een functie q van twee variabelen door

$$q(x, u) := x^n + u \cdot \bigl(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\bigr)\,.$$

Als $t \in I$ dan heeft de functie $x \mapsto q(x, t)$ geen nulpunten op de cirkel in $\mathbb{C}$ met straal r, want als $t \in I$ en $|x| = r$ dan is

$$\begin{aligned} |x^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > \bigl(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|\bigr)|x^{n-1}| &\geqslant |a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0| \\ &\geqslant |t \cdot (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)|\,. \end{aligned}$$

Vat de cirkel S^1 op als de cirkel in $\mathbb{C}$ gegeven door $S^1 = \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1\bigr\}$. Dan is de afbeelding $f_t\colon I \to S^1$ gegeven door

$$f_t(y) := \frac{q(re^{2\pi iy}, t)/q(r, t)}{|q(re^{2\pi iy}, t)/q(r, t)|}$$

welgedefinieerd voor alle $t \in I$. De afbeelding $F\colon I \times I \to S^1$ gegeven door $F(y, t) = f_t(y)$ is een homotopie relatief $\{0, 1\}$ van de lus

$$f_0\colon I \to S^1 \qquad \text{gegeven door} \qquad f_0(y) = e^{2\pi iny}$$

naar de lus

$$f_1\colon I \to S^1 \qquad \text{gegeven door} \qquad f_1(y) = \frac{p(re^{2\pi iy})/p(r)}{|p(re^{2\pi iy})/p(r)|}\,.$$

De conclusie hiervan is dat onder het isomorfisme $\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ de klasse $[f_1]$ afbeeldt op n.

Anderzijds merken we op dat de afbeelding $G\colon I \times I \to S^1$ gegeven door

$$G(y,t) = \frac{p(tre^{2\pi iy})/p(tr)}{|p(tre^{2\pi iy})/p(tr)|}$$

overal welgedefineerd is (dankzij onze aanname dat p geen nulpunten heeft) en een homotopie geeft van de triviale lus met waarde 1 naar de lus f_1. Dus de klasse van f_1 in $\pi_1(S^1, 1)$ is triviaal.

Combineren we beide resultaten dan vinden we dat $n = 0$, en dit is precies wat we wilden bewijzen. $\square$

13.7. Stelling. (Borsuk-Ulam.) *Als $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ een continue afbeelding is dan bestaat er een punt $x \in S^2$ zo dat $f(x) = f(-x)$.*

Een populaire manier om deze stelling te verwoorden is de volgende. Stel we meten op elk punt op aarde de temperatuur en de luchtdruk. Dan zijn er altijd twee antipodale punten op aarde waar beide waarden gelijk zijn.

Voor een bewijs van de stelling verwijzen we naar de literatuur. Zie bijvoorbeeld het boek van Munkres, § 57.

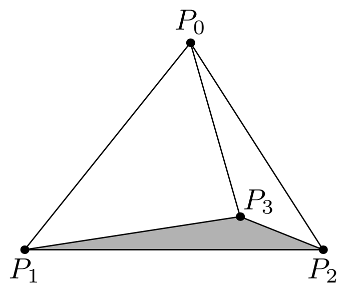
Opgaven bij hoofdstuk 13.

Opgave 13.1. Zij $I = [0,1]$ het eenheidsinterval. Geef een elementair bewijs van het feit dat elke continue $f\colon I \to I$ een vast punt heeft. (Je hebt hiervoor geen fundamentaalgroepen nodig.)

Opgave 13.2. (Tentamen 2011) We werken in $\mathbb{R}^3$ met de Euclidische topologie. Gegeven is een pyramide met hoekpunten P_0, P_1, P_2 en P_3; zie de illustratie. Zij L_{ij} het lijnstuk (inclusief eindpunten) dat P_i en P_j verbindt. Zij Δ het grondvlak van de pyramide, dat wil zeggen, de driehoek die wordt begrensd door de zijden L_{12}, L_{13} en L_{23}. (NB: we bedoelen met Δ de *opgevulde* driehoek, *inclusief* de zijden.) Definieer

$$X := \Delta \cup L_{01} \cup L_{02} \cup L_{03}\,,$$

de vereniging van het volledige grondvlak met de drie ribben vanuit de top.



We nemen P_0 als basispunt in X. Voor $i,\ j \in \{1,2,3\}$ definiëren we een lus γ_{ij} in X met basispunt P_0 door

$$\gamma_{ij}(y) = \begin{cases} (1-3y)P_0 + 3yP_i & \text{als } 0 \leqslant y \leqslant 1/3;\\ (2-3y)P_i + (3y-1)P_j & \text{als } 1/3 \leqslant y \leqslant 2/3;\\ (3-3y)P_j + (3y-2)P_0 & \text{als } 2/3 \leqslant y \leqslant 1.\end{cases}$$

In woorden: loop van P_0 naar P_i langs de ribbe L_{0i}, loop vervolgens van P_i naar P_j langs de ribbe L_{ij}, en loop tenslotte van P_j terug naar P_0 langs de ribbe L_{j0}.

(i) Laat zien dat de klasse $[\gamma_{12}]$ in $\pi_1(X, P_0)$ niet triviaal is.

(ii) Laat zien dat de klasse $[\gamma_{13}]$ in $\pi_1(X, P_0)$ geen veelvoud is van de klasse $[\gamma_{12}]$. (Anders gezegd: $[\gamma_{13}]$ is geen element van de ondergroep voortgebracht door $[\gamma_{12}]$.)

(iii) Druk $[\gamma_{23}]$ uit in $[\gamma_{12}]$ en $[\gamma_{13}]$. Motiveer je antwoord!

Opgave 13.3. Beschouw de 2-sfeer $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ en kies een willekeurig punt $s_0 \in S^2$ als basispunt.

(i) Zij $\gamma\colon I \to S^2$ een lus met basispunt s_0 en stel we hebben een punt $P \in S^2$ zo dat $P \notin \gamma(I)$. Bewijs dat de klasse van de lus γ in $\pi_1(S^2, s_0)$ triviaal is. [*Hint:* Gebruik Opgave 4.12.]

(ii) Waarom volgt uit (i) niet dat S^2 enkelvoudig samenhangend is?

Het is overigens wel waar dat S^2 enkelvoudig samenhangend is; zie Voorbeeld 15.6.

Opgave 13.4. Zij $f\colon D \to D$ een continue afbeelding van de gesloten eenheidsschijf naar zichzelf, zo dat $f(P) = P$ voor alle $P \in S^1 \subset D$. Bewijs dat f surjectief is.

HOOFDSTUK 14

Vrije produkten en geämalgameerde produkten van groepen

In dit hoofdstuk behandelen we een constructie uit de groepentheorie die een belangrijke rol speelt bij de Stelling van Seifert-van Kampen in het volgende hoofdstuk. Het gaat hier om de definitie en de constructie van zogenaamde vrije produkten en geämalgameerde produkten van groepen. De formele uitleg van deze constructie kan gemakkelijk de indruk geven dat het om een moeilijk technisch begrip gaat, terwijl je in de praktijk binnen deze groepen juist heel gemakkelijk kan rekenen; vandaar dat we beginnen met een concrete, enigszins informele, uitleg.

14.1. We beginnen met twee groepen G_1 en G_2 die we multiplicatief noteren. De eenheidselementen van deze groepen noemen we e_1 en e_2. Uit deze twee groepen gaan we een nieuwe groep construeren die we noteren als $G_1 * G_2$ en die het vrije produkt van G_1 en G_2 heet.

De elementen van de nieuwe groep $G_1 * G_2$ worden gegeven door rijtjes

$$w = x_1 x_2 \cdots x_\ell$$

waarbij elk symbool x_i een element is van G_1 of van G_2. Zo een rijtje noemen we een woord en de elementen x_i noemen we de letters van het woord. Het getal ℓ noemen we de lengte van het woord. Het is ook toegestaan om $\ell = 0$ te nemen; in dit geval spreken we over het lege woord.

Merk op dat we een woord hier noteren door de letters x_i gewoon achter elkaar te zetten en niet als een rijtje elementen $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ gescheiden door komma's. We zullen zien dat deze notatie heel natuurlijk is voor de beoogde constructie.

Bij de vorming van woorden geldt de volgende twee spelregels.

(a) Stel dat twee opeenvolgende letters x_i en x_{i+1} in dezelfde groep G_j ($j = 1$ of 2) zitten. Dan bestaat binnnen G_j het produkt $x_i \cdot x_{i+1}$. Noem dit produkt (gezien als element van G_j) even y. Dan beschouwen we het oorspronkelijke woord w als equivalent met het woord

$$w' = x_1 \cdots x_{i-1}\, y\, x_{i+2} \cdots x_\ell\,.$$

(b) Als een van de letters x_i het eenheidselement is van G_1 of G_2, mag je deze letter gewoon weglaten uit het woord. Ook in dit geval beschouwen we het nieuwe woord

$$w' = x_1 \cdots x_{i-1} \hat{x}_i x_{i+1} \cdots x_\ell$$

als equivalent met het oorspronkelijke.

Merk op dat dit in beide gevallen het nieuwe woord w' een letter korter is dan het oorspronkelijke woord w. Door dit proces zo vaak mogelijk achter elkaar toe te passen, houden we uiteindelijk een woord

$$w_{\text{red}} = y_1 y_2 \cdots y_m$$

over dat we niet verder kunnen inkorten, hetgeen betekent dat de letters y_i alternerend elementen zijn van G_1 en G_2 en dat $y_i \notin \{e_1, e_2\}$ voor alle i. Een woord met deze eigenschap noemen we een gereduceerd woord.

Als je begint met een woord w zijn er in het algemeen meerdere mogelijkheden om een van de reductiestappen (a) of (b) toe te passen. Het blijkt echter dat het gereduceerde woord w_{red} dat we uiteindelijk overhouden onafhankelijk is van keuzes.

De elementen van $G_1 * G_2$ zijn de equivalentieklassen van woorden zoals hierboven. Elke equivalentieklasse bevat precies één gereduceerd woord, dus in plaats van met equivalentieklassen kun je ook werken met gereduceerde woorden.

