



Het eenzame vierkant van Khajuraho!

Stephan Berendonk

19-12-2006



Contents

1	De Lo Shu	vii
2	Het vierkant van Khajuraho	xi



Voorwoord

Het stuk is vooral gericht op middelbare scholieren, die geïnteresseerd zijn in dit onderwerp. Er wordt dan ook maar weinig wiskundige voorkennis verondersteld. Om dezelfde reden heb ik geprobeerd het verhaal te vertellen zonder gebruik te maken van begrippen zoals groep van transformaties of voortbrengers van de groep. Op sommige plaatsen merkte ik dat ik het best moeilijk vond om zonder zulke begrippen precies te zeggen wat ik bedoelde.

In het eerste deel van dit stuk zullen we ons bekend maken met het begrip magisch vierkant. We zullen de Lo Shu leren kennen en laten zien dat hij (op draaingen en spiegelingen na) het enige zuiver magische vierkant van orde 3 is.

In het tweede hoofdstuk zullen we doorgaan met dit idee. We zullen het vierkant van Khajuraho tegenkomen, zijn eigenschappen nader bekijken om tenslotte te laten zien, dat hij het enige panmagische vierkant van orde 4 is (op panmagie behoudende transformaties na).



1

De Lo Shu

In hun vrije tijd houden zich tegenwoordig steeds meer mensen bezig met het oplossen van zogenaamde Sudokus. Dat zijn speciale vierkanten van getallen. Het is echter geen nieuw verschijnsel, dat de mens zich voor zulke objecten interesseert. Schemas van getallen, die bijzondere eigenschappen vertonen hebben een heel lange en rijke geschiedenis. Oude culturen kenden magische krachten aan de soms verrassende eigenschappen toe. Maar ook vandaag spelen dezelfde vierkanten nog een rol in de astrologie.

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Bovenstaand vierkant was waarschijnlijk al omstreeks 200 voor Christus in China bekend. Men kan het onder andere vinden in de Da Dai Liji (boek der riten, Tai de oudere), die om honderd voor Christus uit oudere schriften werd samengevoegd. Aan dit vierkant, dat de Lo Shu wordt genoemd, is een grote voorraad aan anekdotes en legendes gekoppeld.

De Lo Shu heeft onder andere de volgende eigenschappen:

1. de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee diagonalen is steeds hetzelfde.
2. alle getallen van 1 t/m 9 komen voor in het vierkant.

Definitie 1 *Een 3×3 vierkant (3 getallen per rij en 3 getallen per kolom) dat aan de eerste eigenschap voldoet heet magisch. Als het ook nog de tweede eigenschap heeft dan noemen we het zuiver magisch.*

Uit de Lo Shu kunnen we makkelijk nieuwe zuiver magische 3x3 vierkanten maken, bijvoorbeeld door de Lo Shu een kwartslag met de klok mee te draaien. Dan krijgen we:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Evenzo kunnen we de Lo Shu aan de diagonaal spiegelen zonder dat het vierkant aan magie verliest. Dat levert:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Draaiingen en spiegelingen zijn transformaties, die de magische eigenschappen behouden. Dat betekent, dat elk zuiver magisch vierkant onder een draaiing of spiegeling weer overgaat in een zuiver magisch vierkant.

Je kunt je nu afvragen of je elk zuiver magisch 3x3 vierkant door draaien of spiegelen uit de Lo Shu kunt krijgen.

Opmerking 2 *We spreken af, dat we twee magische vierkanten als (in wezen) hetzelfde beschouwen als het ene vierkant door een draaiing of spiegeling in het andere is over te voeren.*

Een van de eerste mensen, die zich in de Westerse wereld met magische vierkanten bezig hield was Adam Ries. Ook hij stelde zich deze vraag, maar dan iets anders geformuleerd. Op pagina 17 van zijn Rechenbüchlein beweerde hij het volgende:

Stelling 3 *De Lo Shu is in wezen het enige zuiver magische 3x3 vierkant.*

Bewijs. De getallen 1, 2, ..., 9 komen precies 1 keer voor in het vierkant. Als we dus alle getallen in het vierkant bij elkaar optellen ($1 + 2 + 3 + \dots + 9$) dan krijgen we als uitkomst 45. Echter omdat de som van de getallen in elke rij even groot is, moet de rijsum gelijk aan $\frac{45}{3} = 15$ zijn. Zo moet dus ook de kolomsom en de diagonaalsom gelijk aan 15 zijn. We noemen 15 daarom de magische som.

