

Planaire en toroidale grafen

Gerjan Hebbink

Planaire en toroidale grafen

Gerjan Hebbink
0716189
Bachelor wiskunde
Radboud Universiteit Nijmegen

Begeleid door Dr. Wieb Bosma
2^e lezer: Dr. Wim Veldman
16 juli 2010

Inleiding

Ik zie het al zo voor me. Een bekende fabrikant van puzzelboekjes komt met een nieuwe puzzel. De opgave is om van een tekening bestaande uit wat punten en lijnen een nieuwe tekening te maken. Natuurlijk zijn er wat eisen:

- De lijnen in de nieuwe tekening mogen elkaar niet kruisen.
- Om de nieuwe tekening te verkrijgen mag alleen geschoven worden met de punten en lijnen van de oude tekening. Punten en lijnen toevoegen of verwijderen is absoluut verboden.

Het fijne aan zulke puzzels in puzzelboekjes is dat ze altijd op te lossen zijn. Daar worden de tekeningen immers speciaal op uitgekozen. Maar natuurlijk zijn er ook tekeningen, in de wiskundige vaktaal grafen genoemd, die niet na een beetje schuiven een tekening zonder kruisende lijnen opleveren. Hoe weet je nu dat je met zo'n tekening te maken hebt? Want als je na een uur proberen nog geen goede nieuwe tekening hebt gevonden, moet je misschien gewoon nog een uur doorzoeken. Het is dus een vraag die niet altijd zo makkelijk te beantwoorden is.

Het is dan ook niet zo verwonderlijk dat er wiskundigen zijn die zich op deze vraag hebben gestort. Zo zijn uiteindelijk de theorieën over planaire grafen (tekeningen die in het puzzelboekje zouden kunnen staan) en niet-planaire grafen (tekeningen waarvan geen goede nieuwe tekening te maken is) ontstaan. Ik vond het intrigerend om te zien dat een probleem dat zo mooi is in zijn eenvoud toch veel gecompliceerde wiskunde kan herbergen. Toch is het antwoord op de vraag dan weer ontzettend simpel. Als een deel van de tekening op één van de onderstaande figuren lijkt, dan is de tekening niet-planair. Is dit niet het geval, dan kan je hem gelijk opsturen naar de fabrikant van het puzzelboekje. De puzzel is dan namelijk wel op te lossen. Dit resultaat staat bekend als het Theorema van Kuratowski. Het is in 1930 door de Poolse wiskundige Kazimierz Kuratowski in een artikel gepresenteerd.



In hoofdstuk 1 zullen we wat belangrijke begrippen in de grafentheorie definiëren. Met behulp van deze definities zullen we vervolgens gaan bewijzen dat de twee figuren van hierboven niet-planair zijn. Hoofdstuk 2 staat in het teken van het bewijs van het Theorema van Kuratowski. Het is een lang bewijs, maar zeker de moeite waard om te lezen. In het laatste hoofdstuk hebben we het over andere oppervlakken, en dan vooral over het oppervlak van de torus (die bij de meeste mensen bekend staat onder de naam donut). Welke grafen kunnen we tekenen op de torus zonder dat de lijnen elkaar snijden? Is er ook een variant van het Theorema van Kuratowski voor de torus? Zo ja, welke grafen komen daar dan voor in aanmerking? Dit zijn deels onopgeloste vraagstukken die we

in hoofdstuk 3 proberen op te lossen. Helaas heb ik niet op alle vragen een antwoord kunnen geven. Dit heeft veel te maken met de moeilijkheid van het probleem. Waar er in het Theorema van Kuratowski slechts een tweetal belangrijke grafen was, zijn dat er bij een variant van de stelling voor de torus op zijn minst 239.451. Aan het eind van deze scriptie gaan we in op de vraag waarom dit aantal zo groot is.

Ten slotte wil ik mijn begeleider bedanken, Dr. Wieb Bosma. Niet alleen legde hij mij dit onderwerp voor, ook luisterde hij vol aandacht naar mijn bevindingen tijdens het onderzoek en wist hij me vaak te helpen door me artikelen te overhandigen of tips te geven.

Inhoudsopgave

1	Planaire grafen	4
2	Bewijs Theorema van Kuratowski	8
3	Toroïdale Grafen	15

Hoofdstuk 1

Planaire grafen

Definitie 1. Een **graaf** $G = (V, E)$ is een geordend paar bestaande uit een verzameling V van punten en een verzameling E van zijden. Elke $e \in E$ is van de vorm $\{u, v\}$ met $u, v \in V$ en correspondeert met de zijde tussen u en v . Een **deelgraaf** G' van G is een graaf $G' = (V', E')$ met $V' \subset V$, $E' \subset E$ en elke $e' \in E'$ is een zijde tussen twee punten uit V' . De **graad** van een punt v is het aantal zijden waarin v voorkomt, $\delta(G)$ noteert de minimum graad van de punten in V . Een **pad** van lengte n tussen twee punten $a, b \in V$ is een rij $v_0 v_1 \dots v_n$ van verschillende punten uit V met $v_0 = a$, $v_n = b$ en $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. De afstand $d(u, v)$ tussen twee punten $u, v \in V$ is de lengte van het kortste pad tussen u en v als die er is en gelijk aan ∞ als er geen pad is tussen u en v . Een **n-cykel** is een pad van lengte n met $v_0 = v_n$. G heet **samenhangend** als alle punten door een pad verbonden zijn (en **onsamenhangend** als dit niet het geval is).

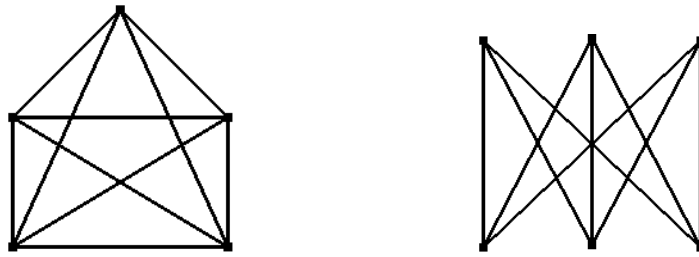
Opmerking: Merk op dat de definitie van een n-cykel niet volledig correct is omdat er, terwijl in een pad alle punten verschillend zouden moeten zijn, wordt geëist dat $v_0 = v_n$. De definitie wordt er mijns inziens echter onoverzichtelijker op als we hem meer precies zouden maken.

Voorbeeld 2. Enkele bekende grafen zijn:

- K_n , de volledige graaf op n punten. Oftewel een graaf $G = (V, E)$ met $|V| = n$ en $E = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$. In figuur 1.1 staat K_5 afgebeeld.
- $K_{m,n}$, de volledige bipartiete graaf. Deze graaf bestaat uit 2 groepen van respectievelijk m en n punten, waarbij alleen punten uit de verschillende groepen met elkaar verbonden zijn. Wat preciezer: Een graaf $G = (V, E)$ is de volledige bipartiete graaf $K_{m,n}$ als $V = U \cup W$, $U \cap W = \emptyset$, $|U| = m$, $|W| = n$ en $E = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in U, v_2 \in W\}$. Zie figuur 1.1 voor $K_{3,3}$.

