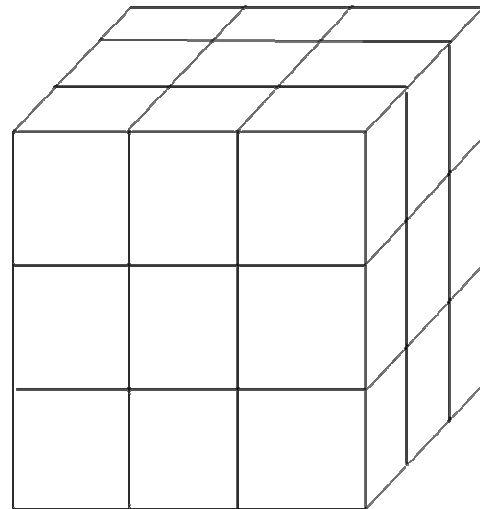


Magische vierkanten & kubussen

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17



Lars Rutten & Bas Jordans

BEGELEIDERS: Dolf van den Hombergh
Tim Verheijen
Alberto Llera
Arno van den Essen

DATUM: 3 maart 2008

Inhoudsopgave

Inleiding	Blz. 3
Huiswerk van de masterclasses	Blz. 4 t/m 8
- Huiswerk 1 ^e bijeenkomst	
- Huiswerk 2 ^e bijeenkomst	
- Commentaar Tim Verheijen	
Theorie	Blz. 9 t/m 14
- Theorie masterclass	
- Toepassing: Franklin magische vierkanten	
Franklin-magisch vierkant van orde 16	Blz. 15 t/m 25
- Eigenschappen	
- Constructie	
- Generalisering	
Franklin-magisch vierkant van orde n (met $n=8$ voud)	Blz. 26 t/m 30
- Eigenschappen	
- Constructie	
- Bewijs orthogonaal	
Magische kubus van orde 3	Blz. 31 t/m 42
- Eigenschappen	
- Constructie magische kubus van orde 3	
- Magische kubussen van orde n manier 1	
- Magische kubussen van orde n manier 2	
Zuiver magische multi-dimensionale figuren van orde n	Blz. 43 t/m 52
- Constructie Multi-dimensionale figuren van orde n	
Begrippenlijst	Blz. 53 & 54

Inleiding

Dit onderwerp, magische vierkanten en kubussen, hebben wij gekozen aan de hand van het exo-steunpunt van de Radboud Universiteit te Nijmegen. Het leek ons leuk en handig om met behulp van het exo-steunpunt ons profielwerkstuk te maken. Ze boden daar de onderwerpen Magische vierkanten en sudoku's, De wetten van Kepler en Fascinatie voor fractals aan en magische vierkanten leek ons het leukst en meest interessante.

Zodoende hebben we verschillende lessen op de Universiteit gevolgd en informatie verkregen over magische vierkanten. Tijdens de masterclasses hebben we verschillende huiswerkopgaven gekregen en die hebben we in dit verslag verwerkt (vanaf pagina 4).

Verder hebben we ook de relevante theorie over magische vierkanten, die we in de masterclasses hebben verkregen, in het verslag opgenomen. Voor een goede doorstroom van het verslag zelf hebben we dit achter de huiswerkopgaven gezet.

Hierna begint ons onderzoek naar magische vierkanten. Dat hebben we ook verder uitgebreid met de onderwerpen magische kubussen en multi-dimensionale figuren.

Deze onderwerpen hebben steeds dezelfde opbouw. We beginnen steeds met de eigenschappen die we wilden bereiken voor het desbetreffende figuur. Daarna bespreken we de (algemene) constructie van het figuur en dat breiden we, naar relevantie, uit met een generalisatie of een andere manier om het desbetreffende figuur te maken.

Helemaal achterin het verslag kun je een begrippenlijst vinden. Dit hebben we gedaan omdat in het verslag enkele moeilijke begrippen worden gebruikt. Mocht een begrip niet duidelijk of begrijpbaar zijn, kun je altijd achterin kijken.

Wij hebben veel plezier gehad met dit onderwerp voor ons profielwerkstuk. Al tijdens de masterclasses hadden we het erg naar onze zin en hebben we veel informatie gekregen over magische vierkanten. We hebben ook veel opgestoken van de theorie en geprobeerd die theorie te gebruiken voor ons onderzoek naar magische vierkanten. Naar onze mening is dit goed gelukt.

Wij hopen dat het verslag interessant en vooral duidelijk is. Het op papier zetten van je bevindingen was misschien nog wel het moeilijkste van het hele profielwerkstuk.

Huiswerk van de masterclasses

Huiswerk 1^e bijeenkomst

Opgave:

Probeer een magisch vierkant te vinden van 3 bij 3 dat bestaat uit priemgetallen.

Uitwerking:

We gebruiken de 2^e formule voor de getallen uit het magische vierkant.

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

De 9 getallen uit het magische vierkant zijn hier uitgedrukt in a , b en c . Je kan ze zo rangschikken dat ze 3 rekenkundige rijen vormen met verschil b . Het onderlinge verschil tussen de rijen is dan ook nog eens c .

$a-b-c$, $a-c$, $a+b-c$

$a-b$, a , $a+b$

$a-b+c$, $a+c$, $a+b+c$

Vervolgens hebben we een lijst priemgetallen gezocht, deze hebben we gevonden op de website: <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A000040> Dit is die lijst:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271

Hierna hebben wij geprobeerd lijstjes van drie priemgetallen te vinden waarbij het verschil tussen die priemgetallen steeds constant is, dit is b . Wij zagen meteen dat b oneven moest zijn, want oneven + oneven = even (en er is maar 1 even priemgetal, namelijk 2). Wij kwamen er ook al snel achter dat b een drievoud moest zijn, want anders kreeg je geen rijtjes van 3 priemgetallen. Want tel je bij een getal 1 of 2 keer een getal op wat geen 3-voud is, dan krijg je wel een 3-voud. En 3-vouden zijn niet priem. Bijvoorbeeld $7+4=11$, $11+4=15$ en dat is deelbaar door 3, dus niet priem.

We zijn dus begonnen om rijtjes van priemgetallen te maken met lengte 3 waarvan het verschil b was. Eerst hebben we met $b=6$ geprobeerd. Hier waren veel rijtjes mee te maken, zie hieronder. Het probleem was alleen dat er geen 3 rijtjes te vinden waren waarbij het verschil onderling ook gelijk was, c .

We zijn verder gegaan met $b=12$ (zie hieronder). Ook hier waren weer veel rijtjes te vinden. Nadat we er een aantal hadden zijn we gaan zoeken of we hier wel rijtjes konden vinden die een onderling verschil hadden wat gelijk is. En dat hadden ze. Namelijk de rijtjes: 5,17,29 47,59,71 & 89,101,113. Hierbij was $a=57$, $b=12$, $c=42$. De magische som is 177.

Na het invullen van deze getallen kwamen we tot een magisch vierkant bestaande uit priemgetallen (zie hieronder). Volgens onze begeleiders was dit trouwens ook het magische vierkant dat bestaat uit de kleinst mogelijke priemgetallen.

Met b=6

2, 3, **5**, **7**, **11**, 13, **17**, 19, 23, 29, **31**, 37, **41**, 43, **47**, 53, 59, **61**, **67**, 71, 73, 79, 83, 89, **97**, **101**, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, **151**, 157, 163, **167**, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, **227**, 229, 233, 239, 241, **251**, **257**, 263, 269, 271

5,11,17
7,13,19
11,17,23
17,23,29
31,37,43
41,47,53
47,53,59
61,67,73
67,73,79
97,103,109
101,107,113
151,157,163
167,173,179
227,233,239
251,257,263
257,263,269

Met b=12

2, 3, **5**, **7**, 11, 13, **17**, **19**, 23, **29**, 31, 37, 41, 43, **47**, 53, **59**, 61, 67, 71, 73, 79, 83, **89**, 97, 101, 103, 107, 109, 113, **127**, 131, 137, **139**, 149, 151, 157, 163, **167**, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, **227**, 229, 233, 239, 241, 251, **257**, 263, 269, 271

*5,17,29
7,19,31
17,29,41
19,31,43
29,41,53
*47,59,61
59,71,83
*89,101,113
127,139,151
139,151,163
167,179,191
227,239,241
257,269,281

bij een stap naar beneden +42, bij een stap naar rechts +12. Dit geldt voor alle 9 getallen.

a=57, b=12, c=42

5,17,29
47,59,71
89,101,113

Het magische vierkant:

			177
71	5	101	→177
89	59	29	→177
17	113	47	→177
↓	↓	↓	
177	177	177	177

Huiswerk 2^e bijeenkomst

Opgave:

1. Bewijs dat elk getal van de vorm abccba (bijv 372273) een 11-voud is.
2. Bepaal de magische som van een magisch vierkant van de orde n. Gebruik hierbij $1+2+\dots+n=(n(n+1)/2)$

Uitwerking:

1. Als abccba een 11-voud is, dan $abccba \equiv 0 \pmod{11}$

$$\overline{abccba} = \overline{100001*a} + \overline{10010*b} + \overline{1100*c} = \overline{100001*a} + \overline{10010*b} + \overline{1100*c} = \overline{0*a} + \overline{0*b} + \overline{0*c} = \overline{0}, \text{ dus abccba is een 11-voud}$$

$$100001 / 11 = 9091, \text{ dus } 0 \pmod{11}$$

$$10010 / 11 = 910, \text{ dus } 0 \pmod{11}$$

$$1100 / 11 = 100, \text{ dus } 0 \pmod{11}$$

2. De getallen lopen van 1 tot n^2 . Als je hem in de formule invult krijg je het volgende: $(n^2(n^2+1)/2)$. Maar dit is de som van alle getallen en de magische som zijn de getallen in 1 rij. Je moet dus nog delen door n. Je krijgt dan $(n^2(n^2+1)/(2n)) = n(n^2+1)/2 = (n^3+n)/2$
Door in te vullen kijken of het klopt, $(3^3+3)/2 = 30/2 = 15$, klopt. $(4^3+4)/2 = 68/2 = 34$, klopt dus.

Commentaar door Tim Verheijen

Beide uitwerkingen zien er prima uit. Bij opgave 1 heb ik nog een kleine toevoeging als extraatje. Je hebt het nu voor een getal van 6 cijfers bewezen, maar het kan ook eenvoudig bewezen worden voor een cijfer van een willekeurig (even!) aantal cijfers.

Bewijs:

Eerst merken we het volgende op:

$$10 = -1 \pmod{11}$$

$$10^2 = 100 = +1 \pmod{11}$$

$$10^3 = 1000 = -1 \pmod{11}$$

$$10^4 = 10000 = +1 \pmod{11}$$

etc.

In het algemeen zien we dat geldt: $10^n = -1 \pmod{11}$ als n is oneven

$$10^n = +1 \pmod{11} \text{ als } n \text{ is even}$$

Neem nu een getal van de vorm ABC...CBA. (We nemen aan dat we een getal van een even aantal cijfers hebben, zeg $2k$ cijfers.)

We zien nu dat:

$$\begin{aligned} \text{ABC...CBA} &= A \cdot 10^{(2k-1)} + B \cdot 10^{(2k-2)} + C \cdot 10^{(2k-3)} + \dots + C \cdot 10^2 \\ &\quad + B \cdot 10^1 + A \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Dus als we dit getal modulo 11 bekijken geeft dit:

$$\begin{aligned} \overline{\text{ABC...CBA}} &= \overline{A \cdot 10^{(2k-1)} + B \cdot 10^{(2k-2)} + C \cdot 10^{(2k-3)} + \dots + C \cdot 10^2} \\ &\quad + \overline{B \cdot 10^1 + A \cdot 10^0} \\ &= \overline{A \cdot 10^{(2k-1)}} + \overline{B \cdot 10^{(2k-2)}} + \overline{C \cdot 10^{(2k-3)}} + \dots + \overline{C \cdot 10^2} \\ &\quad + \overline{B \cdot 10^1} + \overline{A \cdot 10^0} \\ &= \overline{A \cdot 10^{(2k-1)}} + \overline{B \cdot 10^{(2k-2)}} + \overline{C \cdot 10^{(2k-3)}} + \dots + \overline{C \cdot 10^2} \\ &\quad + \overline{B \cdot 10^1} + \overline{A \cdot 10^0} \\ &= \overline{A \cdot 10^{(2k-1)}} + \overline{B \cdot 10^{(2k-2)}} + \overline{C \cdot 10^{(2k-3)}} + \dots + \overline{C \cdot 10^2} \\ &\quad + \overline{B \cdot 10^1} + \overline{A \cdot 10^0} \\ &= \overline{A \cdot -1} + \overline{B \cdot +1} + \overline{C \cdot -1} + \dots + \overline{C \cdot +1} + \overline{B \cdot -1} + \overline{A \cdot +1} \\ &= \overline{A \cdot -1 + 1} + \overline{B \cdot +1 - 1} + \overline{C \cdot -1 + 1} \\ &= \overline{A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0} \\ &= \overline{0} \end{aligned}$$

Dus volgt dat $\text{ABC...CBA} = 0 \pmod{11}$. En dus is ABC...CBA een 11-voud.

Theorie

Theorie masterclass

Wij hebben hier alleen de voor ons relevante theorie uitgetypt. Dat wat we niet nodig hadden hebben we weggelaten, want we vonden het overbodig dat ook uit te gaan typen.

Hoeveel 3x3 zuiver magische vierkanten zijn er? Bepaal ze allemaal.

Door middel van proberen zijn er 8 te vinden namelijk:

```

8 1 6 6 1 8
3 5 7...7 5 3
4 9 2 2 9 4
-----
4 9 2 2 9 4
3 5 7...7 5 2
8 1 6 6 1 8
      ↑spiegelas
4 3 8      6 7 2      2 7 6      8 3 4
9 5 1      1 5 9      9 5 1      1 5 9
2 7 6      8 3 4      4 3 8      6 7 2
  
```

<= spiegelas en door te roteren zijn deze nog te vinden:

Door middel van redeneren:

Alle rijtjes, die opgeteld 15 zijn, zijn deze: 159, 168, 249, 258, 267, 348, 359, 456.

