

RADBOUD UNIVERSITY NIJMEGEN



FACULTY OF SCIENCE

Bewijzen in het voortgezet onderwijs

HOE REDENEREN LEERLINGEN TIJDENS HET BEWIJZEN VAN DE STELLING
OVER EULERGRAFEN

SCRIPTIE WISKUNDE BACHELOR

Schrijver:
Davy WESTRA

Begeleider:
Chris KOOLOOS

Tweede lezer:
Wieb BOSMA

April 2024

Abstract

Dit onderzoek richt zich op het integreren van abstract redeneren en bewijzen in de wiskunde in het voortgezet onderwijs. Door middel van interactieve dialogen en het verkennen van Eulercyclen in de grafentheorie, willen we het begrip van bewijsvoering onder derde klas gymnasium leerlingen vergroten. Het onderzoek bestaat uit twee lessen, waarbij de leerlingen kennismaken met grafentheorie en vervolgens in groepjes over Eulers stelling over Eulergrafen redeneren. De geluidsopnames van de klassikale dialogen worden geanalyseerd met behulp van het model van Toulmin. Onze bevindingen tonen aan dat leerlingen in staat zijn tot bewijzen en het ontwikkelen van redeneervaardigheden, maar dat er ruimte is voor groei in kritisch denken en het gebruik van formele taal in het bewijsproces. Dit onderzoek benadrukt het belang van bewijsvoering in het wiskundeonderwijs op het voortgezet niveau en suggereert mogelijkheden voor verdere integratie van argumentatie in het onderwijs van bewijsvoering.

Contents

1	Inleiding	3
2	Literatuur onderzoek	5
2.1	Bewijzen in het onderwijs	5
2.2	Wiskundig bewijzen	6
2.3	Grafentheorie	7
2.4	Argumentatie	9
2.5	Onderzoeksvraag	11
3	Vakdidactische inhoudsanalyse	12
3.1	Grafen	12
3.1.1	Eulergrafen	13
3.1.2	Stelling van Euler	14
3.1.3	Het bewijs	14
4	Ontwerp	19
4.1	Lesplan	19
4.1.1	Les 1	20
4.1.2	Les 2	22
5	Data collectie en analyse	24
6	Resultaten van analyse	25
6.1	Fragment 1	25
6.2	Fragment 2	27
6.3	Fragment 3	29
6.4	Fragment 4	30
6.5	Fragment 5	32
7	Conclusie/Discussie	34
7.1	Bevindingen	34
7.2	Conclusie	34
7.3	Reflectie	35
7.3.1	Methode	36
7.3.2	Ontwerp	37
7.4	Praktische implicaties	37
7.5	Vervolgonderzoek	38

1 Inleiding

In Nederland is wiskunde een essentieel vak in het voortgezet onderwijs. Dit belang wordt benadrukt in de visie van de NVvW (Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren) in *Wiskunde in het VO* (2019).

Wiskunde is en blijft in het voortgezet onderwijs een kernvak vanwege haar waarde voor persoonlijke vorming, voor maatschappelijke toerusting en voor de voorbereiding op andere disciplines, vervolgopleidingen en beroepen. ... Wiskunde heeft een vormende waarde door haar rijke verbinding met geschiedenis en cultuur en door het stimuleren van nieuwsgierigheid en de probleemoplossende houding. ... Wiskunde is funderend: zij legt patronen bloot door logisch redeneren en creëert daarbij inzichten die los van elke context geldig zijn.

Echter, op universitair niveau verschuift de nadruk van een meer toepassingsgerichte wiskunde naar wat we *meta-wiskunde* kunnen noemen. Zoals beschreven door Imre Lakatos in zijn werk *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976), is dit

een abstractie van wiskunde waarin wiskundige theorieën worden vervangen door formele systemen, bewijzen door bepaalde sequenties van goed gevormde formules, definities door 'afkortingsmiddelen' die 'theoretisch overbodig' zijn maar 'typografisch handig'.

Om deze visie van abstracte wiskunde te realiseren, is een zekere mate van bewijsvoering onvermijdelijk. Hoe kan er anders beweerd worden dat bepaalde wiskundige concepten *los van elke context geldig zijn*? Dit roept de vraag op hoe we dit concept van abstract redeneren en bewijzen kunnen integreren in het voortgezet onderwijs.

Voor 2017 was wiskundig bewijzen een belangrijk onderdeel van het havo- en vwo-wiskunde B curriculum. Het domein 'Gb: Voortgezette meetkunde' uit het examenprogramma van 2007 legde de nadruk op redeneren, bewijzen en constructie in de Euclidische meetkunde. Echter, in het nieuwe examenprogramma van 2015 werd dit domein vervangen door 'E: Meetkunde met coördinaten', dat gericht is op algebraïsche methoden en technieken in de analytische meetkunde (*College van Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo* 2015). Hiermee is een algebraïsche invalshoek van meetkunde gekomen, waarbij de nadruk ligt op het aanleren van algebraïsche vaardigheden in plaats van het ontwikkelen van redeneer- en bewijsvaardigheden.

Uit onderzoek blijkt dat bewijsvoering belangrijk is voor het ontwikkelen van handvaten, methodes en strategieën voor het oplossen van problemen (Rav 1999). In plaats van te kijken naar de rol van de docent of de lesmethode (A. J. Stylianides 2014, Oosterom 2018), richt dit onderzoek zich op de communicatie tussen leerlingen tijdens bewijzen. Door dit te doen komen we dicht bij het denkproces van de leerling en kunnen we een inzicht krijgen in hoe een bewijs ontstaat en gecommuniceerd wordt. Geïnspireerd door het boek *Proofs and Refutations* van Lakatos (1976) willen we nagaan hoe het betrekken van leerlingen

in interactieve dialogen hun begrip van bewijsvoering kan vergroten. Dit willen we gaan doen aan de hand van Eulercyclen in de grafentheorie.