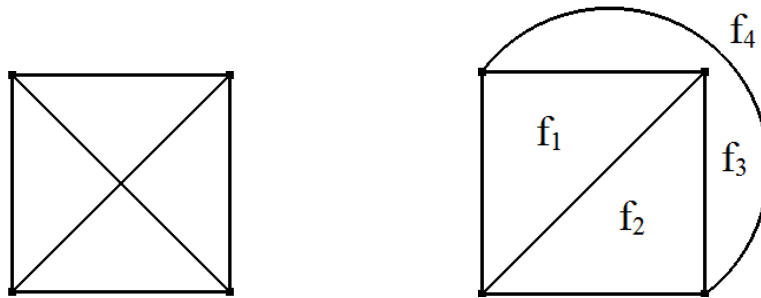
In beide grafen is te zien dat er wat zijden zijn die elkaar snijden. Je zou je kunnen afvragen of je deze grafen anders kunt tekenen zodat er geen zijden meer zijn die elkaar snijden. Zo komen we bij de definitie van een planaire graaf:

Definitie 3. Een graaf is **planair** als hij in het platte vlak te tekenen is zonder dat de zijden elkaar snijden. In zo'n **vlakke graaf** zijn er verschillende gebieden: 1 **uitwendig gebied** en voor de rest **inwendige gebieden**.



Figuur 1.1: Links: K_5 , rechts: $K_{3,3}$.

Voorbeeld 4. In figuur 1.2 is aan de linkerkant K_4 te zien. Ondanks dat de zijden elkaar in het middelpunt snijden, is deze graaf toch planair. Aan de rechterkant staat namelijk een vlakke graaf van K_4 . Hierin staan ook de verschillende gebieden gemarkeerd. f_1 , f_2 en f_3 zijn inwendige gebieden, f_4 is een uitwendig gebied. Daarnaast kan opgemerkt worden dat elk gebied een 3-cykel is, m.a.w. elk gebied wordt begrensd door 3 zijden.



Figuur 1.2: K_4 en een vlakke graaf van K_4 .

Nu we een planaire graaf hebben gezien is een logische vraag: Zijn er ook niet-planaire grafen. Jazeker! De grafen van fig. 1.1, K_5 en $K_{3,3}$, zijn niet planair. Om dit te bewijzen kunnen we de volgende stelling goed gebruiken:

Stelling 5 (Euler's veelvlakformule). Voor elk convex veelvlak met V punten, E zijden en F gebieden geldt:

$$V - E + F = 2.$$

In [1] wordt een bewijs van deze stelling gegeven en laat men tevens zien dat we deze formule kunnen herschrijven. Voor een vlakke graaf van een samenhangende graaf met p punten, q zijden en r gebieden geldt namelijk ook:

$$p - q + r = 2. \tag{1.1}$$

Stel nu eens dat zo'n vlakke graaf alleen maar uit n -cyclen bestaat. Aangezien elke zijde in 2 cyclen voorkomt, geldt dan $r = 2q/n$. Met (1.1) volgt nu: $2 = p - q + r = p - q + 2q/n = p + q(2 - n)/n$. Hieruit volgt:

Gevolg 6. Voor een vlakke graaf van een samenhangende graaf G met p punten, q zijden en waarvoor elk gebied een n -cykel is, geldt:

$$q = \frac{n(p-2)}{(n-2)}. \quad (1.2)$$

Gevolg 7. Als een samenhangende graaf G planair is en $p \geq 3$ punten en q zijden heeft, dan $q \leq 3p - 6$. Als G geen 3-cykels bevat, dan $q \leq 2p - 4$.

Bewijs. De vlakke graaf van G bereikt zijn maximaal aantal zijden als elk gebied een 3-cykel is. Substitutie van $n = 3$ in (1.2) geeft $q \leq 3p - 6$. Als de vlakke graaf geen 3-cykels bevat, dan wordt het maximaal aantal zijden bereikt als $n = 4$ in (1.2), dus $q \leq 2p - 4$. \square

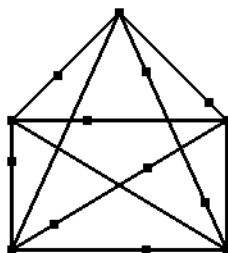
Met dit gevolg is het hoofdresultaat nu makkelijk te bewijzen.

Stelling 8. K_5 en $K_{3,3}$ zijn niet planair.

Bewijs. K_5 heeft 5 punten en dus zou voor planariteit moeten gelden dat $q \leq 9$. $K_{3,3}$ heeft 6 punten en geen 3-cykels. Er zou dus moeten gelden dat $q \leq 8$. Omdat K_5 10 zijden en $K_{3,3}$ 9 zijden heeft, zijn beide grafen niet planair. \square

Zouden we nu van nog meer grafen weten dat ze niet-planair zijn? Wederom is het antwoord jazeke! Kijk eens naar de graaf van figuur 1.3. Deze graaf is hetzelfde als K_5 , behalve dat er wat zijden onderverdeeld zijn doordat er wat extra punten op die zijden staan. Deze punten geven geen extra mogelijkheden om de graaf in het platte vak te tekenen zonder dat de zijden elkaar snijden. Omdat K_5 niet planair is, is deze graaf dat ook niet. We noemen deze graaf ook wel homeomorf aan K_5 . De precieze definitie van homeomorfe grafen is:

Definitie 9. Twee grafen zijn homeomorf als beiden verkregen kunnen worden uit dezelfde graaf door een onderverdeling van de zijden.



Figuur 1.3: Een graaf die homeomorf is aan K_5 .

Alle grafen homeomorf aan K_5 zijn dus niet planair, net zo zijn alle grafen homeomorf aan $K_{3,3}$ niet planair.

Maar als er al geen vlakke graaf is van een graaf G die homeomorf is aan K_5 of $K_{3,3}$, dan is er al helemaal geen vlakke graaf van een graaf die G als deelgraaf bevat. Zo komen we tot de volgende stelling:

Stelling 10. Als een graaf een deelgraaf homeomorf aan K_5 of $K_{3,3}$ bevat, dan is die graaf niet planair.

Deze stelling kunnen we goed gebruiken om te laten zien dat een graaf niet planair is. Als de omgekeerde implicatie waar zou zijn, dan kunnen we ook aantonen dat een graaf wel planair is, namelijk door te laten zien dat die graaf geen deelgraaf homeomorf aan K_5 of $K_{3,3}$ bevat. En de omgekeerde implicatie blijkt waar te zijn! Dit resultaat staat bekend als het Theorema van Kuratowski. Het volgend hoofdstuk zal geheel in het teken staan van het bewijs van deze stelling.

