

Magische Vierkanten

Dion Coumans en Mieke Janssen

Introductie didactiek van de wiskunde

29-12-2006

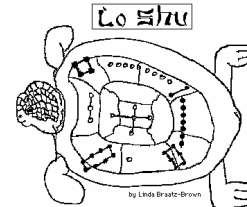
Inhoudsopgave

	blz.
1. Introductie in magische vierkanten	3
1.1 f -magische vierkanten	4
1.2 α -magische vierkanten	4
2. α -magische vierkanten	5
2.1 Methode om semi- α -magische vierkanten te maken	5
2.2 Algoritme voor het vinden van α -magische vierkanten	8
3. p -magische vierkanten	13
3.1 p is een constante functie	13
3.2 p is een lineaire functie	14
3.3 p is een polynoom van graad 2	15
3.4 p is een polynoom van graad 3 of hoger	17
4. [getal]-magische vierkanten	19
4.1 Rationale getallen	19
4.2 Normale getallen	21
4.3 π -magische vierkanten	22
5. Bijlage 1	23
6. Bijlage 2	27

1. Introductie in magische vierkanten

Bijna 5000 jaar geleden werd China getroffen door zware overstromingen. Veel rivieren traden buiten hun oevers, één van deze rivieren was de Lo. De mensen brachten offers naar de rivier in de hoop dat de overstromingen zouden stoppen, maar dit gebeurde niet. Wel kwam er iedere keer als er een offer werd gebracht een schildpad uit de rivier de Lo gelopen met een bijzondere tekening op zijn rug. Als we de stippen in ieder vakje tellen en het aantal opschrijven, dan verkrijgen we het vierkant links. Het magische aan dit vierkant is dat de getallen 1, 2, ..., 9 zo gerangschikt zijn dat de som van de getallen in iedere kolom, rij en op de twee diagonalen steeds hetzelfde is, namelijk 15. Men bedacht dat dit het teken was van de riviergod, dat hij 15 offers wilde en dat de overstromingen dan zouden stoppen. En inderdaad, zo geschiedde het.

Dit magische vierkant is bekend geworden onder de naam *Lo Shu*.



Een **magisch vierkant** is een vierkant waarin de som van de getallen in elke rij, elke kolom en op de twee diagonalen hetzelfde is. Deze som noemen we de **magische som**.

Als in een $n \times n$ magisch vierkant alleen de getallen 1 tot en met n^2 voorkomen dan noemen we dit vierkant **zuiver magisch**.

De *Lo Shu* is een zuiver magisch vierkant met magische som 15.

Magische vierkanten zijn al duizenden jaren oud en men dacht vroeger, zoals de naam doet vermoeden, dat deze vierkanten magische krachten hadden. Zo zou je, als je een amulet met een magisch vierkant erop zou dragen, beschermd worden tegen boze geesten en ook zouden ziekten kunnen worden genezen met behulp van magische vierkanten. Tegenwoordig is van de ideeën over de magische krachten van deze vierkanten niet veel meer overgebleven, alhoewel in India de gedraaide Lo Shu nog steeds gebruikt wordt om vermiste personen mee terug te vinden.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Men hangt dit vierkant aan een boom en hoopt dat de vermiste persoon weer naar huis komt. Magische vierkanten zijn onafhankelijk van elkaar in verschillende beschavingen gevonden en door de eeuwen heen is men veel over deze vierkanten te weten gekomen. Veel van de ontdekkingen zijn gedaan door puzzelde amateurs.

Door de eeuwen heen is men op zoek gegaan naar steeds 'magischere vierkanten'. Wij zullen ons bezighouden met de zogenaamde **f-magische vierkanten**.

1.1 f -magische vierkanten

Zij f een functie¹. M is een **f -magisch vierkant** als zowel M als $f(M)$ magische vierkanten zijn. Hierbij is $f(M)$ het vierkant dat je verkrijgt door f toe te passen op alle getallen in M .

Dus als f een functie is en

$$M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & g \\ \hline h & i & j \\ \hline \end{array} \quad \text{en} \quad f(M) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline f(a) & f(b) & f(c) \\ \hline f(d) & f(e) & f(g) \\ \hline f(h) & f(i) & f(j) \\ \hline \end{array}$$

beide magische vierkanten zijn, dan is M een f -magisch vierkant.

1.2 α -magische vierkanten

Een speciaal geval van de f -magische vierkanten zijn de α -magische vierkanten. De functie α voegt aan elk natuurlijk getal n het aantal letters toe van het telwoord n . Zo is in het Engels: $\alpha(5) = 4$, want 5 uitgeschreven in het Engels is five en dit woord telt 4 letters.

We noemen M een **α -magisch vierkant** als zowel M als $\alpha(M)$ magisch zijn.

Het is duidelijk dat als een vierkant α -magisch is in de ene taal, het nog niet α -magisch hoeft te zijn in een ander taal.

Een voorbeeld van een α -magisch vierkant in de Engelse taal is het volgende vierkant:

5	22	18
28	15	2
12	8	25

Dit is een magisch vierkant met magische som 45.

Na uitschrijven van de getallen in het Engels en het tellen van de letters krijgen we het volgende vierkant:

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Dit is een magisch vierkant met magische som 11.

In hoofdstuk 2 gaan we dieper in op α -magisch vierkanten.

In hoofdstuk 3 bekijken we de polynomen. We vragen ons af of er voor elk polynoom p (met coëfficiënten in de gehele getallen) een p -magisch vierkant bestaat.

Tot slot gebruiken we in hoofdstuk 4 de decimale ontwikkeling om voor elk reëel getal x een functie f_x te definiëren en onderzoeken we voor welke x er een f_x -magisch vierkant bestaat.

¹ We laten hier bewust het domein en bereik van f in het midden. Dit is niet echt van belang, zolang f maar gedefinieerd is voor alle getallen in M . In dit werkstuk zal f veelal een transformatie van de natuurlijke getallen zijn.

2. α -magische vierkanten

In dit hoofdstuk bekijken we α -magische vierkanten. We zullen eerst een manier beschrijven om vierkanten te maken die in een groot aantal talen semi- α -magisch zijn. Daarna zien we hoe je alle α -magische vierkanten kunt vinden in een bepaalde taal als je een bovengrens stelt aan de getallen die in het vierkant voorkomen.

Merk allereerst op dat we op eenvoudige wijze oneindig veel α -magisch vierkanten kunnen vinden. Bekijk namelijk het volgende vierkant:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Alle kolommen, rijen en de diagonalen hebben dezelfde som. Als we dit vierkant in het Nederlands uitschrijven krijgen we:

één	één	één
één	één	één
één	één	één

En alle letters in de woorden tellen levert:

3	3	3
3	3	3
3	3	3

Dit is weer een magisch vierkant is. Op eenzelfde wijze is een vierkant vol met tweeën, drieën, vieren, ... α -magisch. Deze vierkanten willen we echter niet beschouwen. We spreken af dat we alleen naar vierkanten kijken waarin alle getallen verschillend zijn. We eisen niet dat de getallen in het **beeldvierkant**, het vierkant dat je hebt verkregen na uitschrijven en tellen, verschillend zijn.

We beschouwen vierkanten in verschillende talen. Om wat makkelijker over dit onderwerp te kunnen praten, definiëren we een functie $\alpha_x : \square \rightarrow \square$ door:

$\alpha_x(n)$ = de lengte van het woord dat je krijgt als je n uitschrijft in de taal x .