Hierin komt voor:

1	2x
2	3x
3	2x
4	3x
5	4x
6	3x
7	2x
8	3x
9	2x

Dus 5 moet in het midden, want het kans als enige 4 rijtjes vormen. 1,3,7,9 moeten in de middens van de zijdes, want zij kunnen elk maar 2 rijtjes vormen. 2,4,6,8 moeten op de hoekpunten, want zij kunnen elk 3 rijtjes vormen.

1

5

De 1 kan op 4 plekken. De 2 kan dan nog maar op 2 plekken, die

x x

met een x. Er zijn dus $4 \times 2 = 8$ mogelijkheden voor een zuiver magisch vierkant van orde 3.

Het maken van magische vierkanten uit andere magische vierkanten:

Met de getallen 1,2,4,4,5,6,7,8,9 kan geen magisch vierkant gemaakt worden. De som is namelijk 46 en dit is niet deelbaar door 3.

Rekenregels magische vierkanten:

Als je een magisch vierkant hebt en je vermenigvuldigt alle getallen uit dit vierkant met hetzelfde getal, dan krijg je een nieuw magisch vierkant.

Als je een magisch vierkant hebt en je telt bij alle getallen uit dit vierkant hetzelfde getal op, dan krijg je een nieuw magisch vierkant.

Als je 2 magische vierkanten hebt en je telt ze bij elkaar op, dan krijg je een nieuw magisch vierkant.

Generalisatie is het opschrijven van een vierkant in letters, zodat je voor elke variabele een andere waarde kan invullen.

Latijns vierkant van orde 3:

1	2	3		a	b	c
3	1	2	$\rightarrow$	c	a	b
2	3	1		b	c	a

Je kan voor het gegeneraliseerde vierkant dus een vergelijking opstellen voor welk getal a moet zijn:

$3a = a + b + c$ (middelste getal is $1/3$ van de som)

$2a = b + c$

2 1 3

Daaruit volgt $a = 2$, $b = 1$ en $c = 3$, dus:

3 2 1
1 3 2

Definitie: Een Latijns vierkant van orde n is een $n \times n$ vierkant waarin n symbolen zó gerangschikt zijn, dat in iedere rij en in iedere kolom ieder symbool precies 1 keer voorkomt. Vb. een sudoku is een L.V. met orde 9.

Bepaal alle L.V. van orde 3 met getallen 1, 2 en 3 erin.

1	2	3	3	1	2	2	3	1
3	1	2	2	3	1	1	2	3
2	3	1	1	2	3	3	1	2

2	3	1	1	2	3	3	1	2
3	1	2	2	3	1	1	2	3
1	2	3	3	1	2	2	3	1

1	3	2	3	2	1	2	1	3
2	1	3	1	3	2	3	2	1
3	2	1	2	1	3	1	3	2

3	2	1	2	1	3	1	3	2
2	1	3	1	3	2	3	2	1
1	3	2	3	2	1	2	1	3

3-tallig stelsel

Je kan bijvoorbeeld deze getallen zo in het 3-tallig stelsel schrijven:

$$8 = 3 \cdot 2 + 2, \text{ dus } 22.$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2, \text{ dus } 12.$$

$$2 = 0 \cdot 3 + 2, \text{ dus } 02.$$

Voor de getallen $\{1, 2, \dots, 9\}$ geldt dus $n = 3 \cdot a + b$ in het 3-tallig stelsel.

Met $a \in \{0, 1, 2\}$ en $b \in \{0, 1, 2\}$

Dus in een vierkant haal je eerst van alle getallen 1 af:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 0 & 5 & \\ 2 & 4 & 6 & \end{array} \rightarrow 3 \times \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 0 & \end{array} + \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & \\ 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 2 & 1 & \end{array}$$

En voor een 4×4 vierkant geldt dus:

$$\begin{array}{cccc} 6 & 11 & 0 & 13 \\ 1 & 12 & 7 & 10 \\ 15 & 2 & 9 & 4 \\ 8 & 5 & 14 & 3 \end{array} \rightarrow 4 \times \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} + \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Dit was het idee van Euler om een zuiver magisch vierkant te maken:

Pak 2 Latijnse vierkanten van orde 4 waarin de getallen 0, 1, 2, 3 staan, N en M waarvan de diagonaalsommen ook 6 zijn.

Dus de algemene formule voor een magisch vierkant is $4N + M + 1$.

Maar aan dit idee hebben we niet genoeg om een Franklin-vierkant te maken. We moeten namelijk twee orthogonale vierkanten hebben.

Twee $n \times n$ vierkanten bestaande uit de getallen 0, 1, 2, ..., $n-1$ heten orthogonaal als het vierkant der paren uit verschillende paren bestaan.

Hiermee wordt dus bedoeld dat, bijvoorbeeld in bovenstaande 4×4 vierkant, alle 1'en in het 4-voud vierkant horen een ander paar hebben in het rest-vierkant.

Dus in onderstaand voorbeeld horen de onderstreepte getallen bij elkaar.

$$\begin{array}{cccc} 6 & 11 & 0 & 13 \\ 1 & 12 & 7 & 10 \\ 15 & 2 & 9 & 4 \\ 8 & 5 & 14 & 3 \end{array} \rightarrow 4 \times \begin{array}{cccc} \underline{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & \underline{1} & 2 \\ 3 & 0 & 2 & \underline{1} \\ 2 & \underline{1} & 3 & 0 \end{array} + \begin{array}{cccc} \underline{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \underline{3} & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \underline{0} \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{array}$$

De definitie van Euler werd dus aangepast:

Zoek N en M Latijnse vierkanten die uit de getallen 0, 1, 2, ..., $n-1$ bestaan én zodanig dat N en M orthogonaal zijn (en bovendien de diagonaalsommen van N en M 0, 1, 2, ..., $n-1$ zijn).

Zo'n orthogonale vierkanten kunnen we goed vinden door generalisatie toe te passen.

$$N = \begin{matrix} & 0 & 2 & 3 & 1 \\ \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} d \\ c \\ b \end{matrix} & \begin{matrix} c \\ b \\ a \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ a \\ d \end{matrix} & \begin{matrix} a \\ d \\ c \end{matrix} \end{matrix}$$

Je kan hierbij dus 0, 1, 2 en 3 voor a, b, c en d invullen. Welke combinatie je ook maakt, je vindt altijd een orthogonaal vierkant.

Toepassing: Franklin magische vierkanten

Bij Franklin magische vierkanten hebben de hele kolommen en rijen de magische som. De halve rijen en kolommen hebben ook de halve magische som. Alle blokjes van 2x2 hebben dezelfde som en de gebroken diagonalen hebben de magische som.

Franklin zelf kwam uit op dit vierkant:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Als we van alle getallen in dit vierkant 1 vanaf trekken en als we het dan verdelen in een 8-voud vierkant en een rest vierkant, komen we uit op dit resultaat:

8-voud

6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2

Rest

3	4	3	4	3	4	3	4
5	2	5	2	5	2	5	2
4	3	4	3	4	3	4	3
2	5	2	5	2	5	2	5
6	1	6	1	6	1	6	1
0	7	0	7	0	7	0	7
1	6	1	6	1	6	1	6
7	0	7	0	7	0	7	0

De methode om Franklin-magische vierkanten te maken is dus als volgt:

Stap 1: Zoek een Franklin-magisch N en een Franklin-magisch M die bestaan uit de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7.

Stap 2: Zorg ervoor dat N en M orthogonaal zijn.

Als je dat hebt, dan geldt $8*N + M + 1$ is een zuiver Franklin-magisch vierkant.

.

Dus in het geval van het 8x8 vierkant kan je dus bijvoorbeeld dit resultaat krijgen:

6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2

a	7-a	a	7-a	a	7-a	a	7-a
b	7-b	b	7-b	b	7-b	b	7-b
7-a	a	7-a	a	7-a	a	7-a	a
7-b	b	7-b	b	7-b	b	7-b	b
c	7-c	c	7-c	c	7-c	c	7-c
d	7-d	d	7-d	d	7-d	d	7-d
7-c	c	7-c	c	7-c	c	7-c	c
7-d	d	7-d	d	7-d	d	7-d	d

De voorwaarde is dus dat a, b, c, d, 7-a, 7-b, 7-c en 7-d allemaal verschillende getallen zijn.

Franklin-magisch vierkant van orde 16

Eigenschappen

Wij zijn op zoek geweest naar een manier om magische vierkanten van orde 16 te maken (bij voorkeur Franklin- en panmagisch). Een zuiver magisch vierkant bevat dan de getallen van 1 tot en met 256.

Wij probeerden een zuiver Franklin-magisch vierkant te maken. Zo'n vierkant beschikt dus over deze eigenschappen:

1. Het vierkant bevat de getallen van 1 tot en met 256.
2. Alle halve kolommen en rijen bevatten de helft van de magische som (dus ook de hele rijen en kolommen).
3. De som van alle getallen op de vier gebogen diagonalen is de magische som.
4. De som van alle 2×2 vierkanten is een kwart van de magische som.

Daarnaast konden we ook proberen deze eigenschappen in het vierkant te verwerken:

5. De twee hele diagonalen hebben de magische som.
6. Alle gebroken diagonalen (door de rand, panmagisch) en alle gebogen diagonalen hebben de magische som.

En als dat lukte konden we ook dit nog proberen:

7. Een kwart van een rij en kolom heeft als som een vierde van de magische som.
8. Onze namen geschreven in het vierkant.

Constructie

Bij het maken van een Franklin-magisch vierkant van orde 16 hebben we eens goed gekeken naar het Franklin-magisch vierkant van orde 8.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Als we van elk getal dat in dit vierkant staat één getal aftrekken, kunnen we het vierkant in twee vierkanten splitsen. In een vierkant zetten we het grootste 8-voud gedeeld door acht van het getal (dus van 57 is dat $57/8 = 7$ met rest 1) en in het andere vierkant de rest die overblijft. Dus als we het Franklin-magisch vierkant van hierboven verdelen in twee vierkanten, krijgen we dit resultaat:

8-voud

6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2

Rest

3	4	3	4	3	4	3	4
5	2	5	2	5	2	5	2
4	3	4	3	4	3	4	3
2	5	2	5	2	5	2	5
6	1	6	1	6	1	6	1
0	7	0	7	0	7	0	7
1	6	1	6	1	6	1	6
7	0	7	0	7	0	7	0

Franklin koos dus voor een regelmatige aanpak. In de eerste twee rijen koos hij voor zo'n rangschikking, dat de twee getallen onder elkaar steeds bij elkaar 7 vormen. Het restvierkant heeft ongeveer dezelfde structuur, maar daar zullen we ons voorlopig niet mee bemoeien.

Wij namen aan dat Franklin de bovenste rijen dus in vier verdeelde. Hij had dus 6-7, 0-1, 2-3, 4-5.

Wij zijn het 16x16 vierkant dus ook begonnen door simpelweg de eerste twee rijen op te schrijven. We begonnen dus met een rijtje van 12, 13, 14 en 15 en vervolgden met 0 t/m 11, zoals Franklin ook deed in zijn 8x8 vierkant.

Dus zijn we begonnen met de rij voor de 16-vouden:

12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4

Maar we kwamen al snel tot de conclusie dat zo een kwart rij nooit een constant getal kon zijn. Dus daarom veranderden we een aantal kolommen:

14	15	0	1	2	3	12	13	10	11	4	5	6	7	8	9
1	0	15	14	13	12	3	2	5	4	11	10	9	8	7	6

Nu zijn de rijtjes van vier opeenvolgende getallen steeds constant, namelijk 30.

Maar het probleem zit het hem nu in de diagonalen. Wij willen proberen om de gebroken en de gehele diagonalen te laten kloppen. Om dat te bereiken zouden paren van 15-15 in de diagonalen ideaal zijn (dus twee getallen bij elkaar moet 15 zijn en de volgende ook).

Maar paren van 15-15 zal nooit lukken om de volgende reden:

Als je als beginpunt het getal a neemt, dan moet het volgende getal in de diagonale reeks $15-a$ zijn.

a	
	$15-a$

Maar omdat het getal boven de $15-a$ het getal a moet zijn (twee getallen boven elkaar moet bij elkaar 15 zijn), krijg je een botsing. Nu staat het getal a twee keer in de bovenste rij en dat is niet de bedoeling.

a	a
	$15-a$

Omdat het dus niet zal lukken om 15-15 paren te maken, zullen we 16-14 paren proberen te vormen.

Maar in de bovenstaande rijen zie je dus dat bij het eerste paar $(14+0)$ 14 krijgt en bij het tweede paar $(14+0)$ weer 14.

14	15	0	1
1	0	15	14
14	15	0	1
1	0	15	14

Als we dus de 3^e en 4^e kolom omwisselen, zullen we 1 en 15 als getallen vinden in het volgende paar:

14	15	1	0
1	0	14	15
14	15	1	0
1	0	14	15

Nu hebben we toch nog steeds elk getal in elke rij een kolom, en in de diagonalen hebben we paren van 14-16 ($14+0$ en $1+15$).

Zo kunnen we deze truc dus ook toepassen op de resterende kolommen. Dus krijg je bijvoorbeeld in het volgende ‘blok’:

2	3	12	13
13	12	3	2
2	3	12	13
13	12	3	2

In dit vierkant klopt de diagonaal niet, dus verwisselen we weer de 3^e en 4^e kolom:

2	3	13	12
13	12	2	3
2	3	13	12
13	12	2	3

Nu hebben we in dit vierkant wel paren van 14-16 in de diagonalen. En tevens zit er in elke rij en elke kolom één getal maar een keer.

Dus verwisselen we elke 3^e en 4^e kolom van een rijtje van 4, zodat we dit resultaat krijgen:

14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7

Je ziet dus nu dat elke rij en diagonaal de getallen 0 t/m 15 bevat. Elke kolom bevat ook steeds paren van 15. Zelfs als je een gebroken diagonaal pakt, zul je om en om paren van 14 en 16 tegenkomen. Dus krijg je uit een gebroken diagonaal ook een constant getal.

Elke halve rij en halve kolom heeft een constante waarde van 60 en elke kwart rij en kwart kolom is ook constant (namelijk 30).

Nu is dus ook elk blokje van 2x2 bij elkaar opgeteld 30.