De groepswet van $G_1 * G_2$ wordt gegeven door woorden achter elkaar te zetten. Als $w = x_1x_2\cdots x_\ell$ en $v = y_1y_2\cdots y_m$ twee woorden zijn dan definiëren we een nieuw woord $w * v$ door

$$w * v = x_1x_2\cdots x_\ell y_1y_2\cdots y_m\,.$$

De groepswet op $G_1 * G_2$ wordt gegeven door de regel

$$[w]\cdot[v] = [w * v]\,,$$

waarbij we met $[u]$ de equivalentieklasse van een woord u bedoelen. Het kan worden bewezen dat het produkt onafhankelijk is van de gekozen representanten en dat $G_1 * G_2$ met deze bewerking inderdaad een groep is. Je kunt ook steeds werken met gereduceerde woorden; in dat geval wordt de groepswet beschreven door de regel $w \cdot v = (w * v)_{\mathrm{red}}$. Merk op dat, vanwege spelregel (a) hierboven, de natuurlijke afbeeldingen $i_1\colon G_1 \to (G_1{*}G_2)$ en $i_2\colon G_2 \to (G_1{*}G_2)$ homomorfismen zijn.

14.2. Voorbeeld. Neem $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. We zullen de groepswet multiplicatief noteren. Zij a het niet-triviale element van G_1 (zodat $G_1 = \{e_1, a\}$ met $a^2 = e_1$) en zij b het niet-triviale element van G_2. Als in een woord twee keer achter elkaar de letter a voorkomt, mogen we deze 'aa' gewoon weglaten. Immers:

$$x_1x_2\cdots x_{i-1}aax_{i+2}\cdots x_\ell \quad\sim\quad x_1x_2\cdots x_{i-1}e_1x_{i+2}\cdots x_\ell \quad\sim\quad x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+2}\cdots x_\ell\,.$$

Op dezelfde manier mogen we 'bb' weglaten uit een woord. De enige mogelijke gereduceerde woorden zijn dus

$$(ab)^n = abab\cdots ab\,,\quad (ba)^n = baba\cdots ba\,,\quad b(ab)^n = babab\cdots ab \quad\text{en}\quad a(ba)^n = ababa\cdots ba$$

voor $n \geqslant 0$. Bovendien geldt in de groep $G_1 * G_2$ dat (de klasse van) ba de inverse is van (de klasse van) ab; immers:

$$ba * ab = baab \sim bb \sim e \quad\text{en}\quad ab * ba = abba \sim aa \sim e\,.$$

Hieruit volgt dat $(ba)^n = (ab)^{-n}$ en $a(ba)^n = a(ab)^{-n} = b(ab)^{-1}(ab)^{-n} = b(ab)^{-1-n}$ in $G_1 * G_2$, zodat

$$G_1 * G_2 = \big\{(ab)^n \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\} \cup \big\{b(ab)^n \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\}\,. \tag{1}$$

De groep $G_1 * G_2$ is niet abels want $ab \neq ba$. De ondergroep voortgebracht door het element ab is oneindig cyklisch, dus $\langle (ab)\rangle \cong \mathbb{Z}$, en uit (1) zien we dat deze ondergroep index 2 heeft in $G_1 * G_2$ en dus een normaaldeler is.

Er zijn ook andere beschrijvingen van de groep $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Zo volgt uit het bovenstaande dat deze groep isomorf is met het semidirecte produkt $\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \{\pm 1\}$, waarbij φ het unieke isomorfisme $\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ is. We kunnen ook opmerken dat $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ wordt voortgebracht door de elementen $r = ab$ en $s = b$ waarbij de rekenregels gelden dat $s^2 = 1$ en $rs = sr^{-1}$. Deze groep heet ook wel de oneindige diëdergroep D_∞. (Als we als relatie zouden toevoegen dat r orde n heeft dan krijgen we de diëdergroep D_n. In $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ heeft het element r echter oneindige orde.)

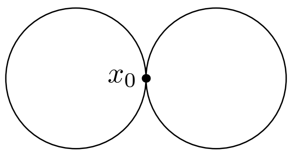
14.3. Opmerking. Als G_1 en G_2 niet-triviale groepen zijn, dan is het vrije produkt $G_1 * G_2$ altijd een oneindige groep. Immers, als $g_1 \in G_1$ en $g_2 \in G_2$ niet-triviale elementen zijn, dan is het woord $(g_1 g_2)^n = g_1 g_2 g_1 g_2 \cdots g_1 g_2$ gereduceerd voor elke $n > 0$, dus het element $g_1 g_2$ heeft oneindige orde.

14.4. Voorbeeld. Als volgende kijken we naar de groep $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Schrijf weer a voor de voortbrenger van de eerste factor $\mathbb{Z}$ en b voor de voortbrenger van de tweede $\mathbb{Z}$. De gereduceerde woorden zijn in dit geval de woorden van de vorm $a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} \cdots b^{n_r}$ met $r \geqslant 0$, waarbij alle exponenten m_i en n_j gehele getallen ongelijk aan 0 zijn, behalve dat we toestaan dat $m_1 = 0$ of $n_r = 0$. Voorbeelden van berekeningen in deze groep:

$$(a^2 b^{-3} a b a^{-4}) \cdot (a^4 b^2 a^{-3}) = a^2 b^{-3} a b^3 a^{-3} \qquad \text{en} \qquad (a^2 b^{-3} a b a^{-4})^{-1} = a^4 b^{-1} a^{-1} b^3 a^{-2}\,.$$

De groep $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ noemen we de vrije groep op twee voortbrengers. Zie 14.17 hierna voor een algemenere behandeling van vrije groepen.

Om alvast een idee te geven van de betekenis van dit soort groepen voor de topologie, kijken we naar de ruimte X die we krijgen door twee lussen (cirkels) in een punt x_0 aan elkaar te plakken.



De Stelling van Seifert-van Kampen die we in het volgende hoofdstuk zullen behandelen geeft dat de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x_0)$ isomorf is met $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. De interpretatie hiervan is de volgende. Schrijf $a \in \pi_1(X, b)$ voor de klasse van de lus die de linkercirkel eenmaal doorloopt, laten we zeggen in de richting van de klok. (We weten al uit Stelling 13.4 dat het er niet toe doet hoe we deze lus precies parametriseren.) Evenzo, zij $b \in \pi_1(X, x_0)$ de klasse van de lus die de rechtercirkel eenmaal met de klok mee doorloopt. De interpretatie van het isomorfisme $\pi_1(X, b) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ is dat elke klasse in $\pi_1(X, x_0)$ uniek gegeven wordt door een gereduceerd woord $a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} \cdots b^{n_r}$, waarbij dit woord staat voor de klasse van de lus "eerst m_1 keer de lus a, vervolgens n_1 keer de lus b, ..., tenslotte n_r keer de lus b." (Herinner dat we samenstelling van paden "van links naar rechts" noteren.)

14.5. We hebben hierboven een constructie gegeven van de vrije groep $G_1 * G_2$. Er is ook een beschrijving van deze groep door middel van een zogeheten *universele eigenschap*. Een dergelijke universele eigenschap geeft een unieke karakterisering van de groep $G_1 * G_2$, op isomorfie na. In eerste instantie lijkt dit misschien minder nuttig dan de expliciete constructie die we hierboven hebben gezien maar in sommige bewijzen speelt deze universele eigenschap juist een cruciale rol.

Om de bedoelde eigenschap te formuleren gaan we kijken naar drietallen (H, f_1, f_2) bestaande uit een groep H en homomorfismen $f_1\colon G_1 \to H$ en $f_2\colon G_2 \to H$. We kunnen een dergelijk drietal weergeven door een diagram

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[d, "f_1"] \\ G_2 \arrow[r, "f_2"'] & H \end{tikzcd} \tag{2}$$

14.6. Definitie. We zeggen dat een drietal $(\Gamma, i_1\colon G_1 \to \Gamma, i_2\colon G_2 \to \Gamma)$ een vrij produkt is van G_1 en G_2 als er voor elk ander drietal (H, f_1, f_2) een *uniek* homomorfisme $\varphi\colon \Gamma \to H$ bestaat zo dat $f_1 = \varphi \circ i_1$ en $f_2 = \varphi \circ i_2$.

Dit wordt symbolisch weergegeven door het diagram

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & \Gamma \arrow[dr, dashed, "\exists!\ \varphi"] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

14.7. Propositie.

(i) *Stel* (Γ, i_1, i_2) *is een vrij produkt van* G_1 *en* G_2. *Als* $\alpha\colon \Gamma \to \Gamma$ *een endomorfisme is met* $\alpha \circ i_1 = i_1$ *en* $\alpha \circ i_2 = i_2$ *dan is* $\alpha = \mathrm{id}_\Gamma$.

(ii) *Als* (Γ', i'_1, i'_2) *ook een vrij produkt is van* G_1 *en* G_2 *dan bestaat er een uniek isomorfisme* $F\colon \Gamma \to \Gamma'$ *zo dat* $i'_1 = F \circ i_1$ *en* $i'_2 = F \circ i_2$.

(iii) *Het in* 14.1 *geconstrueerde drietal* $(G_1 * G_2, i_1, i_2)$ *is een vrij produkt van* G_1 *en* G_2 *in de zin van* Definitie 14.6.

Bewijs. (i) Pas de universele eigenschap toe met $(H, f_1, f_2) = (\Gamma, i_1, i_2)$. Uit de uniciteit van het homomorfisme φ volgt dat $\alpha = \mathrm{id}_\Gamma$. (Het is immers duidelijk dat ook het endomorfisme id_Γ de eigenschap heeft dat $\mathrm{id}_\Gamma \circ i_1 = i_1$ en $\mathrm{id}_\Gamma \circ i_2 = i_2$.)

(ii) Omdat (Γ, i_1, i_2) een vrij produkt is, bestaat er een uniek homomorfisme $F\colon \Gamma \to \Gamma'$ zo dat $i'_1 = F \circ i_1$ en $i'_2 = F \circ i_2$. Maar we hebben aangenomen dat (Γ', i'_1, i'_2) ook een vrij produkt is, dus er bestaat een uniek homomorfisme $F'\colon \Gamma' \to \Gamma$ zo dat $i_1 = F' \circ i'_1$ en $i_2 = F' \circ i'_2$. Dan is $F' \circ F\colon \Gamma \to \Gamma$ een endomorfisme van Γ met de eigenschap dat $(F' \circ F) \circ i_1 = i_1$ en $(F' \circ F) \circ i_2 = i_2$ dus uit (i) volgt dat $F' \circ F = \mathrm{id}_\Gamma$. Op dezelfde manier volgt dat $F \circ F' = \mathrm{id}_{\Gamma'}$; dus F en F' zijn elkaars inversen.