Dan geldt bijvoorbeeld $\alpha_{\text{engels}}(6) = 3$.

2.1 Methode om semi- α -magische vierkanten te maken

Een **semi-magisch vierkant** is een vierkant waarin alle rijssommen en kolomsommen gelijk zijn. Hierin eis je dus niets over de diagonalen. We noemen een vierkant M **semi- α_x -magisch** als zowel M als $\alpha_x(M)$ semi-magisch zijn.

Voordat we semi- α_x -magische vierkanten kunnen maken, hebben we wat theorie nodig over Latijnse vierkanten. Dit is het onderwerp van de volgende paragraaf.

2.1.1 Latijnse vierkanten

We noemen een $n \times n$ vierkant M een **Latijnse vierkant** als in elke rij en in elke kolom van M de getallen 0 tot en met $n - 1$ voorkomen.

Voorbeeld

Zo is het vierkant:

0	1	2
1	2	0
2	0	1

een 3×3 Latijns vierkant.

Een $n \times n$ Latijns vierkant is semi-magisch, aangezien elke kolomsom en elke rijsum gelijk is aan: $0 + 1 + \dots + n - 1 = \frac{1}{2} \times (n - 1) \times n$

Zijn ook nog alle getallen op de diagonaal en op de anti-diagonaal verschillend, dan is een Latijns vierkant zelfs een magisch vierkant. We zullen zo'n vierkant een **diagonaal Latijns vierkant** noemen.

Definitie

Zij N, M twee vierkanten. We noemen N en M **orthogonaal** als alle elementen uit het vierkant der paren (het vierkant dat je krijgt door N en M op elkaar te schuiven en in elk hokje het paar (n, m) op te schrijven) verschillend zijn.

Voorbeeld

Bekijk de vierkanten:

$$M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

en

$$N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Dan is het vierkant der paren P(N, M):

(0,0)	(1,1)	(2,2)
(1,2)	(2,0)	(0,1)
(2,1)	(0,2)	(1,0)

Alle paren zijn verschillend, dus de vierkanten M en N zijn orthogonaal.

Merk op dat N (op permutaties van de cijfers na) het enige Latijnse vierkant is zodat N en M orthogonaal zijn. Heb je namelijk de eerste van N rij gekozen, dan ligt de rest van het vierkant vast.

2.1.2 Het maken van een semi- α -magisch vierkant

Met behulp de vierkanten N, M uit de vorige paragraaf maken we een semi- α_{engels} -magisch vierkant. Hiertoe vervangen we in M elke 0 door 20, elke 1 door 30 en elke 2 door 40. Noem het nieuwe vierkant M'.

Bekijk $M' + N$:

$$M' + N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 20 & 30 & 40 \\ \hline 30 & 40 & 20 \\ \hline 40 & 20 & 30 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 20 & 31 & 42 \\ \hline 32 & 40 & 21 \\ \hline 41 & 22 & 30 \\ \hline \end{array}$$

$M' + N$ is een semi-magisch vierkant, want elke kolom- en rijsum is gelijk aan: $20 + 30 + 40 + 0 + 1 + 2 = 93$. Doordat M' en N orthogonaal zijn, bestaat $M'+N$ uit allemaal verschillende getallen.

$M' + N$ in het Engels uitschrijven levert:

twenty	thirty-one	forty-two
thirty-two	forty	twenty-one
forty-one	twenty-two	thirty

Dus $\alpha_{engels}(M' + N) =$

6+0	6+3	5+3
6+3	5+0	6+3
5+3	6+3	6+0

Je ziet dat elke kolomsom en elke rijsum gelijk is aan: $6 + 6 + 5 + 0 + 3 + 3 = 22$. Dus $M'+N$ is een semi- α_{engels} -magisch vierkant.

Dit vierkant is ook semi- α -magisch in het Nederlands. Uitschrijven levert namelijk:

twintig	éénendertig	tweeënveertig
tweeëndertig	veertig	éénentwintig
éénenveertig	tweeëntwintig	dertig

Dus $\alpha_{nederlands}(M' + N) =$

7+0	6+5	7+6
6+6	7+0	7+5
6+5	7+6	6+0

Elke rij en elke kolom heeft als som: $7 + 6 + 6 + 0 + 6 + 5 = 30$.

In een groot aantal talen is er een soortgelijke systematiek in de telwoorden. In al deze talen, bijvoorbeeld in het Frans en in het Duits, is dit vierkant semi- α -magisch.

In plaats van 20, 30 en 40 en 0, 1 en 2 hadden we ook andere tientallen (tussen 20 en 100) en eenheden kunnen nemen. De keuze is niet helemaal vrij. Zo wijkt bijvoorbeeld in het Frans de systematiek in de telwoorden af bij getallen vanaf 70. Hier kun je dus alleen tientallen tussen 20 en 60 kiezen.

Merk op dat je met deze methode bij twee orthogonale diagonaal Latijnse vierkanten een α -magisch vierkant verkrijgt. Helaas bestaan er geen 3×3 diagonaal Latijnse vierkanten. We hebben namelijk de volgende twee 3×3 Latijnse vierkanten:

0	1	2
1	2	0
2	0	1

0	1	2
2	0	1
1	2	0

Alle andere 3×3 Latijnse vierkanten ontstaan door een permutaties van de cijfers. Dit zie je als volgt: je kunt de eerste rij vrij invullen (aangezien we cijfers 0,1 en 2 slecht ‘namen’ zijn, maakt het niet uit welke object je op welke plaats neerzet). Voor de eerste kolom heb je dan nog twee mogelijkheden: 0 - 1 - 2 en 0 - 2 - 1. Hierna ligt het hele vierkant vast.

Bovenstaande vierkanten hebben beide een diagonaal waarop drie keer hetzelfde cijfer voorkomt. Dit blijft het geval na een permutatie van de cijfers. Hieruit volgt dat er geen 3×3 diagonaal Latijnse vierkanten bestaan.

Er bestaan wel 4×4 orthogonale diagonaal Latijnse vierkant. Hiermee kunnen we 4×4 α -magische vierkanten construeren.

Zo vinden we bijvoorbeeld het volgende vierkant dat α -magisch is in een groot aantal talen:

26	37	42	55
45	52	27	36
57	46	35	22
32	25	56	47

2.2 Algoritme voor het vinden van α -magische vierkanten

In deze paragraaf zien we hoe je alle 3×3 $\alpha_{\text{nederlands}}$ -magische vierkanten (we schrijven vanaf nu α_{ned}) kunt vinden waarin alleen getallen voorkomen die hoogstens honderd zijn. Hetzelfde algoritme werkt voor elke andere bovengrens en elke andere taal.

2.2.1 Eigenschappen van magische vierkanten

We zijn op zoek naar 3×3 -vierkanten M , zodat zowel M als $\alpha_{\text{ned}}(M)$ magisch zijn. Je kunt alle 3×3 -vierkanten M , waarin alle getallen hooguit honderd zijn, aflopen en controleren of M en $\alpha_{\text{ned}}(M)$ magisch zijn. Deze werkwijze is echter erg tijdrovend aangezien er een triljoen ($100^9 = 10^{18}$) van zulke vierkanten zijn. We zoeken een efficiëntere methode om al α_{ned} -magische vierkanten te vinden. Hiervoor proberen we een aantal eigenschappen van magische vierkanten te vinden die het zoekproces vergemakkelijken.