Nu is het de kunst om bij dit vierkant van 16-vouden een orthogonaal vierkant te vinden met alle restgetallen (die ook 0 t/m 15 zijn). Met orthogonaliteit wordt bedoeld dat dezelfde paren niet voorkomen als je het restvierkant over het andere plaatst. Zo voorkom je dus dat er uiteindelijk dezelfde getallen in het vierkant komen (verder zie theorie).

We gaan dit aanpakken door middel van generalisatie.

In het 8x8 magisch vierkant van Franklin zagen we dat we een orthogonaal vierkant bij het 8-voud konden vinden met behulp van 4 variabelen.

8-voud

6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2

Orthogonaal vierkant daarbij:

a	b	a	b	a	b	a	b
c	7-a	c	7-a	c	7-a	c	7-a
b	a	b	a	b	a	b	a
7-a	c	7-a	c	7-a	c	7-a	c
d	7-b	d	7-b	d	7-b	d	7-b
7-c	7-d	7-c	7-d	7-c	7-d	7-c	7-d
7-b	d	7-b	d	7-b	d	7-b	d
7-d	7-c	7-d	7-c	7-d	7-c	7-d	7-c

Je ziet in dit vierkant dus dat de a in de bovenste rij hoort bij 6, 0, 2, 4 en in de 3^e rij hoort bij 7, 1, 3, 5. Zo geldt dat ook voor de rest van de getallen, dus het vierkant is orthogonaal.

Franklin koos dus voor de variabelen:

a: 4

b: 5

c: 6

d: 7

Deze waarden zijn mogelijk, omdat er zo bij 7-a, 7-b, 7-c en 7-d geen dezelfde waardes uitkomen.

Met dit orthogonaal vierkant kloppen alle kolommen (wat een vereiste was) en ook de diagonalen en de gebroken diagonalen kloppen.

Dit trucje gaan we dus ook toepassen op ons 16-voud vierkant.

We moeten nu wel 8 variabelen gaan gebruiken in plaats van vier.

Ons eerste probeersel zag er zo uit:

a	c
b	d
15-a	15-c
15-b	15-d
15-c	15-a
15-a	15-b
c	a
d	b
e	g
f	h
15-d	15-g
15-f	15-h
15-g	15-e
15-h	15-f
g	e
h	f

Maar dit levert problemen op, omdat er moet gelden $a+c = 15$. Dan geldt dus ook $15-a = c$ en dat levert dus twee dezelfde termen op, maar dat mag niet.

Dus probeerde we logische blokken van 2×2 te maken:

a	15-a	c	15-c
b	15-b	d	15-d
15-a	a	15-c	c
15-b	b	15-d	d
15-c	c	15-a	a
15-d	d	15-b	b
c	15-c	a	15-a
d	15-d	b	15-b
e	15-e	g	15-g
f	15-f	h	15-h
15-e	e	15-g	g
15-f	f	15-h	h
15-g	g	15-e	e
15-h	h	15-f	f
g	15-g	e	15-e
h	15-h	f	15-f

Maar als je het zo aanpakt, kloppen de diagonalen niet meer. Nu komt in de diagonaal van linksboven twee keer de a, 15-b, 15-c en de d voor.

Dit valt op te lossen door de eerste twee kolommen gewoon te herhalen:

a	15-a
b	15-b
15-a	a
15-b	b
15-c	c
15-d	d
c	15-c
d	15-d
e	15-e
f	15-f
15-e	e
15-f	f
15-g	g
15-h	h
g	15-g
h	15-h

Als je dit steeds als uitgangspunt neemt, krijg je steeds zo'n blokken:

a	15-a	a	15-a
b	15-b	b	15-b
15-a	a	15-a	a
15-b	b	15-b	b

Hierin zijn de waarden in de kolommen dus steeds anders en zitten er in de diagonalen ook geen dezelfde waardes.

Dus zijn we tot dit resultaat gekomen:

16-voud vierkant

14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7
14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7

Rest vierkant

a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a
b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b
15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a
15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b
15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c
15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d
c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c
d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d
e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e
f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f
15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e
15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f
15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g
15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h
g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g
h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h

Als we deze twee vierkanten combineren met deze variabelen, dan krijg je het volgende Franklin- en panmagisch vierkant.

a: 4
b: 1
c: 3
d: 7
e: 2
f: 5
g: 0
h: 6

229	252	21	12	37	60	213	204	165	188	85	76	101	124	149	140
18	15	226	255	210	207	34	63	82	79	162	191	146	143	98	127
236	245	28	5	44	53	220	197	172	181	92	69	108	117	156	133
31	2	239	242	223	194	47	50	95	66	175	178	159	130	111	114
228	253	20	13	36	61	212	205	164	189	84	77	100	125	148	141
24	9	232	249	216	201	40	57	88	73	168	185	152	137	104	121
237	244	29	4	45	52	221	196	173	180	93	68	109	116	157	132
25	8	233	248	217	200	41	56	89	72	169	184	153	136	105	120
227	254	19	14	35	62	211	206	163	190	83	78	99	126	147	142
22	11	230	251	214	203	38	59	86	75	166	187	150	139	102	123
238	243	30	3	46	51	222	195	174	179	94	67	110	115	158	131
27	6	235	246	219	198	43	54	91	70	171	182	155	134	107	118
225	256	17	16	33	64	209	208	161	192	81	80	97	128	145	144
23	10	231	250	215	202	39	58	87	74	167	186	151	138	103	122
240	241	32	1	48	49	224	193	176	177	96	65	112	113	160	129
26	7	234	247	218	199	42	55	90	71	170	183	154	135	106	119

Dit vierkant voldoet aan alle eigenschappen die wij op het begin in het vierkant wilden hebben. Het vierkant bevat (vanzelfsprekend) de getallen 1 tot en met 256. Alle hele kolommen en rijen hebben de magische som van 2056. Alle halve en kwart kolommen en rijen hebben respectievelijk de helft en een kwart van de magische som (deze halve en kwart kolommen en rijen gelden alleen als er vanaf de rand geteld wordt). Alle gebroken diagonalen (door de rand) en alle gebogen diagonalen hebben de magische som. Alle 2x2 vierkantjes in het vierkant zelf hebben als som een kwart van de magische som.

Bovendien kunnen wij onze namen in het vierkant zetten:

229	252	21	12	37	60	213	204	165	188	85	76	101	124	149	140
18	15	226	255	210	207	34	63	82	79	162	191	146	143	98	127
236	245	28	5	44	53	220	197	172	181	92	69	108	117	156	133
31	2	239	242	223	194	47	50	95	66	175	178	159	130	111	114
228	253	20	13	36	61	212	205	164	189	84	77	100	125	148	141
24	9	232	249	216	201	40	57	88	73	168	185	152	137	104	121
237	244	29	4	45	52	221	196	173	180	93	68	109	116	157	132
25	8	233	248	217	200	41	56	89	72	169	184	153	136	105	120
227	254	19	14	35	62	211	206	163	190	83	78	99	126	147	142
22	11	230	251	214	203	38	59	86	75	166	187	150	139	102	123
238	243	30	3	46	51	222	195	174	179	94	67	110	115	158	131
27	6	235	246	219	198	43	54	91	70	171	182	155	134	107	118
225	256	17	16	33	64	209	208	161	192	81	80	97	128	145	144
23	10	231	250	215	202	39	58	87	74	167	186	151	138	103	122
240	241	32	1	48	49	224	193	176	177	96	65	112	113	160	129
26	7	234	247	218	199	42	55	90	71	170	183	154	135	106	119

Niet alleen onze namen kunnen in dit vierkant. Elke letter van ons alfabet kan je in dit vierkant schrijven, terwijl het toch de magische som heeft.

Generalisering

16-voud vierkant

15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d
15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d
15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d
15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d
15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d
15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d
15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d
15-b	15-g	b	g	e	c	15-e	15-c	15-f	15-a	f	a	h	d	15-h	15-d
b	g	15-b	15-g	15-e	15-c	e	c	f	a	15-f	15-a	15-h	15-d	h	d

Restvierkant

a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a
b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b
15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a	15-a	a
15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b	15-b	b
c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c
d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d
15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c	15-c	c
15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d	15-d	d
e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e
f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f
15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e	15-e	e
15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f	15-f	f
g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g
h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h
15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g	15-g	g
15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h	15-h	h

Bij deze generalisering moet je onderscheid maken tussen de variabelen in het 16-voud vierkant en het restvierkant. De letter a in het eerste vierkant en de letter a in het 2^e vierkant stellen niet dezelfde waarden voor.

Franklin-magisch vierkant van orde n (met $n=8$ voud)

Eigenschappen

Hiervoor hebben wij ons 16x16 Franklin- en panmagisch vierkant besproken. Voor elk Franklin- en panmagisch vierkant van $n \times 8$ (met n elk positief geheel getal) gaat dit op dezelfde manier. We zullen die algemene manier hier bespreken.

Ten eerste spreken we af wat welke eigenschappen het vierkant we willen meegeven. We zullen dezelfde eigenschappen pakken als die in ons 16x16 vierkant zaten.

1. Het vierkant bevat de getallen van 1 tot en met n^2 .
2. Alle halve kolommen en rijen bevatten de helft van de magische som (dus ook de hele rijen en kolommen).
3. De som van alle getallen op de vier gebogen diagonalen is de magische som.
4. De som van alle 2×2 vierkanten is een kwart van de magische som.
5. De twee hele diagonalen hebben de magische som.
6. Panmagisch: alle gebroken diagonalen (door de rand) en alle gebogen diagonalen hebben de magische som.
7. Vanaf de zijkant gerekend heeft een kolom / rij van 4 getallen een constante som.

Constructie

Een Franklin- en panmagisch vierkant van orde $8*n$ (met n elk positief geheel getal) heeft altijd de getallen 1 t/m $(8*n)^2$. We zullen in het vervolg $(8*n)$ m noemen. We halen dus van elk getal 1 af, zodat we de getallen in twee vierkanten kunnen zetten. Een van de m -voud en een van de rest.

We zullen ons eerst bezighouden met het m -voud vierkant. Dat vierkant bevat dus de getallen van 0 t/m $m-1$.

In het eerdere 16-voud vierkant van het uiteindelijke 16×16 vierkant zagen we dit als steeds terugkerende rijen:

14	15	1	0	2	3	13	12	10	11	5	4	6	7	9	8
1	0	14	15	13	12	2	3	5	4	10	11	9	8	6	7

Hier zien we dus dat 14, 15, 0 en 1 samen 30 maakt. Zo geldt dat ook voor 2, 3, 13 en 12. Dus je begint de rij met de 2 grootste en 2 kleinste getallen. Daarna pak je de 2 grootste die dan nog over zijn en zo ook voor de kleinste getallen. Op deze manier bezit elke rij van 4 dezelfde som, namelijk $(m-1)*2$.

Omdat de diagonalen ook alle getallen moeten bezitten, zorg je ervoor dat het eerste paar (dus 14 en 15) oploopt en dat het tweede paar (1 en 0) afloopt. Daarna begin je met het kleinste paar oplopend en dan het grootste paar aflopend.

Dus als je dat algemeen in de rijen zet:

$m-2$	$m-1$	1	0	2	3	$m-3$	$m-4$	$m-6$	$m-5$	5	4	enz.
1	0	$m-2$	$m-1$	$m-3$	$m-4$	2	3	5	4	$m-6$	$m-5$	enz.

In het geval van een 16×16 vierkant zal het dus zo eruitzien:

$m-2$	$m-1$	1	0	2	3	$m-3$	$m-4$	$m-6$	$m-5$	5	4	6	7	$m-7$	$m-8$
1	0	$m-2$	$m-1$	$m-3$	$m-4$	2	3	5	4	$m-6$	$m-5$	$m-7$	$m-8$	6	7

Het eerste blokje linksboven ziet er dan zo uit:

$m-2$	$m-1$	1	0
1	0	$m-2$	$m-1$
$m-2$	$m-1$	1	0
1	0	$m-2$	$m-1$

Dit is juist, omdat elke rij, kolom en diagonaal zo elk getal een keer bevat. Ook de gebroken en gebogen diagonaal kloppen op deze manier. $m-2$ en 1 heffen elkaar op, je krijgt dan $m-1$. $m-1$ en 0 heffen elkaar ook op, je krijgt dan ook $m-1$. Je moet telkens proberen paren te creëren die als som $m-1$ hebben. Wanneer dit lukt zorg je dus dat de som van een diagonaal / rij / kolom gelijk wordt aan de magische som.

Deze manier kan je dus toepassen op elk $(8*n)$ -voud vierkant. Je zult bij elk vierkant de eigenschappen vinden die we voorheen hebben genoemd.

We kunnen het maaltvierkant verder generaliseren. De enige voorwaarde waar we namelijk rekening mee moeten houden is dat in iedere eigenschap die we willen toevoegen er paren zijn die als som telkens $m-1$ hebben. We kunnen in deze tabel de getallen vervangen door variabelen

m-2	m-1	1	0	2	3	m-3	m-4	m-6	m-5	5	4	6	7	m-7	m-8
1	0	m-2	m-1	m-3	m-4	2	3	5	4	m-6	m-5	m-7	m-8	6	7

We krijgen dan:

m-1-a	m-1-b	a	b	c	d	m-1-c	m-1-d	m-1-e	m-1-f	e	f	g	h	m-1-g	m-1-h	enz..
a	b	m-1-a	m-1-b	m-1-c	m-1-d	c	d	e	f	m-1-e	m-1-f	m-1-g	m-1-h	g	h	enz...

We kunnen nu dus niet een, maar heel veel vierkanten maken. De enige voorwaarde is dat alle waardes die in 1 rij staat verschillend moeten zijn. Dus m-1-a mag niet gelijk zijn aan a, maar ook niet aan b of m-1-f, of f enz.

Dat probleem de wereld uitgeholpen te hebben, kunnen we beginnen aan de generalisatie van het restvierkant.

De eerste twee rijen van het uiteindelijke restvierkant zagen er zo uit:

4	11
1	14
11	4
14	1
12	3
8	7
3	12
7	8
2	13
5	10
13	2
10	5
15	0
9	6
0	15
6	9

Deze rijen vallen dus te generaliseren tot dit:

a	(m-1)-a
b	(m-1)-b
(m-1)-a	a
(m-1)-b	b
(m-1)-c	c
(m-1)-d	d
c	(m-1)-c
d	(m-1)-d
e	(m-1)-e
f	(m-1)-f
(m-1)-e	e
(m-1)-f	f
(m-1)-g	g
(m-1)-h	h
g	(m-1)-g
h	(m-1)-h

enz. enz.

