Ringen en lichamen—Werkcollege 12 januari 2018

Opgave 1. Zij p een priemgetal en n een natuurlijk getal met $p \nmid n$. Zij K het ontbindingslichaam van $X^n - 1$ over $\mathbb{F}_p$. Bewijs dat $[K : \mathbb{F}_p]$ gelijk is aan het kleinste positieve getal d zo dat $p^d \equiv 1 \bmod n$.

Opgave 2. Zij K een algebraïsch afgesloten lichaam, $K_0 \subset K$ zijn priemlichaam. Bewijs dat de uitbreiding $K_0 \subset K$ oneindige graad heeft.

Opgave 3.

(i) Zij K een lichaam. Als f, $g \in K[t]$ niet-constante polynomen zijn en f deelt g, laat zien dat Ω_K^f isomorf is met een deellichaam van Ω_K^g.

(ii) Bewijs dat er in $\mathbb{Q}[t]$ aftelbaar veel monische irreducibele polynomen bestaan.

Laten $f_1, f_2, \dots$ alle monische irreducibele polynomen in $\mathbb{Q}[t]$ zijn, en definieer $F_n = \prod_{i=1}^n f_i$. Zij $\Omega^{(n)}$ het ontbindingslichaam van F_n over $\mathbb{Q}$. Kies voor elke n een (injectief) homomorfisme van lichamen $\Omega^{(n)} \hookrightarrow \Omega^{(n+1)}$, zodat we een rij lichamen krijgen

$$\Omega^{(1)} \subset \Omega^{(2)} \subset \Omega^{(3)} \subset \cdots$$

(iii) Bewijs dat $\cup_{n=1}^{\infty} \Omega^{(n)}$ een algebraïsche afsluiting is van $\mathbb{Q}$.