Allereerst hebben we geëist dat alle getallen in het vierkant verschillend zijn. Dit beperkt het aantal mogelijk heden tot $100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 \times 94 \times 93 \times 92$.

Verder zullen we vierkant die uit elkaar kunnen worden verkregen door draaien en spiegelen als gelijk beschouwen. Zo kunnen we alle vierkanten met verschillende getallen verdelen over groepjes van acht ‘gelijke vierkanten’:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

g	d	a
h	e	b
i	f	c

i	h	g
f	e	d
c	b	a

c	f	i
b	e	h
a	d	g

c	b	a
f	e	d
i	h	g

a	d	g
b	e	h
c	f	i

g	h	i
d	e	f
a	b	c

i	f	c
h	e	b
g	d	a

We hebben nu nog $\frac{1}{8} \times 100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 \times 94 \times 93 \times 92$ wezenlijk verschillende vierkanten over.

Laten we nu wat specifieker naar magische vierkanten kijken. Zij M een 3×3 magisch vierkant, zeg:

$$M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array}$$

Dan is de kolomsom, rijsum en de som van diagonalen van M gelijk aan de magische som van M , deze noteren we als $s(M)$.

Er geldt:

$$\begin{aligned} a + e + i &= s(M) \\ b + e + h &= s(M) \\ c + e + g &= s(M) \\ d + e + f &= s(M) \end{aligned}$$

Optellen van deze gelijkheden levert:

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f + g + h + i + 3e &= 4s(M) \\ 3s(M) + 3e &= 4s(M) \\ 3e &= s(M) \end{aligned}$$

Dus de magische som is gelijk aan drie keer het middelste getal.

Wat levert dit ons op? We weten nu:

$$a + e + i = 3e$$

Aan beide kanten van de vergelijking $2e - a$ aftrekken levert ons:

$$e - a = i - e$$

Hieruit volgt dat a, e, i een rekenkundige rij is. We willen dat ook $\alpha_{ned}(M)$ magisch is. Dus ook $\alpha_{ned}(a), \alpha_{ned}(e), \alpha_{ned}(i)$ moet een rekenkundige rij vormen.

Hetzelfde geldt voor de rijtjes: b, e, h en d, e, f en g, e, c .

Merk op dat het vierkant M helemaal vast als je a, c, g en i kent. Elke rij en elke kolom heeft namelijk als som $s(M)$. Zo geldt bijvoorbeeld $a + b + c = s(M)$. Dus $b = s(M) - a - c$.

Het vierkant M is dus van de volgende vorm:

$e - x_1$	$s(M) - (e - x_1) - (e + x_2)$	$e + x_2$
$s(M) - (e - x_1) - (e - x_2)$	e	$s(M) - (e + x_1) - (e + x_2)$
$e - x_2$	$s(M) - (e + x_1) - (e - x_2)$	$e + x_1$

Hierbij zijn x_1 en x_2 de redes van de rekenkundige rijtjes: a, e, i en g, e, c .

2.2.2 Het bepalen van alle α_{ned} -magische vierkanten

We hebben geëist dat alle getallen in het vierkanten kleiner of gelijk zijn aan honderd. In bijzonder geldt: $e = 1, 2, 3, 4, \dots$ of 100.

We bepalen voor elke mogelijke keuze voor e de α_{ned} -magische vierkanten met e in het midden. We laten aan de hand van een voorbeeld zien hoe dit werkt. We bekijken $e = 55$.

Uit paragraaf 2.2.1 blijkt dat we op zoek moeten naar rijtjes $55 - x, 55, 55 + x$ waarvoor ook $\alpha_{ned}(55 - x), \alpha_{ned}(55), \alpha_{ned}(55 + x)$ een rekenkundige rij is.

We kunnen aannemen dat x een positief getal is. Zouden we voor x ook negatieve getallen toelaten, dan draait alleen de volgorde van het rijtje om, maar krijgen we geen wezenlijk nieuwe rijtjes. Dit correspondeert met een draaiing van het vierkant over 180 graden. We hebben afgesproken dat we zo'n vierkant als 'gelijk' beschouwen aan het originele vierkant.

Aangezien alle getallen in het vierkant hoogstens honderd zijn, geldt $x \leq 45$. Verder willen we dat alle getallen in het vierkant verschillend zijn, dus $x \geq 1$. Deze mogelijkheden gaan we één voor één af:

$x = 1$:	Rijtje:	54	55	56	
	Uitgeschreven:	vierenvijftig	vijfenvijftig	zesenvijftig	
	Geteld:	13	13	12	
					✗
$x = 2$:	Rijtje:	53	55	57	
	Uitgeschreven:	drieënvijftig	vijfenvijftig	zevenenvijftig	
	Geteld:	13	13	14	
					✗
$x = 3$:	Rijtje:	52	55	58	
	Uitgeschreven:	tweeënvijftig	vijfenvijftig	achtenvijftig	
	Geteld:	13	13	13	
					✓

Enzovoorts.

Uiteindelijk blijkt dat $x = 3, 4, 8, 12, 16, 17, 20, 23, 24, 26, 27, 30, 33$ en 34 voldoen.

Elk paar (x_1, x_2) , waarbij x_1 en x_2 mogelijke redes zijn van de rekenkundige rijtjes zijn, levert ons een mogelijkheid voor een α -magisch vierkant.

De magische som van het vierkant is gelijk aan $3 \times 55 = 165$

Dit vierkant ziet er als volgt uit:

$55 - x_1$	$165 - (55 - x_1) - (55 + x_2)$	$55 + x_2$
$165 - (55 - x_1) - (55 - x_2)$	55	$165 - (55 + x_1) - (55 + x_2)$
$55 - x_2$	$165 - (55 + x_1) - (55 - x_2)$	$55 + x_1$

Merk op dat het vierkant dat je verkrijgt bij (x_1, x_2) , op verticaal spiegelen na, hetzelfde is als het vierkant bij (x_2, x_1) . Deze twee vierkanten zijn dus 'gelijk'. Verder willen we dat alle

getallen in het vierkant verschillend zijn, dus $x_1 \neq x_2$. Er zijn veertien mogelijkheden voor x . Het aantal paren dat we moeten nagaan is dus gelijk aan: $\frac{1}{2} \times (14^2 - 14) = 91$.

Voor al deze mogelijkheden controleren we of alle getallen in M verschillend zijn en of $\alpha_{ned}(M)$ ook een magisch vierkant is. We weten al dat de diagonalen van $\alpha_{ned}(M)$ de juiste som hebben (zo hebben we de mogelijke rijtjes gevonden). We hoeven dus alleen nog na te gaan of de rijen en kolommen van $\alpha_{ned}(M)$ de juiste som hebben.

Bekijk bijvoorbeeld $(3,4)$:

$$M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 52 & 54 & 59 \\ \hline 62 & 55 & 48 \\ \hline 51 & 56 & 58 \\ \hline \end{array}$$

Dan geldt:

$$\alpha_{ned}(M) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 13 & 13 & 14 \\ \hline 12 & 13 & 13 \\ \hline 12 & 12 & 13 \\ \hline \end{array}$$

$\alpha_{ned}(M)$ is geen magisch vierkant. Dus $(3,4)$ levert ons geen α_{ned} -magisch vierkant.