Je ziet dus dat hier hetzelfde systeem als in het maaltvierkant wordt gebruikt. Het eerste 4x4 blok ziet er dus zo uit:

a	(m-1)-a	a	(m-1)-a
b	(m-1)-b	b	(m-1)-b
(m-1)-a	a	(m-1)-a	a
(m-1)-b	b	(m-1)-b	b

Het maakt verder niet uit wat je voor de variabelen invult, als je er maar voor zorgt dat alle getallen (a,b,c,... en (m-1)-a,(m-1)-b,(m-1)-c,...) verschillende waardes voorstellen. Dus bijvoorbeeld a=1 en b=14 in het geval van het 16x16 vierkant mag niet, omdat a en 15-b dan hetzelfde getal voorstellen (a=1, 15-b=1).

Door op deze wijze de 2 vierkanten te maken zijn de vierkanten orthogonaal. Voor dit bewijs kijk op de volgende pagina. De 2 vierkanten kunnen we nu op de gebruikelijke wijze samenvoegen tot een Franklin vierkant. Wat je moet doen is het volgende: m x het maaltvierkant + het restvierkant + 1 en je hebt je Franklin vierkant.

Bewijs orthogonaal

We zullen nu bewijzen dat het maal- en het restvierkant orthogonaal zijn. We zetten daarom nog even de eerste 2 rijen en kolommen op deze pagina. We hebben wel 1 aanpassing gemaakt. De variabelen in het restvierkant hebben we aangepast. We hebben de letters veranderd. Anders zou de gedachte kunnen ontstaan dat de variabelen in beide vierkanten dezelfde waarde aannemen (wat niet het geval is).

Maalvierkant																
m-1-a	m-1-b	a	b	c	d	m-1-c	m-1-d	m-1-e	m-1-f	e	f	g	h	m-1-g	m-1-h	enz..
a	b	m-1-a	m-1-b	m-1-c	m-1-d	c	d	e	f	m-1-e	m-1-f	m-1-g	m-1-h	g	h	enz...

Restvierkant	
z	(m-1)-z
y	(m-1)-y
(m-1)-z	z
(m-1)-y	y
(m-1)-x	x
(m-1)-w	w
x	(m-1)-x
w	(m-1)-w
v	(m-1)-v
u	(m-1)-u
(m-1)-v	v
(m-1)-u	u
(m-1)-t	t
(m-1)-s	s
t	(m-1)-t
s	(m-1)-s

Zoals je kunt zien zitten er zowel in het maal- als in het restvierkant paardensprongen verborgen. Als je kijkt in het maaltvierkant: a zit linksonder, ga je 2 stappen naar rechts en 1 omhoog, dan zit je op de plek van de ander a. De stap die je nu neemt is een paardensprong. Dit gaan we gebruiken in het bewijs.

Het maaltvierkant kopiëren we horizontaal. Er komen telkens 2 rijen bij. Het restvierkant kopiëren we verticaal. Er komen telkens 2 kolommen bij.

We gaan nu voor a bewijzen dat het alle mogelijke paren vormt met de variabelen in het restvierkant. Wanneer dit bewezen is, dan is dat ook gemakkelijk in te zien voor de andere variabelen.

De 1^e en 3^e kolom van het restvierkant zijn gelijk, want het restvierkant wordt verticaal gekopieerd. In 1 kolom van het restvierkant zitten alle mogelijke waardes, want het vormt een Franklin vierkant. De a's uit de meest linkse kolom van het maaltvierkant vormen dus paren met elk tweede getal uit het restvierkant. Namelijk: (a,y), (a,m-1-z), (a,m-1-x) enz. De a's uit de 3^e

kolom van links uit het maaltvierkant vormen paren met alle waardes die nog overblijven. Want de 1^e en 3^e kolom van het restvierkant zijn gelijk en de a uit de 3^e kolom van het maaltvierkant zit 1 plaats hoger dan de a uit de meest linkse kolom van het maaltvierkant. Je zou dus eigenlijk de a's uit de derde kolom van het maaltvierkant allemaal op kunnen schuiven naar de meest linkse kolom. Ze blijven dan namelijk nog steeds dezelfde paren vormen (de 1^e en 3^e kolom van het restvierkant zijn gelijk). De a's vullen dan dus 1 gehele kolom van het restvierkant op. En omdat in 1 kolom van het restvierkant alle mogelijk waardes zitten vormt a dus alle mogelijke paren.

Op eenzelfde manier is te bewijzen dat alle andere waardes in het maaltvierkant alle mogelijke paren vormen met de waardes in het restvierkant. En omdat er zowel in het maaltvierkant als in het restvierkant m verschillende waardes zitten en alle mogelijke paren gevormd worden zitten er geen dubbele paren in. Dus zijn het maal- en het restvierkant orthogonaal.

Magische kubus van orde 3

Eigenschappen

Wij hebben een manier gevonden om een zuiver magische kubus te maken van orde 3. Dat wil zeggen een kubus met zijdes van lengte 3. In deze kubus staan de getallen 1 t/m 27 (3^3). Een “gewone” magische kubus van orde 3 is zo gemaakt dat ieder vlak van 3 bij 3 getallen dat parallel ligt aan een van de (buiten)vlakken gelijk is aan de magische som.

Wij hebben deze getallen zo gerangschikt dat de kubus niet alleen magisch is. Hij heeft ook nog een aantal extra eigenschappen. Wij geven ze hier:

1. De kubus is magisch, d.w.z. dat de som van de getallen in ieder vlak dat parallel ligt aan een van de buitenvlakken gelijk is aan de magische som.
2. De som van de getallen in ieder mogelijk vlak van 3 bij 3 is gelijk aan de magische som.
3. De som van de 3 getallen die samen 1 rijtje vormen dat parallel aan een van de ribben van de kubus ligt is gelijk aan $\frac{1}{3}$ van de magische som.
4. De diagonalen tussen 2 hoekpunten die tegenover elkaar liggen van het middelpunt gezien is gelijk aan $\frac{1}{3}$ van de magische som.
5. De som van 3 getallen die samen 1 rijtje vormen dat door het middelpunt gaat is gelijk aan $\frac{1}{3}$ van de magische som.

Eigenlijk volgen deze 5 eigenschappen gewoon uit de eigenschappen 3 en 5. We hebben de anderen er toch maar even bij gezet, omdat dat de volgorde was van welke we eerst wilden.

Wij proberen nu uit te leggen hoe we stapsgewijs aan deze kubus zijn gekomen.

Constructie magische kubus van orde 3

In een kubus van orde 3 staan er $3^3 = 27$ getallen. Omdat we het hebben over een zuiver magische kubus hebben zijn dit de getallen 1 t/m 27. Van elk getal trekken we 1 af. We hebben nu dus de getallen 0 t/m 26. Deze verzameling getallen $\{0,1,\dots,25,26\}$ noemen we K. We schrijven elk getal uit K in het drietallig stelsel. Zo wordt bijvoorbeeld $0 \Rightarrow 000$, $16 \Rightarrow 121$ en $21 \Rightarrow 210$ etc. Je schrijft een getal hierdoor in de vorm cba. Al deze nieuwe getallen vormen een nieuwe verzameling $\{000,001,\dots,221,222\}$. Dit is de verzameling L. Deze verzameling schrijven we op in een tabelletje. Hierin staan de getallen op volgorde van grootte (van klein naar groot). We beginnen met de kleinste. In iedere rij staan 3 getallen. Je krijgt dus $\frac{27}{3} = 9$ rijen. Zie hiervoor tabel 1.

Tabel 1:		
000	001	002
010	011	012
020	021	022
100	101	102
110	111	112
120	121	122
200	201	202
210	211	212
220	221	222

We selecteren uit deze tabel 3 verschillende deelverzamelingen van L.

$$P = \{000,011,022,100,111,122,200,211,222\}$$

$$Q = \{001,012,020,101,112,120,201,212,220\}$$

$$R = \{002,010,021,102,110,121,202,210,221\}$$

Zoals je ziet zijn dit een soort diagonalen in de tabel. Zie hiervoor tabel 2. P is aangegeven met rood, Q met groen en R met blauw.

Door op deze wijze de verzamelingen te maken / te kiezen zorg je ervoor dat in iedere verzameling P,Q en R er evenveel 0'en op plek a staan, evenveel 1'en en evenveel 2'en op plek a (van elk namelijk 3). Dit zelfde geldt voor de plekken b en c.

Tabel 2:		
000	001	002
010	011	012
020	021	022
100	101	102
110	111	112
120	121	122
200	201	202
210	211	212
220	221	222

We zullen nu toelichten hoe het komt dat het bovenstaande werkt. De getallen zijn op volgorde van klein naar groot met z'n drieën naast elkaar in een tabel gezet. Hierdoor staat in iedere regel een 0, een 1 en een 2 op plek a. Omdat het op volgorde staat, komt er dus eerst een 0, dan een 1 en als laatste een 2 op plek a. Als je een rij omlaag gaat, wordt het getal op plek b één hoger (tot het 2 is geworden, dan wordt het weer 0). Doordat je die diagonalen maakt ga je telkens 1 stap omlaag en 1 naar rechts. Je krijgt dus bij elke 3 stappen een 0,1 en 2 op plek a en ook een 0,1 en 2 op plek b. Omdat er 27 getallen zijn staan er op plek c de getallen 0,1 en 2. Bij de eerste drie rijen staat er op plek c een 0. Bij de volgende drie rijen een 1 en bij de laatste drie een 2. Omdat je "diagonalen" kiest krijg je dus even vaak een 0 als een 1 als een 2 op plek c.

Als we de verzamelingen P, Q en R ook in tabelletjes zetten krijgen we het volgende, zie tabel 3. We behouden de volgorde zoals in de diagonalen en we beginnen linksboven met het vullen van de tabellen.

Tabel 3										
P				Q				R		
000	011	022		001	012	020		002	010	021
100	111	122		101	112	120		102	110	121
200	211	222		201	212	220		202	210	221

Vervolgens nemen we van de vierkantjes van tabel 3 ook de diagonalen. Deze zetten we weer opnieuw in een tabel

Het zijn niet echt de diagonalen die we nemen. Wij zullen proberen dat nader toe te lichten. Het zijn de zogenaamde gebroken diagonalen. Je begint op een bepaald punt en je schuift telkens tegelijkertijd 1 stap naar rechts en 1 stap naar onder. Wanneer je dan aan de rand van de tabel bent gekomen ga je als het ware door de rand heen. Je komt er dan aan de andere kant weer uit. En hier ga je gewoon weer verder. Wij zullen dit even toelichten aan de hand van een voorbeeld. Zie tabel 4.

Tabel 4			
Voorbeeld			
a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

Wij zetten in iedere cel een letter. Als we dan de gebroken diagonaal nemen met als begin letter c, dan krijgen we: $c \rightarrow$ stap naar rechts en naar onder $\rightarrow h \rightarrow$ stap naar rechts (door de rand, je komt dan uit bij e) $\rightarrow$ stap naar onder $\rightarrow i \rightarrow$ stap naar rechts $\rightarrow$ stap naar onder $\rightarrow n$. De gebroken diagonaal beginnend bij c bestaat dus uit c-h-i-n.

Door dit te toe te passen op de verzamelingen in tabel 3 krijgt iedere rij van de nieuw verkregen verzamelingen dezelfde som, namelijk 39. Zie tabel 5. Dit is al een van de extra eigenschappen van de kubus: de som van ieder opeenvolgende rijtje van 3 getallen die op 1 lijn liggen parallel aan de ribben van de kubus is constant. We hebben er zo voor gezorgd dat in 1 richting dit al klopt: de x-richting.

Tabel 5										
S				T				U		
000	111	222		001	112	220		002	110	221
011	122	200		012	120	201		010	121	202
022	100	211		020	101	212		021	102	210

De verzamelingen P, Q en R bevatten elk precies dezelfde getallen als S, T en U. De manier waarop ze geordend zijn is alleen anders. Dit is echter zeer belangrijk bij het maken van de kubus. Daarom hebben wij ze daarom ook maar een andere naam gegeven om verwarring te voorkomen.

Om een magische kubus te maken moet de som van alle vlakken parallel aan de zijvlakken gelijk zijn aan de magische som. Daarom gaan we rijen verplaatsen. Zie hiervoor tabel 6. Wij hebben voor de duidelijkheid ook nog even tabel 5 erbij gezet. Op die manier is het duidelijker te zien hoe wij alles verplaatst hebben.

Tabel 6										
S				T				U		
000	111	222		001	112	220		002	110	221
011	122	200		012	120	201		010	121	202
022	100	211		020	101	212		021	102	210
S '				T '				U '		
000	111	222		112	220	001		221	002	110
011	122	200		120	201	012		202	010	121
022	100	211		101	212	020		210	021	102

We verplaatsen kolom 1 naar achteren. We hebben nu T ' gekregen. Bij U verplaatsen we kolom 1 en 2, deze zetten we ook naar achteren. We krijgen nu U '. Voor de duidelijkheid zetten we ook nog even S ' in tabel 9. Deze is echter exact gelijk aan S. De reden voor deze verplaatsing is dat we een magische kubus gaan maken. Wij plaatsen straks de 3 vierkanten boven elkaar en de vlakken van 3 bij 3 moeten dan gelijk zijn aan de magische som. Omdat in zowel S, T en U de 1^e kolom op plek c alleen nullen heeft is de som dus niet gelijk aan de magische som. In de 2^e kolom staan er op plek c alleen enen. En in de 3^e kolom staan er daardoor op plek c alleen nog maar tweeën. Zo krijg je natuurlijk nooit een magische kubus. Door de rijen te verplaatsen zorg je ervoor dat de er in de 1^e 2^e en 3^e kolom van de kubus er nu dus evenveel nullen, enen en tweeën staan op plek c.