Hoofdstuk 2

Bewijs Theorema van Kuratowski

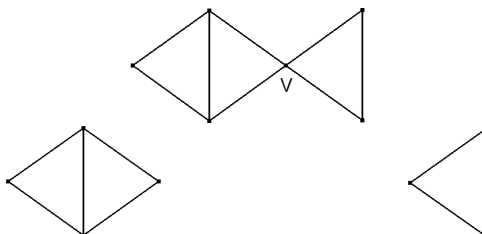
We willen dus het Theorema van Kuratowski bewijzen. Het eerste bewijs is in 1930 door Kazimierz Kuratowski gegeven [2]. Ik heb nog even naar de Engelse vertaling van het bewijs [3] gekeken. Uiteindelijk ben ik me echter gaan richten op een bewijs dat afkomstig is uit een boek van Harary [1]. Dit is ook de versie die hier (en deels al in hoofdstuk 1) wordt gegeven.

Stelling 11 (Theorema van Kuratowski). *Een graaf is planair dan en slechts dan als hij geen deelgraaf homeomorf aan K_5 of $K_{3,3}$ bevat.*

Bewijs. Uit de stelling aan het eind van het vorig hoofdstuk weten we al dat wanneer een graaf planair is, hij geen deelgraaf homeomorf aan K_5 of $K_{3,3}$ bevat.

Omgekeerd is de stelling wat lastiger te bewijzen. In het vorige hoofdstuk zijn we de lange lijst met definities geëindigd met de opmerking dat een graaf samenhangend is als elk paar punten door een pad verbonden is. Om verder te gaan moeten we onze lijst nog een klein beetje uitbreiden.

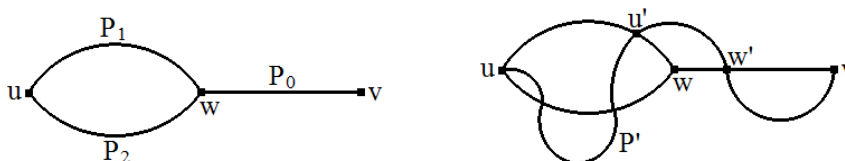
Definitie 12. Een **component** van een graaf $G = (V, E)$ is een maximale samenhangende deelgraaf. Een punt $v \in V$ is een **snijpunt** van een samenhangende graaf G als de graaf bij verwijdering van v onsamenvast wordt. G heet **2-samenhangend** als V geen snijpunten bevat. Een **blok** van een graaf is een maximale 2-samenhangende deelgraaf.



Figuur 2.1: Boven: Een graaf met een snijpunt v , onder: De twee blokken van de graaf.

Lemma 13. *Als een graaf $G = (V, E)$ van tenminste drie punten een blok is, dan liggen elke twee punten van G op een gemeenschappelijke cykel.*

Bewijs. Zij $u, v \in V$ en U de verzameling van alle punten behalve u die op een cykel met u liggen. Zij w een buur van u (oftewel een punt met $\{u, w\} \in E$). Omdat G een blok is, kan u geen snijpunt zijn en dus heeft w nog een buur z . Ook w is geen snijpunt en dus is er een pad van z naar u die niet langs w gaat. Samen met de zijden $\{u, w\}$ en $\{w, z\}$ vormt dit pad een cykel. Alle buren van u zitten dus in U ; U is niet leeg.



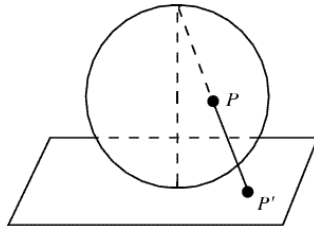
Figuur 2.2: Een situatieschets.

Stel $v \notin U$. Zij w een element uit U waarvoor de $d(w, v)$ minimaal is. Zij P_0 het kortste pad van w naar v en P_1, P_2 de paden van u naar w die samen een gemeenschappelijke cykel van u en w vormen. Omdat w geen snijpunt is, moet er een pad P' zijn zonder w van u naar v . Dit pad snijdt P_1 of P_2 tussen u en w , anders zou het eerste snijpunt van P' met P_0 in U zitten (in het geval dat er een snijpunt is) of zou v zelf in U zitten (in het geval dat P' ook P_0 niet snijdt). Net zo is na te gaan dat P' P_0 tussen w en v snijdt. Zij w' het dichtstbij u liggende punt op P' dat ook op P_0 ligt en u' het dichtstbij v liggende punt op P' dat ook op P_1 of P_2 ligt. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat u' op P_1 ligt. Nu kunnen we een cykel maken door van u naar u' over P_1 te gaan, dan van u' naar w' over P' , van w' naar w over P_0 en ten slotte van w naar u over P_2 . Hieruit volgt dat $w' \in U$. Maar w' ligt op het kortste pad tussen w en v , dus $d(w', v) < d(w, v)$. Dit leidt tot een tegenspraak omdat w het punt uit U is met $d(w, v)$ minimaal. Hieruit volgt dat $v \in U$, dus u en v liggen op een gemeenschappelijke cykel. \square

Als een graaf planair is, kunnen we die graaf logischerwijs ook op het oppervlak van de bol tekenen zonder dat de zijden elkaar snijden. We noemen zo'n tekening een bolgraaf.

Omgekeerd, stel nu eens dat we van een graaf een bolgraaf hebben. Kies een gebied van de bolgraaf en draai de bol zo dat het gebied (en geen punt of zijde!) op de noordpool ligt. Leg een vlak onder de bol en stop vervolgens in de noordpool een laser die stralen uitzendt naar beneden. Elke straal zal één snijpunt met de bol hebben en één snijpunt met het vlak. We kunnen dit ook zien als een afbeelding van het eerste snijpunt naar het snijpunt met het vlak. We noemen deze afbeelding de stereografische projectie (zie figuur 2.3). Op deze manier kunnen we bijna de hele bolgraaf op het platte vlak afbeelden. De plek vanwaar de laser stralen uitzendt, wordt echter niet afgebeeld. Maar omdat op deze plek geen punt of zijde ligt, kan er ook niks afgebeeld worden. Dit is dus geen probleem. We krijgen zo dus een vlakke graaf van de graaf, kortom:

Lemma 14. *Een graaf is planair dan en slechts dan als er een bolgraaf van die graaf is op het oppervlak van de bol.*



Figuur 2.3: De stereografische projectie die o.a. het punt P op P' afbeeldt.

Gevolg 15. *Bij een planaire graaf is er voor elk gebied een vlakke graaf waarbij dat gebied het uitwendig gebied is.*

Bewijs. Zij f een gebied van een planaire graaf. Maak een bolgraaf van de graaf op de bol met dat gebied op de noordpool en voer de stereografische projectie uit. Dan krijgen we een vlakke graaf van de graaf met f als uitwendig gebied. \square

Het is vrij gemakkelijk in te zien dat een graaf planair is dan en slechts dan als zijn componenten planair zijn. Hebben we immers een vlakke graaf van alle componenten apart, dan kunnen we al die componenten ook wel naast elkaar in het platte vlak tekenen zonder dat de zijden elkaar snijden. Een soortgelijke uitspraak kunnen we ook doen voor een graaf en zijn blokken.