(iii) Beschouw een woord $w = x_1 x_2 \cdots x_\ell$. Elke letter x_i is een element van G_1 of G_2; zij $j(i) \in \{1, 2\}$ de unieke index zo dat $x_i \in G_{j(i)}$. Gegeven een drietal (H, f_1, f_2), definieer $\varphi(w) \in H$ door

$$\varphi(w) = f_{j(1)}(x_1) f_{j(2)}(x_2) \cdots f_{j(\ell)}(x_\ell)\,;$$

het produkt van de element $f_{j(i)}(x_i)$ in de groep H. Uit de spelregels (a) en (b) in 14.1 volgt direct dat equivalente woorden hetzelfde beeld hebben onder φ, zodat we een welgedefinieerde afbeelding $\varphi\colon G_1 * G_2 \to H$ krijgen. Bovendien volgt direct uit de constructie dat deze afbeelding een homomorfisme is en dat het het enig mogelijke homomorfisme is waarvoor geldt dat $\varphi \circ i_1 = f_1$ en $\varphi \circ i_2 = f_2$. Dit toont aan dat het drietal $(G_1 * G_2, i_1, i_2)$ een vrij produkt is van G_1 en G_2. $\square$

14.8. Opmerking. In plaats van het vrije produkt $G_1 * G_2$ kunnen we ook het "gewone" produkt $G_1 \times G_2$ bekijken. De afbeeldingen $\nu_1\colon G_1 \to (G_1 \times G_2)$ en $\nu_2\colon G_2 \to (G_1 \times G_2)$ gegeven door $\nu_1(g_1) = (g_1, e_2)$ en $\nu_2(g_2) = (e_1, g_2)$ zijn injectieve homomorfismen; via deze afbeeldingen kunnen we G_1 en G_2 opvatten als ondergroepen van $G_1 \times G_2$. Het grote verschil tussen $G_1 \times G_2$ en $G_1 * G_2$ is dat in $G_1 \times G_2$ de elementen van G_1 commuteren met de elementen van G_2 (immers $(g_1, e_2) \cdot (e_1, g_2) = (g_1, g_2) = (e_1, g_2) \cdot (g_1, e_2)$), terwijl dat in $G_1 * G_2$ in het algemeen zeker niet zo is. Uit de universele eigenschap van $G_1 * G_2$ volgt dat er een uniek homomorfisme $p\colon (G_1 * G_2) \to (G_1 \times G_2)$ is zo dat $\nu_1 = p \circ i_1$ en $\nu_2 = p \circ i_2$. Het is gemakkelijk in te zien dat p een surjectief homomorfisme is, zodat $G_1 \times G_2$ een quotiënt is van het vrije produkt $G_1 * G_2$.

14.9. Voorbeeld. Laat $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$; dit is een groep die in de wiskunde een grote rol speelt. De klassen van de elementen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hebben respectievelijk orde 2 en 3. (Ga dit na.) Zodoende hebben we (injectieve) homomorfismen $f_1\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ en $f_2\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, gegeven door $f_1(i \bmod 2) = [S^i]$ en $f_2(j \bmod 3) = [R^j]$. Uit de universele eigenschap van het vrije produkt volgt dat er een uniek homomorfisme

$$\varphi\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

bestaat zo dat $\varphi \circ i_1 = f_1$ en $\varphi \circ i_2 = f_2$. Het kan worden bewezen dat dit homomorfisme φ een isomorfisme is, dus $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ is isomorf met $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

14.10. Opmerking. Bij het vak Algebra 1 kom je vooral in aanraking met groepen die een eigen naam hebben, denk aan $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, A_n, S_n, D_n, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, etc. Als je een vrij produkt van twee groepen maakt, is het resultaat een groep waarbinnen je vrij gemakkelijk kan rekenen maar deze groep heeft vaak geen speciale naam (anders dan "het vrije produkt van..."). De voorbeelden van vrije produkten die we tot nu toe zijn tegengekomen, zijn in dat opzicht een beetje atypisch.

14.11. Zij V een deelverzameling van een groep G. De door V voortgebrachte ondergroep $H = \langle V \rangle$ is, per definitie, de kleinste ondergroep van G die V bevat. Elk element $h \in H$ kan worden geschreven als $h = v_1 v_2 \cdots v_r$ met $v_i \in V$ of $v_i^{-1} \in V$ voor alle i. In het algemeen is $\langle V \rangle$ zeker geen normaaldeler van G.

Er bestaat ook een kleinste normaaldeler $N \triangleleft G$ die V bevat; deze noemen we de door V voortgebrachte normaaldeler. Het is de ondergroep voortgebracht door alle elementen gvg^{-1} met $g \in G$ en $v \in V$.

14.12. In de hierboven beschreven constructie gaan we een nieuw ingrediënt toevoegen; dit leidt tot de geämalgameerde produkten die we nodig hebben in het volgende hoofdstuk. In dit geval draaien we de volgorde om en beginnen we met de beschrijving door middel van een universele eigenschap; daarna geven we een explicietere beschrijving.

We beginnen met een diagram van groepen

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"'] & G_1 \\ G_2 & \end{tikzcd} \tag{3}$$

Hierbij zijn K, G_1 en G_2 groepen en j_1 en j_2 homomorfismen. Vervolgens kijken we naar drietallen (H, f_1, f_2) als in (2), waarbij we de extra voorwaarde opleggen dat $f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2$. We zeggen in dit geval dat het diagram

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"'] & G_1 \arrow[d, "f_1"] \\ G_2 \arrow[r, "f_2"'] & H \end{tikzcd} \tag{4}$$

commutatief is.

14.13. Definitie. Zij een diagram (3) gegeven en zij $(\Gamma, i_1\colon G_1 \to \Gamma, i_2\colon G_2 \to \Gamma)$ een drietal met $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$. We zeggen dat dit drietal een geämalgameerd produkt is van G_1 en G_2 via de homomorfismen j_1 en j_2, als er voor elk commutatief diagram (4) van groepen een uniek homomorfisme $\varphi\colon \Gamma \to H$ bestaat zo dat $\varphi \circ i_1 = f_1$ en $\varphi \circ i_2 = f_2$.

De universele eigenschap wordt in dit geval symbolisch weergegeven door het diagram

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"'] & G_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & \Gamma \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\varphi"] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

Met precies dezelfde argumenten als in het bewijs van Propositie 14.7 zien we dat het geämalgameerde produkt, als het bestaat, uniek is op isomorfie na. We kunnen het daarom hebben over *het* (in plaats van *een*) geämalgameerde produkt, zonder dat dit tot verwarring leidt. We zullen laten zien dat het geämalgameerd produkt altijd bestaat; de notatie hiervoor is $G_1 *_K G_2$. Deze notatie is eigenlijk niet precies genoeg want het geämalgameerde produkt hangt in het algemeen af van de homomorfismen j_1 en j_2; indien de context het vereist gebruiken we de preciezere notatie $G_1 *_{j_1,K,j_2} G_2$. Het geämalgameerde produkt wordt soms ook wel de push-out of colimiet van het diagram (3) genoemd. Merk op dat er in de definitie zit ingebouwd dat er homomorfismen $i_1\colon G_1 \to (G_1 *_K G_2)$ en $i_2\colon G_2 \to (G_1 *_K G_2)$ bestaan die een commutatief diagram

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{j_1} & G_1 \\ {\scriptstyle j_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_1} \\ G_2 & \xrightarrow{i_2} & G_1 *_K G_2 \end{array}$$

geven. Als het nodig is om de rol van K aan te geven, schrijven we $i_{1,K}$ en $i_{2,K}$ in plaats van i_1 en i_2.

14.14. Opmerkingen en voorbeelden. (i) Uit de universele eigenschap van het vrije produkt volgt dat er een uniek homomorfisme $\pi\colon G_1 * G_2 \to G_1 *_K G_2$ bestaat zo dat $\pi \circ i_1 = i_{1,K}$ en $\pi \circ i_2 = i_{2,K}$. (Hier zien we een geval waarbij we de "K" moeten opnemen in de notatie om verwarring te voorkomen.) Zoals we zodadelijk zullen zien, is π een surjectief homomorfisme, zodat $G_1 *_K G_2$ op natuurlijke manier een quotiënt is van het vrije produkt $G_1 * G_2$. Een homomorfisme van groepen $\varphi\colon G_1 * G_2 \to H$ factoriseert via π dan en slechts dan als $\varphi \circ j_1 = \varphi \circ j_2$.

(ii) Als de homomorfismen j_1 en j_2 allebei triviaal zijn (waarmee we bedoelen dat $j_1(k) = e_1$ en $j_2(k) = e_2$ voor alle $k \in K$), dan is automatisch voldaan aan de voorwaarde dat $f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2$. In dit geval is het surjectieve homomorfisme π uit (i) een isomorfisme, zodat het geämalgameerde produkt $G_1 *_K G_2$ gewoon het vrije produkt $G_1 * G_2$ is.

(iii) Stel $j_1\colon K \to G_1$ is een isomorfisme. Dan is $i_2\colon G_2 \to G_1 *_K G_2$ een isomorfisme. Om dit te bewijzen, dienen we na te gaan dat het drietal $(G_2, j_2 \circ j_1^{-1}, \mathrm{id}_{G_2})$ de in Definitie 14.13 geëiste universele eigenschap heeft. Welnu, als $f_1\colon G_1 \to H$ en $f_2\colon G_2 \to H$ homomorfismen zijn met $f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2$, dan is er inderdaad een uniek homomorfisme $\varphi\colon G_2 \to H$ zo dat $\varphi \circ (j_2 \circ j_1^{-1}) = f_1$ en $\varphi \circ \mathrm{id}_{G_2} = f_2$, namelijk $\varphi = f_2$.

(iv) Stel, algemener, dat $j_1\colon K \to G_1$ surjectief is. We gaan aantonen dat $G_1 *_K G_2 \cong G_2/N$ waarbij $N \triangleleft G_2$ de normaaldeler is die wordt voortgebracht door $j_2\big(\mathrm{Ker}(j_1)\big)$.