Laten we nu 15 op alle mogelijke manieren als som van 3 verschillende getallen uit $\{1, \dots, 9\}$ schrijven:

$$\begin{array}{cccc} 1 + 5 + 9, & 1 + 6 + 8, & 2 + 4 + 9, & 2 + 5 + 8 \\ 2 + 6 + 7, & 3 + 4 + 8, & 3 + 5 + 7, & 4 + 5 + 6 \end{array}$$

Observeer: Het getal 5 komt in vier sommen voor, de getallen 1, 3, 7 en 9 komen in twee sommen voor en 2, 4, 6 en 8 komen ieder in drie sommen voor.

Nu komt het getal dat in het centrum staat in de som van beide diagonalen, in de som van de middelste rij en in de som van de middelste kolom voor. Dus het komt in 4 sommen voor. Het enige getal dat in 4 sommen optreedt is de 5. Blijkbaar staat de 5 in het centrum van elk zuiver magisch 3x3 vierkant. Laten we vervolgens gaan kijken waar we de 1 kunnen neerzetten. Omdat die slechts in 2 sommen voorkomt kan ze niet in een van de hoeken staan. Verder kunnen we het vierkant zo lang draaien totdat de 1 in het midden van de bovenste rij staat. We hebben dus:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ook de 3 kan niet in de hoeken staan, omdat hij slechts in 2 sommen voorkomt. Verder kan de 3 niet in het midden van de onderste rij staan, omdat de som van de tweede kolom in dat geval $1+5+3=9$ is in plaats van 15. Door zonnodig verticaal te spiegelen met de 2e kolom als spiegelas kunnen we de 3 in het midden van de linkerkolom krijgen. Het is dus mogelijk om elk zuiver magisch 3x3 vierkant door draaien en spiegelen over te voeren in een vierkant waarbij de getallen 1, 3 en 5 als volgt zijn geplaatst:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 3 & & 5 \\ & & \end{pmatrix}$$

Als we nu gebruik maken van onze kennis, dat de magische som 15 is, dan zien we dat we de overige getallen slechts op 1 manier kunnen invullen om een zuiver magisch vierkant te krijgen. Namelijk:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

LO SHU! ■



2

Het vierkant van Khajuraho

Tot nu toe hebben we slechts verteld wat een zuiver magisch vierkant van orde 3 is. Het moge duidelijk zijn hoe je deze definitie kunt uitbreiden voor vierkanten van grotere ordes. Lange tijd waren er helemaal geen zuiver magische vierkanten van orde 4 bekend. Het oudste vierkant van dit soort dateert uit 1100 na Christus. Het verscheen als een inscriptie in het beroemde tempelcomplex te Khajuraho. Het ziet er zo uit:

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Als je het verhaal over de Lo Shu nog in gedachten hebt, dan vraag je je misschien het volgende af: Is het vierkant van Khajuraho op draaiingen en spiegelingen na het enige zuiver magische vierkant van orde 4? Het antwoord hierop is ontkennend. Er blijken namelijk 880 echt verschillende te zijn. We hebben dus voor orde 4 ineens heel veel meer vrijheid.