Lemma 16. *Een graaf is planair dan en slechts dan als elk van zijn blokken planair is.*

Bewijs. Als een graaf planair is, dan is het duidelijk dat zijn blokken planair zijn. Zij G een graaf met een snijpunt v en twee planaire blokken G_1 en G_2 . Omdat zowel G_1 als G_2 nu het punt v bevatten, hernoemen we dit punt even naar u (voor G_1) en w (voor G_2). Uit het gevolg weten we dat we G_1 en G_2 zo op verschillende plekken in het platte vlak kunnen tekenen, dat u en w beiden het uitwendig gebied grenzen. Nu kunnen we beide grafen naar elkaar toe draaien en u en w ‘aan elkaar plakken’, om zo een vlakke graaf van G te krijgen. G is dus ook planair. Door herhaald toepassen van dit proces kunnen we van elke graaf bestaande uit planaire blokken een vlakke graaf maken. \square

Nu hebben we voor even genoeg lemma’s bekeken, tijd om verder te gaan met het bewijs.

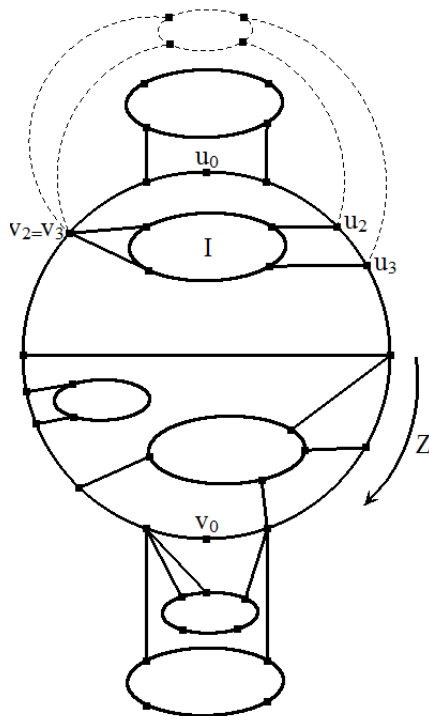
Stel eens dat het Theorema van Kuratowski niet waar is. Dan is er dus een niet-planaire graaf die geen deelgraaf homeomorf aan K_5 of $K_{3,3}$ bevat. Zij G zo’n graaf met een minimaal aantal zijden. Wat weten we over G ?

- $\delta(G) \geq 3$. Dat $\delta(G) > 1$ is duidelijk. Stel $\delta(G) = 2$, dan kunnen we een graaf homeomorf aan G maar met minder zijden maken door het punt v van graad 2 tezamen met de zijden $\{u, v\}$, $\{u', v\}$ waarin v voorkomt te verwijderen en een nieuwe zijde $\{u, u'\}$ toe te voegen (dit proces wordt later het afvlakken van een punt genoemd). Door de homeomorfie met G is deze nieuwe graaf ook niet planair en bevat hij ook geen deelgraaf homeomorf aan K_5 of $K_{3,3}$. Dit is in tegenspraak met dat G de kleinste graaf met deze eigenschappen is.
- G is een blok. Dit volgt uit Lemma 16.

We kunnen een willekeurige zijde $x_0 = \{u_0, v_0\}$ uit G weghalen om zo de planaire graaf $F = G - x_0$ te verkrijgen. Toch weer even een lemma:

Lemma 17. *Er is een cykel in F die u_0 en v_0 bevat.*

Bewijs. Stel dat er geen cykel in F is die u_0 en v_0 bevat. Dan volgt uit Lemma 13 dat u_0 en v_0 in verschillende blokken liggen en dat er dus een snijpunt w is, dat per definitie op elk pad tussen u_0 en v_0 ligt. Nu kunnen we de zijden $\{w, u_0\}$ en $\{w, v_0\}$ toevoegen en zo de nieuwe graaf F_0 met in ieder geval twee blokken B_1 en B_2 krijgen, waarbij u_0 in B_1 ligt en v_0 in B_2 . Omdat B_1 en B_2 allebei minder zijden hebben dan G , moet B_1 planair zijn of een deelgraaf H homeomorf aan K_5 of $K_{3,3}$ bevatten. Stel eens dat dit laatste het geval is. Dan is de graaf die wordt verkregen uit H door $\{w, u_0\}$ te verwijderen en te vervangen door een pad, bestaande uit x_0 en een pad van v_0 naar w , homeomorf aan H en daarnaast een deelgraaf van G . G bevat dus een deelgraaf homeomorf aan H en dus aan K_5 of $K_{3,3}$, tegenspraak. Dit betekent dus dat B_1 en B_2 planair zijn. Uit Gevolg 15 weten we dan dat er vlakke grafen van B_1 en B_2 zijn waarbij de zijden $\{w, u_0\}$ respectievelijk $\{w, v_0\}$ aan het uitwendig gebied grenzen. Hieruit volgt dat er ook een vlakke graaf van F_0 is waarbij beide zijden aan het uitwendig gebied grenzen. Niets ligt ons nu in de weg om door het uitwendig gebied x_0 te tekenen. $F_0 + x_0$ is dus planair en daarnaast is G een deelgraaf van $F_0 + x_0$. G is dus ook planair, wat weer een tegenspraak is. Er is dus wel een cykel in F die u_0 en v_0 bevat. \square



Figuur 2.4: vlakke graaf van F met een cykel Z door u_0 en v_0 die een maximaal aantal gebieden binnen zich heeft.

We weten nu dus dat de planaire graaf F een cykel met daarin u_0 en v_0 bevat. Dan is er dus ook een vlakke graaf van F waarbij een cykel Z die u_0 en v_0 bevat een maximaal aantal gebieden binnen Z heeft liggen. Figuur 2.4 laat zien hoe zo'n vlakke graaf eruit kan zien. Nu kunnen we een nieuwe deelgraaf van F maken bestaande uit de punten buiten Z en de zijden waarvan beide punten buiten Z liggen. De componenten van deze deelgraaf noemen we uitwendige componenten, ze zijn in figuur 2.4 met ellipsen aangegeven. Een uitwendige component kunnen we uitbreiden met de zijden van F die één punt met die component en één punt met Z gemeen hebben, en met de punten die deze zijden gemeen hebben met Z . Deze deelgraaf van F noemen we een buitenstuk van F . Ook de deelgraaf van F bestaande uit een zijde (en zijn twee punten) die buiten Z ligt, maar waarvan beide punten op Z liggen, noemen we een buitenstuk van F . Inwendige componenten en binnenstukken zijn op soortgelijke wijze gedefinieerd.