Ons doel is om leerlingen aan te moedigen wiskundige stellingen te verkennen en te bespreken. Dit zal niet alleen hun begrip van de wiskunde verbeteren, maar ook hun vaardigheden op het gebied van probleemoplossing en redeneren versterken (A. J. Stylianides 2007), wat van cruciaal belang is voor hun succes in het hoger onderwijs (*Wiskunde in het VO* 2019).

In de volgende hoofdstukken zullen we dieper ingaan op de methoden en strategieën die in ons onderzoek worden gebruikt, de resultaten van onze klassikale dialogen delen en onze bevindingen en inzichten over de effectiviteit van deze aanpak presenteren. Bovendien zullen we de implicaties van ons onderzoek voor het wiskundeonderwijs bespreken.

2 Literatuur onderzoek

2.1 Bewijzen in het onderwijs

Er zijn veel studies gedaan naar wiskundendidactiek. Sommige richten zich meer op de docent, ander op de leerling en weer andere op de lesstof. In 2023 hebben Stylianides et al. (2023) een review geschreven over 103 papers die geschreven zijn die specifiek over bewijs of bewijzen gaan. Hierin is er gekeken naar de belangrijkste focus van de paper; teacher, student of content (Teacher (T), Student (S) en Content (C)). Ze hebben onderscheid gemaakt tussen zeven verschillende categorieën (T, S, C, TS, SC, TC, TSC). (Stylianides et al. 2023). Hieruit werd duidelijk dat meeste studies zich richten op de relatie tussen de leerling en de lesstof (SC). Onderzoek waar de focus alleen op de docent, leerling of lesstof ligt, is lastig. Dit komt doordat het onderwijs een samenspel is van zowel docent, leerling als lesstof. Ons onderzoek richt zich voornamelijk op de leerlingen, maar gezien het feit dat we dit doen in de context van Eulercyclen in de grafentheorie zou ons onderzoek het beste ingedeeld kunnen worden in de categorie CS.

De waarde van bewijsvoering wordt zichtbaar door de vele studies die er-naar gedaan zijn. Uit deze studies blijkt dat, ondanks een toename van de aandacht voor bewijsvoering in het onderwijs, leerlingen van alle leeftijden het een uitdagend onderwerp vinden om goed te beheersen (G. Stylianides et al. 2017; Tye G. Campbell 2021; Brown 2018). Bovendien is vastgesteld dat veel leerlingen geen helder begrip hebben van wat wiskundig bewijzen of redeneren precies inhoudt (Oosterom 2018). Desondanks zijn redeneervaardigheden van cruciaal belang voor het begrijpen van wiskundige concepten (Eric Knuth et al. 2019). Om wiskunde volledig te begrijpen, is argumentatie nodig om logisch te beoordelen of vermoedens waar zijn. Redeneervaardigheden vormen de sleutel tot het vinden en verklaren van stellingen die los van elke context geldig zijn (Hanna 2000; Thurston 1994). Door het proces van bewijsvoering kunnen nieuwe resultaten worden ontdekt of nieuwe strategieën worden gevonden om problemen op te lossen.

De NVvW geeft aan dat leerlingen gedurende hun hele onderwijstijd geconfronteerd zouden moeten worden met bewijsvoering/logisch redeneren. Onderzoek duidt erop dat leerlingen tussen vijf en zeven jaar oud al kunnen argumenteren over wiskundige stellingen (Blanton et al. 2022). Een belangrijk gemis in het onderwijs is echter de manier waarop dit gegeven wordt. Veel denkstappen worden gegeven zonder de leerlingen dit zelf te laten bedenken. Voorbeelden zijn erg belangrijk in het begrijpen van een probleem (E. Knuth et al. 2020).

... bewijsgerelateerde activiteiten kunnen niet alleen een dieper begrip van een vermoeden verschaffen, maar ook inzicht in de ontwikkeling van een bewijs.

Helaas is een van de conclusies dat het geven van voorbeelden die redeneervaardigheden activeren erg lastig kan zijn. Docenten en lesmethoden geven vaak voorbeelden die de stappen van het oplossen van een probleem voorzeggen. Dit heeft als gevolg dat leerlingen niet geactiveerd worden om zelf na te denken over het vinden van een oplossing.

2.2 Wiskundig bewijzen

Bij het woord *bewijzen* kan men verschillende opvattingen hebben. Ten eerste is er een verschil tussen bewijzen (werkwoord) en bewijzen (zelfstandig naamwoord). Het werkwoord betekent iets als: *het aantonen dat iets juist of waar is*. Het zelfstandig naamwoord is het product van het werkwoord bewijzen: *dat waarmee onweerlegbare juistheden worden aangetoond*. Wanneer we dieper ingaan op het werkwoord zien we weer verschillende opvattingen, namelijk een formele of een informele kijk op bewijzen.

We zouden wiskundig bewijzen als volgt kunnen definiëren. Namelijk dat men systematisch axioma's of eerder bewezen theorieën toepast om tot een onweerlegbare conclusie te komen met betrekking tot een specifieke stelling of propositie. Om dergelijke bewijzen toegankelijk te maken voor anderen wiskundigen, is een specifieke taal vereist.

Aan het begin van de 20e eeuw ontwikkelde de Duitse wiskundige David Hilbert een systeem van axioma's en regels om deductieve bewijzen in de wiskunde te formaliseren. Dit systeem werd formeel geïntroduceerd in *Grundzüge der theoretischen Logik* (Principles of Mathematical Logic) (Hilbert 1928) en staat bekend als *eerste-orde-logica* of *predicatenlogica*. Hilbert probeerde een rigoureuze basis te creëren voor de wiskunde, waarbij alle wiskundige stellingen kunnen worden afgeleid van een beperkt aantal axioma's en regels voor logisch redeneren.