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 \\ 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 \\ 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 \\ 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 & 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 & 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 & 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 & 9 & 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Is het vierkant van Khajuraho dan helemaal niet speciaal? Als zuiver magisch vierkant blijkt het maar een onder velen te zijn. Echter het vierkant van Khajuraho vertoont nog veel meer mooie eigenschappen. Als we het vierkant bijvoorbeeld kopiëren en een aantal kopiën naast elkaar en boven elkaar leggen, zoals in bovenstaande matrix, dan krijgen we een rechthoek van getallen, waarbij ieder 4x4 deelvierkant zuiver magisch is. Zo'n rechthoek noemen we het tapijt van het vierkant. Dit komt neer op de eis dat de som van de getallen op iedere gebroken diagonaal ook de magische som (in dit geval 34) moet opleveren. Voor het Khajuraho vierkant betekent deze eis, dat:

$$\begin{aligned} 2 + 3 + 15 + 14 &= 34, & 16 + 6 + 1 + 11 &= 34, & 9 + 12 + 8 + 5 &= 34, \\ 7 + 6 + 10 + 11 &= 34, & 2 + 12 + 15 + 5 &= 34, & 16 + 13 + 1 + 4 &= 34 \end{aligned}$$

Definitie 4 Een zuiver magisch vierkant waarin elke gebroken diagonaal de magische som heeft noemen we een panmagisch vierkant.

We laten nu zien, dat de eis op de gebroken diagonalen nog andere eigenschappen impliceert (voor orde 4):

Propositie 5 In een panmagisch vierkant A van orde 4 heeft ieder 2x2 deelvierkant de magische som.

Bewijs. Zij gegeven een willekeurig 2x2 deelvierkant M . Beschouw het

tapijt van A en zoek daarin het 4x4 deelvierkant B dat M links boven in de hoek heeft staan. Merk op: B is niet alleen zuiver magisch, maar hij is

zelfs panmagisch. Als we nu elk getal in B door een letter voorstellen, dan krijgen we:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

We moeten dan uit de panmagische eigenschappen van B afleiden, dat $a + b + e + f = 34$. Omdat B magisch is hebben we:

$$(a + b + c + d) + (e + f + g + h) = (c + g + k + o) + (d + h + l + p)$$

Hieruit volgt:

$$a + b + e + f = k + l + o + p$$

Op dezelfde manier krijgen we:

$$c + d + g + h = i + j + m + n$$

Uit de eis op de gebroken diagonalen volgt:

$$(i + j + k + l) + (m + n + o + p) = (a + f + k + p) + (e + b + o + l)$$

ofwel:

$$i + j + m + n = a + b + e + f$$

Hieruit volgt dan samen met de vorige identiteit dat ook:

$$c + d + g + h = a + b + e + f$$

Nu geldt:

$$(a + b + e + f) + (c + d + g + h) + (i + j + m + n) + (k + l + o + p) = 136$$

Dus:

$$4(a + b + e + f) = 136$$

Dus:

$$a + b + e + f = 34$$

■

Propositie 6 *Sommeer je in een panmagisch vierkant A twee getallen die op dezelfde diagonaal staan maar niet naast elkaar staan (dus op afstand 2) dan krijg je 17 als som (de helft van de magische som).*

Bewijs. Vanwege de tapijtheigenschap mogen we aannemen dat A weer gegeven wordt door:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

Het is dan voldoende om te bewijzen, dat $a + k = 17$.

Er geldt:

$$\begin{aligned} 0 &= (a + b + c + d) + (e + f + g + h) + (i + j + k + l) + (m + n + o + p) \\ &\quad - (e + f + i + j) - (b + c + f + g) - (d + h + l + p) - (m + n + o + p) \end{aligned}$$

Dus:

$$a + k - f - p = 0$$

Maar ook:

$$a + k + f + p = 34$$

Dus:

$$a + k = 17$$

■

Opmerking 7 *In het volgende nemen we aan dat onze panmagische vierkanten van orde 4 uit de getallen $\{0, 1, \dots, 15\}$ zijn opgebouwd en niet meer uit de getallen $\{1, 2, \dots, 16\}$. De magische som is dan 30 en niet meer 34.*

We leiden nu een formule voor panmagische vierkanten van orde 4 af.