Als we met de klok mee over Z lopen, zij voor punten $u, v \in Z$, $Z[u, v]$ het pad van u naar v en $Z(u, v)$ het pad van u naar v met daaruit u en v weggelaten ($Z(u, v)$ is niet gedefinieerd als u en v elkaar direct opvolgen). Een binnenstuk of buitenstuk noemen we $u - v$ scheidend als het zowel een punt met $Z(u, v)$ als $Z(v, u)$ gemeen heeft. Wat weten we nu?

- F heeft tenminste één $u_0 - v_0$ scheidend binnenstuk, anders zouden we binnen de cykel x_0 kunnen tekenen en zo een vlakke graaf van G krijgen.
- Een buitenstuk kan geen twee punten met $Z(u_0, v_0)$ of $Z(v_0, u_0)$ gemeen hebben, anders zou er een cykel zijn met daarin u_0 en v_0 die meer gebieden bevat dan Z . Om dezelfde reden kunnen u_0 en v_0 geen deel uitmaken van een buitenstuk.
- Omdat F een blok is (dit volgt uit het bewijs van lemma 17) en dus geen snijpunten bevat, moet een buitenstuk tenminste twee punten gemeen hebben met Z . Hieruit volgt samen met het vorige punt dat een buitenstuk precies twee punten met Z gemeen heeft. Eén van die punten ligt op $Z(u_0, v_0)$, het ander op $Z(v_0, u_0)$. Oftewel, elk buitenstuk is $u_0 - v_0$ scheidend.

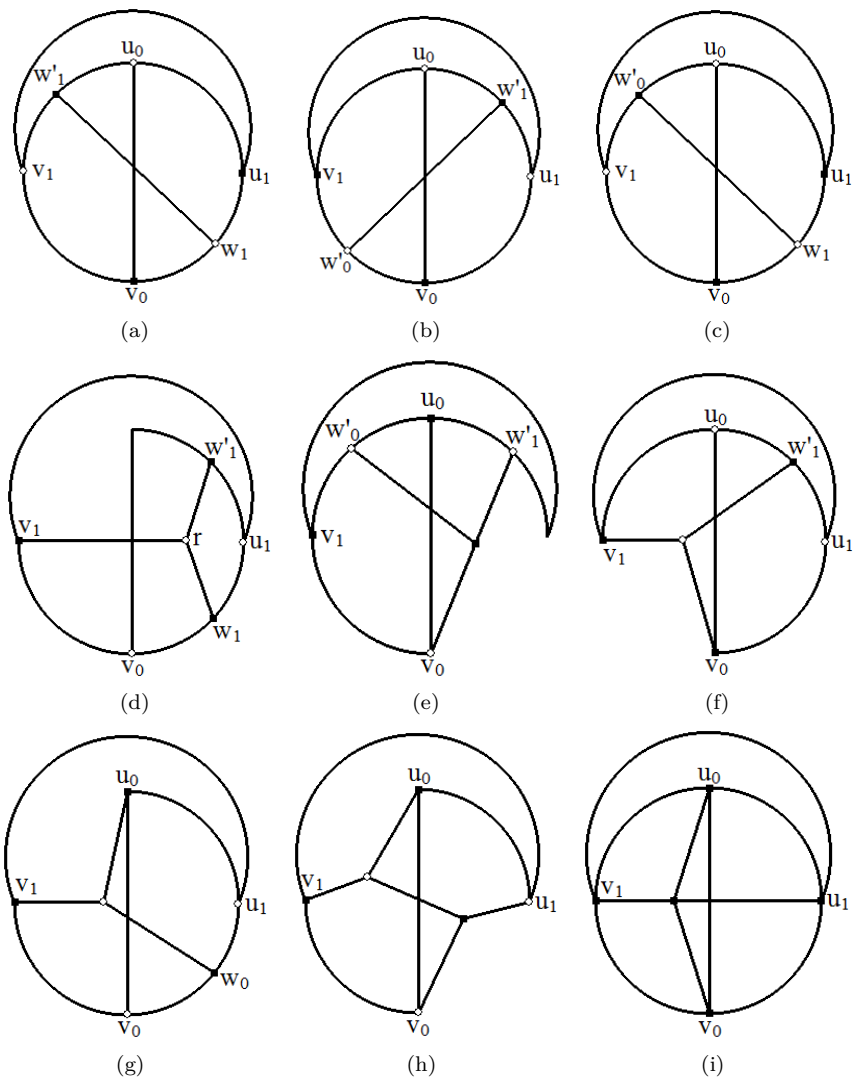
Lemma 18. *Er is een $u_0 - v_0$ scheidend buitenstuk die het punt u_1 met $Z(u_0, v_0)$ en het punt v_1 met $Z(v_0, u_0)$ gemeen heeft, waarvoor er een binnenstuk is dat zowel $u_0 - v_0$ als $u_1 - v_1$ scheidend is.*

Bewijs. Stel dat het lemma niet waar is en zij I een $u_0 - v_0$ scheidend binnenstuk. Zij u_2 en u_3 het eerste respectievelijk laatste punt dat I met de klok meegaand met $Z(u_0, v_0)$ gemeen heeft en zij v_2 en v_3 het eerste respectievelijk laatste punt dat I met $Z(v_0, u_0)$ gemeen heeft (zie figuur 2.4). Voor elk buitenstuk geldt dat de twee gemeenschappelijke punten met Z allebei op $Z[v_3, u_2]$ of allebei op $Z[u_3, v_2]$ moeten liggen, anders zou het buitenstuk samen met I het lemma toch bevestigen terwijl we die als onwaar hadden gesteld. Maar in dat geval kunnen we I net als in figuur 2.4 naar buiten brengen zonder dat het de zijden van een buitenstuk snijdt. Op deze manier kunnen we elk $u_0 - v_0$ scheidend binnenstuk naar buiten brengen en zo een nieuwe vlakke graaf van F krijgen. Maar omdat de $u_0 - v_0$ scheidende binnenstukken dan weg zijn, kunnen we x_0 tekenen en zo een vlakke graaf van G krijgen. Deze tegenspraak bewijst het lemma. \square

Zij H het binnenstuk uit het lemma dat zowel $u_0 - v_0$ als $u_1 - v_1$ scheidend is. Dit betekent dat er punten w_0, w'_0, w_1 en w'_1 zijn die H met respectievelijk $Z(u_0, v_0), Z(v_0, u_0), Z(u_1, v_1), Z(v_1, u_1)$ gemeen heeft. We kunnen nu vier gevallen onderscheiden:

1. $w_1 \in Z(u_0, v_0)$ en $w'_1 \in Z(v_0, u_0)$ of omgekeerd. Neem zonder verlies van algemeenheid het eerste aan en teken x_0 zodat we G weer krijgen. Dan zien we in figuur 2.5(a) dat G een deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$ bevat.
2. $w_1, w'_1 \in Z(u_0, v_0)$ of $w_1, w'_1 \in Z(v_0, u_0)$. We mogen de eerste situatie aannemen. Dan zijn er weer drie mogelijkheden: $w'_0 \in Z(v_0, v_1), w'_0 \in Z(v_1, u_0)$ of $w'_0 = v_1$. Bij de eerste twee mogelijkheden bevat G weer een deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$, zoals te zien is in figuur 2.5(b en c). Bij de laatste mogelijkheid is er een punt $r \in H$ vanwaar er disjuncte paden naar w_1, w'_1 en v_1 lopen. Ook hier is er weer een deelgraaf van G homeomorf aan $K_{3,3}$ (zie figuur 2.5(d)).
3. $w_1 = v_0$ en $w'_1 \neq u_0$ of $w_1 \neq v_0$ en $w'_1 = u_0$. Neem zonder verlies van algemeenheid het eerste aan en dat $w'_1 \in Z(u_0, u_1)$. Dan $w'_0 \in Z(v_0, v_1), w'_0 \in Z(v_1, u_0)$ of $w'_0 = v_1$. In alle gevallen bevat G een deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$ (zie figuur 2.5(b,e en f)).
4. $w_1 = v_0$ en $w'_1 = u_0$. Als $w_0 \neq u_1$ en $w'_0 \neq v_1$, dan is het aan de lezer om aan te tonen dat G wederom een deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$ bevat. Als $w_0 \neq u_1$ en $w'_0 = v_1$, dan zitten we in de situatie van figuur 2.5(f) (met w_0 i.p.v. w'_1) of 2.5(g). Het geval $w_0 = u_1$ en $w'_0 \neq v_1$ is hieraan symmetrisch. Stel dat geldt $w_0 = u_1$ en $w'_0 = v_1$. Zij P_0 het kortste pad in H van u_0 naar v_0 en P_1 het kortste pad van u_1 naar v_1 . P_0 en P_1 moeten elkaar snijden. Als beide paden meerdere punten gemeen hebben dan hebben we te maken met een $K_{3,3}$ zoals te zien is in figuur 2.5(h). Als beide paden één punt gemeen hebben, dan bevat G een deelgraaf homeomorf aan K_5 (zie figuur 2.5(i)).

We hebben nu laten zien dat de planaire graaf $F = G - x_0$ na toevoeging van de zijde x_0 in alle gevallen een deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$ of K_5 bevat. Maar we hebben aangenomen dat $G = F + x_0$ geen deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$ of K_5 bevat. Deze tegenspraak bewijst het Theorema van Kuratowski. \square

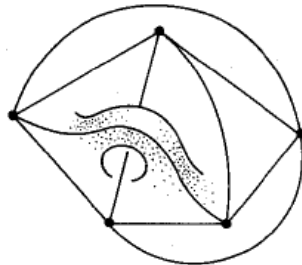


Figuur 2.5: G bevat in alle gevallen een deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$ of K_5 .

Hoofdstuk 3

Toroïdale Grafen

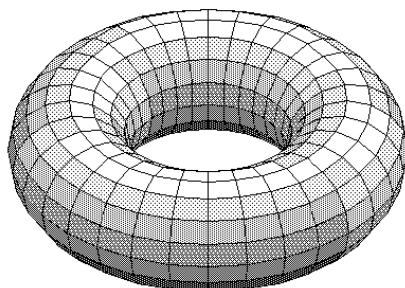
Nu weten we welke grafen we op het platte vlak (en dus op het oppervlak van de bol) kunnen tekenen zonder dat de zijden elkaar snijden. Zouden er oppervlakken zijn waar niet-planaire grafen op te tekenen zijn zonder dat de zijden elkaar snijden? Laten we eens een niet-planaire graaf tekenen op de bol, dan zijn er wat zijden die elkaar snijden. Zoals in het verkeer wel eens een viaduct wordt aangelegd om twee wegen over elkaar heen te laten lopen, zo kunnen we de bol uitbreiden met een oor om vervolgens de ene zijde over en de andere zijde door het oor te laten lopen (zie figuur 3.1). Zo krijgen we voor elke graaf (door maar genoeg oren toe te voegen) een oppervlak waar de graaf op te tekenen is zonder dat de zijden elkaar snijden.



Figuur 3.1: De bol uitbreiden met een oor.

Definitie 19. We kunnen een bol uitbreiden met **oren**. Het **geslacht** $\gamma(G)$ van een graaf G is het minimaal aantal oren dat op de bol nodig is om de graaf te tekenen zonder dat de zijden elkaar snijden. De bol met één oor noemen we ook wel **torus** (figuur 3.2). Een **torusgraaf** van een graaf is een tekening van een graaf op het oppervlak van de torus zonder dat de zijden elkaar snijden. Een graaf heet **toroïdaal** als er een torusgraaf van die graaf is.

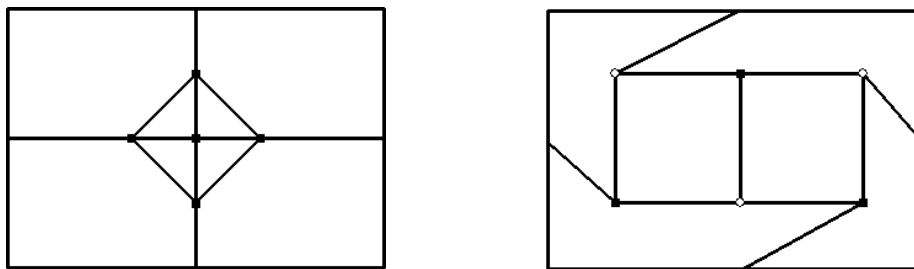
De grote vraag is nu natuurlijk: Zouden K_5 en $K_{3,3}$ wel toroïdaal zijn? Hoe zouden we daar achter moeten komen? We zouden natuurlijk een levensgrote maquette van een torus kunnen maken en daarop de grafen kunnen proberen te tekenen. Voor de creatievelingen onder ons is dit misschien een leuk idee, maar voor mij toch iets te overdreven. We kunnen het ook iets slimmer aanpakken



Figuur 3.2: De torus.

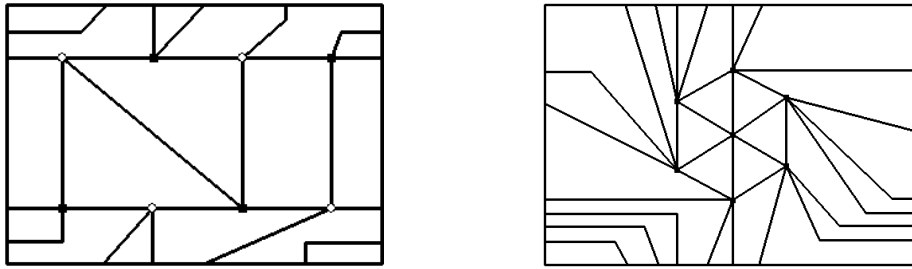
door de torus wel na te maken, maar dan alleen in ons hoofd. We beginnen met een rechthoek. Dan kunnen we de lange kanten aan elkaar plakken om zo een cilinder te krijgen. Als we nu een zijde tekenen op die cilinder, dan kan het best zo zijn dat die zijde de plakrand overschrijdt. In de rechthoek betekent dit dat we een zijde die aan de bovenkant de rechthoek uit gaat aan de onderkant gewoon door mogen trekken. Van de cilinder kunnen we weer een torus maken door de uiteinden van de cilinder aan elkaar te plakken. Nu mogen we in de rechthoek dus ook een zijde die links het vlak uit gaat aan de rechterkant doortrekken. Het tekenen van een graaf op het oppervlak van de torus is dus hetzelfde als het tekenen van een graaf op de rechthoek met de extra mogelijkheid dat we zijden die de rechthoek uitgaan aan de andere kant weer door mogen trekken.