Hilberts benadering wordt vaak beschouwd als de gestandaardiseerde methode waarop wiskundigen bewijzen formeel leveren. Hierbij worden bewijzen stapsgewijs opgebouwd uit logische regels of eerder bewezen stellingen. Deze methode biedt de precisie die we in de wiskunde verlangen.

De keerzijde van Hilberts systeem is dat het formele karakter beginners kan ontmoedigen om door te gaan met wiskunde. Het kan moeilijk zijn om te begrijpen waarom een dergelijke formeel bewijs nodig is en waarom de nadruk niet meer gelegd wordt op het informele denkproces die eraan voorafgaat. Dit denkproces is uiteindelijk waar het allemaal begint. Hoe kunnen we leerlingen helpen om eerst intuïtief tot een bewijs te komen voordat ze zich verdiepen in formele wiskundige notatie en deductieve redenering? Daarnaast ligt de uitdaging op hoe we kunnen toetsen of de intuïtie aanwezig is bij de leerlingen.

In 2019 heeft de ICMI (International Commission of Mathematical Introduction) onderzoek gedaan naar struikelblokken rondom het onderwijzen van bewijzen. In een van de artikelen (Villiers and Hanna 2012) staat dat ze begrijpen dat

*een gangbare opvatting **bewijs/bewijzen** beschouwt als niets meer dan een ononderbroken reeks stappen die leiden tot een noodzakelijke conclusie, waarbij elke stap een toepassing is van de waarheidsbehoudende regels van de logica.*

Dit perspectief benadrukt de formele, deductieve benadering van bewijzen, zoals die wordt weergegeven in *eerste-orde-logica*. Voor hun onderzoek hebben Villiers and Hanna (2012) een breder begrip van bewijs voorgesteld, namelijk als:

een reeks ideeën en inzichten in plaats van een opeenvolging van formele stappen.

Dit bredere perspectief erkent dat wiskundige bewijzen vaak beginnen met intuïtieve inzichten en ideeën, en pas later worden geformaliseerd met behulp van 'eerste-orde-logica'.

Dit bredere begrip erkent ook dat bewijsvoering een dynamisch proces is, waarbij ideeën evolueren en verfijnen naarmate men dieper in een wiskundig probleem duikt. Het bouwt voort op de kritiek die Lakatos benadrukte in zijn werk *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976). Hier maakt hij duidelijk dat wiskunde meer is dan een reeks van Euclidische gevolgtrekkingen waarvan de inhoud zorgvuldig is gedefinieerd om precisie te waarborgen. Hij beweert dat deze onweerlegbare uitspraken eerder conclusies zijn van een dialectisch proces van verfijning waarin concepten (eerst) slecht gedefinieerd en ambigu zijn. Het bewijs en de concepten worden tegelijkertijd exacter gemaakt, waarbij tegenargumenten een grote rol spelen.

Fischbein (1987) geeft ook aan dat taal een barrière kan zijn voor leerlingen om tot een formeel bewijs te komen. Hij legt uit dat dit niet hoeft te betekenen dat een leerling de intuïtieve kennis mist of de afzonderlijke stappen van het bewijs niet begrijpt, maar dat taal een belangrijk element is van bewijzen.

De mentale 'objecten' (concepten, operaties, uitspraken) moeten een soort intrinsieke consistentie en direct bewijs krijgen, vergelijkbaar met die van echte, externe, materiële objecten en gebeurtenissen, als het redeneerproces een werkelijk productieve activiteit moet zijn. Een intuïtie is dan een idee dat de twee fundamentele eigenschappen van een concrete, objectief gegeven realiteit bezit; onmiddellijkheid - dat wil zeggen intrinsiek bewijs - en zekerheid (geen formele conventionele zekerheid, maar praktisch betekenisvolle, immanente zekerheid)

Antonini (2019) beargumenteert in zijn studie naar de intuïtieve acceptatie van een bewijs uit het ongerijmde onder leerlingen dat intuïtieve argumenten een belangrijk onderdeel zijn van het bewijzen. Door geluidsopnames van gesprekken tussen leerlingen te analyseren heeft hij laten zien dat bewijsvaardigheden aan te tonen zijn zonder gebruik te maken van een formele taal.

2.3 Grafentheorie

Bewijsvoering is belangrijk in alle takken van de wiskunde. De wiskunde draait om waarheidsverklaringen. In veel gevallen zijn er stellingen die bewezen moeten worden uit axioma's of eerder bewezen uitspraken.

Grafentheorie is daarin niet anders. Deze tak van de wiskunde houdt zich bezig met structuren van knopen en kanten die relaties weergeven. Doordat er weinig voorkennis nodig is om aan grafentheorie te beginnen, is grafentheorie toegankelijk voor middelbare scholieren (Ferrarello and Mammana 2018).

Grafentheorie is begonnen met wiskundige en filosoof Leonard Euler die het beroemde Koningsbergen probleem voorgeschoven kreeg. De vraag gaat om de

stad Koningsbergen (tegenwoordig Kaliningrad) waarin bepaalde delen van de stad verbonden waren met bruggen.