Om de volgende stap toe te lichten gaan we even terug naar de basis: de Lo Shu. De Lo Shu is een zuiver magisch vierkant van orde 3. Het is tevens het enige magische vierkant van 3 bij 3 (op enkele spiegelingen en rotaties van de Lo Shu na). Het is zuiver magisch. Het bevat dus de getallen 1 t/m 9. Als we de Lo Shu pakken en we spiegelen hem in de diagonaal die rechtsboven begint dan krijgen we het volgende resultaat. Zie tabel 7. Als we vervolgens de getallen 1 t/m 9 ook in een tabelletje van 3 bij 3 zetten en hier de diagonalen van nemen, dan krijgen we het volgende. Kijk hiervoor in tabel 8. Het blijkt dat de rijtjes die je gekregen hebt door de gebroken diagonalen te nemen gelijk zijn aan de getallen die op de rijen van de gespiegelde Lo Shu staan.

Tabel 7								Tabel 8						
Lo Shu				Gespiegeld				Getallen 1 t/m 9				Diagonalen.		
8	1	6		8	3	4		1	2	3		1	5	9
3	5	7		1	5	9		4	5	6		2	6	7
4	9	2		6	7	2		7	8	9		3	4	8

Wanneer je nu naar de gespiegelde Lo Shu kijkt en naar het tabelletje diagonalen zul je zien dat de rijen van de gespiegelde Lo Shu niet alleen bestaan uit de getallen van de diagonalen. De volgorde van de getallen onderling is ook nog eens hetzelfde. De rijen van de Lo Shu zijn ten opzichte van de tabel met diagonalen gewoon verplaatst. We zullen het voor de duidelijkheid nog even naast elkaar zetten: zie tabel 9.

Tabel 9						
Gedraaide Lo Shu				Diagonalen		
8	3	4		1	5	9
1	5	9		2	6	7
6	7	2		3	4	8

We noemen de rijen uit tabel 9 in het gedeelte “Diagonalen” gewoon bij het eerste cijfer uit de rij. Dan zie je dat rij 1 één plek naar beneden is gegaan. Rij 2 is ook één rij naar beneden en twee plekken naar rechts doorgeschoven. Rij 3 is ook als het ware één plek naar beneden gegaan. Maar het stond al onderaan, dus nu staat het helemaal boven aan. Rij 3 is ook één plek naar rechts verschoven.

Nu we weten hoe deze verplaatsing werkt, kunnen we die gaan toepassen op de kubus.

We gaan de rij S uit tabel 5 nu volgens de manier verplaatsen die bij de Lo Shu ook toegepast is. We noemen de verkregen verzamelingen V, W en X.

Door nu op S ' T ' en U ' de manier van verplaatsten toe te passen die we bij de Lo Shu ontdekt hebben, krijgen we het volgende resultaat. Zie tabel 10. De verkregen verzamelingen noemen we V, W en X. De resultaten staan in tabel 10.

Tabel 10									
V				W				X	
211	022	100		020	101	212		102	210
000	111	222		112	220	001		221	002
122	200	011		201	012	120		010	121

Als je nu naar tabel 10 kijkt zie je dat bij 3 getallen die boven elkaar staan zowel op plek a,b en c er een 0, 1 en een 2 staat. Bijvoorbeeld: 200, 111, 022. Overal is de som dus constant. Dit blijkt ook te gelden voor 3 getallen die naast elkaar staan (als je binnen de betreffende verzameling blijft). Bijvoorbeeld: 201, 012 en 120. Ook is de som constant wanneer je uit V, W en X de getallen optelt die op dezelfde plek staan. Bijvoorbeeld: 221, 020 en 102. Deze som is dus ook constant. Er is nu dus al aan 3 extra eigenschappen voldaan. We zetten nu de verzamelingen weer terug in het 10-tallig stelsel, zo wordt het optellen wat gemakkelijker. Verder veranderen we helemaal niets. Zie hiervoor tabel 11.

Tabel 11									
V				W				X	
22	8	9		6	10	23		11	21
0	13	26		14	24	1		25	2
17	18	4		19	5	15		3	16

Omdat we een zuiver magische kubus willen maken tellen we bij elk getal 1 op. Wij hebben dan de getallen 1 t/m 27 gekregen. Deze getallen zetten we in tabel 12. We hebben nu dus andere verzamelingen gemaakt. Deze noemen we Y, Z en A.

Tabel 12										
Y				Z				A		
23	9	10		7	11	24		12	22	8
1	14	27		15	25	2		26	3	13
18	19	5		20	6	16		4	17	21

Door de verzamelingen Y, Z en A boven elkaar te leggen / op elkaar te plakken krijg je een kubus. Y vormt de bodem, Z de middenlaag en A de bovenkant.

In de Lo Shu stond in het midden het getal dat $1/3$ was van de som. In het geval van een kubus is dat dus $1/9$ van de magische som. De magische som is

$$\frac{(27+1) \cdot 27}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{28 \cdot 27}{2 \cdot 3} = \frac{756}{6} = 126$$

Het getal wat in het midden moet komen te staan is dan

$$\frac{126}{9} = 14.$$

Het leek ons verstandig om “dit advies” op te volgen en daarom 14 in het midden te zetten. 14 staat al in het midden staat van Y vierkant. Y vormt allen nog niet de middenlaag.

Daarom leggen we A op de bodem, Y vormt de middenlaag en Z de bovenkant.

De uiteindelijke kubus is te vinden in tabel 13.

Tabel 13										
A				Y				Z		
12	22	8		23	9	10		7	11	24
26	3	13		1	14	27		15	25	2
4	17	21		18	19	5		20	6	16

We kunnen ieder getal ook een coördinaat geven. Zo kun je de kubus ook gemakkelijk in een assenstelsel plaatsen. Zie voor deze coördinaten tabel 14.

Tabel 14		
1: (0,1,1)	10: (2,0,1)	19: (1,2,1)
2: (2,1,2)	11: (1,0,2)	20: (0,2,2)
3: (1,1,0)	12: (0,0,0)	21: (2,2,0)
4: (0,2,0)	13: (2,1,0)	22: (1,0,0)
5: (2,2,1)	14: (1,1,1)	23: (0,0,1)
6: (1,2,2)	15: (0,1,2)	24: (2,0,2)
7: (0,0,2)	16: (2,2,2)	25: (1,1,2)
8: (2,0,0)	17: (2,1,0)	26: (0,1,0)
9: (1,0,1)	18: (0,2,1)	27: (2,1,1)

Magische kubussen van orde n manier 1

Deze manier van het maken van een magische kubus komt heel erg overeen met de manier die we gebruikt hebben bij het maken van de 3 bij 3 kubus. Omdat we hem nu in het algemeen gaan toepassen krijgen we niet meer al die extra eigenschappen. Het is een manier om “gewone” magische kubussen te maken. Er zitten dus geen extra eigenschappen in. Het zijn alleen vlakken van $n \times n$ parallel aan de buitenvlakken die gelijk zijn aan de magische som.

Voordat we de 3x3 kubus hadden gemaakt hadden wij deze manier gevonden om magische kubussen te maken. De methode voor de 3x3 kubus is dus eigenlijk een verder ontwikkelde manier van wat wij eerst hadden bedacht.

Wij zullen nu uitleggen hoe we aan deze manier zijn gekomen. Omdat dit een algemene manier is zullen we het ook zo algemeen mogelijk proberen toe te lichten. Om het toch wat begrijpelijker te maken, maken we bij voorbeelden gebruik van een kubus van orde 4.

We gaan een kubus van orde n maken. Hierin komen dus de getallen 1 t/m n^3 . In het geval van de kubus van orde 4 dus de getallen 1 t/m $4^3 = 64$. Dit is dus 1 t/m 64 . We halen van elk van deze getallen 1 af. We hebben nu dus nog de getallen 0 t/m $n^3 - 1$. Dus 0 t/m 63 . We hebben nu een verzameling getallen gekregen. Deze noemen we K . Alle getallen uit K schrijven we op in het n -tallig stelsel. Ieder getal wordt dan opgeschreven in de vorm cba . Dat is ook de reden dat we van ieder getal 1 hebben afgetrokken. Het getal n^3 is namelijk in het n -tallig stelsel 1000 . En dat willen we niet. We willen dat het grootste getal maximaal 3 cijfers lang is. De getallen in het n -tallig stelsel vormen de verzameling L . Alle getallen uit n schrijven we op volgorde van grootte (van klein naar groot) in een tabel van breedte n en lengte n^2 . We beginnen met het vullen van deze tabel linksboven en werken dan naar rechtsonder. In het geval van $n = 4$ ziet die tabel er zo uit, zie tabel 1.

Tabel 1			
000	001	002	003
010	011	012	013
020	021	022	023
030	031	032	033
100	101	102	103
110	111	112	113
120	121	122	123
130	131	132	133
200	201	202	203
210	211	212	213
220	221	222	223
230	231	232	233
300	301	302	303
310	311	312	313
320	321	322	323
330	331	332	333

Uit de nu verkregen tabel selecteren we de gebroken diagonalen. (zie voor uitleg over gebroken diagonalen: “Toelichting bij het maken van een magische kubus van orde 3 ”) Deze gebroken diagonalen noemen we D_i met als i de plek waar we begonnen zijn. i is het begin getal van de gebroken diagonaal. Elke diagonaal vormt een nieuwe verzameling. Zie voor de toelichting bij het selecteren van deze verzamelingen: “Toelichting bij het maken van een magische kubus van orde 3 ”

De verkregen verzamelingen (n stuks) zetten we ook weer in een tabel op volgorde van grootte (van klein naar groot). We geven deze verzamelingen / tabellen de namen: $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$. Deze tabel heeft als afmetingen $n \times n$. We beginnen met het vullen van deze tabel linksboven en werken dan naar rechtsonder. In het geval van $n = 4$ krijgen we dus 4 verzamelingen. We noemen ze D_i , dus: D_1 (is aangegeven met rood), D_2 (= groen), D_3 (=blauw) en D_4 (=oranje). Zij zien er als volgt uit. Zie tabel 2.

Zoals je kunt zien is de som van elk van de verzamelingen constant. Zowel op plek a , b en c staan er n keer de getallen 0 t/m $(n-1)$. Voor de duidelijkheid voor $n = 4$. Zowel in D_1, D_2, D_3 en D_4 staan er op plek a , b en c 4 keer het cijfer 0 , 4 keer 1 , 4 keer 2 en ook nog 4 keer 3 . Omdat er overal even vaak die cijfers staan is de som dus constant.

Tabel 2																		
D ₁					D ₂					D ₃					D ₄			
000	011	022	033		001	012	023	030		002	013	020	031		003	010	021	032
100	111	122	133		101	112	123	130		102	113	120	131		103	110	121	132
200	211	222	233		201	212	223	230		202	213	220	231		203	210	221	232
300	311	322	333		301	312	323	330		302	313	320	331		303	310	321	332

Vervolgens gaan we schuiven in de verzamelingen. We gaan de rijen verschuiven. De bovenste rij noemen we rij 0 . De rij daaronder noemen we 1 . Enzovoorts. We beginnen in de eerste verzameling (D_1). Hierin verschuiven we rij 0 : 0 plaatsen (hij blijft dus staan). Rij 1 : verplaatsen we 1 stap naar rechts. Rij 2 : verplaatsen we 2 stappen naar rechts. Rij 3 : verplaatsen we 3 stappen naar rechts (als $n = 4$ dan zijn we nu in A al klaar). Rij 4 : 4 stappen naar rechts. We gaan zo door tot we bij rij n zijn aangekomen. In verzameling D_2 verplaatsen we rij 0 : $0+1=1$ stap naar rechts. Rij 1 : $1+1=2$ stappen naar rechts. Rij 2 : $2+1=3$ naar rechts. Enz. tot we bij rij n zijn aangekomen. In verzameling D_3 verplaatsen we rij 0 : $0+2=2$ stappen

naar rechts. Rij 1: $1+2=3$ stappen naar rechts. In verzameling D_4 moet je bij het rijnummer er 3 optellen.

Je moet er bij het verplaatsen opletten dat de rij als het ware door de rand heen gaat. Komt een getal rechts door de rand, dan komt het er aan de linkerkant weer bij te staan. Ook kunnen we hier modulo n rekenen. Het hoeft niet, maar het zorgt ervoor dat je de rijen niet over overbodig lange afstanden moet verplaatsen. Rijen gaan namelijk door de rand. En als een volledige rij door de rand moet gaan is dat overbodig. Wanneer we rij 3 uit verzameling D_3 moeten verplaatsen in het geval $n = 4$, dan moeten we die $(-1+3+3) \bmod 4 = 5 \bmod 4 = 1$ stap naar rechts verplaatsen. Als algemene formule kunnen we dus zeggen dat we rij j in verzameling D_i $(-1+i+j) \bmod(n)$ stappen naar rechts moeten verplaatsen.

Wanneer we dit toepassen op $n=4$ dan krijgen we het volgende resultaat: zie tabel 3. De nieuw verkregen verzamelingen hebben precies dezelfde inhoud, alleen de manier waarop de getallen geordend zijn is anders. Daarom hebben we de nieuw verkregen verzamelingen toch maar anders genoemd om verwarring te voorkomen. Ze heten respectievelijk: $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Tabel 3																		
E ₁					E ₂					E ₃					E ₄			
000	011	022	033		030	001	012	023		020	031	002	013		010	021	032	003
133	100	111	122		123	130	101	112		113	120	131	102		103	110	121	132
222	233	200	211		212	223	230	201		202	213	220	231		232	203	210	221
311	322	333	300		301	312	323	330		331	302	313	320		321	332	303	310

Door deze verplaatsing heeft iedere rij en kolom van de verschillende verzamelingen E nu op plek a en b een $0, 1, \dots, (n-2), (n-1)$ gekregen. Dit geldt trouwens ook voor plek c van de kolommen. Alleen de rijen hebben op plek c nog niet een $0, 1, \dots, (n-2), (n-1)$. Omdat het iedere keer rij 0 is die alleen nullen op plek c heeft, de rij 1 (dit is de op een na bovenste) alleen enen op plek c , $\dots$, en in de laatste rij alleen $(n-1)$ op plek c . Als we een kubus willen maken moeten we er dus minstens voor zorgen dat in ieder vlak parallel aan de zijvlakken n keer 0 staat, n keer 1 , $\dots$, n keer $(n-2)$, n keer $(n-1)$. Dit kunnen we doen door rijen te verplaatsen. We laten verzameling 1 zoals hij is. We verplaatsen alles $1-1=0$ rijen naar beneden. In verzameling 2 verplaatsen we alles $2-1=1$ rij naar beneden. De laatste rij gaat dan door de rand en komt dan boven te staan. In de derde verzameling verplaatsen we alles $3-1=2$ rijen naar beneden. In de i -de verzameling verplaatsen we alles $i-1$ plaatsen naar beneden. Hierbij geldt steeds: komt een rij door de rand beneden, dan wordt hij er bovenaan weer bijgeplaatst.