Het volgende stuk beschrijft een dagje van een enthousiaste wiskundestudent: Benieuwd naar de mogelijkheden van torusgrafen ging ik gelijk aan de slag en al snel had ik torusgrafen van K_5 en $K_{3,3}$ gevonden, zie figuur 3.3.



Figuur 3.3: Links: K_5 , rechts: $K_{3,3}$.

Zou er nog meer mogelijk zijn? Na iets meer werk bleek $K_{4,4}$ ook een toroïdale graaf te zijn, zoals te zien is links in figuur 3.4. Op dat moment was het weer tijd om verder te gaan met de volledige grafen. Ik besloot om K_6 over te slaan en gelijk te proberen om een torusgraaf van K_7 te vinden. Ik ging er eigenlijk vanuit dat het niet zou lukken. K_7 heeft met zijn 21 zijden maar liefst 11 zijden meer dan K_5 , en die graaf is al niet planair. Zou een torus zoveel extra mogelijkheden geven? Tegen beter weten in ging ik toch wat proberen en onverwacht vond ik een torusgraaf van K_7 (rechts in figuur 3.4).



Figuur 3.4: Links: $K_{4,4}$, rechts: K_7 .

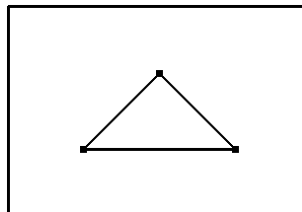
Verder ben ik niet gekomen en vandaar dat ik me af begon te vragen welke grafen niet toroïdaal zouden zijn. Nu zou het mooi zijn als we een nieuwe stelling in de stijl van Kuratowski konden krijgen, zoiets als:

Hypothese 20. *Een graaf is niet toroïdaal dan en slechts dan als hij een deelgraaf homeomorf aan $K_{5,5}$ of K_8 bevat.*

Zoals van een enthousiaste wiskundestudent verwacht mag worden ging ik gelijk aan de slag om de hypothese of een soortgelijke uitspraak (met andere of meer grafen dan $K_{5,5}$ of K_8) te bewijzen. Het leek me goed om het bewijs van de stelling van Kuratowski een beetje aan te passen. Daarin was de eerste stap dat we aan moesten tonen dat K_5 en $K_{3,3}$ niet planair waren. Dit deden we met behulp van Euler's veelvlakformule. Zou er een variant van die formule voor toroïdale grafen zijn? Ik ben in elke torusgraaf die ik op dat moment had gemaakt de gebieden gaan aanduiden met f_1, f_2 , enzovoorts. Zo heb ik dat ook gedaan met de grafen in figuur 3.3 en 3.4. Vervolgens ben ik toen het aantal punten, zijden en gebieden van de tot dan toe gevonden toroïdale grafen gaan tellen en kwam tot de volgende tabel:

Graaf	# Punten	# Zijden	# Gebieden
K_5	5	10	5
$K_{3,3}$	6	9	3
$K_{4,4}$	8	16	8
K_7	7	21	14

In alle gevallen bleek dus te gelden $\# \text{ punten} + \# \text{ gebieden} = \# \text{ zijden}$, oftewel $p + r = q$. Toch was gemakkelijk in te zien dat deze formule niet geldt voor alle toroïdale grafen.



Figuur 3.5: K_3 op de torus.

Planaire grafen zijn ook toroïdaal, je kunt ze op de torus immers net zo tekenen als op het platte vlak. Voor de planaire en dus toroïdale graaf K_3 (figuur 3.5)

met zijn 3 punten, 3 zijden en 2 gebieden gaat de formule echter niet op (dit is ook logisch omdat voor planaire grafen al Euler's veelvlakformule geldt). Van daar dat ik tot het volgende vermoeden kwam:

Vermoeden van Hebbink: Voor een torusgraaf van een samenhangende graaf met p punten, q zijden en r gebieden die niet planair is geldt: $p + r = q$.

Zo ging ik vol tevredenheid met een zelf bedacht vermoeden slapen en eindigde het dagje van een enthousiaste wiskundestudent.

Dit vermoeden is al bewezen en staat bekend als een speciaal geval van de volgende formule, bedacht door Henri Poincaré. Hierdoor moeten we helaas afscheid nemen van de naam vermoeden van Hebbink. Het voordeel is wel dat deze formule in tegenstelling tot mijn vermoeden al is bewezen, een bewijs is te vinden in [4].

Stelling 21. *Voor een samenhangende graaf G van geslacht $\gamma(G)$ met p punten, q zijden en r gebieden geldt:*

$$p - q + r = 2 - 2\gamma(G).$$

Nu kunnen we op dezelfde voet verder gaan als bij het bewijs van de stelling van Kuratowski.

Gevolg 22. *Voor een samenhangende graaf G van geslacht $\gamma(G)$ met p punten en q zijden waarbij elk gebied een 3-cykel is, geldt:*

$$q = 3(p - 2 + 2\gamma(G)).$$

Als elk gebied een 4-cykel is, dan:

$$q = 2(p - 2 + 2\gamma(G)).$$

Bewijs. Als elk van de r gebieden een 3-cykel is, dan $r = 2q/3$. $q = p + r - 2 + 2\gamma(G)$ geeft dan $q/3 = p - 2 + 2\gamma(G)$, oftewel $q = 3(p - 2 + 2\gamma(G))$. Substitueer voor het bewijs over 4-cykels $r = 2q/4$ in de formule van Poincaré. \square

Gevolg 23. *Voor een samenhangende graaf G van geslacht $\gamma(G)$ met p punten en q zijden geldt:*

$$\gamma(G) \geq \frac{1}{6}q - \frac{1}{2}(p - 2). \quad (3.1)$$

Als G geen 3-cykels bevat, dan:

$$\gamma(G) \geq \frac{1}{4}q - \frac{1}{2}(p - 2). \quad (3.2)$$

Bewijs. G bereikt een maximaal aantal zijden als elk gebied een 3-cykel is, dus $q \leq 3(p - 2 + 2\gamma(G))$, oftewel $q - 3p + 6 \leq 6\gamma(G)$. Als G geen 3-cykels bevat, dan volgt op soortgelijke wijze dat $q - 2p + 4 \leq 4\gamma(G)$. Het gevolg is nu makkelijk af te leiden. \square