Koningsbergen

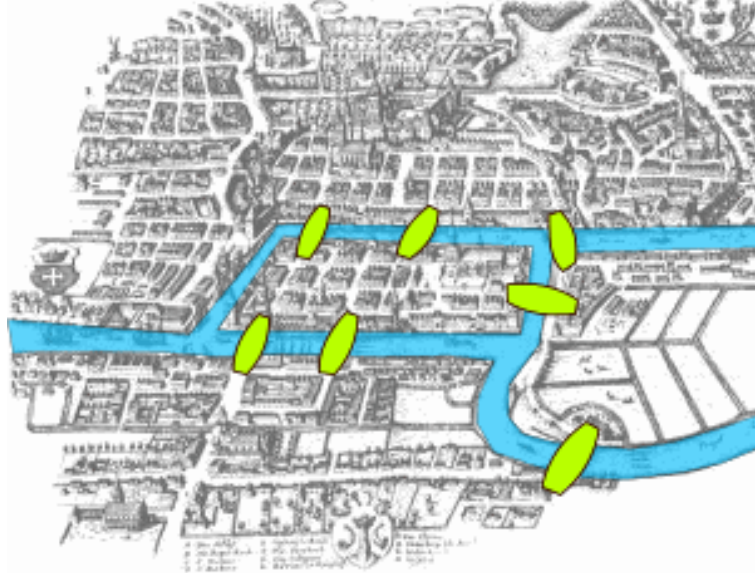


Fig.1

De vraag was of het mogelijk is om een wandeling te maken, zodat elke brug precies een keer gebruikt wordt.

Euler schreef over het bewijs hiervan het volgende,

...deze oplossing heeft weinig te maken met wiskunde ... de oplossing is alleen gebaseerd op redenerie en het is niet afhankelijk van wiskundige principes.

Maar het hield hem wel bezig, want

Deze vraag is zo banaal, maar leek mij de aandacht waard omdat [noch] de meetkunde, noch de algebra, noch de kunst van het tellen voldoende was om het op te lossen.

Uit zijn interesse is uiteindelijk gekomen wat wij nu grafentheorie noemen.

Grafentheorie wordt steeds populairder vanwege de vele voorbeelden die te koppelen zijn aan de huidige maatschappij. Het belang van het bredere 'discrete' wiskunde wordt ook door de NVvW (*Wiskunde in het VO* 2019) benadrukt. Ze geven aan dat discrete wiskunde (graf en netwerken) voor alle leerlingen (culturele of sociale studies, studies in de gezondheidszorg, economische of toegepaste bètastudies, fundamentele bètastudies of technische studies) relevant is. De toevoeging van grafentheorie in het basis- en voortgezet onderwijs geeft leerlingen meer handvaten om situaties uit het echte leven te modelleren en dat op een wiskundige manier te onderzoeken (Blanco and García-Moya 2021).

2.4 Argumentatie

Verschillende onderzoeken uit de review maken gebruik van kwalitatieve data (Ayalon et al. 2022; Tye G. Campbell 2021; Antonini 2019). Het hoofddoel van deze studies was niet om de kwalitatieve data te analyseren, maar om die toe te passen om andere conclusies te ondersteunen. Christine Knipping heeft de analyse van redenering wel centraal gesteld in haar onderzoek (Knipping 2008). Zij heeft naar de structuur in argumentatie gekeken aan de hand van het argumentatiemodel van Toulmin. Dit onderzoek heeft in kaart gebracht hoe het redeneerproces in een klas plaatsvindt.

Een citaat uit haar werk illustreert dit:

Bewijsprocessen in de klas volgen hun eigen bijzondere grondgedachte ... Formele wiskundige logica alleen kan deze grondgedachte niet bevatten ... We moeten andere manieren vinden om deze structuren en de specifieke soorten argumenten, die in de klas voorkomen, te onthullen. Het begrijpen van hun beweegredenen en de contextuele beperkingen die deze argumentaties vormgeven, kan ons helpen om het onderwijzen van bewijs te verbeteren.

Dit benadrukt het belang om het redeneerproces van de leerling beter te begrijpen.

Het argumentatiemodel van Toulmin berust op zes componenten: de *claim*, *grounds*, *warrant*, *backing*, *rebuttal*, en *qualifier*. Volgens Toulmin zijn de eerste drie van essentieel belang, terwijl de laatste drie gebruikt kunnen worden om het argument te verfijnen (Toulmin 1958). Toulmin beschrijft dit als volgt:

Logica houdt zich bezig met de juistheid van de beweringen die we doen - met de stevigheid van de gronden die we aanraden om ze te ondersteunen en de standvastigheid van de ondersteuning die we ervoor bieden - of, om de metafoor te veranderen, met het soort argumenten dat we naar voren brengen ter verdediging van onze beweringen.

De zes componenten worden als volgt uitgewerkt.

- De ***claim*** is de bewering die gemaakt wordt. Dit kan worden beschouwd als het belangrijkste argument.
- De ***grounds*** van het argument zijn de bewijsstukken die de ***claim*** ondersteunen. De waarde van een bewering is afhankelijk van de betrouwbaarheid van deze bewijsstukken. De ***grounds*** geven een aanleiding voor de ***claim*** en laten zien hoe waarschijnlijk een bewering is in verschillende situaties.
- De ***warrant*** is de aanname die de ***grounds*** met de ***claim*** verbindt. Hiermee wordt de 'stap' van de ***grounds*** naar de ***claim*** gerechtvaardigd. Het legt uit hoe je op basis van de gegeven bewijsstukken de beredeneerde conclusie mag trekken (de nieuwe taalgids, 69, 1976).

- In sommige gevallen is de *warrant* op zichzelf niet sterk genoeg. Dan is er extra *backing* nodig om de *warrant* aan te nemen. De *backing* kan in de vorm van voorbeelden geven worden.
- Als de stappen hierboven niet tot een onweerlegbaar argument leiden, komt er vaak een *rebuttal* naar voren. Een *rebuttal* laat een andere conclusie of *claim* zien die gemaakt kan worden uit de bewijsstukken en de ondersteuning. Een *rebuttal* kan vervolgens meegenomen worden in de *grounds* om een sterkere *claim* te maken.
- De *qualifier* geeft de mate van zekerheid van de gemaakte *claim* aan. Daarnaast laat het zien of de *claim* in alle situaties geldig is. In wiskundig bewijzen worden vooral waarheidsverklaringen gemaakt waardoor de *qualifier* vaak volledige zekerheid zal geven.