We hebben een commutatief diagram

$$\begin{array}{ccc} K & \overset{j_1}{\twoheadrightarrow} & G_1 \\ {\scriptstyle j_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_1} \\ G_2 & \overset{i_2}{\twoheadrightarrow} & G_2/N \end{array}$$

waarbij i_2 het canonieke homomorfisme is en i_1 het unieke homomorfisme is dat het diagram commutatief maakt. Concreter: het homomorfisme i_1 stuurt een element $j_1(k) \in G_1$ naar de klasse $j_2(k)$ mod N. Uit de eerste isomorfiestelling volgt dat j_1 een isomorfisme $K/\mathrm{Ker}(j_1) \xrightarrow{\sim} G_1$ induceert en omdat $\mathrm{Ker}(j_1) \subset \mathrm{Ker}(i_2 \circ j_2)$ volgt dat i_1 een welgedefinieerd homomorfisme is.

We gaan nu na dat het diagram inderdaad de universele eigenschap heeft van een geämalgameerd produkt. Stel we hebben een commutatief diagram (4). Als $x \in \mathrm{Ker}(j_1)$ dan is $f_2 j_2(x) = f_1 j_1(x) = f_1(e_{G_1}) = e_H$, dus $j_2(x) \in \mathrm{Ker}(f_2)$. Dit betekent dat $\mathrm{Ker}(f_2)$ alle elementen van $j_2\big(\mathrm{Ker}(j_1)\big)$ bevat en uit de definitie van N volgt daarom dat $N \subset \mathrm{Ker}(f_2)$. De homomorfiestelling geeft dan dat er een uniek homomorfisme $\varphi\colon G_2/N \to H$ bestaat zo dat $\varphi \circ i_2 = f_2$. Uit de bovenstaande beschrijving van het homomorfisme i_1 samen met de relatie $f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2$ volgt direct dat ook $\varphi \circ i_1 = f_1$. Dit bewijst dat $G_1 *_K G_2$ in dit geval inderdaad isomorf is met G_2/N.

14.15. Voor een concretere beschrijving van het geämalgameerde produkt $G_1 *_K G_2$ hoeven we aan de in 14.1 gegeven uitleg slechts een enkel nieuw ingediënt toe te voegen.

We beginnen met een diagram (3). Net als in 14.1 beschouwen we woorden waarvan de letters elementen zijn van G_1 of G_2. Ditmaal beschouwen we op de verzameling van woorden de equivalentierelatie die wordt voortgebracht door de relaties (a) en (b) in 14.1 samen met de relatie

(c) als $x_i = j_1(k)$ voor een element $k \in K$, dan is het woord $x_1 \cdots x_{i-1}x_ix_{i+1} \cdots x_\ell$ equivalent met het woord $x_1 \cdots x_{i-1}x'_ix_{i+1} \cdots x_\ell$ waarbij $x'_i := j_2(k)$.

Anders gezegd: je mag in een woord een letter $j_1(k)$ vervangen door $j_2(k)$ en omgekeerd.

Je kunt de groep $G_1 *_K G_2$ beschrijven als de verzameling equivalentieklassen van woorden onder deze nieuwe equivalentierelatie. Samenstelling van woorden geeft weer een welgedefinieerde groepswet. Het eenheidselement is weer de klasse van het lege woord.

Deze concrete beschrijving maakt duidelijk dat het homomorfisme $G_1 * G_2 \to G_1 *_K G_2$ inderdaad surjectief is. De kern van dit homomorfisme is de normaaldeler $N \lhd (G_1 * G_2)$ die wordt voortgebracht door alle elementen $i_1j_1(k)i_2j_2(k^{-1})$ waarbij $i_1\colon G_1 \to (G_1 * G_2)$ en $i_2\colon G_2 \to (G_1 * G_2)$ weer de natuurlijke homomorfismen zijn.

14.16. Voorbeeld. Bekijk het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ {\scriptstyle j_2}\big\downarrow & & \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & & \end{array} \tag{5}$$

waarbij j_1 en j_2 de canonieke homomorfismen zijn. Uit (iv) van 14.14 volgt dat het geämalgameerde produkt van dit diagram de triviale groep $\{1\}$ is. Je kunt dit ook direct bewijzen door de universele eigenschap te gebruiken. De bewering is dat als $f_1\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H$ en $f_2\colon (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to H$ homomorfismen zijn met $f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2$, dan zijn f_1 en f_2 allebei het triviale homomorfisme. Immers, er geldt: $f_1(1 \bmod 2) = f_1 \circ j_1(3) = f_2 \circ j_2(3) = f_2(0 \bmod 3) = e_H$ en, net zo, $f_2(1 \bmod 3) = f_2 \circ j_2(4) = f_1 \circ j_1(4) = f_1(0 \bmod 2) = e_H$.

Zie Opgave 14.2 voor variaties op dit voorbeeld.

*

* *

Als groepentheoretische voorbereiding op het volgende hoofdstuk is het bovenstaande in eerste instantie voldoende. Op enkele belangrijke punten is het voorgaande echter nogal informeel. In de rest van het hoofdstuk geven we daarom enkele aanvullende details. In het bijzonder zullen we daarbij ingaan op presentaties van groepen door voortbrengers en relaties; dit speelt bij enkele voorbeelden in het volgende hoofdstuk een rol.

14.17. De groep $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ die we in 14.4 zijn tegengekomen heet de vrije groep op twee voortbrengers. Je kunt de constructie uitbreiden naar meer dan twee factoren; zo krijg je de vrije groep $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ op drie voortbrengers, etc. Nog algemener kun je een vrije groep construeren op een willekeurige verzameling L. De constructie lijkt erg op de in 14.1 beschreven constructie van een vrij produkt van twee groepen.

We zullen de elementen van L *letters* noemen. Met deze letters kunnen we woorden maken. Met een woord bedoelen we hierbij een uitdrukking

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_\ell^{\varepsilon_\ell}$$

waarbij $x_1, \ldots, x_\ell$ elementen zijn van L en waarbij de exponenten ε_i elementen zijn uit $\{\pm 1\}$. We noemen ℓ de lengte van het woord w. Het is ook toegestaan het lege woord te nemen; dit woord heeft lengte 0. Zij $\mathscr{W}(L)$ de verzameling van alle woorden op de verzameling L en zij $\ell(w)$ de lengte van een woord w.

Als we bijvoorbeeld $L = \{a, b, \ldots, z\}$ nemen dan zijn

$$topologie\,, \quad t^{-1}opolog^{-1}i^{-1}e^{-1}\,, \quad me^{-1}e^{-1}tk^{-1}u^{-1}nd^{-1}e\,, \quad \text{en} \quad e^{-1}dn^{-1}ukt^{-1}eem^{-1}$$

allemaal woorden van lengte 9.

Woorden kunnen we achter elkaar zetten: uit w_1 en w_2 ontstaat een nieuw woord $w_1 w_2$ door ze gewoon achter elkaar te plaatsen. Er geldt $\ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$. Het lege woord is een eenheidselement voor deze bewerking maar het is direct duidelijk dat $\mathscr{W}(L)$ met deze bewerking niet een groep kan zijn want een woord van positieve lengte kan geen inverse hebben. Om dit te corrigeren moeten we nog inbouwen dat het symbool x^{-1}, voor $x \in L$, de rol gaat spelen van de inverse van het symbool x. We definiëren daarom de equivalentierelatie $\sim$ op de verzameling van woorden $\mathscr{W}(L)$ als de fijnste equivalentierelatie die de eigenschap heeft dat voor alle woorden w_1 en w_2 en voor alle letters $x \in L$ geldt dat

$$w_1 x x^{-1} w_2 \sim w_1 w_2 \sim w_1 x^{-1} x w_2\,.$$

Anders geformuleerd: als je binnen een woord w achter elkaar "xx^{-1}" of "$x^{-1}x$" tegenkomt, met $x \in L$, dan mag je deze twee letters weglaten; het woord w' dat je zo krijgt (met $\ell(w') = \ell(w) - 2$) beschouw je als equivalent met w. Omgekeerd mag je in een woord ergens de combinatie xx^{-1} of $x^{-1}x$ invoegen (waardoor de lengte met 2 toeneemt); het nieuwe woord is weer equivalent met het oude. Twee woorden zijn equivalent als je de ene uit de andere kunt krijgen door deze twee regels herhaald toe te passen. Nemen we L als in het vorige voorbeeld dan is het woord $abb^{-1}cdz^{-1}zz^{-1}eff^{-1}e^{-1}$ bijvoorbeeld equivalent met het woord $w^{-1}wapp^{-1}cdz^{-1}$. (Ga dit na.)

Schrijf $[w]$ voor de equivalentieklasse van het woord w onder $\sim$. Elke equivalentieklasse bevat een unieke representant van minimale lengte; deze krijg je door te beginnen met een representant w en uit dit woord zo veel mogelijk combinaties xx^{-1} en $x^{-1}x$ weg te strepen. Omdat het woord hierdoor steeds korter wordt, stopt dit proces een keer. Het woord w_{red} dat je dan overhoudt heet de gereduceerde representant van de klasse $[w]$. In het algemeen zijn er meerdere mogelijkheden om uit het beginwoord w combinaties xx^{-1} en $x^{-1}x$ weg te strepen maar je kunt aantonen dat het gereduceerde woord w_{red} dat je uiteindelijk overhoudt onafhankelijk is van keuzes. Bijvoorbeeld: in het woord $baa^{-1}ac$ kun je de tweede en derde letter (aa^{-1}) wegstrepen maar je kunt er ook voor kiezen om de derde en vierde letter ($a^{-1}a$) weg te strepen; in beide gevallen hou je als gereduceerd woord *bac* over.

14.18. Stelling. *Zij L een verzameling.*

(i) *Als w_1, w_1', w_2 en w_2' woorden zijn in $\mathscr{W}(L)$ met $w_1 \sim w_1'$ en $w_2 \sim w_2'$ dan is $w_1w_2 \sim w_1'w_2'$.*

(ii) *Op de verzameling $F_L = \mathscr{W}(L)/\!\sim$ van equivalentieklassen van woorden hebben we een welgedefinieerde bewerking, gegeven door de regel $[w_1]\cdot[w_2] = [w_1w_2]$. Met deze bewerking is F_L een groep. Het eenheidselement is de klasse $e = [\ ]$ van het lege woord. Als $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\cdots x_\ell^{\varepsilon_\ell}$ dan is de inverse van de klasse $[w]$ de klasse van het woord $x_\ell^{-\varepsilon_\ell}x_{\ell-1}^{-\varepsilon_{\ell-1}}\cdots x_1^{-\varepsilon_1}$.*

Het eenvoudige bewijs van deze stelling laten we als opgave aan de lezer over.