Voor de volledige graaf K_n met n punten en $n(n - 1)/2$ zijden geldt dus:

$$\gamma(K_n) \geq \frac{n(n-1)}{12} - \frac{n-2}{2} = \frac{n^2 - 7n - 12}{12} = \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

De volledige bipartiete graaf $K_{m,n}$ heeft $m + n$ punten en mn zijden, dus:

$$\gamma(K_{m,n}) \geq \frac{mn}{4} - \frac{m+n-2}{2} = \frac{mn - 2m - 2n + 4}{4} = \frac{(m-2)(n-2)}{4}.$$

Dit is een deel van het bewijs van de volgende stelling:

Stelling 24. *Als $n \geq 3$, dan:*

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

Als $m, n \geq 2$, dan:

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil.$$

Bewijs. Omdat $\gamma(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$ en γ alleen gehele waarden aanneemt, geldt $\gamma(K_n) \geq \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$. Net zo is $\gamma(K_{m,n}) \geq \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil$. De andere ongelijkheden zijn door ontdekkingen van verschillende wiskundigen gevonden. Harary geeft in [1] een overzicht deze ontdekkingen. \square

Nu weten we dus dat K_8 en $K_{5,5}$ niet toroïdaal zijn, maar omdat de deelgraaf $K_{5,4}$ van $K_{5,5}$ ook niet toroïdaal is, klopt de hypothese die eerder gesteld was niet. Uit de formules (3.1) en (3.2) kan onder andere ook nog afgeleid worden dat K_8 met daaruit drie zijden weggehaald niet toroïdaal is, net als $K_{5,4}$ met daaruit één zijde weggehaald. Zouden we een nieuwe hypothese moeten maken met deze grafen in de rol van K_5 en $K_{3,3}$ bij Kuratowski? Of zouden er nog andere grafen moeten zijn die in zo'n stelling opgenomen moeten worden? Laten we eens definiëren wat we precies willen hebben.

Definitie 25. *We kunnen een punt v van graad twee **afvlakken** door het punt tezamen met de zijden $\{u, v\}$, $\{u', v\}$ waarin v voorkomt te verwijderen en een nieuwe zijde $\{u, u'\}$ toe te voegen. We zeggen $G < H$ als $G \neq H$ en als we G uit H kunnen verkrijgen door een rij van punt verwijderingen, zijde verwijderingen en punt afvlakkingen. De **obstructieverzameling** van een verzameling grafen V is de verzameling van alle grafen H die niet tot V behoren en waarvoor elke graaf G met $G < H$ wel tot V behoort.*

De obstructieverzameling van de planaire grafen bestaat dus uit K_5 en $K_{3,3}$. Wat wij willen hebben is de obstructieverzameling van de toroïdale grafen, vanaf nu (tenzij anders vermeld) de obstructieverzameling genoemd. In 1989 lieten Robertson en Seymour in een artikel [5] zien dat de obstructieverzameling eindig veel elementen heeft. Er is in de loop van de jaren nog veel meer onderzoek verricht naar deze verzameling. Woodcock geeft [6] het volgende (vrij vertaalde) beknopte overzicht van de resultaten van dit onderzoek:

Het algoritme van Myrvold en Neufeld [7] was goed genoeg om van alle grafen met hooguit 10 punten te zeggen of ze tot de verzameling behoren. Daarnaast wisten zij enkele grotere elementen te vinden. Dit algoritme werd door Chambers gebruikt [8] om alle elementen met hooguit 11 punten en alle 3-reguliere (alle punten hebben graaf 3) elementen met hooguit 24 punten te vinden. Ook hij vond nog wat grotere elementen. Ten slotte wisten Chambers, Gagarin and Myrvold [9] van alle grafen die geen deelgraaf homeomorf aan $K_{3,3}$ bevatten te zeggen of ze tot de obstructieverzameling behoren. Natuurlijk overlappen de gevonden grafen in sommige gevallen, maar in totaal zijn er al wel 239.451 elementen van de obstructieverzameling gevonden. Het is echter onzeker of deze lijst compleet is.

Een verrassend groot aantal. Waarom zijn het er zoveel? Omdat we al hebben laten zien dat een graaf planair is d.e.s.d.a. zijn componenten planair zijn

d.e.s.d.a. zijn blokken planair zijn, kon de obstructieverzameling van planaire grafen geen grafen bevatten die uit meerdere blokken of componenten bestaan. Dit beperkte onze zoektocht naar die verzameling. K_7 is met zijn 7 punten en 21 zijden zoals we eerder hebben laten zien toroïdaal. Nu kunnen we een nieuwe graaf G maken die uit twee blokken bestaat die beiden gelijk zijn aan K_7 . G heeft dan 13 ($=2 \cdot 7 - 1$) punten en 42 zijden en is dus zoals uit formule (3.1) blijkt niet toroïdaal. G bestaat dus uit toroïdale blokken maar is zelf niet toroïdaal. Dit betekent dat we in onze zoektocht naar de obstructieverzameling niet alleen kunnen kijken naar grafen die bestaan uit 1 blok. Een verklaring hiervoor is dat wanneer we G tekenen op de bol, er meer zijden zijn die elkaar snijden dan wanneer we alleen K_7 tekenen. Hierdoor hebben we blijkbaar meer oren nodig voor G en is het geslacht dus groter dan het geslacht van K_7 . Net zo hoeft een graaf bestaande uit meerdere toroïdale componenten niet per sé ook toroïdaal te zijn. Zelfs onafhankelijke grafen zouden dus in de obstructieverzameling kunnen zitten.

Bibliografie

- [1] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading (1969).
- [2] K. Kuratowski. *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. *Fund. Math.* **15** 1930, pagina's 271–283.
- [3] K. Kuratowski (vert. door J. Jaworowski). *On the problem of skew curves in topology [1]*. *Graph Theory, Proceedings of a Conference held in Lagów, Poland, February 10-13, 1981 (1981)*, pagina's 1-13.
- [4] R. Courant en H.E. Robbins. *What is Mathematics?* Oxford University Press, London (1941).
- [5] N. Robertson en P.D. Seymour. *Graph minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces*. *Journal of combinatorial theory, series B* **48** 1990, pagina's 255-288.
- [6] J.R. Woodcock. *A simpler and Faster Torus Embedding Algorithm*. Master's thesis, Department of Computer Science, University of Victoria, Victoria, B.C. 2004.
- [7] E. Neufeld en W. Myrvold. *Practical toroidality testing*. *Proceedings of the Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms 1997*, pagina's 574–580.
- [8] J. Chambers. *Hunting for torus obstructions*. Master's thesis, Department of Computer Science, University of Victoria, Victoria, B.C. 2002.
- [9] J. Chambers, A. Gagarin, en W. Myrvold. *The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s*. *Discrete Mathematics*, **309** (11) 2004, pagina's 3625-3631.