Deze componenten en hun onderlinge interactie kunnen worden gevisualiseerd zoals hieronder weergegeven.

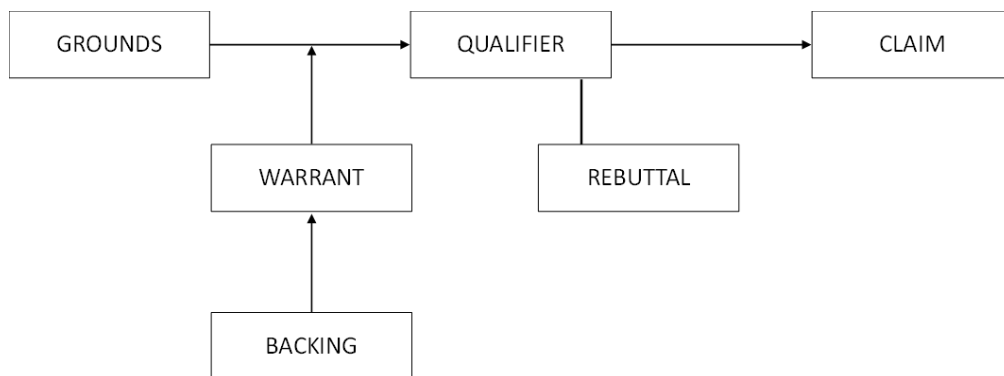


Fig.2

In Toulmin (1958) geeft Toulmin het volgende voorbeeld. Stel dat iemand de volgende *claim* maakt: 'Harry is een Britse onderdaan'. Deze *claim* zou worden ondersteund door het feit dat 'Harry geboren is in Bermuda'. De *warrant* om de *grounds* met de *claim* te verbinden, zou kunnen zijn: 'Een man geboren in Bermuda zal over het algemeen een Britse onderdaan zijn'. Als de *warrant* betwist wordt, zou er *backing* nodig zijn om de *warrant* te ondersteunen. Dit zou bijvoorbeeld 'de voorwaarden en de data van inwerkingtreding van de wetten van het parlement en andere wettelijke bepalingen omvatten die de nationaliteit bepalen van personen geboren in de Britse koloniën'. Omdat de nationaliteit van een persoon vaak ingewikkeld is, zou het gepast zijn als *qualifier* 'vermoedelijk' te gebruiken. Uiteindelijk kan de conclusie nog weerlegd worden. Misschien blijken de ouders van Harry buitenlanders te zijn, of is Harry via naturalisatie geen Britse onderdaan meer.

Dit voorbeeld kan worden weergegeven in het model van Toulmin zoals hieronder afgebeeld.

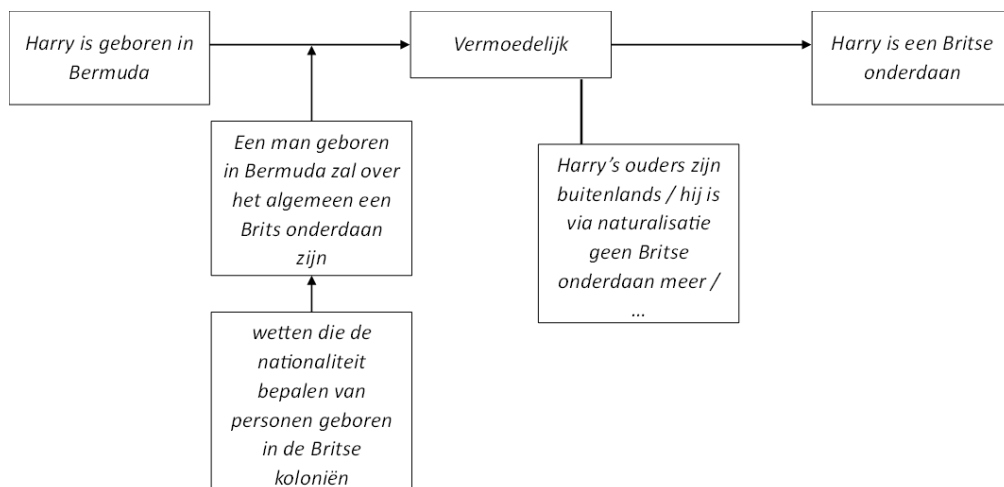


Fig.3

2.5 Onderzoeksvraag

Dit onderzoek richt zich op het onderzoeken van bewijsvoering en redeneren in het voortgezet onderwijs, waarbij zowel de grafentheorie als het argumentatiemodel van Toulmin worden toegepast. De onderzoeksvragen zijn als volgt geformuleerd:

1. *Hoe communiceren leerlingen met elkaar tijdens het bewijzen in de wiskunde?*
2. *In hoeverre vertonen de bewijzen van de leerlingen overeenkomsten met de traditionele bewijzen van Euler en Hierholzer?*

Deze onderzoeksvragen bieden een duidelijk kader voor het onderzoek naar de dynamiek van bewijsvoering in de context van het voortgezet onderwijs, waarbij zowel het proces van communicatie tussen leerlingen als de structuur en inhoud van de bewijzen worden onderzocht.

3 Vakdidactische inhoudsanalyse

3.1 Grafen

Zoals eerder omschreven, zijn grafen een verzameling van knopen (punten) en kanten (lijnen). De knopen zijn in de basis elementen zonder eigenschappen. Knopen kunnen wel bepaalde objecten representeren; zoals kruisingen in een wegennetwerk of mensen in een sociaal netwerk, maar deze gekoppelde eigenschappen veranderen de graaf niet. De kanten verbinden de knopen om relaties aan te geven. Bijvoorbeeld wegen tussen kruisingen of vriendschappen tussen individuen.