Laten we nu $(3,30)$ proberen:

$$M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 52 & 28 & 85 \\ \hline 88 & 55 & 22 \\ \hline 25 & 82 & 58 \\ \hline \end{array}$$

Dan geldt:

$$\alpha_{ned}(M) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 13 & 13 & 13 \\ \hline 13 & 13 & 13 \\ \hline 13 & 13 & 13 \\ \hline \end{array}$$

$\alpha_{ned}(M)$ is een magisch vierkant. Dus $(3,30)$ levert ons een α_{ned} -magisch vierkant.

Bovenstaand algoritme kun je implementeren in magma. In de bijlage 1 vind je de code die we hiervoor gebruikt hebben. Er blijken tien α_{ned} -magische vierkanten te bestaan met getallen tot 100:

$\begin{array}{ c c c } \hline 52 & 28 & 85 \\ \hline 88 & 55 & 22 \\ \hline 25 & 82 & 58 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 52 & 38 & 75 \\ \hline 78 & 55 & 32 \\ \hline 35 & 72 & 58 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 51 & 29 & 85 \\ \hline 89 & 55 & 21 \\ \hline 25 & 81 & 59 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 51 & 39 & 75 \\ \hline 79 & 55 & 31 \\ \hline 35 & 71 & 59 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 53 & 35 & 74 \\ \hline 75 & 54 & 33 \\ \hline 34 & 73 & 55 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c c } \hline 51 & 37 & 74 \\ \hline 77 & 54 & 31 \\ \hline 34 & 71 & 57 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 53 & 25 & 84 \\ \hline 85 & 54 & 23 \\ \hline 24 & 83 & 55 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 51 & 27 & 84 \\ \hline 87 & 54 & 21 \\ \hline 24 & 81 & 57 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 52 & 24 & 83 \\ \hline 84 & 53 & 22 \\ \hline 23 & 82 & 54 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 52 & 34 & 73 \\ \hline 74 & 53 & 32 \\ \hline 33 & 72 & 54 \\ \hline \end{array}$

Zoals gezegd kan hetzelfde algoritme worden toegepast in een willekeurige andere taal en bij een willekeurige andere bovengrens.

In het Engels zijn er zeven α -magische vierkanten met getallen tot en met honderd. We zien dat in het Nederland de mogelijkheden voor het middelste getal erg dicht bij elkaar liggen: alleen 53, 54 en 55 leveren magische vierkanten. In het Engels blijken 15, 45 en 54 magische op te leveren.

3. p -magische vierkanten

In dit hoofdstuk bekijken we p -magische vierkanten. Hierbij is p een polynoom (over de gehele getallen). Dus $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

We kijken eerst naar constante functies, dan naar lineaire functies, daarna naar functies van graad twee en ten slotte naar functies van graad drie en hoger.

Merk op dat we bij iedere rare en ingewikkelde functie een f -magisch vierkant kunnen vinden. Bekijk namelijk het volgende vierkant:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Alle kolommen, rijen en de diagonalen hebben dezelfde som. Als we op dit vierkant de functie f loslaten dan krijgen we:

$f(1)$	$f(1)$	$f(1)$
$f(1)$	$f(1)$	$f(1)$
$f(1)$	$f(1)$	$f(1)$

Dit vierkant is magisch voor iedere functie f . Je zou zelfs kunnen nemen $f(x) = \sin^2(x) + \sqrt{x} + \tan^3(x^2)$, of je eigen favoriete functie. Net als in het vorige hoofdstuk spreken we dan ook af dat we alleen naar vierkanten kijken waarin alle getallen verschillend zijn.

Verder eisen we dat het originele vierkant uit positieve natuurlijke getallen bestaat. De bewijzen in de eerste twee paragrafen zijn ook juist voor willekeurige magische vierkanten.

3.1 p is een constante functie

We kijken eerst naar constante functies, dus functies van de vorm $p(x) = c$ waarbij c een constante is. We zien eenvoudig in dat als p van deze vorm is, elk willekeurig magisch vierkant een p -magisch vierkant is. Neem maar een willekeurig magisch vierkant:

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

Als we op dit vierkant de functie $p(x) = c$ toepassen dan krijgen we het volgende vierkant:

c	c	...	c
c	c	...	c
...	...	...	...
c	c	...	c

Dit is een magisch vierkant (met magische som $n \times c$).

Dus als p een constante functie is dan zijn alle $n \times n$ magische vierkanten p -magisch.

3.2 p is een lineaire functie

We gaan een graad hoger en beschouwen de lineaire functies, dus functies van de vorm:

$$p(x) = ax + b.$$

We bewijzen eerst: als we een magisch vierkant hebben en we vermenigvuldigen ieder getal uit dat vierkant met een vast getal, dan vormen deze getallen weer een magisch vierkant.

Stelling

Zij A een magisch vierkant en a een constante. Dan is $a \cdot A$ een magisch vierkant.

Bewijs

Zij A een magisch vierkant:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

De som van de getallen in elke rij en in elke kolom van A is gelijk aan de magisch som. Hetzelfde geldt voor de twee diagonalen. In formule:

$$\text{Magische som} = s(A) = \sum_{i=1}^n a_{1i} = \dots = \sum_{i=1}^n a_{ni} = \sum_{i=1}^n a_{i1} = \dots = \sum_{i=1}^n a_{in} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{(n-i)i}$$

Nu vermenigvuldigen we alle getallen uit het magische vierkant A met a . Dit levert het volgende vierkant:

$$a \cdot A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & \dots & a \cdot a_{1n} \\ \hline a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & \dots & a \cdot a_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a \cdot a_{n1} & a \cdot a_{n2} & \dots & a \cdot a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

Dan zijn de sommen van de getallen per rij, kolommen en diagonalen van vierkant $a \cdot A$:

$$\sum_{i=1}^n a \cdot a_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^n a \cdot a_{ni}, \sum_{i=1}^n a \cdot a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n a \cdot a_{in}, \sum_{i=1}^n a \cdot a_{ii}, \sum_{i=0}^{n-1} a \cdot a_{(n-i)i}.$$

Omdat $\sum_{i=1}^n a \cdot a_{ji} = a \cdot \sum_{i=1}^n a_{ji}$ voor alle j , geldt voor elke rij j :

$$\sum_{i=1}^n a \cdot a_{ji} = a \cdot \sum_{i=1}^n a_{ji} = a \cdot s(A)$$

Op dezelfde wijze heeft elke kolom van $a \cdot A$ som $a \cdot s(A)$ en ook de twee diagonalen hebben deze som. Dus som van de getallen in elke rij, elke kolom en elke diagonaal van vierkant $a \cdot A$ is hetzelfde. Dus $a \cdot A$ is een magisch vierkant.

Dus als A een magisch vierkant is dan is $a \cdot A$ weer een magisch vierkant.

Als we een magisch vierkant hebben en we tellen bij ieder getal uit het vierkant een vast getal op dan krijgen we weer een magisch vierkant.

Stelling

Zij A een magisch vierkant en b constante. Dan is ook $A + b$ een magisch vierkant.