14.19. Definitie. Als L een verzameling is dan heet de groep F_L *de vrije groep op de verzameling L.*

Zij $i\colon L \to F_L$ de afbeelding die een element $x \in L$ stuurt naar de klasse van het woord x. (Dit is uiteraard alleen maar een afbeelding, geen homomorfisme, want L is alleen maar een verzameling.) De volgende propositie laat zien dat de vrije groep gekarakteriseerd kan worden door een universele eigenschap.

14.20. Propositie. *Zij F_L de vrije groep op een verzameling L.*

(i) *Als H een groep is en $f\colon L \to H$ is een afbeelding, dan is er een uniek homomorfisme $\varphi\colon F_L \to H$ zo dat $\varphi \circ i = f$.*

(ii) *Zij G een groep en $j\colon L \to G$ een afbeelding. Stel dat het paar (G, j) de eigenschap heeft dat er voor elke groep H en elke afbeelding $f\colon L \to H$ een uniek homomorfisme $\psi\colon G \to H$ bestaat zo dat $\psi \circ j = f$. Dan is het unieke homomorfisme $\varphi\colon F_L \xrightarrow{\sim} G$ met $\varphi \circ i = j$ een isomorfisme.*

Bewijs. In (i) kunnen we het bedoelde homomorfisme φ gewoon opschrijven: definieer eerst een afbeelding $\tilde{\varphi}\colon \mathscr{W}(L) \to H$ door

$$\tilde{\varphi}(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\cdots x_\ell^{\varepsilon_\ell}) = f(x_1)^{\varepsilon_1}f(x_2)^{\varepsilon_2}\cdots f(x_\ell)^{\varepsilon_\ell}\,.$$

Nu ga je gemakkelijk na dat $\tilde{\varphi}(w)$ alleen afhangt van de equivalentieklasse van het woord w, dus $\tilde{\varphi}$ induceert een afbeelding $\varphi\colon F_L \to H$. Het is duidelijk uit de constructie dat φ een homomorfisme is en dat het het enige mogelijke homomorfisme is met de eigenschap dat $\varphi \circ i = f$.

Het bewijs van (ii) is min of meer hetzelfde als dat van deel (ii) van Propositie 14.7. Immers, uit de gegeven eigenschap van het paar (G, j) volgt dat er een unieke homomorfisme $\psi\colon G \to F_L$ bestaat zo dat $\psi \circ j = i$. De bewering is dat φ en ψ elkaars inversen zijn. Merk daartoe op dat $(\psi \circ \varphi)\colon F_L \to F_L$ een homomorfisme is met de eigenschap dat $(\psi \circ \varphi) \circ i = i$. Pas nu (i) toe met $H = F_L$ en $f = i$; uit de uniciteit in (i) volgt dat $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F_L}$. Evenzo is $\varphi \circ \psi$ een endomorfisme van G met de eigenschap dat $(\varphi \circ \psi) \circ j = j$ en uit de uniciteit in (ii) volgt dat $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_G$. $\square$

14.21. Definitie. Zij L een verzameling en zij R een deelverzameling van de verzameling $\mathscr{W}(L)$ van woorden. Dan bedoelen we met $G = \langle L \mid R \rangle$ het quotiënt van de vrije groep F_L modulo de normaaldeler $N \triangleleft F_L$ die wordt voortgebracht door de elementen $[w] \in F_L$ met $w \in R$. We noemen deze groep G de groep die wordt gegeven door de voortbrengers L en relaties R.

Een beschrijving van een groep G door middel van voortbrengers en relaties noemen we een presentatie van G. In de praktijk werken we vaak met presentaties waarbij de verzamelingen L en R van voortbrengers en relaties eindig zijn; in dat geval schrijven we doorgaans $G = \langle x_1, \ldots, x_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$, waarbij $L = \{x_1, \ldots, x_m\}$ en $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$. Zie ook de voorbeelden hierna.

14.22. Voorbeelden en opmerkingen. (i) Als $R = \emptyset$ dan is $\langle L \mid R \rangle = \langle L \mid \emptyset \rangle$ gewoon de vrije groep F_L.

(ii) De groep $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ is het quotiënt van de vrije groep $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ voortgebracht door a en b modulo de normaaldeler N die wordt voortgebracht door het element $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Dat betekent dat in G de relatie $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ geldt. We vinden dat G wordt voortgebracht door twee commuterende elementen $\bar{a}$ en $\bar{b}$, die allebei oneindige orde hebben. Dus $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(iii) De diëdergroep D_n van orde $2n$ wordt voortgebracht door twee elementen r en s van ordes n en 2, respectievelijk, waarbij de rekenregel geldt dat $rs = sr^{-1}$. Dit betekent dat $D_n \cong \langle r, s \mid r^n, s^2, srsr \rangle$. (Merk op dat je, vanwege het feit dat $s = s^{-1}$ de rekenregel $rs = sr^{-1}$ kunt herschrijven als $rsrs = 1$. De meetkundige interpretatie is dat rs weer een spiegeling is en dus orde 2 heeft.)

(iv) Elke groep G is te beschrijven door voortbrengers en relaties. Immers, je kunt $L = G$ nemen en R de verzameling van alle woorden xyz van lengte 3 met x, $y \in G$ en $z = (xy)^{-1}$. Ook kun je bijvoorbeeld direct een presentatie opschrijven voor een geämalgameerde produkt: in de situatie van diagram (3) wordt $G_1 *_K G_2$ geven door de presentatie

$$G_1 *_K G_2 = \left\langle G_1 \cup G_2 \;\middle|\; \begin{array}{c} xyz \text{ voor alle } x,\, y,\, z \in G_1 \text{ met } xyz = e_1 \\ xyz \text{ voor alle } x,\, y,\, z \in G_2 \text{ met } xyz = e_2 \\ i_1(k)i_2(k^{-1}) \text{ voor alle } k \in K \end{array} \right\rangle$$

Opgaven bij hoofdstuk 14.

Opgave 14.1. Gegeven zijn twee groepen G_1 en G_2.

(i) Bewijs, gebruik makend van de universele eigenschap in Definitie 14.6, dat het canonieke homomorfisme $(G_1 * G_2)^{\mathrm{ab}} \to (G_1^{\mathrm{ab}} * G_2^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}}$ een isomorfisme is.

(ii) Bewijs vervolgens dat $(G_1 * G_2)^{\mathrm{ab}} \cong G_1^{\mathrm{ab}} \times G_2^{\mathrm{ab}}$.

Opgave 14.2. Beschouw het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ {\scriptstyle j_2}\downarrow & & \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & & \end{array}$$

waarbij m en n natuurlijke getallen zijn en de homomorfismen j_1 en j_2 de canonieke afbeeldingen zijn. Bewijs dat het geämalgameerde produkt van dit diagram isomorf is met $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, waarbij $q = \mathrm{ggd}(m, n)$.

Opgave 14.3. Beschouw een groep G die wordt gegeven door een presentatie $G = \langle L \mid R \rangle$. Zij $i\colon L \to G$ de afbeelding die wordt gegeven door een letter $x \in L$ te sturen naar de klasse $[x] \in G$ van het woord x.

(i) Zij H een groep en zij $f\colon L \to H$ een afbeelding met de eigenschap dat voor elk woord $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_\ell^{\varepsilon_\ell}$ in de verzameling R geldt dat $f(x_1)^{\varepsilon_1} f(x_2)^{\varepsilon_2} \cdots f(x_\ell)^{\varepsilon_\ell} = e_H$. Bewijs dat er een uniek homomorfisme $\varphi\colon G \to H$ bestaat zo dat $\varphi \circ i = f$.

(ii) Bewijs dat de in (i) gegeven eigenschap van de groep G deze groep op isomorfie na karakteriseert.

HOOFDSTUK 15

De Stelling van Seifert en van Kampen

15.1. Stelling. *Zij X een topologische ruimte met een basispunt x_0. Stel we hebben een open overdekking $X = U_1 \cup U_2$ zo dat U_1, U_2 en $U_{12} := U_1 \cap U_2$ alledrie wegsamenhangend zijn en met $x_0 \in U_{12}$. Schrijf $i_k\colon U_k \hookrightarrow X$ en $j_k\colon U_{12} \hookrightarrow U_k$ (voor $k = 1, 2$) voor de inclusie-afbeeldingen. Dan is het diagram*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_{12}, x_0) & \xrightarrow{j_{1,*}} & \pi_1(U_1, x_0) \\ {\scriptstyle j_{2,*}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_{1,*}} \\ \pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{i_{2,*}} & \pi_1(X, x_0) \end{array} \tag{1}$$

commutatief en dit diagram maakt $\pi_1(X, x_0)$ het geämalgameerde produkt van $\pi_1(U_1, x_0)$ en $\pi_1(U_2, x_0)$ via de homomorfismen $j_{1,*}$ en $j_{2,*}$; dus

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_{12}, x_0)} \pi_1(U_2, x_0)\,.$$

15.2. Opmerking. Het belangrijkste doel van dit hoofdstuk is te laten zien dat de Stelling van Seifert en van Kampen een fantastisch gereedschap is om van concrete ruimten de fundamentaalgroep te berekenen. We zullen het bewijs van de stelling niet geven; zie echter 15.10 hierna voor enkele opmerkingen over het bewijs.

Passen we de opmerkingen in 14.14 toe dan vinden we een paar speciale gevallen die het verdienen apart genoemd te worden.

15.3. Gevolg. *Als in de situatie van* Stelling 15.1 *geldt dat U_{12} enkelvoudig samenhangend is, dan is $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$, het vrije produkt van de fundamentaalgroepen van U_1 en U_2.*

15.4. Gevolg. *Als in de situatie van* Stelling 15.1 *geldt dat U_2 enkelvoudig samenhangend is, dan is $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0)/N$ waarbij $N \triangleleft \pi_1(U_1, x_0)$ de normaaldeler is die wordt voortgebracht door het beeld van het homomorfisme $j_{1,*}\colon \pi_1(U_{12}, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0)$.*

15.5. Gevolg. *Als in de situatie van* Stelling 15.1 *geldt dat U_2 en U_2 enkelvoudig samenhangend zijn dan is ook X enkelvoudig samenhangend.*

Hoewel we Stelling 15.1 niet zullen bewijzen, is dit laatste speciale geval een eenvoudig gevolg van de argumenten die we in 15.10 zullen geven.