Grafen worden gebruikt om data op een visuele manier te representeren. In de wiskunde doen de gekoppelde eigenschappen er niet toe. Daar is een graaf simpelweg een verzameling van knopen en kanten. Dit wordt vaak als volgt gedefinieerd:

$$G = (V, E)$$

Hierbij is V de verzameling van knopen (**V**ertices), bijvoorbeeld $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Een kant gedefinieerd wordt door de twee knopen die verbonden worden door de kant, bijvoorbeeld $e_1 = v_i, v_j$ met $v_i, v_j \in V$. E is de verzameling van kanten (**E**dges).

In de traditionele opvatting van een graaf zijn alle elementen van E uniek. Dit betekent dat er tussen twee knopen maximaal één kant zit. Bovendien wordt een kant tussen één knoop, een *lus*, $\{v_i, v_i\}$ uitgesloten. Als deze eisen vervallen, spreken we van een multigraaf. Wanneer we in dit onderzoek spreken van grafen bedoelen we multigrafen zonder lus.

Het probleem waarmee de grafentheorie begonnen is, *de bruggen van Koningsbergen*, is in wezen een multigraaf.

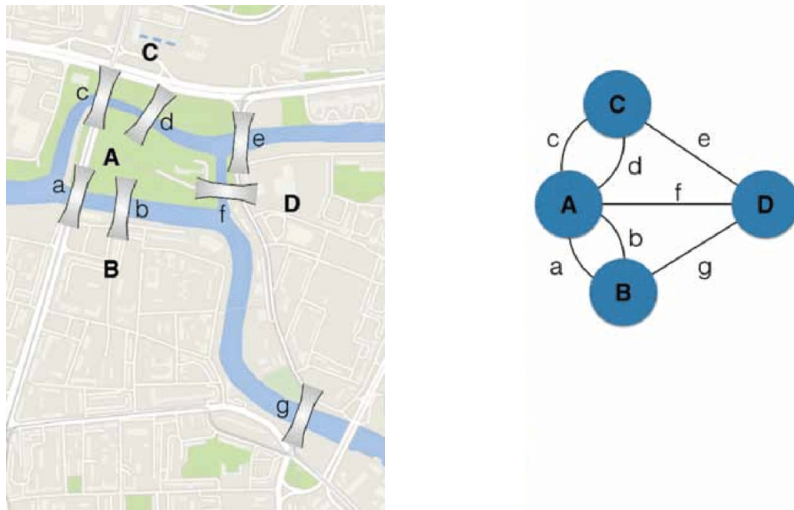


Fig.4

In Fig. 2 zien we dat er tussen de knopen A en B én A en C twee kanten zitten, a en b én c en d respectievelijk. Deze kanten zijn daarom niet uniek en daarom is dit een multigraaf.

In de grafentheorie spreken we vaak over samenhangende grafen. Een samenhangende graaf voegt aan de definitie de eis toe dat tussen elk knopenpaar een *wandeling* bestaat.

Een **wandeling** is een rij van knopen $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_i \in V$, waarvoor geldt dat $\{v_{i-1}, v_i\} \in E \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Een wandeling heet een **gesloten wandeling** als $v_0 = v_n$.

Voor de bewijzen die we in het volgende onderdeel gaan bekijken is de definitie van de *graad* van een knoop en een *deelgraaf* van belang.

De **graad** van een knoop is de hoeveelheid kanten waar de knoop deel van uitmaakt.

Een **deelgraaf** $G' = (V', E')$ van $G = (V, E)$ betekent dat $V' \subseteq V$ en $E' \subseteq E \mid \forall \{v_i, v_j\} \in E', v_i, v_j \in V'$.

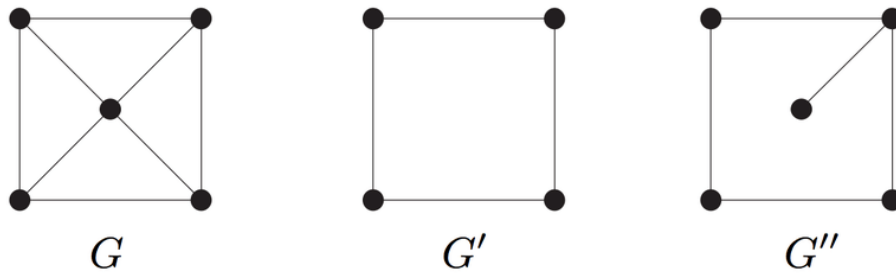


Fig.5

In Fig. 2 zien we dat G' en G'' deelgrafen zijn van G . Bovendien is G' een deelgraaf van G'' .

3.1.1 Eulergrafen

Uit het oplossing van het Koningsbergen probleem is het begrip van een Eulergraaf ontstaan. Dit zijn grafen waarin een wandeling te maken is die precies één keer door alle kanten van de graaf gaan. Zo een wandeling heet een *Eulercykel*.

Een **Eulercykel** is een gesloten wandeling $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ die elke kant van G precies één keer doorloopt. Dat wil zeggen dat $\{v_{i-1}, v_i\} \in E \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, met de eisen dat $\bigcup_{i=1}^n \{v_{i-1}, v_i\} = E$ en dat $|E| = n$.

Gezien het feit dat de grafentheorie begonnen is met Eulergrafen is het vanzelfsprekend dat Eulergrafen vroeg in de uitleg over grafentheorie voorkomen. In het onderzoek van Blanco and García-Moya (2021) is duidelijk geconcludeerd dat leerlingen van de basisschool met een middelbare school niveau van wiskunde deze stof al eigen kunnen maken.