Op grond van de vorige stelling mogen we aannemen, dat ieder panmagisch vierkant in ieder geval de volgende vorm heeft:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 15 - c & 15 - d & 15 - a & 15 - b \\ 15 - g & 15 - h & 15 - e & 15 - f \end{pmatrix}$$

Omdat elke kolomsom de magische som 30 moet hebben volgt:

$$\begin{aligned} a + e &= c + g \\ b + f &= d + h \end{aligned}$$

ofwel:

$$\begin{aligned} g &= a + e - c \\ h &= b + f - d \end{aligned}$$

Dat geeft:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & a+e-c & b+f-d \\ 15-c & 15-d & 15-a & 15-b \\ 15-a-e+c & 15-b-f+d & 15-e & 15-f \end{pmatrix}$$

Laten we nu nog de eisen op de rijssommen verwerken, dat levert:

$$a + b + c + d = 30$$

en

$$2e + 2f + a + b + c - (30 - a - b - c) = 30$$

ofwel:

$$\begin{aligned} d &= 30 - a - b - c \\ f &= 30 - a - b - e \end{aligned}$$

Vullen we dit weer in, dan zien we dat elk panmagisch vierkant van de volgende vorm is:

Formule voor panmagische 4x4 vierkanten:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 30 - a - b - c \\ e & 30 - a - b - e & a + e - c & b + c - e \\ 15 - c & -15 + a + b + c & 15 - a & 15 - b \\ 15 - a - e + c & 15 - b - c + e & 15 - e & -15 + a + b + e \end{pmatrix}$$

Een panmagisch vierkant van orde 4 kan dus door 4 van zijn getallen worden vastgelegd.

Opmerking 8 *Op draaingen en spiegelingen na bestaan er nog 48 panmagische vierkanten van orde 4. Deze zijn echter niet zo verschillend als je misschien zou denken. Naast draaingen en spiegelingen zijn er namelijk nog andere transformaties, die de panmagie behouden.*

Het is hoogste tijd om eens precies te zeggen wat hier met het woord transformatie wordt bedoeld.

Definitie 9 *Een transformatie wijst aan elke plek van het vierkant een nieuwe plek aan. Voor vierkanten van orde 4 is een transformatie dus een bijectieve afbeelding van de verzameling $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ naar zichzelf, want elke plek in het vierkant ligt vast door een paar van getallen, waarbij het eerste getal de rij aangeeft en het tweede de kolom.*

De transformatie ligt vast door voor elke plek van het oorspronkelijke vierkant aan te geven waar hij in het resulterende vierkant terecht komt. Als representatie gebruiken we een matrix, die het vierkant na de transformatie vertegenwoordigt. Op elke plek van deze matrix staat met welke plek hij uit het oorspronkelijke vierkant correspondeert.

De voorbeelden zullen het helder maken:

- Deze matrix representeert een draaiing om een kwartslag tegen de klok in:

$$D = \begin{pmatrix} (1, 4) & (2, 4) & (3, 4) & (4, 4) \\ (1, 3) & (2, 3) & (3, 3) & (4, 3) \\ (1, 2) & (2, 2) & (3, 2) & (4, 2) \\ (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) & (4, 1) \end{pmatrix}$$

- Deze matrix representeert een spiegeling aan de hoofddiagonaal:

$$S = \begin{pmatrix} (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) & (4, 1) \\ (1, 2) & (2, 2) & (3, 2) & (4, 2) \\ (1, 3) & (2, 3) & (3, 3) & (4, 3) \\ (1, 4) & (2, 4) & (3, 4) & (4, 4) \end{pmatrix}$$

Definitie 10 Een transformatie heet *panmagisch* als ze elk panmagisch vierkant (van orde 4) weer overvoert in een panmagisch vierkant ofwel als de transformatie de panmagische eigenschappen behoudt.

Als je twee transformaties A , B na elkaar uitvoert, dan kun je deze bewerking opvatten als een nieuwe transformatie $A \circ B$, de samenstelling. De samenstelling van twee panmagische transformaties is weer panmagisch. Verder omdat een transformatie een bijectieve afbeelding is, heeft elke transformatie A een inverse A^{-1} .