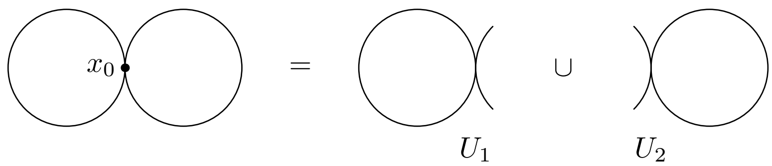
We benadrukken nog een keer dat in de stelling wordt geëist dat de open delen U_1, U_2 en U_{12} alledrie wegsamenhangend zijn. Het is gemakkelijk om voorbeelden te bedenken die laten zien dat deze voorwaarde beslist noodzakelijk is. Zo kun je de cirkel S^1 schrijven als vereniging van de samentrekbare open delen $U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ en $U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ maar zoals we weten is de cirkel niet enkelvoudig samenhangend; de Stelling van Seifert en van Kampen is niet van toepassing op deze overdekking omdat $U_1 \cap U_2$ niet wegsamenhangend is.

15.6. Voorbeeld. De 2-sfeer $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ is enkelvoudig samenhangend. We kunnen S^2 immers schrijven als een vereniging van de open delen

$$U_1 = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < \tfrac{1}{4}\} \qquad \text{en} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > -\tfrac{1}{4}\}$$

die allebei samentrekbaar zijn. De doorsnede $U_1 \cap U_2$ is wegsamenhangend (ga na) dus uit Gevolg 15.5 volgt dat $\pi_1(S^2, s_0) = \{1\}$ voor elke keuze van een basispunt s_0. (We weten al uit Propositie 12.14 dat deze conclusie onafhankelijk is van de keuze van het basispunt.)

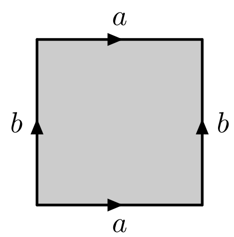
15.7. Voorbeeld. Bekijk de ruimte X die je krijgt door twee cirkels aan elkaar te plakken in een punt x_0. Neem de overdekking zoals als weergegeven in de onderstaande figuur.



Anders gezegd, U_1 (resp. U_2) is de linkercirkel (resp. rechtercirkel) samen met een klein open stuk van de andere cirkel. Dan zijn U_1 en U_2 allebei homotopie-equivalent met de cirkel en de doorsnede U_{12} is samentrekbaar. Uit Stelling 13.4 en Gevolg 15.3 volgt dat $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, zoals reeds aangekondigd in Voorbeeld 14.4.

15.8. Voorbeeld. We weten dat de torus T homeomorf is met $S^1 \times S^1$ (zie Opgave 11.7) dus uit Stelling 13.4 samen met het resultaat van Opgave 12.3 weten we dat $\pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. We gaan dit resultaat op een andere manier afleiden. De methode die we gebruiken werkt ook in veel andere situaties; zie de voorbeelden hierna.

We beschrijven de torus als het quotiënt van het vierkant $V = [0,1] \times [0,1]$



waarbij we de tegenover elkaar gelegen zijden op elkaar plakken; zie Voorbeeld 11.17. De vier hoekpunten hebben hetzelfde beeld onder de quotiëntafbeelding $q\colon V \twoheadrightarrow T$; noem het beeldpunt y_0.

Bekijk de paden $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_0$ en $\tilde{b}_1$ in V gegeven door

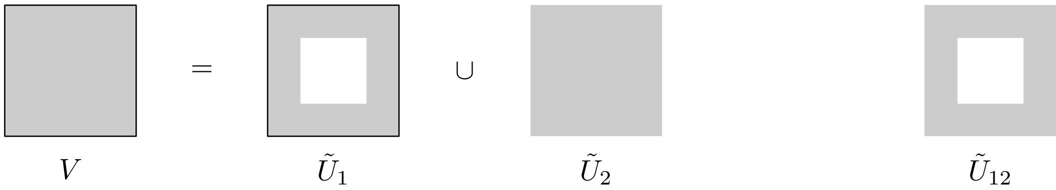
$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(y) &= (y,0)\,, & \tilde{b}_0(y) &= (0,y)\,, \\ \tilde{a}_1(y) &= (y,1)\,, & \tilde{b}_1(y) &= (1,y)\,. \end{aligned}$$

Dan is $q \circ \tilde{a}_0 = q \circ \tilde{a}_1$ een lus in T met basispunt y_0; noem deze lus a. Evenzo is $q \circ \tilde{b}_0 = q \circ \tilde{b}_1$ een lus in T met basispunt y_0; deze lus noemen we b.

We schrijven het vierkant als vereniging van twee open delen, $V = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$ met

$$\tilde{U}_1 = \Big\{\big([0,\tfrac{1}{4}[\,\cup\,]\tfrac{3}{4},1]\big) \times [0,1]\Big\} \cup \Big\{[0,1] \times \big([0,\tfrac{1}{4}[\,\cup\,]\tfrac{3}{4},1]\big)\Big\}$$

en $\tilde{U}_2 = V^\circ = \,]0,1[\, \times \,]0,1[$.



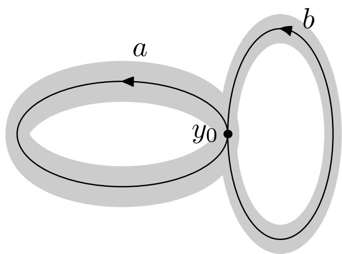
Laat $U_1 = q(\tilde{U}_1)$ en $U_2 = q(\tilde{U}_2)$; dan zijn U_1 en U_2 open in T en $T = U_1 \cup U_2$. Bovendien is $q|_{\tilde{U}_2}\colon \tilde{U}_2 \to U_2$ een homeomorfisme. (Ga dit zelf na.) De doorsnede $\tilde{U}_{12} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ is homotopie-equivalent met de cirkel S^1; datzelfde geldt daarom voor $U_{12} = U_1 \cap U_2$.

Laat $\tilde{x}_0 = (1/8, 1/8) \in \tilde{U}_{12}$ en neem $x_0 = q(\tilde{x}_0)$ als basispunt in T. Nu passen we de Stelling van Seifert-van Kampen toe. Omdat U_2 (die homeomorf is met $\tilde{U}_2$) samentrekbaar is, vinden we dat

$$\pi_1(T, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0)/N\,,$$

waarbij $N \lhd \pi_1(U_1, x_0)$ de normaaldeler is die wordt voortgebracht door het beeld van het homomorfisme $j_*\colon \pi_1(U_{12}, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0)$, met $j\colon U_{12} \hookrightarrow U_1$ de inclusie-afbeelding.

Uit de manier waarop we de randen van V aan elkaar plakken, zien we dat U_1, het quotiënt van $\tilde{U}_1$, niets anders is dan een "dikke" versie van de vereniging van twee cirkels

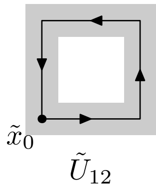


In het bijzonder is $q(\partial V) \subset U_1$ een deformatieretract van U_1. We vinden dus dat

$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}\,,$$

de vrije groep voortgebracht door de klassen van de lussen a en b. Dit is natuurlijk niet helemaal correct, want a en b hebben basispunt y_0, niet x_0. Om Seifert-van Kampen te kunnen toepassen hebben we immers een basispunt nodig dat in U_{12} ligt. De oplossing is simpel: kies een paadje α binnen U_1 van x_0 naar y_0 en kijk naar het geïnduceerde isomorfisme $\pi_1(U_1, y_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U_1, x_0)$, gegeven door $[\gamma] \mapsto [\alpha * \gamma * \alpha^{-1}]$. Dan zijn de beelden van de klassen van a en b voortbrengers voor $\pi_1(U_1, x_0)$. In wat volgt zullen we gewoon weer a en b schrijven voor de klassen van de lussen $\alpha * a * \alpha^{-1}$ en $\alpha * b * \alpha^{-1}$ in $\pi_1(U_1, x_0)$.

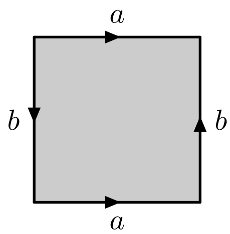
We weten dat U_{12} homotopie-equivalent is met S^1, dus $\pi_1(U_{12}, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Een voortbrenger is de lus die je krijgt door in $\tilde{U}_{12}$ vanuit $\tilde{x}_0$ een "rondje" te lopen tegen de klok in



en dan het beeld te nemen in U_{12}. Onder het homomorfisme $j_*\colon \pi_1(U_{12}, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0)$ beeld deze lus af op de klasse $aba^{-1}b^{-1}$, dus de normaaldeler N die we uitdelen wordt voortgebracht door dit element $aba^{-1}b^{-1}$. Dat betekent niets anders dan dat we in de quotiëntgroep $\pi_1(U_1, x_0)/N$ de relatie opleggen dat $aba^{-1}b^{-1} = 1$, oftewel, $ab = ba$. We vinden dus dat $\pi_1(T, x_0)$ wordt voortgebracht door a en b en dat deze elementen commuteren in $\pi_1(T, x_0)$; dus $\pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

15.9. Voorbeeld. Als volgende gaan we de fundamentaalgroep berekenen van de Kleinse fles K. Aangezien deze niet is in te bedden in $\mathbb{R}^3$ lijkt dit misschien een moeilijke opgave. Het tegendeel is echter waar, want het volstaat om een kleine aanpassing te maken in de voorgaande berekening.

We beschrijven de Kleinse fles weer als een quotiënt van het vierkant V, waarbij we enkel iets veranderen in de manier waarop we de randen aan elkaar plakken.



De overdekking van V die we nemen is precies dezelfde als in het vorige voorbeeld, en net als in dat voorbeeld krijgen we een open overdekking $K = U_1 \cup U_2$ door de beelden van $\tilde{U}_n$ ($n = 1, 2$) te nemen onder de quotiëntafbeelding $q\colon V \twoheadrightarrow K$. Ook in dit geval is $q|_{\tilde{U}_2}\colon \tilde{U}_2 \to U_2$ een homeomorfisme en is U_2 dus samentrekbaar. Om er achter te komen hoe U_1 er uit ziet, kun je het beste even aan de slag met een stuk papier en een rol plakband. De U_1 in het vorige voorbeeld (de torus) krijg je door eerst van twee stroken papier twee cilinders te maken en deze vervolgens aan elkaar te plakken. (Je kunt het beste beginnen met vrij lange stroken die je aan de korte kanten aan elkaar plakt, zodat je twee vrij ondiepe cilinders krijgt.) In dit geval (de Kleinse fles) zul je vinden dat U_1 een cilinder is die aan een Möbiusband is geplakt. Voor het homotopie-type maakt dit echter niet uit want ook in dit geval is U_1 homotopie-equivalent met een vereniging van twee cirkels die in een punt aan elkaar zijn geplakt. (Deze cirkels krijg je door op je cilinder en op de Möbiusband de middellijn te tekenen; de vereniging van deze twee cirkels is dan een deformatieretract van de totale figuur.)