Bewijs

Zij A zoals in het bewijs van de vorige stelling

Nu tellen we bij ieder getal in het vierkant b op. We krijgen dan het volgende vierkant:

$$A+b = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} + b & a_{12} + b & \dots & a_{1n} + b \\ \hline a_{21} + b & a_{22} + b & \dots & a_{2n} + b \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n1} + b & a_{n2} + b & \dots & a_{nn} + b \\ \hline \end{array}$$

Dan zijn de sommen van de getallen per rij, kolommen en diagonalen van vierkant $A+b$:

$$\sum_{i=1}^n (a_{i1} + b), \dots, \sum_{i=1}^n (a_{ni} + b), \sum_{i=1}^n (a_{i1} + b), \dots, \sum_{i=1}^n (a_{in} + b), \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b), \sum_{i=0}^{n-1} (a_{(n-i)i} + b)$$

Omdat $\sum_{i=1}^n (a_{ji} + b) = \sum_{i=1}^n a_{ji} + n \cdot b$ voor alle j , geldt voor elke rij j :

$$\sum_{i=1}^n (a_{ji} + b) = \sum_{i=1}^n a_{ji} + n \cdot b = s(A) + n \cdot b$$

Ook is de som van de getallen per kolom en per diagonaal $s(A) + n \cdot b$. Dus $A+b$ is een magisch vierkant, met magische som $s_A + n \cdot b$

Dus als A een magisch vierkant is dan is $B = A + b$ weer een magisch vierkant.

Uit deze twee stellingen volgt: als A een magisch vierkant is, dan is $a \cdot A + b$ weer een magisch vierkant.

Dus als p een lineaire functie is, dan zijn alle $n \times n$ magische vierkanten p -magisch.

3.3 p is een polynoom van graad 2

We kijken nu naar polynomen van graad 2, dus functies van de vorm $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. We bekijken eerst een speciaal geval van deze functies, namelijk het geval $p(x) = x^2$.

3.3.1 x^2 - magische vierkanten

We bewijzen dat er geen 3×3 magische vierkanten, met allemaal verschillende getallen er in, bestaan die x^2 - magisch zijn.

Stel

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & g \\ \hline h & i & j \\ \hline \end{array}$$

is een bimagisch vierkant en $a, b, c, d, e, g, h, i, j$ zijn allemaal verschillend.

Dan is ook:

$$A^2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a^2 & b^2 & c^2 \\ \hline d^2 & e^2 & g^2 \\ \hline h^2 & i^2 & j^2 \\ \hline \end{array}$$

een magisch vierkant.

Aangezien A een magisch vierkant is, geldt:

$$a + b + c = a + d + h$$

en dus ook

$$\begin{aligned} b + c &= d + h \\ b - d &= h - c \end{aligned}$$

Omdat A² een magisch vierkant is, geldt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + d^2 + h^2$$

en dus ook:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= d^2 + h^2 \\ b^2 - d^2 &= h^2 - c^2 \\ (b - d)(b + d) &= (h - c)(h + c) \end{aligned}$$

We hebben gezien: $b - d = h - c$, dus:

$$(h - c)(b + d) = (h - c)(h + c)$$

Aangezien $a, b, \dots, j$ verschillend zijn, is $h - c \neq 0$. Dus:

$$b + d = h + c \quad (1)$$

Verder weten we:

$$b - d = h - c \quad (2)$$

Tellen we (1) en (2) op, dan levert dit:

$$\begin{aligned} 2b &= 2h \\ b &= h \end{aligned}$$

Maar alle getallen waren verschillend. Tegenspraak!

Dus er bestaat geen 3×3 x^2 -magische vierkanten, bestaande uit verschillende getallen.

Een x^2 -magische vierkant dat ook nog zuiver magisch zijn, wordt ook wel **bimagisch** of **2-multimagisch** genoemd.

In 1891 werd, door G. Pfeffermann, het eerste bimagisch vierkant gevonden. Het was het volgende 8×8 bimagisch vierkant:

56	34	8	57	18	47	9	31
33	20	54	48	7	29	59	10
26	43	13	23	64	38	4	49
19	5	35	30	53	12	46	60
15	25	63	2	41	24	50	40
6	55	17	11	36	58	32	45
61	16	42	52	27	1	39	22
44	62	28	37	14	51	21	3

De magische som is 260 en de magische som van de kwadraten van het vierkant is 11180.

In 2002 hebben C. Boyer en W. Trump bewezen dat er geen bimagisch vierkant van lagere orde (dus met een kleinere afmeting) bestaat.

In februari 2006 heeft J. Wroblewski een 6×6 x^2 -magisch vierkant gevonden (in tegenstelling tot een bimagisch vierkant eis je hierbij niet dat het vierkant zuiver magisch is). L. Pebody en J. Rosa hebben in 2004 bewezen dat er geen 4×4 x^2 -magisch vierkant bestaat. Het bewijs gaat op soortgelijke wijze als het 3×3 geval. De vraag of er een 5×5 x^2 -magisch vierkant bestaat is tot nu toe onopgelost.

3.3.2 Algemene geval

Hierboven is bewezen dat er geen 3×3 x^2 -magisch vierkant bestaat. Dit leidt tot de vraag:

Zijn er gehele getallen a_0 , a_1 en a_2 zodat er een 3×3 p -magisch vierkant bestaat, waarbij $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$?

We nemen aan $a_2 \neq 0$ (anders is p een lineaire functie, deze zijn al in paragraaf 3.2 besproken).

Stel dat zulke a_0 , a_1 en a_2 bestaan. Zij A een 3×3 p -magische vierkant.

We weten uit paragraaf 3.2 dat voor elke lineaire functie g , alle magische vierkanten g -magisch zijn. Bekijk $g(x) = -a_1x - a_0$. $g(A)$ is een magisch vierkant.

De som van twee magische vierkant is weer een magisch vierkant (zie bijlage 2).

Dus: $p(X) + g(X) = a_2X^2$ is een magisch vierkant.

Maar dan is ook $\frac{1}{a_2} \times a_2X^2 = X^2$ een magisch vierkant is².

Dus X is een 3×3 x^2 -magische vierkant. Tegenspraak, want we hebben hierboven bewezen dat er geen 3×3 x^2 -magische vierkanten bestaan.

Dus er zijn geen a_0 , a_1 en a_2 met $a_2 \neq 0$ zodat er een 3×3 p -magische vierkant bestaat, waarbij $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

3.3 p is een polynoom van graad 3 of hoger

Nu er geen 3×3 x^2 -magische vierkanten bestaat, rijst de vraag: Bestaat er een natuurlijk getal $n \geq 3$ zodat er een 3×3 x^n -magische vierkant is? Laten we het geval $n = 3$ bekijken.