Laten we nu voorbeelden van panmagische transformaties bekijken die we straks zullen gebruiken:

- draaiingen en spiegelingen
- schuiven van rijen en kolommen respectievelijk gegeven door de matrices:

$$K = \begin{pmatrix} (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 1) \\ (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 1) \\ (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 1) \\ (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 1) \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) \\ (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) \end{pmatrix}$$

Als je naar het tapijt van het vierkant kijkt dan zie je meteen dat dit panmagische transformaties moeten zijn.

- de transformatie gegeven door:

$$X = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (4,2) & (4,1) \\ (2,1) & (2,2) & (3,2) & (3,1) \\ (2,4) & (2,3) & (3,3) & (3,4) \\ (1,4) & (1,3) & (4,3) & (4,4) \end{pmatrix}$$

Om na te gaan dat de transformatie inderdaad panmagisch is gebruiken we onze formule voor panmagische vierkanten. Deze formule gaat door onze transformatie over in:

$$\begin{pmatrix} a & b & 15-b-c+e & 15-a-e+c \\ e & 30-a-b-e & -15+a+b+c & 15-c \\ b+c-e & a+e-c & 15-a & 15-b \\ 30-a-b-c & c & 15-c & -15+a+b+e \end{pmatrix}$$

Je kunt gemakkelijk controleren dat dit weer een panmagisch vierkant is. Dus elk panmagische vierkant gaat onder X over in weer een panmagisch vierkant.

- Zoals boven opgemerkt kun je ook samenstellingen van panmagische transformaties vormen om nieuwe panmagische transformaties te krijgen. Bijvoorbeeld $R^{-1} \circ X \circ R$ wordt gerepresenteerd door:

$$Y = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (2,2) & (2,1) \\ (1,4) & (1,3) & (2,3) & (2,4) \\ (4,4) & (4,3) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (3,2) & (3,1) \end{pmatrix}$$

- Ga tenslotte na, dat ook het verwisselen van de $2e$ en de $4e$ kolom een panmagische transformatie is. We noemen deze transformatie Z .

Opmerking 11 *We beschouwen twee panmagische vierkanten als (in wezen) hetzelfde als er een panmagische transformatie bestaat, die het ene vierkant in het andere vierkant overvoert.*

We zijn nu eindelijk in staat om de bewering uit te spreken waar het allemaal om begonnen is:

Stelling 12 *Het vierkant van Khajuraho is tot op panmagische transformaties het enige panmagische vierkant van orde 4.*

Anders gezegd: Ieder panmagisch vierkant is door een panmagische transformatie over te voeren in het vierkant van Khajuraho.

Bewijs. Zij gegeven een willekeurig panmagisch vierkant van orde 4. Door

schuiven van rijen en kolommen kunnen we bereiken, dat de 0 in de linker bovenhoek komt te staan. We mogen dus aannemen dat $a = 0$ in onze formule voor panmagische vierkanten. Dat geeft:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c & 30-b-c \\ e & 30-b-e & e-c & b+c-e \\ 15-c & -15+b+c & 15 & 15-b \\ 15-e+c & 15-b-c+e & 15-e & -15+b+e \end{pmatrix}$$

Beschouw nu even het volgende schema:

$$\begin{pmatrix} 0 & \bullet & * & \bullet \\ \bullet & * & + & * \\ * & + & 15 & + \\ \bullet & * & + & * \end{pmatrix}$$

Als op twee plekken hetzelfde symbol staat, dan is er een panmagische transformatie, die 0 en 15 vastlaat en de ene plek in de andere overvoert. Laten we dit exemplarisch nagaan voor de punten ($\bullet$). Plek (2, 1) wordt door S in (1, 2), door Y in (1, 4) en tenslotte door $S \circ Y$ in (4, 1) overgevoerd.

Waar kan de 1 allemaal staan?