Wat wel echt verandert, is dat het beeld van de voortbrenger van $\pi_1(U_{12}, x_0) \cong \mathbb{Z}$ onder het homomorfisme $j_*\colon \pi_1(U_{12}, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0)$ nu niet meer gelijk is aan de klasse $aba^{-1}b^{-1}$ maar aan $aba^{-1}b$. (Immers, als je tegen de klok in een rondje loopt langs de rand van het vierkant, beginnend vanaf de linkerbenedenhoek, dan ga je bij de vierde zijde niet tegen de richting van de pijl in, zoals dat bij de torus het geval was, maar ga je juist met de pijl mee.) Het antwoord dat we vinden is dat

$$\pi_1(K, x_0) \cong \big\langle a, b \mid aba^{-1}b \big\rangle\,;$$

dit is het quotiënt van de vrije groep voortgebracht door twee elementen a en b modulo de normaaldeler voortgebracht door het element $aba^{-1}b$. Dit betekent dat je de elementen van $\pi_1(K, x_0)$ kunt beschrijven als woorden in de letters a en b waarbij je de extra rekenregel hebt dat $ab = b^{-1}a$.

15.10. Zoals eerder gezegd, zullen we het bewijs van de Stelling van Seifert en van Kampen niet geven. Hierbij echter toch een paar opmerkingen daarover. Om te beginnen volgt uit Lemma 12.17 dat het diagram (1) commutatief is. De universele eigenschap van het geämalgameerde produkt geeft ons dan een uniek homomorfisme

$$\varphi\colon \pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_{12},x_0)} \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

zo dat voor elke klasse $[\alpha] \in \pi_1(U_1, x_0)$ (resp. $[\alpha] \in \pi_1(U_2, x_0)$) geldt dat $\varphi\big([\alpha]\big) = i_{1,*}\big([\alpha]\big)$ (resp. $\varphi\big([\alpha]\big) = i_{2,*}\big([\alpha]\big)$).

Het is niet zo moeilijk te bewijzen dat het homomorfisme φ surjectief is. Het idee is dat we elke klasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ kunnen schrijven als een woord

$$[\gamma] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \cdots * [\alpha_r]$$

waarbij elk van de lussen α_i helemaal in U_1 of helemaal in U_2 ligt. Om dit precies te maken, kijken we, bij een gegeven lus $\gamma\colon I \to X$, naar de open overdekking $I = \gamma^{-1}(U_1) \cup \gamma^{-1}(U_2)$. Uit Lemma 8.23 volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat elke deelverzameling $A \subset I$ met diameter $< \delta$ helemaal bevat is in een van de twee open verzamelingen $\gamma^{-1}(U_i)$. Hieruit volgt dat we getallen

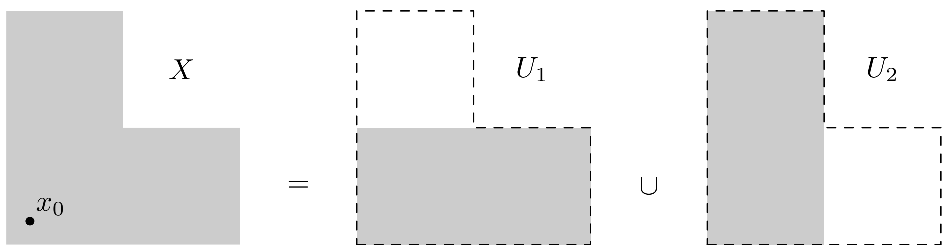
$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{r-1} < y_r = 1$$

kunnen vinden zo dat elk van de intervallen $A_k = [y_{k-1}, y_k]$ helemaal bevat is in $\gamma^{-1}(U_1)$ of in $\gamma^{-1}(U_2)$. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we bovendien aannemen dat achtereenvolgens

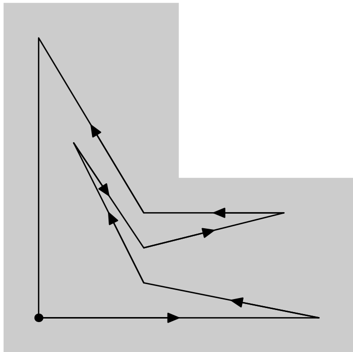
$$\gamma(A_1) \subset U_1\,, \quad \gamma(A_2) \subset U_2\,, \quad \gamma(A_3) \subset U_1\,, \quad \text{etc.}$$

(Verwissel indien nodig de rollen van U_1 en U_2.) In het bijzonder impliceert dit dat $\gamma(y_k) \in U_{12}$ voor alle k. Omdat U_{12} wegsamenhangend is, bestaat er een pad β_k van x_0 naar $\gamma(y_k)$. Definieer nu lussen α_k met basispunt x_0 door eerst het pad β_{k-1} te volgen van x_0 naar $\gamma(y_{k-1})$, dan langs het pad γ van $\gamma(y_{k-1})$ naar $\gamma(y_k)$ te lopen, en vervolgens in omgekeerde richting langs het pad β_k van $\gamma(y_k)$ terug te lopen naar x_0.

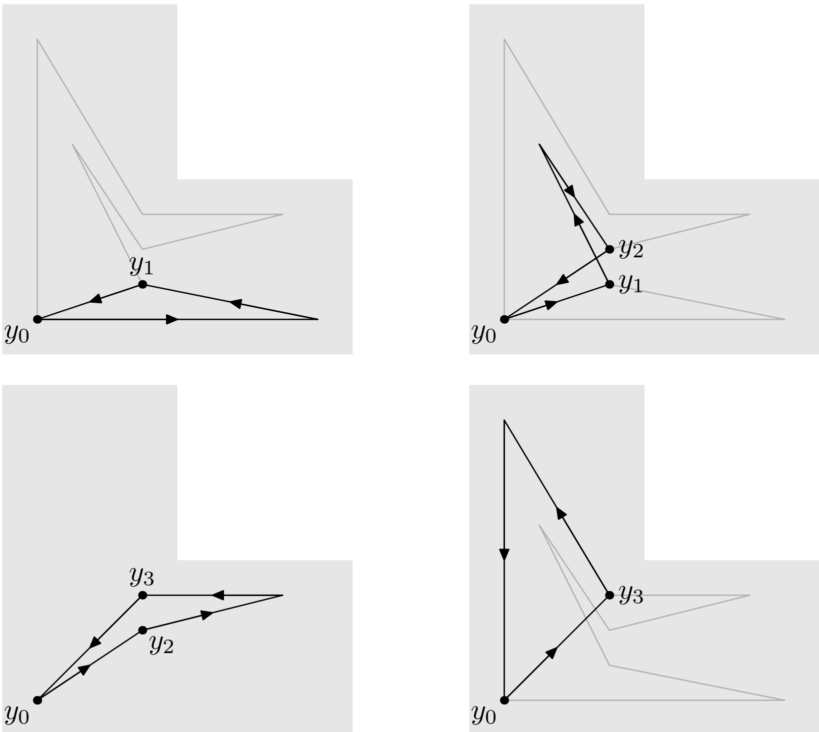
Om dit te illustreren, kijken we naar een overdekking van een ruimte X die er als volgt uitziet:



Stel het pad γ ziet er als volgt uit:



We willen de klasse van dit pad γ schrijven als een product van klassen van paden α_i die elk helemaal in U_1 of U_2 liggen. Daartoe merken we op dat de klasse $[\gamma]$ in dit voorbeeld equivalent is met de samenstelling van de volgende paden:



Deze paden liggen allemaal helemaal in U_1 of U_2, zoals gewenst.

Het is mogelijk, maar een beetje bewerkelijk, om met soortgelijke argumenten te bewijzen dat het homomorfisme φ ook injectief is. Een bewijs langs deze lijnen vind je bijvoorbeeld in de boeken van Bredon en Hatcher.

In het vak Algebraïsche Topologie wordt een geheel andere interpretatie van de fundamentaalgroep behandeld, die te maken heeft met zogenaamde topologische overdekkingen. (Dit begrip is in 13.1 al kort genoemd.) In deze taal blijkt de Stelling van Seifert-van Kampen heel gemakkelijk te bewijzen te zijn, uitgaande van de universele eigenschap van het geämalgameerde produkt.

We sluiten af met nog een voorbeeld van een berekening van een fundamentaalgroep.

15.11. Voorbeeld. We kijken naar de projectieve ruimte $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. We beschrijven deze als een quotiënt van de 2-sfeer $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ onder de identificatie van antipodale punten. Anders gezegd: de groep $\{\pm 1\}$ werkt op S^2 en $S^2/\{\pm 1\}$ is de reële projectieve ruimte $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. (In coördinaten wordt de werking van het element -1 gegeven door $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.)

Bekijk de open deelverzamelingen $\tilde{U}_1$ en $\tilde{U}_2$ van S^2 gegeven door

$$\tilde{U}_1 = \bigl\{(x, y, z) \in S^2 \bigm| -\tfrac{1}{2} < z < \tfrac{1}{2}\bigr\} \quad \text{en} \quad \tilde{U}_2 = \bigl\{(x, y, z) \in S^2 \bigm| z > 0\bigr\}$$

en laat U_i het beeld zijn van $\tilde{U}_i$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dan is $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U_1 \cup U_2$ een open overdekking. We gaan de fundamentaalgroep van $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ berekenen aan de hand van deze open overdekking. We kiezen als basispunt $x_0 \in U_{12}$ bijvoorbeeld $x_0 = (12/13 : 0 : 5/13)$. We zullen dit basispunt in de berekeningen echter zoveel mogelijk weglaten.