De verzamelingen die we na deze verplaatsing hebben gekregen hebben precies dezelfde “inhoud”, alleen de volgorde is anders. Omdat de volgorde cruciaal is hebben we de verzamelingen toch maar een nieuwe naam gegeven. We noemend de verzamelingen F_i : $F_1, F_2, \dots, F_n$. In het geval van $n=4$ worden dit dus de verzamelingen: F_1, F_2, F_3, F_4 . Kijk voor het resultaat in tabel 4.

Tabel 4																		
F ₁					F ₂					F ₃					F ₄			
000	011	022	033		301	312	323	330		202	213	220	231		103	110	121	132
133	100	111	122		030	001	012	023		331	302	313	320		232	203	210	221
222	233	200	211		123	130	101	112		020	031	002	013		321	332	303	310
311	322	333	300		212	223	230	201		113	120	131	102		010	021	032	003

Wanneer je nu als het ware de verkregen verzamelingen boven op elkaar plakt krijg je een magische kubus. Ieder vlak dat parallel ligt aan een zijvlak heeft een constante som. Er zit namelijk n keer een 0, n keer een 1, ... , n keer een $(n-2)$, n keer een $(n-1)$ op zowel plek a, b en c.

Om het allemaal iets duidelijker te maken zullen we de verkregen kubus bij $n=4$ even omzetten in het vertrouwde 10-tallig stelsel. We tellen er meteen ook 1 bij op. We krijgen dan de getallen 1 t/m 64, dus dan hebben we een zuiver magische kubus. We krijgen dan het volgende resultaat. Ook deze nieuwe verzamelingen geven we weer een nieuwe naam: G_i . In het geval van $n=4$ worden dit dus: G_1 , G_2 , G_3 , G_4 . Kijk in tabel 5.

Tabel 5																		
G ₁					G ₂					G ₃					G ₄			
1	6	11	16		50	55	60	61		35	40	41	46		20	21	26	31
32	17	22	27		13	2	7	12		62	51	56	57		47	36	41	46
43	48	33	38		28	29	18	23		9	14	3	8		58	63	52	53
54	59	64	49		39	44	45	34		24	25	30	19		5	10	15	4

Wanneer je nu deze 4 vierkanten boven elkaar plakt / legt heb je een magische kubus gemaakt. G_1 vormt de bodem, G_2 ligt hierboven, G_3 ligt boven het midden en G_4 vormt de toplaag. In het algemeen kun je dus zeggen G_1 leg op de bodem en vervolgens leg je op volgorde de volgende verzamelingen er bovenop.

Je deze methode werkt ook met andere waarden voor n . Wanneer je de stappen goed hebt uitgevoerd krijg je telkens n vierkanten van n bij n . Wanneer je dat gedaan hebt, dan kun je de verkregen vierkanten gewoon (op volgorde van naam) op elkaar gaan stapelen. Je moet de vierkanten natuurlijk niet gaan draaien.

Wanneer je zelf magische kubussen wilt maken, dan is het niet nodig dat je de getallen in het n -tallig stelsel gaat schrijven. Dat hebben wij alleen gedaan om onze constructie beter uit te kunnen leggen. Als je gewoon precies de stappen uitvoert die wij hebben opgeschreven (maar dan zonder dat n -tallig stelsel) dan lukt het ook gewoon.

Magische kubussen van orde n manier 2

We beginnen met een magisch vierkant van orde n . Deze noemen we A . We maken n kopieën van vierkant A . Deze noemen we B_i . We krijgen dan respectievelijk $B_1, B_2, \dots, B_n$. Bij alle getallen uit B_i tellen we $(i-1) \cdot n^2$ op (met $i \leq n$). We krijgen dan n nieuwe vierkanten. Deze nieuwe vierkanten noemen we C_i . We hebben dan respectievelijk de vierkanten $C_1, C_2, \dots, C_n$ gekregen. We zullen het even toelichten zie Tabel 1.

Tabel 1																		
A																		
7	12	1	14															
2	13	8	11															
16	3	10	5															
9	6	15	4															
↓																		
B ₁					B ₂					B ₃					B ₄			
7	12	1	14		7	12	1	14		7	12	1	14		7	12	1	14
2	13	8	11		2	13	8	11		2	13	8	11		2	13	8	11
16	3	10	5		16	3	10	5		16	3	10	5		16	3	10	5
9	6	15	4		9	6	15	4		9	6	15	4		9	6	15	4
↓					↓					↓					↓			
C ₁					C ₂					C ₃					C ₄			
7	12	1	14		23	28	17	30		39	44	33	46		55	60	49	62
2	13	8	11		18	29	24	27		34	45	40	43		50	61	56	59
16	3	10	5		32	19	26	21		48	35	42	37		64	51	58	53
9	6	15	4		25	22	31	20		41	38	47	36		57	54	63	52

De vierkanten C zijn allemaal magische vierkanten. Wanneer je namelijk bij ieder getal uit een magisch vierkant hetzelfde getal optelt blijft het vierkant magisch. De getallen uit C zijn allemaal verschillende getallen. Deze getallen lopen van 1 t/m n^3 .

Uit de magisch vierkanten C gaan we gebroken diagonalen selecteren. De diagonaal die linksboven begint noemen we 1, die rechts daarvan 2 enz. Een gebroken diagonaal noteren we met (j,k) met j het nummer van het vierkant waar de diagonaal in zit en met k het nummer van de diagonaal.

De verschillende gebroken diagonalen voegen we samen tot nieuwe vierkanten. Deze nieuwe vierkanten noemen we D . We doen dit als volgt. D_1 wordt het vierkant dat bestaat uit de gebroken diagonalen $(1,1) (2,2) (3,3) \dots (n,n)$. D_2 bestaat uit de diagonalen $(1,2) (2,3) (3,4) \dots (n,1)$. In het algemeen kunnen we zeggen D_i bestaat uit de gebroken diagonalen $(1,i) (2,((i+1) \bmod n)) (3,((i+2) \bmod n)) \dots (n,((i+n-1) \bmod n))$. $((i+n-1) \bmod n)$ is ook te schrijven als $((i-1) \bmod n)$ maar voor de duidelijkheid hebben we het toch ook maar op de uitgebreide manier geschreven.

Wanneer we dit toepassen op $n=4$ krijgen we het volgende resultaat: zie Tabel 2.

Tabel 2																		
D ₁					D ₂					D ₃					D ₄			
7	28	33	62		23	44	49	14		39	60	1	30		55	12	17	46
50	13	24	43		2	29	40	59		18	45	56	11		34	61	8	27
48	51	10	21		64	3	26	37		16	19	42	53		32	35	58	5
25	38	63	4		41	54	15	20		57	6	31	36		9	22	47	52

Wanneer je de vierkanten D op elkaar plaatst krijg je een kubus. Je pakt D₁ hier leg je D₂ bovenop. Hierboven komt D₃ enzovoorts. Dit doe je tot je bij D_n bent aangekomen. Dat deze kubus magisch is zullen we nu proberen uit te leggen.

Dat de vierkanten uit C magisch zijn hebben we al uitgelegd. D is ook magisch, hier komen we dadelijk nog op terug. We kunnen wel alvast zeggen dat de som van de diagonalen niet gelijk is aan de magische som.

Dat D de vierkanten de magisch zijn volgt uit de manieren waarop we D hebben gemaakt. Een vierkant uit D bestaat uit delen van elk vierkant uit C. We hebben uit C de gebroken diagonalen geselecteerd. Dat wil zeggen dat we uit elke kolom en elke rij van elk vierkant C 1 getal hebben gehaald. Omdat de vierkanten C alleen veelvoud n^2 schelen is het vierkant D_i in principe gelijk aan C₁ maar op bepaalde plekken is er een veelvoud van n^2 bij opgeteld. En dit is zo gedaan dat in iedere rij en iedere kolom er 1 keer $0 \times n^2$ is, 1 keer $1 \times n^2$, 1 keer $2 \times n^2$, ... 1 keer $(n-1) \times n^2$. Dus in iedere rij en iedere kolom is er ten opzichte van C een vast getal bij gekomen. Dus de vierkanten D zijn ook magisch. Tevens is de som van alle getallen in een vierkant D constant. Deze som is gelijk aan $n \times$ de som van een rij/kolom.

Omdat de vierkanten allemaal magisch zijn en de som van alle getallen in alle vierkanten D ook constant is, is de kubus ook magisch. De kubus bestaat namelijk uit de op elkaar geplakte vierkanten D. Een vlak uit de kubus bestaat dan uit een aantal boven elkaar liggende kolommen of rijen of uit een vierkant D. Omdat deze sommen allemaal aan elkaar gelijk zijn is de kubus magisch.

Multi-dimensionale magische figuren van orde n

Wij hebben ontdekt dat we de eerste methode die we gebruikten om magische kubussen te maken ook kunnen gebruiken om er multi-dimensionale figuren van te maken. Dus van bijvoorbeeld 4 of 5 of nog veel meer dimensies.

Het is voor ons onmogelijk voor te stellen wat zo'n figuur nou is. Wij gaan daarom in deze uitleg ook alleen werken met coördinaten en “platte” vierkanten en rechthoeken.

Verder moeten we ook een nieuwe definitie geven van wanneer zo'n figuur nu magisch is. Daar zullen wij dus mee beginnen. Vervolgens zullen wij deze methode nader toelichten. We proberen het om dat in het algemeen te doen. Maar om het begrijpelijker te maken zullen wij als voorbeeld de constructie uitvoeren met $n=3$ in 4 dimensies.

Constructie multi-dimensionale figuren van orde n

Zoals gezegd beginnen we met het geven van de definitie van wanneer een figuur magisch is. In een multi-dimensionaal figuur kunnen we elk getal een coördinaat geven. Zo'n coördinaat is een rijtje getallen. Een coördinaat geven we nu even aan met (a,b,c,d,e), dit soort coördinaat hoort dus bij een figuur met 5 dimensies. We zullen eerst even beginnen met een voorbeeld. We gaan er namelijk van uit dat het op die manier vele malen duidelijker wordt. In een magisch vierkant kun je ieder getal een coördinaat geven. Namelijk in de vorm van (x,y). Iedere rij van een magisch vierkant heeft een som die gelijk is aan de magische som. Alle getallen uit een rij hebben een gelijke y-coördinaat (een rij loopt horizontaal). Een rij is dus gewoon een aantal punten met daarop getallen die een gelijke waarde voor de y-coördinaat hebben. De som van een rij is dus de som van alle getallen die op de "y-plek" van het coördinaat het zelfde getal hebben staan. Het zelfde kunnen we zeggen over een kolom. De som van een kolom is gelijk aan de som van alle getallen die als x-coördinaat een gelijk getal hebben. Ditzelfde kunnen we toepassen op figuren in meerdere dimensies. We ervoor zorgen dat de som van de getallen die op dezelfde plek in het coördinaat het zelfde getal hebben staan gelijk is aan de magische som.

Tabel 1		
A:		
0000	0001	0002
0010	0011	0012
0020	0021	0022
0100	0101	0102
0110	0111	0112
0120	0121	0122
0200	0201	0202
0210	0211	0212
0220	0221	0222
1000	1001	1002
1010	1011	1012
1020	1021	1022
1100	1101	1102
1110	1111	1112
1120	1121	1122
1200	1201	1202
1210	1211	1212
1220	1221	1222
2000	2001	2002
2010	2011	2012
2020	2021	2022
2100	2101	2102
2110	2111	2112
2120	2121	2122
2200	2201	2202
2210	2211	2212
2220	2221	2222

Met dit in ons achterhoofd kunnen we beginnen aan de constructie. We gaan een zuiver multi-magisch figuur maken van orde n in m dimensies. Voor ons voorbeeld is n dus 3 en m 4. Je "zoekt" eerst alle getallen op. Dit dus de getallen 1 t/m $n^m = \{1, 2, 3, \dots, n^m - 2, n^m - 1, n^m\}$. In ons geval dus de getallen 1 t/m $3^4 = \{1, 2, 3, \dots, 79, 80, 81\}$. Van deze rij getallen halen we van elk getal 1 af. We krijgen dan een nieuwe verzameling, namelijk $\{0, 1, 2, \dots, n^m - 3, n^m - 2, n^m - 1\}$. We noemen dit verzameling A. In ons geval is A dus de verzameling $\{0, 1, 2, \dots, 78, 79, 80\}$. We gaan A nu opschrijven in het n-tallige stelsel. De nu verkregen verzameling noemen we B. In ons geval ziet die verzameling er zo uit: $\{0000, 0001, 0002, \dots, 3331, 3332, 3333\}$. We gaan B in een tabel zetten. Deze heeft breedte n en lengte n^{m-1} . In ons geval dus breedte 3 en lengte $3^{4-1} = 3^3 = 27$. In deze tabel zetten we alle getallen op volgorde van grootte. We vullen de tabel op. We beginnen rechtsboven en werken dan van links naar rechts naar beneden, te beginnen met het kleinste getal. Kijk voor ons voorbeeld, n=3 en m=4 in tabel 1.

We gaan in deze tabel weer nieuwe verzamelingen selecteren. Dit doen wij weer volgens de methode van de gebroken diagonalen. Voor meer uitleg over deze methode zie: "Toelichting bij het maken van een magische kubus van orde 3". Je krijgt dan n nieuwe verzamelingen, want je kan namelijk maar n gebroken diagonalen maken. We beginnen met het "tekenen" van deze diagonalen bovenin en werken dan rechtsonder (we gaan telkens 1 stap naar beneden en 1 stap naar rechts) naar beneden toe. En wanneer je door de rand gaat ga je links weer verder, dat is namelijk een gebroken diagonaal. In deze diagonalen staan de getallen al op volgorde van grootte. In ons voorbeeld krijgen we 3 (want n=3) nieuwe verzamelingen. Deze noemen we C, D en E. Kijk voor de geselecteerde nieuwe verzamelingen tabel 2. C is rood, D

is groen en E is aangegeven met blauw.