- Stel de 1 staat op plek (2, 1). Dan is $e = 1$ in onze formule. Op plek (2, 3) komt dan $1 - c$ te staan. Echter $1 - c$ kan alleen 0 of 1 zijn, maar 0 en 1 staan al beiden in het vierkant. Tegenspraak. Dus de 1 kan niet op plek (2, 1) staan. Dat betekent dat de 1 ook niet op een andere plek met een punt ($\bullet$) kan staan.
- Stel de 1 staat op plek (1, 3). Dan is $c = 1$ in onze formule. Op plek (3, 2) staat dan $-14 + b$ en op plek (1, 3) staat een 1. Dit zegt ons, dat b groter dan 15 moet zijn. Tegenspraak. Dus de 1 kan op geen van de plekken met een ster staan.

Blijkbaar is het mogelijk door panmagische transformaties de 1 boven de 15 te krijgen. Dat geeft $e - c = 1$ in onze formule:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c & 30-b-c \\ c+1 & 29-b-c & 1 & b-1 \\ 15-c & -15+b+c & 15 & 15-b \\ 14 & 16-b & 14-c & -14+b+c \end{pmatrix}$$

Observeer dat onze transformaties Y en Z de plekken van de 0, 1, 14 en 15 allemaal vastlaten.

We kunnen dus weer een schema maken dat aangeeft welke plekken onder deze 2 transformaties met elkaar corresponderen:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \bullet & * \\ * & \bullet & 1 & \bullet \\ \triangle & + & 15 & + \\ 14 & \triangle & + & \triangle \end{pmatrix}$$

Waar kan de 2 staan?

- Stel $b = 2$, dat levert op plek $(2, 3)$ en op plek $(2, 4)$ een 1 op. Tegenspraak.
- Stel $c = 2$, dan staat op plek $(1, 4)$ de term $28 - b$. Daaruit volgt, dat $b \geq 15$. Tegenspraak.
- Stel $15 - c = 2$, dan $c = 13$. Dan krijgen we op plek $(2, 3)$ en op plek $(4, 3)$ een 1. Tegenspraak.

Dus de 2 kan slechts op plekken met een plus (+) staan. We mogen aannemen, dat hij rechts van de 15 staat. Dus dan: $15 - b = 2$ ofwel $b = 13$.

We hebben onze formule voor panmagische 4x4 vierkanten nu gereduceerd tot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & c & 17 - c \\ c + 1 & 16 - c & 1 & 12 \\ 15 - c & c - 2 & 15 & 2 \\ 14 & 3 & 14 - c & c - 1 \end{pmatrix}$$

Als je even naar deze formule kijkt, dan zie je dat de transformatie Y nog steeds alle tot nu toe gekozen getallen vastlaat. Als dus $c = a$ een panmagisch vierkant oplevert voor een bepaald getal a , dan krijgen we voor $c = 16 - a$ ook een panmagisch vierkant, dat we als niet wezenlijk verschillend beschouwen.

Omdat 0, 1, 2, 3, $c - 2$, $c - 1$, c in het vierkant staan en we c zo moeten kiezen dat al deze getallen verschillend zijn moet dus $c \geq 6$.

Evenzo omdat 15, 14, 13, 12 en $c + 1$ in het vierkant staan moet $c \leq 10$.

Echter voor $c = 7$, 8 en 9 komt bijvoorbeeld geen 11 voor in het vierkant. De gevallen $c = 6$ en $c = 10$ leveren panmagische vierkanten op maar volgens de boven gemaakte opmerking niet echt verschillende. We mogen dus weer een keuze maken. Kies $c = 6$. Dan krijgen we het volgende panmagische vierkant:

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & 6 & 11 \\ 7 & 10 & 1 & 12 \\ 9 & 4 & 15 & 2 \\ 14 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Schuiven we elk getal om twee kolommen naar links op (toepassen van $K \circ K$) dan vinden we:

$$\begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 & 13 \\ 1 & 12 & 7 & 10 \\ 15 & 2 & 9 & 4 \\ 8 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenslotte tellen we op elke plek weer 1 op om een vierkant te krijgen waarin de getallen 1 tot en met 16 staan:

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Het VIERKANT van KHAJURAH! ■