Zij $q\colon S^2 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de quotiëntafbeelding. De afbeelding $q|_{\tilde{U}_2}\colon \tilde{U}_2 \to U_2$ is een homeomorfisme dus U_2 is samentrekbaar. Hieruit volgt dat $\pi_1\bigl(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0\bigr) \cong \pi_1(U_1, x_0)/N$ waarbij N de normaaldeler is die wordt voortgebracht door het beeld van het homomorfisme $\pi_1(U_{12}, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0)$.

Het beeld van de evenaar in S^2 is de projectieve lijn van punten $(x : y : 0)$ in $\mathbb{P}^2$; deze projectieve lijn is een deformatieretract van U_1, dus

$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \pi_1\bigl(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\bigr) \cong \mathbb{Z}\,;$$

waarbij we gebruiken dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ homeomorf is met een cirkel. (Je kunt nagaan dat U_1 zelf een Möbiusband is.) Een voortbrenger voor $\pi_1(U_1, x_0)$ is de lus α die je krijgt door in S^2 een *half* rondje over de evenaar te lopen en dan het beeld te nemen onder q. (Net zoals in de eerdere voorbeelden is dit niet helemaal correct, omdat het basispunt x_0 niet op het beeld van de evenaar ligt. Om dit te corrigeren moet je eerst van het basispunt naar de evenaar lopen, dan een rondje lopen en dan weer teruglopen naar het basispunt.)

De doorsnede $\tilde{U}_{12} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ beeld homeomorf af op zijn beeld $U_{12} = U_1 \cap U_2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Nu is duidelijk dat $U_{12} = \bigl\{(x, y, z) \in S^2 \bigm| 0 < z < \frac{1}{2}\bigr\}$ homotopie-equivalent is met de cirkel S^1 en dus is $\pi_1(U_{12}, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Een voortbrenger is het beeld β van de lus $\tilde{\beta}$ in $\tilde{U}_{12}$ gegeven door

$$\tilde{\beta}(u) = \bigl(\tfrac{12}{13}\cos(2\pi u), \tfrac{12}{13}\sin(2\pi u), \tfrac{5}{13}\bigr)\,.$$

(Dit is een rondje om de breedtecirkel op S^2 op z-hoogte $5/13$.) Dan zien we dat $[\beta] = 2[\alpha]$; de conclusie is derhalve dat

$$\pi_1\bigl(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0\bigr) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

Opgaven bij hoofdstuk 15.

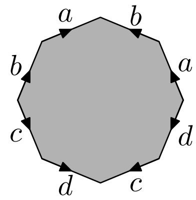
Opgave 15.1. Zij G de fundamentaalgroep van de Kleinse fles; deze groep heeft de presentatie $G = \bigl\langle a, b \bigm| aba^{-1}b\bigr\rangle$.

(i) Laat zien dat in de groep G de volgende relaties gelden:

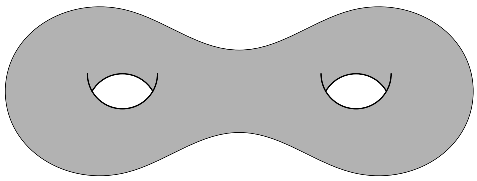
$$ab = b^{-1}a\,, \qquad a^{-1}b = b^{-1}a^{-1}\,, \qquad ab^{-1} = ba\,, \quad \text{en} \quad a^{-1}b^{-1} = ba^{-1}\,.$$

(ii) Bewijs dat elk element $g \in G$ te schrijven is als $g = a^m b^n$ voor uniek bepaalde gehele getallen m en n. (Gebruik de interpretatie als fundamentaalgroep om te bewijzen dat $a^k b^l \neq a^m b^n$ als $(k, l) \neq (m, n)$.)

Opgave 15.2. Plak de randen van een regelmatige achthoek op elkaar zoals aangegeven in de figuur.



(Plak de zijden met gelijke letters op elkaar, zodanig dat de pijlen op elkaar komen.) Overtuig je er van dat het resultaat een oppervlak X is dat er als volgt uitziet:

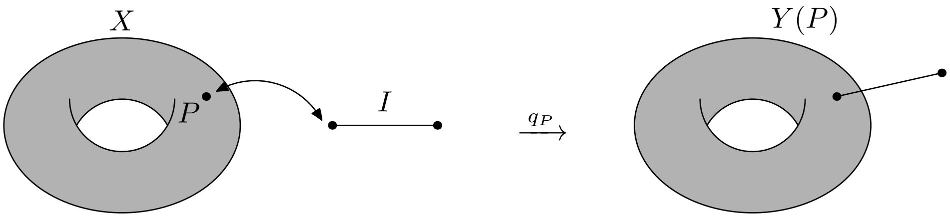


We noemen dit een compact oppervlak van geslacht 2. Bewijs dat de fundamentaalgroep van X (met keuze van een basispunt x_0) gegeven wordt door

$$\pi_1(X, x_0) = \big\langle a, b, c, d \;\big|\; [a, b][c, d] \big\rangle\,.$$

(De relatie die wordt opgelegd is dus dat $[a, b][c, d] = 1$; hierbij is natuurlijk $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ en analoog voor $[c, d]$.)

Opgave 15.3. Zij X een wegsamenhangende ruimte. Voor $P \in X$ definiëren we een nieuwe ruimte $Y(P)$ door in het punt P een copie van het eenheidsinterval I aan te hechten. Preciezer: $Y(P)$ is de ruimte die je krijgt door te beginnen met de disjuncte vereniging $X \cup I$ en vervolgens het punt $P \in X$ te identificeren met het punt $0 \in I$. Zij $q_P\colon (X \cup I) \to Y(P)$ de quotiëntafbeelding.



Het eerste doel van de opgave is te laten zien dat het homotopie-type van $Y(P)$ niet afhangt van de keuze van het aanhechtingspunt P.

(i) Zij $\beta\colon I \to X$ een pad in X met beginpunt $P = \beta(0)$ en eindpunt $P' = \beta(1)$. Definieer een afbeelding $f_{I,\beta}\colon I \to Y(P')$ door

$$y \mapsto \begin{cases} q_{P'}\bigl(\beta(2y)\bigr) & \text{voor } 0 \leqslant y \leqslant 1/2, \\ q_{P'}(2y-1) & \text{voor } 1/2 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Toon aan dat we een welgedefinieerde continue afbeelding $f_\beta\colon Y(P) \to Y(P')$ krijgen door

$$\begin{cases} f_\beta\bigl(q_P(x)\bigr) = q_{P'}(x) & \text{voor } x \in X; \\ f_\beta\bigl(q_P(y)\bigr) = f_{I,\beta}(y) & \text{voor } y \in I. \end{cases}$$

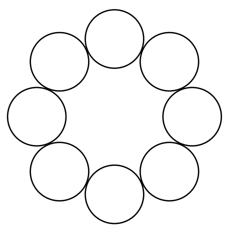
(ii) Zij $\beta'\colon I \to X$ het inverse pad van P' naar P, gegeven door $\beta'(y) = \beta(1-y)$. Laat zien dat $f_{\beta'} \circ f_\beta\colon Y(P) \to Y(P)$ homotoop is met de identiteit op $Y(P)$ relatief het punt $q_P(1)$. (Het punt $q_P(1)$ is gewoon het uiteinde van het aangehechte touwtje.)

In plaats van een touwtje gaan we nu een lus aanhechten. Daartoe nemen we twee punten P, $Q \in X$ (die gelijk mogen zijn) en definiëren een nieuwe ruimte $\tilde{X}_{P,Q}$ door te beginnen met de disjuncte vereniging $X \cup I$ en vervolgens $0 \in I$ te identificeren met P en $1 \in I$ te identificeren met Q.

(iii) Bewijs, gebruik makend van het voorgaande, dat het homotopie-type van $\tilde{X}_{P,Q}$ niet afhangt van de keuze van P en Q. (We nemen nog steeds aan dat X wegsamenhangend is.)

(iv) Gegeven is nu dat X een wegsamenhangende en samentrekbare niet-lege open verzameling U bevat. Bewijs, gebruik makend van Stelling 13.4 en de Stelling van Seifert en van Kampen, dat voor alle P en Q in X geldt dat $\pi_1\bigl(\tilde{X}_{P,Q}, P\bigr) \cong \pi_1(X,P) * \mathbb{Z}$. [*Hint:* Gebruik (iii) om te reduceren naar het geval dat $P = Q \in U$.]

(v) Bepaal de fundamentaalgroep van de ruimte



(opgevat als deelruimte van $\mathbb{R}^2$).

LITERATUUR

N. Bourbaki, *Topologie Générale*, in het Engels vertaald als *General Topology*. Franse editie: Masson, Engelse editie: Springer.

Wie niet weet "wie" N. Bourbaki is, moet maar eens in de bibliotheek in enkele van "zijn" boeken gaan bladeren. Encyclopedisch; zeer efficient opgezet. Zoals alle boeken van Bourbaki is dit meer bedoeld als naslagwerk voor wie al een vrij goede kennis van het vak heeft. Minder geschikt als eerste leerboek, maar er staat enorm veel in.

L.A. Steen and J.A. Seebach, Jr., *Counterexamples in topology*, Dover Publications.

Een curiositeit. Zoals de titel al aangeeft, is dit boek vrijwel geheel gewijd aan voorbeelden van topologische ruimten. De topologie zit vol met begrippen die "bijna equivalent" zijn, maar net niet helemaal, en de voorbeelden in dit boek zijn bedoeld om aan te tonen dat een ruimte met eigenschappen [...lijst van eigenschappen...] in het algemeen niet ook eigenschappen [...andere eigenschappen...] heeft. Dus mocht je ooit een voorbeeld willen zien van een ruimte die wel aftelbaar paracompact is maar niet metacompact, dan is dit je boek.

J.R. Munkres, *Topology (2nd ed.)*, Prentice Hall.

Een prima tekstboek. Een goede aanvulling op deze syllabus. Er staat veel meer in, zowel de meer elementaire alsook de gevorderde onderwerpen worden uitvoerig behandeld.

G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer.

Een meer meetkundig geörienteerd boek, dat aanzienlijk verder gaat en bijvoorbeeld (co)homologie- en homotopietheorie behandelt. Een goed startpunt voor verdere studie. Het eerste hoofdstuk gaat in snel tempo door de elementaire topologie.

A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press. (Ook gratis verkrijgbaar op Hatcher's webpagina.)

Een van de vele goede boeken over algebraïsche topologie. Hoofdstukken 0 en 1 sluiten goed aan op de laatste hoofdstukken van deze syllabus.

INDEX