Stel dat A een x^3 -magische vierkant is, zeg

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & g \\ \hline h & i & j \\ \hline \end{array}$$

Dan geldt:

$$b - d = h - c$$

En dus ook:

$$\begin{aligned} (b - d)^2 &= (h - c)^2 \\ b^2 - 2bd + d^2 &= h^2 - 2hc + c^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Aangezien ook A^3 magisch is, geldt:

$$\begin{aligned} b^3 - d^3 &= h^3 - c^3 \\ (b - d)(b^2 + bd + d^2) &= (h - c)(h^2 + hc + c^2) \end{aligned}$$

We weten: $b - d = h - c \neq 0$, dus:

$$b^2 + bd + d^2 = h^2 + hc + c^2 \quad (2)$$

Tellen vergelijking (2) twee keer bij (1) op dan zien we:

$$\begin{aligned} 3b^2 + 3d^2 &= 3h^2 + 3c^2 \\ b^2 - h^2 &= c^2 - d^2 \\ (b - h)(b + h) &= (c - d)(c + d) \end{aligned} \quad (3)$$

A is magisch dus geldt:

² Het bewijs dat $a \cdot A$ een magisch vierkant is voor alle magische vierkanten A gaat op voor elk reëel getal a .

$$\begin{aligned} b + c &= d + h \\ b - h &= d - c \end{aligned} \tag{4}$$

Aangezien $b - h \neq 0$, levert dit samen met (3):

$$b + h = -(c + d) \tag{5}$$

Tellen we nu (4) en (5) op:

$$\begin{aligned} 2b &= -2c \\ b &= -c \end{aligned}$$

Maar b en c zijn verschillende natuurlijke getallen. Tegenspraak!

Ook voor grotere waarden van n kunnen we door puzzelen tot een tegenspraak komen. Hierbij neemt het rekenwerk echter wel toe. Het werk van Andrew Wiles aan het stelling van Fermat helpt ons het probleem in het algemeen voor alle $n \geq 3$ tegelijk op te lossen.

De laatste stelling van Fermat luidt:

De vergelijking: $x^n + y^n = z^n$, met x, y en z verschillende positieve natuurlijke getallen, heeft geen oplossing.

In 1995 gaf Andrew Wiles een bewijs van deze stelling. Met de technieken die hij hierbij gebruikt, kun je ook bewijzen dat de vergelijking $x^n + y^n = 2z^n$ geen oplossing heeft in de positieve natuurlijke getallen. Met dit gegeven bewijzen we dat er geen 3×3 x^n -magische vierkanten bestaan.

Stelling

Er bestaan geen 3×3 x^n -magische vierkanten voor alle $n \geq 3$

Bewijs

Stel dat A een 3×3 x^n -magisch vierkant is. We gebruiken voor A dezelfde notatie als boven. Dan is ook A^n een magisch vierkant.

In paragraaf 2.2.1 hebben we bewezen:

Zij M een magisch vierkant. De magische som is gelijk aan drie keer het middelste getal.

Dus de magische som van A^n is gelijk aan $3e^n$.

In het bijzonder is de som van de getallen op de diagonaal van A^n gelijk aan $3e^n$.

Dus:

$$\begin{aligned} a^n + e^n + j^n &= 3e^n \\ a^n + j^n &= 2e^n \end{aligned}$$

Waarbij a, j en e verschillende positieve natuurlijke getallen zijn. Tegenspraak!

Uit paragraaf 3.2 en 3.3 volgt dat er geen 3×3 x^n -magisch vierkant bestaat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

Rest nu nog de vraag:

Bestaat er een polynoom p van graad ≥ 3 zodat er een 3×3 p -magisch vierkant bestaat?

Met wat rekenwerk kun je inzien dat niet zo'n p bestaat van graad 3. Of er zo'n polynoom bestaat van graad groter dan 3 is ons niet bekend.

4. [getal]-magische vierkanten

In hoofdstuk 2 hebben we de α -magische vierkanten bekeken. Hierbij hebben we voor elke taal een functie $\alpha_{\text{taal}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gedefinieerd. In dit hoofdstuk gebruiken we de decimale ontwikkeling van een getal om een functie te definiëren.

Zij $x \in \mathbb{R}$, we definiëren $f_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ door:

$f_x(n)$ = de n -de decimaal van x

We spreken af: $f_x(1)$ is het getal ‘voor de komma’, $f_x(2)$ is het eerste cijfer achter de komma, enzovoort.

Zo geldt $f_\pi(1) = 3$, $f_\pi(2) = 1$, $f_\pi(3) = 4$, ...

We noemen M een **x -magisch vierkant** als zowel M als $f_x(M)$ magisch zijn. We vragen ons af:

Bestaat voor elke $x \in \mathbb{R}$ een 3×3 x -magisch vierkant?

We bekijken eerst de rationale getallen. Vervolgens onderzoeken we de zogenaamde normale getallen. Tot slot vragen we ons af of er een π -magisch vierkant bestaat. We houden ons in dit hoofdstuk uitsluitend bezig met 3×3 vierkanten en laten in het vervolg het voorvoegsel 3×3 weg.

4.1 Rationale getallen

Rationale getallen kunnen we schrijven als $\frac{a}{b}$ waarbij a en b gehele getallen zijn en $b > 0$. Alle rationale getallen hebben een repeterende decimale ontwikkeling. Deze eigenschap gebruiken we om te bewijzen dat er voor elk rationaal getal q een q -magisch vierkant bestaat.

We bekijken eerst een voorbeeld.

Voorbeeld

De decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$ is : $0,142857$. We zien dat de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$ periode 6 heeft. Hieruit volgt dat op plaats 6, 12, 18, 24, ... in de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$ hetzelfde getal (5) staat.

Als we een magisch vierkant M hebben dat uit allemaal zesvouden (>0) bestaat, dan bestaat $f_{\frac{1}{7}}(M)$ uit allemaal vijven. Een vierkant bestaande uit allemaal vijven is een magisch vierkant, dus in dat geval is $f_{\frac{1}{7}}(M)$ een magisch vierkant en hebben we een $\frac{1}{7}$ -magisch vierkant gevonden.

Hoe vinden we een magisch vierkant bestaande uit allemaal zesvouden?

We kunnen beginnen met de Lo Shu (zie hoofdstuk 1):

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Vermenigvuldigen we alle getallen uit het vierkant met zes, dan krijgen we:

$M =$

48	6	36
18	30	21
24	54	12

M is een magisch vierkant (met magische som $6 \times 15 = 90$) en dit vierkant bestaat uit allemaal zesvouden. Dus we hebben een $\frac{1}{7}$ -magisch vierkant gevonden!

Merk op dat we op deze wijze oneindig veel $\frac{1}{7}$ -magisch vierkanten kunnen maken. We kunnen het vierkant namelijk ook met 12 of 18 of 24 of vermenigvuldigen.

Verder kunnen we bij alle getallen in M een constante c (uit de natuurlijke getallen) optellen. Het nieuwe vierkant M' is magisch (met magische som $6 \times 15 + 3 \times c$). In de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$ staat op plaats $6 + c$, $12 + c$, $18 + c$, ... hetzelfde getal, dus ook $f_{\frac{1}{7}}(M')$ is magisch.

Door dit voorbeeld ontstaat een idee voor het bewijs van het algemene geval. Zij q een rationaal getal. We noteren periode(q) voor de (minimale) periode van de decimale ontwikkeling van q . Een eerste idee is: vermenigvuldig de Lo Shu met de periode(q) en je vindt een q -magisch vierkant.

Bekijken echter $\frac{3}{22}$ dan werkt deze methode niet. De decimale ontwikkeling van $\frac{3}{22}$ is: $0,136\overline{}$. Dus periode($\frac{3}{22}$) = 2. De tweede decimaal van $\frac{3}{22}$ (1) is niet gelijk aan de vierde (= de zesde = de achtste =) decimaal (6). De Lo Shu met twee vermenigvuldigen levert geen $\frac{3}{22}$ -magisch vierkant.