Wij zetten iedere nieuw verkregen verzamelingen opnieuw in een tabel. Je krijgt dan n nieuwe tabellen. De volgorde van klein naar groot behouden we. De tabel heeft als breedte n en als lengte n^{m-2} . Wij beginnen met het plaatsen van de getallen met het kleinste getal. Deze zetten we rechts boven in de tabel. Het volgende getal zetten we daarnaast. In deze nieuwe tabellen staan de getallen dus ook weer op volgorde van grootte. Daar hebben we zelf voor gezorgd, want we houden de getallen in dezelfde volgorde als in de diagonaal. En daar stonden ze ook op volgorde van klein naar groot. Kijk in tabel 3 voor de verkregen nieuwe verzamelingen / tabellen.

Tabel 2		
0000	0001	0002
0010	0011	0012
0020	0021	0022
0100	0101	0102
0110	0111	0112
0120	0121	0122
0200	0201	0202
0210	0211	0212
0220	0221	0222
1000	1001	1002
1010	1011	1012
1020	1021	1022
1100	1101	1102
1110	1111	1112
1120	1121	1122
1200	1201	1202
1210	1211	1212
1220	1221	1222
2000	2001	2002
2010	2011	2012
2020	2021	2022
2100	2101	2102
2110	2111	2112
2120	2121	2122
2200	2201	2202
2210	2211	2212
2220	2221	2222

Tabel 3										
C				D				E		
0000	0011	0022		0001	0012	0020		0002	0010	0021
0100	0111	0122		0101	0112	0120		0102	0110	0121
0200	0211	0222		0201	0212	0220		0202	0210	0221
1000	1011	1022		1001	1012	1020		1002	1010	1021
1100	1111	1122		1101	1112	1120		1102	1110	1121
1200	1211	1222		1201	1212	1220		1202	1210	1221
2000	2011	2022		2001	2012	2020		2002	2010	2021
2100	2111	2122		2101	2112	2120		2102	2110	2121
2200	2211	2222		2201	2212	2220		2202	2210	2221

=> Deze truc van het selecteren van verzamelingen met behulp van de gebroken diagonalen passen we nog een keer toe. Nu op de nieuwe afzonderlijke verzamelingen (dus die we net verkregen hebben).

Wanneer je dit doet krijg je: het aantal oude verzamelingen keer n is het aantal nieuwe verzamelingen. Net zoals alle vorige staat deze weer op volgorde van klein naar groot. Dit komt omdat in de tabel waar we ze uitgehaald hebben de getallen ook op volgorde stonden. Deze nieuwe verzamelingen zetten we weer in een tabelletje, precies op dezelfde manier als hoe we dat bij de rest hebben gedaan: op volgorde van klein naar groot en rechtsboven beginnen met opvullen. <=

Deze stap, die tussen => <= staat pas je net zo lang toe tot je verzamelingen krijgt met n^2 getallen erin. Je moet die stap van de gebroken diagonalen in totaal (dus van het begin af aan, dus ook de eerste stap die op de vorige bladzijde staat) $m-2$ keer toepassen. In ons voorbeeld is dat dus 2 keer. Want $m=4$ dus $m-2=2$. Wanneer je klaar bent met de selectieprocedure dan heb je dus n^{m-2} verzamelingen

gekregen met daarin n^2 getallen. Tabel 3 is het resultaat na de eerste keer van het selecteren van de verzamelingen. In Tabel 4 staat het resultaat na de 2^e selectieronde. We hebben dan $n^{m-2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$ verzamelingen verkregen. De verzamelingen die uit C zijn voortgekomen noemen we F, G en H. Die uit D noemen we I, J en K. Ook uit E komen er 3, die hebben L, M en N genoemd. Zie Tabel 4.

Tabel 4											
Uit C				Uit D				Uit E			
F				I				L			
0000	0111	0222		0001	0112	0220		0002	0110	0221	
1000	1111	1222		1001	1112	1220		1002	1110	1221	
2000	2111	2222		2001	2112	2220		2002	2110	2221	
G				J				M			
0011	0122	0200		0012	0120	0201		0010	0121	0202	
1011	1122	1200		1012	1120	1201		1010	1121	1202	
2011	2122	2200		2012	2120	2201		2010	2121	2202	
H				K				N			
0022	0100	0211		0020	0101	0212		0021	0102	0210	
1022	1100	1211		1020	1101	1212		1021	1102	1210	
2022	2100	2211		2020	2101	2212		2021	2102	2210	

De reden voor deze selectie is simpel. We willen ervoor zorgen dat de som van “vlakken” binnen het figuur gelijk wordt aan de magische som. We zullen proberen te leggen waarom deze methode werkt. Je begint met een tabel waarin alle getallen staan. Deze staan op volgorde van grootte. Deze getallen staan in het n -tallige stelsel. Een getal geven we nu voor het gemak even aan met ...dcba. Wanneer je selecteert ga je in de tabel telkens 1 stap naar beneden en 1 stap naar rechts, want je neemt de diagonalen. Deze diagonalen zet je weer opnieuw in een tabel. Door op deze manier te selecteren zorg je ervoor dat de som van alle getallen in deze nieuwe tabellen constant is. Je hebt namelijk even vaak een 0, een 1, een 2, ... een n op plekken a. Maar dit geldt net zo goed ook voor de plekken b,c,d, ... Dit komt doordat je de diagonalen neemt en in zo’n diagonaal zit even vaak een 0, een 1, een 2, ..., een n op iedere plek.

Er moeten nog 2 dingen gebeuren voordat we een magisch figuur van 4 dimensies van orde 3 hebben gekregen. We moeten namelijk eerst nog wat rijen gaan verplaatsen en hierna moeten we ieder getal nog zijn coördinaat toewijzen.

Wij zullen beginnen met het verplaatsen van de rijen, want pas hierna kunnen we de coördinaten toe gaan wijzen. Om de rijenverplaatsing goed uit te kunnen voeren moeten we eerst duidelijk afspreken vanuit welke situatie we gaan verplaatsen.

We beginnen weer eventjes van voor af aan. Toen hebben we alle getallen in een tabel gezet. Deze had breedte n en lengte n^{m-1} . Na de eerste selectieronde hebben we n deelverzamelingen gekregen van de begin verzameling. In elke deelverzameling staat n^{m-1} getallen. Deze deelverzamelingen zijn de verzamelingen a. We nummeren ze met: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Deze verzamelingen hadden we eerst in n losse tabellen gezet. Deze tabellen gaan we nu als het ware in 1 grote tabel zetten. a_1 komt helemaal links te staan, a_2 komt hier rechts van. Links van a_2 komt a_3 , ... links van $a_{(n-1)}$ komt a_n . Het moet wel duidelijk blijven wat de verschillende verzamelingen zijn, anders zit alles door elkaar en kan er ook niet fatsoenlijk worden geselecteerd.

Na de “tweede ronde” wordt iedere deelverzameling a weer opgedeeld in n nieuwe deelverzamelingen. Deze nieuwe verzamelingen duiden we aan met b. De verzamelingen b zijn n breed en n^{m-2} lang. Uit a_1 komen dan de verzamelingen $b_{11}, b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1n}$. Uit a_2 komen de verzamelingen $b_{21}, b_{22}, b_{23}, \dots, b_{2n}$. Uit a_n komen de verzamelingen $b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn}$. Al deze verzamelingen hebben we eerst allemaal apart in een tabel gezet. Nu zetten we

al deze kleine tabelletjes samen in een grote tabel. We zetten alle verzamelingen bx_1 (met als x : $1, 2, \dots, n$) op een horizontale lijn boven elkaar. We beginnen met b_{11} , deze staat helemaal linksboven. Rechts van b_{11} komt b_{21} . Rechts van b_{21} komt b_{31} , ... rechts van $b_{(n-1)1}$ komt b_{n1} . De verzamelingen staan dus op een bepaalde manier geordend. Onder deze rij komt opnieuw een rij met tabelletjes. Dit zijn de verzamelingen bx_2 (met als x : $1, 2, \dots, n$). Deze verzamelingen worden op dezelfde manier geordend als bij bx_1 . b_{12} staat helemaal links, rechts hiervan komt b_{22} , ... , links van $b_{(n-1)2}$ komt b_{n2} . Hieronder komt de rij met bx_3 , ... , daaronder de rij met verzamelingen $b_{x(n-1)}$ en helemaal onder aan de rij met verzamelingen bx_n . We delen dus eigenlijk de plek waar één van de verzamelingen a stond op in n verzamelingen b (die uit die verzameling a komen). De verzamelingen b zetten we dan op volgorde naast elkaar.

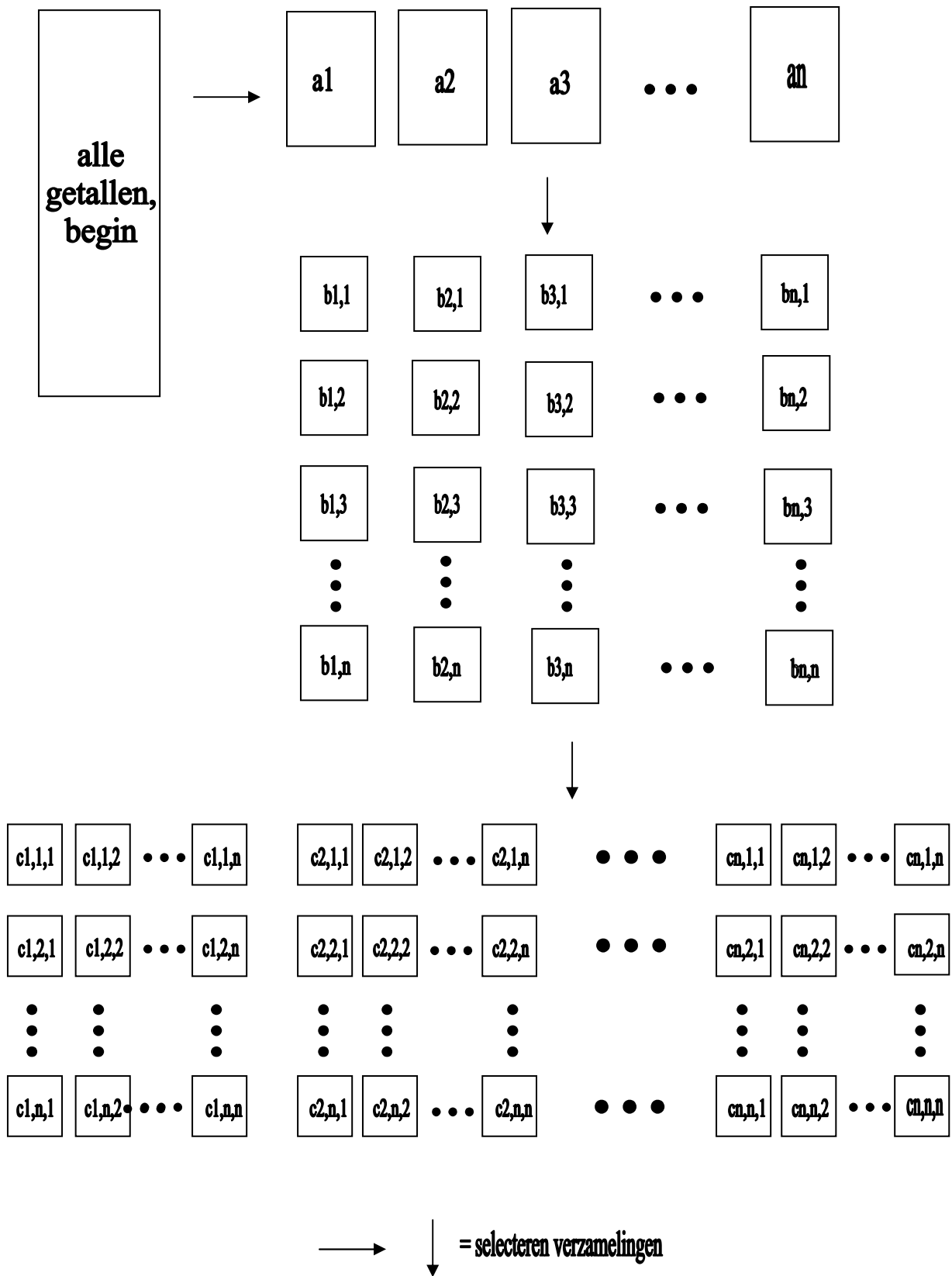
Na een derde ronde van selecteren hebben we al n^3 deelverzamelingen. We hebben nu tabelletjes gekregen van n breed en n^{m-3} lang. Deze tabelletjes die we nu krijgen zetten we ook weer samen in een grote tabel. We zetten dan op de plek van een verzameling b de verzamelingen c (die uit die verzameling b kwamen). De verzamelingen c zetten we dan op volgorde onder elkaar.

Zo gaan we verder tot we n^{m-2} verzamelingen hebben gekregen van grootte n bij n . Wij zetten telkens de nieuw verkregen verzamelingen op de plek van de grote verzameling waar ze uit zijn gekomen. De eerst zetten we ze naast elkaar (a), dan zetten we ze onder elkaar (b), dan weer naast elkaar (c). Zo gaan we de hele tijd door. We zetten de verzamelingen om en om, eerst naast elkaar, dan onder elkaar enzovoorts. Zoals je kunt zien hebben we in tabel 4 de verzamelingen meteen al volgens deze regelmaat geordend.

We hopen dat een tekening het allemaal wat duidelijker kan maken, zie figuur 1.

Nu staat dus vast hoe de verzamelingen geordend zijn. Daarom kunnen we nu ook gaan zeggen hoe de rijen verplaatst moeten worden om tot een magisch figuur te komen.

figuur 1:



Nu vast staat hoe de deelverzamelingen geordend zijn is het mogelijk systematisch de rijen van de afzonderlijke deelverzamelingen te gaan verplaatsen.