3.1.2 Stelling van Euler

Het onderzoek van Selden (2012) geeft ook aan dat grafentheorie en getaltheorie gangbare takken van de wiskunde zijn waarin leerlingen hun bewijs- en redeneervaardigheden kunnen oefenen. Naar aanleiding van het Koningsbergen probleem heeft Euler een stelling bedacht en uiteindelijk bewezen.

*Zij G een samenhangende graaf * . Dan bevat G een Eulercykel dan en slechts dan als de graad van alle knopen even is*

** als G onsaamenhangend is, dan bevat het geen Eulercykel. Met de uitzondering dat G bestaat uit een saamenhangend deel en **geïsoleerde knopen** (dit zijn knopen waarvan de graad nul is)*

3.1.3 Het bewijs

We zullen nu gaan kijken naar een bewijs van de stelling over Eulergrafen. Het gaat hier om een formeel bewijs dat berust op een formele taal. Bovendien wordt stilgestaan bij de intuïtie die hieraan vooraf is gegaan.

We zullen het bewijs opsplitsen in twee delen, deel **A** en deel **B**. Onderdeel **B** is waar Euler in 1736 het bewijs voor gaf. Pas veel later in 1873 publiceerde Carl Hierholzer het bewijs voor onderdeel **A** (Biggs, Lloyd, and Wilson 1986). Hij gaf een constructief bewijs, dat is uitgewerkt als onderdeel **A.2**.

A *Een saamenhangende graaf waarvan de graad van alle knopen even is, bevat een Eulercykel*

B *Een Eulergraaf heeft uitsluitend knopen die een even graad hebben*

Een saamenhangende graaf waarvan de graad van alle knopen even is, bevat een Eulercykel

Eerst zullen we kijken naar twee bewijzen van het eerste onderdeel.

Het idee dat een zo lang mogelijke wandeling een gesloten wandeling is, is in beide bewijzen van belang. Vermoedelijk is dit een lemma geweest wat aanleiding gegeven heeft voor de bewijzen.

Het eerste bewijs (A.1) berust op een bewijs uit het ongerijmde. Dit is een bewijstactiek in de wiskunde die gebruik maakt van het feit dat een stelling waar of onwaar kan zijn. Door aan te nemen dat een stelling onwaar is en door te laten zien dat dit tot een ongeldige conclusie leidt, kunnen we de conclusie trekken dat de stelling waar is. In het geval van deze stelling nemen we aan dat de geconstrueerde wandeling niet door alle kanten van de graaf heen gaat. Als dit tot een tegenspraak leidt, kunnen we de conclusie trekken dat de wandeling wél

door alle kanten heen moet gaan. Een gesloten wandeling die door alle kanten precies een keer gaat, is een Eulercykel, dus de graaf is een Eulergraaf.

De intuïtie achter het tweede bewijs (A.2) is een stuk toegankelijker. We hebben een gesloten wandeling geconstrueerd die we stap voor stap uitbreiden. We doen dit op een manier waarbij het een gesloten wandeling blijft. De gebruikte methode kan herhaaldelijk worden toegepast. Omdat de graaf eindig veel knopen en kanten heeft, kan de wandeling zover uitgebreid worden dat uiteindelijk alle kanten precies één keer bevat. Hiermee is bewezen dat de graaf een Eulergraaf is.

Formeel uitgeschreven ziet dit er als volgt uit.

A.1

Veronderstel dat $G = (V, E)$ samenhangend is en dat de graad van alle knopen even is.

Stel dat we een, *zo lang mogelijke*, wandeling $W = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ construeren waarin elke kant maximaal één keer voorkomt en v_0 een willekeurig punt in G is. We zullen eerst aantonen dat W een gesloten wandeling moet zijn en vervolgens dat het een Eulercykel is.

Als $v_n \neq v_0$ kunnen we concluderen dat W niet *zo lang mogelijk* is. Want, als $W = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_n \neq v_0$ is de graad van v_n oneven. Dit komt doordat elke keer als de knoop v_i voorkomt, de graad van v_i met twee vermeerderd. Één om naar de knoop toe te gaan en één om vanuit de knoop naar een andere knoop te gaan. Dit betekent dat er een kant is, zeg $\{v_n, u\}$, die nog niet is belopen. $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, u)$ is in dat geval een wandeling in G die langer is dan W . Uit deze tegenspraak kunnen we concluderen dat $v_n = v_0$, dat wil zeggen dat W een gesloten wandeling moet zijn.

Als W door alle kanten gaat, dan is G een Eulergraaf.

Stel dat W niet door alle kanten van G gaat, dan is er een lijn $s \in E$ die niet door W belopen wordt. Omdat G samenhangend is, bestaat er een kortste wandeling $\bar{W} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, zodat $s = \{w_1, w_2\}$ en w_m de enige knoop die in W bevat is. Zonder verlies van algemeenheid zeggen we dat $w_m = v_i$. Omdat we hebben aangetoond dat W een gesloten wandeling is, kunnen we de volgende wandeling maken: $(w_1, w_2, \dots, w_m, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n, v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$. Dit is nu een wandeling in G die alle kanten van W bevat en langer is dan W . Dit betekent dat W niet *zo lang mogelijk* is en dat is in tegenspraak met onze keuze voor W . Door deze tegenspraak kunnen we de conclusie trekken dat W door alle kanten van G gaat.

Als W door alle kanten van G gaat en we geëist hebben dat elke kant van G maximaal één keer voorkomt in W , weten we dat W een Eulercykel is. $\square$

A.2

Veronderstel dat $G = (V, E)$ samenhangend is en dat de graad van alle knopen even is.