$\frac{3}{22}$ gaat repeteren vanaf de derde decimaal (we zien het cijfer voor de komma ook als decimaal). We zoeken een lineaire functie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met:

- $g(n) \geq 3$ voor $1 \leq n \leq 9$
- $2 \mid g(n) - g(m)$ voor $1 \leq n, m \leq 9$

De Lo Shu is een magisch vierkant. Uit hoofdstuk 3 volgt dat ook g (Lo Shu) een magisch vierkant is. Aangezien alle getallen in g (Lo Shu) minstens drie zijn, 'zitten we in het repeterende deel van $\frac{3}{22}$ ' en bestaat g (Lo Shu) uit allemaal dezelfde getallen (want alle getallen verschillen een tweevoud).

Bijvoorbeeld de functie $g(x) = 2x + 2$ voldoet. Dus $2 \times \text{Lo Shu} + 2$ is een $\frac{3}{22}$ -magisch vierkant.

Nu het algemene geval. Zij q een rationaal getal. Dan schrijven we $q = \frac{a}{b}$. De decimale ontwikkeling van $\frac{a}{b}$ gaat na hooguit dan b decimalen repeteren.

We zoeken een lineaire functie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met:

- $g(n) \geq b + 1$ voor $1 \leq n \leq 9$
- periode(q) $\mid g(n) - g(m)$ voor $1 \leq n, m \leq 9$

Bijvoorbeeld de functie $g(x) = \text{periode}(\frac{a}{b}) \times x + b$ voldoet. Dus periode($\frac{a}{b}$) $\times$ Lo Shu + b levert een $\frac{a}{b}$ -magisch vierkant oplevert.

Dus voor elk rationaal getal q bestaat er een q -magisch vierkant (er zijn er zelfs oneindig veel).

4.2 Normale getallen

Een reëel getal x heet **normaal** als voor elke natuurlijk getal n , voor elke eindige rijtje w van n cijfers geldt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{aantal keer dat } w \text{ voorkomt in de eerste } m \text{ decimalen van } x}{m} = \frac{1}{10^n}$$

Wat vertelt dit ons over x ? Uit de definitie volgt dat elk cijfer (een rijtje van lengte één) ‘uiteindelijk’ met een frequentie van $\frac{1}{10}$ voorkomt. Dus elk cijfer komt ‘even vaak’ voor in de decimale ontwikkeling van x . Ook komt elk rijtjes van twee cijfer even vaak voor in de decimale ontwikkeling van x . Enzovoort.³

Een voorbeeld van een normaal getal is: 0,1234567891011121314151617181920212223...

In het bijzonder komt elk willekeurig rijtje cijfers voor in de decimale ontwikkeling van x .⁴ Het is precies deze eigenschap die we nodig hebben om te bewijzen dat er voor elk normaal getal x een x -magisch vierkant bestaat.

Voor het maken van een x -magisch vierkant beginnen we weer vanuit de Lo Shu en we tellen bij alle getallen een constante c op. Dit levert ons:

$$M_c = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8+c & 1+c & 6+c \\ \hline 3+c & 5+c & 7+c \\ \hline 4+c & 9+c & 2+c \\ \hline \end{array}$$

M_c is een magisch vierkant voor elk natuurlijk getal c (zie paragraaf 3.2). We bewijzen dat er een natuurlijk getal c bestaat zodat ook $f_x(M_c)$ magisch.

Aangezien x een normaal getal is, kunnen we elk eindig rijtje cijfers in de decimale ontwikkeling van x vinden. In het bijzonder komt ergens in de decimale ontwikkeling van x het blok 123456789 voor, zeg op plaats n tot en met $n+8$. Dit blok komt zelfs vaker dan één keer voor (anders is dat limiet uit de definitie van een normaal getal voor 123456789 nul), dus we kunnen aannemen dat $n > 1$.

Er geldt $f_x(n) = 1, f_x(n+1) = 2, \dots, f_x(n+8) = 9$

Dus er geldt:

$$f_x(M_{n-1}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Dus $f_x(M_{n-1})$ is een magisch vierkant.

³ In de officiële definitie van een normaal getal moet wordt niet alleen gekeken naar de 10-tallige ontwikkeling van x , maar in het algemeen naar de g -tallige ontwikkeling. Dit laten we hier buiten beschouwing aangezien we ook voor het maken van een x -magisch vierkant alleen naar de 10-tallige ontwikkeling kijken.

⁴ Stel dat een bepaald rijtje helemaal niet voorkomt. Dan zou de limiet voor dit rijtje nul zijn.

4.3 π -magische vierkanten

π is een irrationaal getal en heeft geen repeterende decimale ontwikkeling. De vraag of π een normaal getal is, is tot nu toe onbeantwoord. Er rest ons weinig anders dan door uitproberen op zoek gaan naar een π -magisch vierkant.

Hierbij kunnen we dezelfde methode gebruiken als voor het vinden van α -magische vierkanten. In plaats van de functie α_{taal} gebruiken we de functie f_π . We kunnen hetzelfde computerprogramma laten werken als bij de α -magische vierkanten. Pas als we 555 proberen als middelste getal, vinden we een π -magische vierkant en wel het volgende:

437	321	907	$\xrightarrow{f_\pi}$	1	4	4
1025	555	85		6	3	0
203	789	673		2	2	5

Bij 843 vinden we een vierkant M zodat $f_\pi(M)$ uit allemaal verschillende getallen bestaat:

745	535	1222	$\xrightarrow{f_\pi}$	3	2	7
1311	843	357		8	4	0
446	1133	923		1	6	5

En bij 1259 is er voor het eerst een vierkant M zodat $f_\pi(M)$ uit allemaal dezelfde getallen bestaat:

1243	591	1943	$\xrightarrow{f_\pi}$	7	7	7
1959	1259	559		7	7	7
575	1927	1275		7	7	7

In plaats van π kunnen we het programma op elk ander reëel getal x loslaten en zo op zoek gaan naar x -magische vierkanten. Totdat we meer kennis hebben over de decimale ontwikkeling van reële getallen, kunnen we niet in het algemeen bewijzen dat er voor elke x een x -magisch vierkant bestaat en kunnen we slecht per geval op zoek gaan naar x -magische vierkanten.