Om de verplaatsing uit te voeren gaan gebruiken we de uiteindelijke tabel met de deelverzamelingen. Iedere verzameling staat binnen deze tabel weer in een klein tabelletje. Dit kleine tabelletje heeft de afmeting $n \times n$. We beginnen met de deelverzameling linksboven in de tabel. Dit is de oorsprong. We noemen de bovenste rij in deze deelverzameling rij 1, de rij hieronder rij 2, enzovoorts. Rij 1 laten we staan ($1-1=0$). Rij 2 verplaatsen we binnen de deelverzameling 1 plek naar rechts ($2-1=1$). Eén getal zal dus als het ware buiten de verzameling vallen, hij komt aan de rechterkant buiten de rand. Maar deze zetten we er links weer bij. Rij 3 verplaatsen we 2 plekken naar rechts ($3-1=2$) ook hier gaan er getallen door de rand. Ook deze zetten we er rechts weer bij. We kunnen dus zeggen dat we in deze verzameling de rijen $x-1$ plekken verplaatsen (met x is het nummer van de rij).

Deze verplaatsing van de rijen passen we overal toe. Je verplaatst in iedere verzameling rij x (met vraagteken is het nummer van de rij) $x-1$ plaats naar rechts. Wanneer een getal buiten de verzameling valt plak je deze er links weer bij. Wanneer we dit toepassen op tabel 4 krijgen we het volgende resultaat, zie tabel 5. We noemen de verkregen verzamelingen F' , G' , H' , I' , J' , K' , L' , M' , N' . Voor de duidelijkheid zetten we tabel 4 er ook nog maar even bij.

Tabel 4										
Uit C				Uit D				Uit E		
F				I				L		
0000	0111	0222		0001	0112	0220		0002	0110	0221
1000	1111	1222		1001	1112	1220		1002	1110	1221
2000	2111	2222		2001	2112	2220		2002	2110	2221
G				J				M		
0011	0122	0200		0012	0120	0201		0010	0121	0202
1011	1122	1200		1012	1120	1201		1010	1121	1202
2011	2122	2200		2012	2120	2201		2010	2121	2202
H				K				N		
0022	0100	0211		0020	0101	0212		0021	0102	0210
1022	1100	1211		1020	1101	1212		1021	1102	1210
2022	2100	2211		2020	2101	2212		2021	2102	2210

Tabel 5										
Uit F,G,H				Uit I,J,K				Uit L,M,N		
F'				I'				L'		
0000	0111	0222		0001	0112	0220		0002	0110	0221
1222	1000	1111		1220	1001	1112		1221	1002	1110
2111	2222	2000		2112	2220	2001		2110	2221	2002
G'				J'				M'		
0011	0122	0200		0012	0120	0201		0010	0121	0202
1200	1011	1122		1201	1012	1120		1202	1010	1121
2122	2200	2011		2120	2201	2012		2121	2202	2010
H'				K'				N'		
0022	0100	0211		0020	0101	0212		0021	0102	0210
1211	1022	1100		1212	1020	1101		1210	1021	1102
2100	2211	2022		2101	2212	2020		2102	2210	2021

De reden dat we de rijen gaan verplaatsen is gemakkelijk te zien in tabel 4. In iedere kolom staat namelijk op de plekken: a,b, ... , (n-1) het zelfde getal. Het figuur kan daardoor nooit magisch zijn. De rijen hebben ook een probleem, namelijk in iedere rij staat op plek n hetzelfde getal. De rest van de rijen klopt wel. Zo staan er dus op plek a, b, ... (n-1) een aantal: n verschillende getallen. En dit moet ook. Door de rijen in iedere verzameling op dezelfde manier te verplaatsen verhelpen we het probleem wat zich in de kolommen voor doet. Het probleem wat er in de rijen zit lossen we zo meteen op. We hebben al omschreven hoe we dit doen, dat staat op de vorige pagina. We hebben er op deze manier voor gezorgd dat er nu in iedere kolom op iedere plek n verschillende getallen staan. En dan klopt het.

Nu we dit gedaan hebben moeten we het probleem in de rijen ook oplossen. Hiervoor verplaatsen we de rijen onderling ook nog een keer. Anders staat namelijk bij bepaalde coördinaten die samen een magisch vlak moeten vormen binnen het figuur telkens hetzelfde cijfer op plek n. En dat zorgt ervoor de som van dat vlak niet gelijk is aan de magische som. En hierdoor zal het figuur dus niet magisch zijn.

Wanneer we vanuit de oorsprong 1 stap naar beneden gaan moeten we de rijen in deze deelverzameling allemaal 1 plek naar beneden plaatsen. De rij die hierdoor als het ware buiten het kleine tabelletje valt zetten we bovenaan weer neer. Gaan we 2 stappen naar beneden, dan moeten de rijen binnen deze deelverzameling 2 plekken naar beneden worden verplaatst. De 2 onderste rijen vallen weer buiten het tabelletje en moeten er dus boven weer bij worden geplaatst. We gaan zo door tot we in die kolom alle verzamelingen hebben gehad. Gaan we vanuit de oorsprong nu 1 stap naar rechts, dan moeten alle rijen in deze deelverzameling 1 plek omlaag zetten. Gaan we 2 stappen naar rechts, dan moeten alle rijen 2 plekken omlaag. Maar ligt een deelverzameling niet op een van 2 lijnen (soort x-as en y-as) waarop de oorsprong ligt (wat natuurlijk in de meeste gevallen het geval is), dan is het iets lastiger. Je moet dan tellen hoeveel stappen je naar beneden gaat en hoeveel naar onder. Deze aantallen tel je bij elkaar op en dat is het aantal stappen dat de rijen naar beneden moeten. Met het vanzelfsprekende feit dat de rijen die onder uit het tabelletje van de deelverzameling vallen er boven weer bij geplaatst worden. Wanneer we dit toepassen op $n=3$ $m=4$, dus op tabel 5, dan krijgen we het volgende resultaat: zie tabel 6. De inhoud is hetzelfde gebleven, maar de manier van ordenen is veranderd. De “nieuw” verkregen verzamelingen geven we daarom ook een andere nieuwe naam. We noemen ze respectievelijk O,P,Q,R,S,T,U,V,W.

Tabel 6										
Uit F', G', H'				Uit I', J', K',				Uit L',M', N'		
O				R				U		
0000	0111	0222		2112	2220	2001		1221	1002	1110
1222	1000	1111		0001	0112	0220		2110	2221	2002
2111	2222	2000		1220	1001	1112		0002	0110	0221
P				S				V		
2122	2200	2011		1201	1012	1120		0010	0121	0202
0011	0122	0200		2120	2201	2012		1202	1010	1121
1200	1011	1122		0012	0120	0201		2121	2202	2010
Q				T				W		
1211	1022	1100		0020	0101	0212		2102	2210	2021
2100	2211	2022		1212	1020	1101		0021	0102	0210
0022	0100	0211		2101	2212	2020		1210	1021	1102

Nu we weten hoe de getallen binnen de deelverzameling geordend zijn, moeten we alle getallen nog een coördinaat toewijzen. Dit is relatief gemakkelijk.

We kijken even terug naar figuur 1. Alle deelverzamelingen hebben daar een naam gekregen. Dit is een letter gevolgd door een aantal cijfers. Deze cijfers gebruiken we als coördinaat voor de deelverzameling. Wanneer we 3 keer deelverzamelingen hebben moeten selecteren bestaat het coördinaat uit 3 getallen. Hebben we maar 1 keer hoeven te selecteren, dan hebben de deelverzamelingen maar 1 getal als coördinaat. Bijvoorbeeld c111 dit krijgt als coördinaat (1,1,1). d2120 krijgt als coördinaat (2,1,2,0). Dit kun je voor elke deelverzameling doen. We geven elk getal binnen ook een deelverzameling ook coördinaat. Dit coördinaat bestaat uit 2 getallen. Wanneer we het coördinaat van de verzameling en het coördinaat van het getal combineren tot 1 coördinaat dan heeft ieder getal binnen het figuur een uniek coördinaat gekregen. Dit combineren is heel simpel, we zetten gewoon het coördinaat van het getal binnen de verzameling achter het coördinaat van de verzameling. Bijvoorbeeld een getal binnen een deelverzameling heeft als coördinaat (2,3). De deelverzameling heeft als coördinaat (4,1,0,3). Het coördinaat van het getal wordt dan (4,1,0,3,2,3).

We zullen alle getallen uit tabel 6 eerst even terugzetten naar het 10-tallig stelsel en er 1 bij optellen (anders is het geen zuiver magisch figuur). Zie tabel 7. Vervolgens zullen we alle getallen nog even hun coördinaat toewijzen zie tabel 8 en dan zijn we klaar. Dan is het figuur af.

Tabel 7										
Uit O,P,Q				Uit R, S,T				Uit U,V,W		
1	14	27		69	79	56		53	30	40
54	28	41		2	15	25		67	80	57
68	81	55		52	29	42		3	13	26
72	73	59		47	33	43		4	17	21
5	18	19		70	74	60		48	31	44
46	32	45		6	16	20		71	75	58
50	36	37		7	11	24		66	76	62
64	77	63		51	34	38		8	12	22
9	10	23		65	78	61		49	35	39

Tabel 8							
1	(1,1,1,1)		28	(1,1,2,2)		55	(1,1,3,3)
2	(2,1,1,2)		29	(2,1,2,3)		56	(2,1,3,1)
3	(3,1,1,3)		30	(3,1,2,1)		57	(3,1,3,2)
4	(2,3,1,1)		31	(3,2,2,2)		58	(3,2,3,3)
5	(1,2,1,2)		32	(2,1,2,3)		59	(1,2,3,1)
6	(2,2,1,3)		33	(2,2,2,1)		60	(2,2,3,2)
7	(2,3,1,1)		34	(2,3,2,2)		61	(2,3,3,3)
8	(3,3,1,2)		35	(3,3,2,3)		62	(3,3,3,1)
9	(1,3,1,3)		36	(1,3,2,1)		63	(1,3,3,2)
10	(1,3,2,3)		37	(1,3,3,1)		64	(1,3,1,2)
11	(2,3,2,1)		38	(2,3,2,3)		65	(2,3,1,3)
12	(3,3,2,2)		39	(3,3,3,3)		66	(3,3,1,1)
13	(3,1,2,3)		40	(3,1,3,1)		67	(3,1,1,2)
14	(1,1,2,1)		41	(1,1,3,2)		68	(1,1,1,3)
15	(2,1,2,2)		42	(2,1,3,3)		69	(2,1,1,1)
16	(2,2,2,3)		43	(2,2,3,1)		70	(2,2,1,2)
17	(3,2,2,1)		44	(3,2,3,2)		71	(3,2,1,3)
18	(1,2,2,2)		45	(1,2,3,3)		72	(1,2,1,1)
19	(1,2,3,2)		46	(1,2,1,3)		73	(1,2,2,1)
20	(2,2,3,3)		47	(2,2,1,1)		74	(2,2,2,2)
21	(3,2,3,1)		48	(3,2,1,2)		75	(3,2,2,3)
22	(3,3,3,2)		49	(3,3,1,3)		76	(3,3,2,1)
23	(1,3,3,3)		50	(1,3,1,1)		77	(1,3,2,2)
24	(2,3,3,1)		51	(2,3,1,2)		78	(2,3,2,3)
25	(2,1,3,2)		52	(2,1,1,3)		79	(2,1,2,1)
26	(3,1,3,3)		53	(1,3,1,1)		80	(3,1,2,2)
27	(1,1,3,1)		54	(1,1,1,2)		81	(1,1,2,3)

Begrippenlijst

Franklin magisch:

Bij Franklin magische vierkanten hebben de hele kolommen en rijen de magische som. De halve rijen en kolommen hebben ook de halve magische som. Alle blokjes van 2×2 hebben dezelfde som en de gebroken diagonalen hebben de magische som.

Gebogen diagonaal:

Met een gebogen diagonaal wordt bedoeld dat de diagonaal een of meerdere knikken heeft in zijn verlengde.

Gebroken diagonaal:

Met een gebroken diagonaal wordt bedoeld dat de diagonaal door de rand van het vierkant of rechthoek heen gaat en aan de andere kant weer verder gaat. Het maakt hierbij niet uit of het om een zij-, boven- of onderkant gaat.

Generalisatie:

Met generaliseren wordt bedoeld dat je een vierkant van cijfers omzet in een vierkant van letters, waarbij een letter een cijfer voorstelt. Je probeert alles zo algemeen mogelijk op te schrijven, zodat het in meerdere situaties geldig is.

Latijns vierkant:

Een Latijns vierkant van orde n is een $n \times n$ vierkant waarin n symbolen zó gerangschikt zijn, dat in iedere rij en in iedere kolom ieder symbool precies 1 keer voorkomt. Voorbeeld: een sudoku is een L.V. met orde 9.

Lo Shu:

Het Lo Shu vierkant is het eerste magische vierkant dat ontdekt is. Hierin staan de getallen 1 t/m 9 (dus het vierkant heeft magische som 15). Het heeft deze vorm:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Maalvierkant/Restvierkant

Als je bijvoorbeeld de getallen 1 t/m 64 hebt en je trekt van ieder getal 1 af, kan je elk getal 'ontleden' in een maalgetal en een restgetal. Dus bijvoorbeeld 53 is $6 \cdot 8 + 5$, 6 is het maalgetal en 5 het restgetal. 6 komt dan in het maalvierkant te staan en 5 in het restvierkant.

Magische som:

De magische som is het constante getal van het betreffende vierkant of van de betreffende kubus. Als je alle getallen in een rij/kolom/diagonaal optelt, zal daar steeds een constant getal uitkomen, wat de magische som wordt genoemd.

Multi-dimensionaal:

Het voorwerp bestaat uit meerdere dimensies. Een vierkant heeft twee dimensies (lengte en breedte) en een kubus drie dimensies (lengte, breedte en hoogte). Wat we ons bij een Multi-dimensionaal figuur moeten voorstellen, weten we niet.

Orthogonaliteit:

Met orthogonaliteit wordt bedoeld dat dezelfde paren niet voorkomen als je het restvierkant over het maaltvierkant plaatst. Zo voorkom je dus dat er uiteindelijk dezelfde getallen in het vierkant komen.

Panmagisch:

Als een vierkant panmagisch is, hebben de twee hele diagonalen de magische som en hebben alle gebroken diagonalen (door de rand) en alle parallelle gebogen diagonalen de magische som.

Verzameling:

Een groep getallen die je om wat voor een reden bij elkaar groepeerd. Ze hebben een reden om bij elkaar te horen.