Bijlage 1

Algoritme voor het vinden van α_{ned} -magische vierkanten

Hieronder volgt de code die is geïmplementeerd in Magma om alle α_{ned} -magische vierkanten te vinden.

```
/*
In het volgende rijtje staan de woordlengten van de eerste honderd
Nederlandse telwoorden
*/

woordlengte := [3,4,4,4,4,3,5,4,5,4,3,6,7,8,8,7,9,8,9,7,12,13,13,13,13,12,1
4,13,14,6, 11, 12, 12, 12, 12, 11, 13, 12, 13, 7, 12, 13, 13, 13, 13, 12,
14, 13, 14, 7, 12, 13, 13, 13, 13, 12, 14, 13, 14, 6, 11, 12, 12, 12, 12,
11, 13, 12, 11, 8, 13, 14, 14, 14, 14, 13, 15, 14, 15, 7, 12, 13, 13, 13,
13, 12, 14, 13, 14, 8, 13, 14, 14, 14, 14, 13, 15, 14, 15, 7];

/*
De volgende functie controleert of een gegeven nxn vierkant magisch is en
of het vierkant uit allemaal verschillende getallen bestaat. Je voert in
deze functie een vierkant M in en het aantal rijen (= aantal kolommen) n
van M.
*/

checkmagisch := function(M,n);

// Bepaal eerst de som van de eerste rij van M.

    Som := 0;

    for i in [1..n] do
        som := som + M[1,i];
    end for;

goed := 1;

/*
Bekijk voor elke rij, elke kolom en de diagonalen of zijn som gelijk is aan
de som van de eerste rij. Zo ja, dan laten we goed 1. Komen we een rij
tegen met een afwijkende som, dan veranderen we goed in 0.
*/

    for i in [1..n] do
        rsom := 0;
        ksom := 0;
        for j in [1..n] do
            rsom := rsom + M[i,j];
            ksom := ksom + M[j,i];
        end for;

        if (rsom ne som) or (ksom ne som) then
            goed := 0;
        end if;

    end for;

    dsom := 0;
    adsom := 0;
```

```

    for i in [1..n] do
        dsom := dsom + M[i,i];
        adsom := adsom + M[i, n-i+1];
    end for;

    if (dsom ne som) or (adsom ne som) then
        goed := 0;
    end if;

return goed;

end function;

// De volgende functie maakt bij een gegeven vierkant M het vierkant  $\alpha_{ned}(M)$ 
maakalpha := function(M,n);

// Maak eerst een nxn vierkant bestaande uit alleen nullen
alphavierkant := ZeroMatrix(Integers(),n,n);

// Vul vervolgens de juiste getallen in.

    For i in [1..n] do

        for j in [1..n] do
            alphavierkant[i,j] := woordlengte[M[i,j]];
        end for;

    end for;

    return alphavierkant;

end function;

```



```

/*
De volgende functie geeft bij een gegeven n alle  $\alpha_{ned}$ -magische vierkanten
Bestaande uit getallen kleiner of gelijk aan n.
*/

alphamagisch := function(n);

// In de verzamelingen 'vierkanten' slaan we alle  $\alpha_{ned}$ -magische vierkanten
op

vierkanten := {};

// We lopen alle mogelijkheden voor het middelste getal af.

For midden in [1..n] do

    som := 3*midden;
    Mogelijkeredes := [];

/*
We bekijken voor welke redes  $\alpha_{ned}(\text{midden-rede})$ ,  $\alpha_{ned}(\text{midden})$ ,  $\alpha_{ned}(\text{midden} + \text{rede})$ 
een rekenkundige rij is en slaan deze redes op.
*/

    for rede in [1..Min((midden-1), (n-midden))] do

        if (woordlengte[midden] - woordlengte[midden-rede]) eq
            (woordlengte[midden + rede] - woordlengte[midden]) then
            Mogelijkeredes := Mogelijkeredes cat [rede];
        end if;

    end for;

/*
Ga alle mogelijke combinaties van redes af en kijk of ze een  $\alpha_{ned}$ -magisch
vierkant opleveren.
*/

// Maak eerst het vierkant M

    for i in [1..#Mogelijkeredes] do
        for j in [i+1..#Mogelijkeredes] do;

            vierkant := ZeroMatrix(Integers(),3,3);
            vierkant[2,2] := midden;
            vierkant[1,1] := midden - Mogelijkeredes[i];
            vierkant[3,3] := midden + Mogelijkeredes[i];
            vierkant[3,1] := midden - Mogelijkeredes[j];
            vierkant[1,3] := midden + Mogelijkeredes[j];
            vierkant[1,2] := som - vierkant[1,1] - vierkant[1,3];
            vierkant[2,1] := som - vierkant[1,1] - vierkant[3,1];
            vierkant[2,3] := som - vierkant[1,3] - vierkant[3,3];
            vierkant[3,2] := som - vierkant[3,1] - vierkant[3,3];

```

```

// Controleer of alle getallen minstens 1 en hoogstens 100 zijn.

    bovengrens := 1;
    for h in [1..3] do
        for g in [1..3] do
            if (vierkant[h,g] gt n) or (vierkant[h,g] lt 1) then
                bovengrens := 0;
            end if;
        end for;
    end for;

// Controleer of alle getallen in het vierkant verschillend zijn.

    verschillend := 1;

    if goed eq 1 then
        for i in [1..n] do
            for j in [1..n] do
                for k in [1..n] do
                    for l in [1..n] do

                        if (M[i,j] eq M[k,l]) and ((i ne k) or (j ne l))
then
                            verschillend := 2;
                        end if;

                    end for;
                end for;
            end for;
        end for;
    end if;

/*
Is aan alle eisen voldaan? Maak dan  $\alpha_{ned}$ (vierkant) en controleer of dit een
magisch vierkant is. Zo ja, dan voegen we dit vierkant toe aan onze
verzameling vierkanten.
*/

    if bovengrens eq 1 and verschillend eq 1 then

        alphavierkant := maakalpha(vierkant,3);

        if checkmagisch(alphavierkant,3) eq 1 then
            vierkanten := vierkanten join {vierkant};
        end if;

    end if;
end for;

return vierkanten;

end function;

```

Bijlage 2

Stelling

Als A en B magische vierkanten zijn, dan is A+B een magisch vierkant.

Bewijs

We gaan nu bewijzen dat de som van twee magische vierkanten weer een magisch vierkant is. Zij A een magisch vierkant

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

De som van de getallen in elke rij en in elke kolom van A is gelijk aan de magisch som $s(A)$. Hetzelfde geldt voor de twee diagonalen. In formule:

$$\text{Magische som} = s(A) = \sum_{i=1}^n a_{1i} = \dots = \sum_{i=1}^n a_{ni} = \sum_{i=1}^n a_{i1} = \dots = \sum_{i=1}^n a_{in} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{(n-i)}.$$

En B is een magisch vierkant.

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \\ \hline \end{array}$$

De som van de getallen in elke rij en in elke kolom van B is gelijk aan de magisch som. Hetzelfde geldt voor de twee diagonalen. In formule:

$$\text{Magische som} = s(B) = \sum_{i=1}^n b_{1i} = \dots = \sum_{i=1}^n b_{ni} = \sum_{i=1}^n b_{i1} = \dots = \sum_{i=1}^n b_{in} = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=0}^{n-1} b_{(n-i)}.$$

We tellen de vierkanten A en B bij elkaar op. We krijgen dan het volgende vierkant:

$$A + B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \hline a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \\ \hline \end{array}$$

De sommen van de getallen per rij, kolommen en diagonalen van vierkant A + B zijn:

$$\sum_{i=1}^n a_{1i} + b_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} + b_{ni}, \sum_{i=1}^n a_{i1} + b_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} + b_{in}, \sum_{i=1}^n a_{ii} + b_{ii}, \sum_{i=0}^{n-1} a_{(n-i)} + b_{(n-i)}.$$

Omdat $\sum_{i=1}^n a_{ji} + b_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ji} + \sum_{i=1}^n b_{ji}$ voor alle j , geldt voor elke rij j :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} + b_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ji} + \sum_{i=1}^n b_{ji} = s(A) + s(B)$$

Op dezelfde wijze heeft elke kolom van A + B som $s(A) + s(B)$ en ook de twee diagonalen hebben deze som.

De som van de getallen in elke rij, elke kolom en elke diagonaal van vierkant A + B is hetzelfde. Dus A + B is een magisch vierkant.

Dus als A en B magische vierkanten zijn dan is A + B weer een magisch vierkant.