We willen een gesloten wandeling construeren vanuit een knoop, zeg v_0 , waarbij elke kant maximaal een keer voorkomt. Als v_0 de enige knoop in G is dan bevat G een lege wandeling die gesloten is. Veronderstel dat v_0 niet de enige knoop is in G en dat het geen geïsoleerde knoop is. Dan weten we dat het verbonden is aan een andere knoop, zeg v_1 . Omdat de graad van v_1 even is, is v_1 minstens verbonden aan een andere knoop, zeg v_2 . Als $v_2 = v_0$ dan hebben we een *lus*, dit was uitgesloten van onze definitie van een graaf. Omdat $v_2 \neq v_0$ dan is v_2 minstens verbonden aan een andere knoop, zeg v_3 . Dit kunnen we blijven herhalen totdat $v_i = v_0$, omdat de graad van alle knopen even is. Als G samenhangend is en de graad van alle knopen even is, kunnen we een gesloten wandeling vinden.

Stel dat we een gesloten wandeling $W_1 = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v_0)$ construeren vanuit een willekeurige knoop waarin elke kant van G maximaal één keer voorkomt. We zullen stapsgewijs nieuwe gesloten wandelingen aan deze wandeling toevoegen totdat dit een Eulercykel is.

Als W_1 door alle kanten gaat, is G een Eulergraaf.

Stel dat W_1 niet door alle kanten van G gaat. Dan kunnen we een verzameling van kanten $E_1 \subset E$ definiëren waarvoor geldt dat E_1 alle kanten bevat die W_1 doorloopt. We weten dat G samenhangend is en dat alle knopen een even graad hebben. Elk punt in W_1 is verbonden aan twee kanten. Het weghalen van de kanten zorgt voor een vermindering van graad twee van de knoop die correspondeert bij dat punt. Dus de graaf $G_1 = (V, E \setminus E_1)$ is de subgraaf van G die alle kanten bevat die niet doorlopen zijn door W_1 . G_1 bevat geïsoleerde knopen en/of samenhangende subgrafen met uitsluitend knopen van even graad.

Omdat W_1 niet door alle kanten van G gaat, is er een punt, zeg u , in W_1 die minimaal twee kanten bevat die niet in W_1 zitten. Dan zit u ook in een samenhangend deel van G_1 . Vanuit u kunnen we weer een gesloten wandeling $(w_0, w_1, \dots, w_m = w_0)$ maken met $u = w_0$. Dit kunnen we toevoegen aan W_1 zodat $W_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, u, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v_0)$. We kunnen een verzameling van kanten $E_2 \subset E$ definiëren waarvoor geldt dat E_2 alle kanten bevat die W_2 doorloopt. De graaf $G_2 = (V, E \setminus E_2)$ is de subgraaf van G die alle kanten bevat die niet doorlopen zijn door W_2 .

Op eenzelfde manier kunnen we W_3 en G_3 , W_4 en G_4 enzovoort construeren. Vanwege de constructie van W_k weten we dat het W_{k-1}

bevat. Bovendien is W_k strikt langer dan W_{k-1} omdat we een niet lege cykel toevoegen aan W_{k-1} om W_k te krijgen. We kunnen de stappen herhalen tot het alle kanten bevat, dan hebben we een Eulercykel gemaakt.

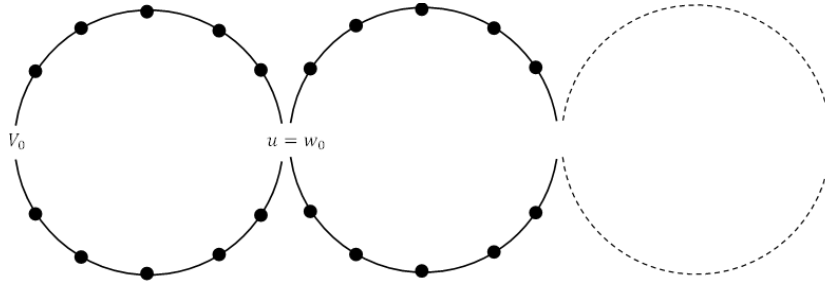


Fig.6

Omdat de graaf een eindige hoeveelheid kanten heeft, zal de herhaling van deze stappen eindigen. Dus G is een Eulergraaf. $\square$

Een Eulergraaf heeft uitsluitend knopen die een even graad hebben

Het bewijs in de andere richting is een stuk intuïtiever. Dit blijkt uit het feit dat dit bewijs meer dan honderd jaar eerder opgeschreven is. Dit bewijs is gefundeerd op het feit dat alle knopen in een gesloten wandeling een even graad moeten hebben. Een Eulergraaf bevat een Eulercykel, wat een gesloten wandeling is, dus moeten alle knopen van even een graad zijn.

Het idee wordt duidelijk tijdens het tekenen van een gesloten wandeling tussen willekeurige punten. Tijdens het tekenen, zijn er maar twee knopen met een oneven graad, namelijk de knoop waar we zijn begonnen en de knoop waar de wandeling op dat moment eindigt. Alle andere knopen zijn we naar toegelopen en van weggelopen wat voor een even graad zorgt. Omdat we een gesloten wandeling willen tekenen zullen we eindigen in het beginpunt, hierdoor krijgt ook deze knoop een even graad.

Gebruikmakend van een formelere taal zou het bewijs er als volgt uit kunnen zien.

B

Veronderstel dat G een Eulergraaf is en dat $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ een Eulercykel is in G .

Eerst gaan we bewijzen dat G samenhangend is en daarna dat elke knoop in G een even graad heeft.

Stel dat we twee willekeurige knopen, $x, y \in V$, bekijken. Omdat we geëist hebben dat G geen geïsoleerde knopen bevat, weten we dat er kanten, $s, t \in E$, bestaan die verbonden zijn aan x en y

respectievelijk (ofwel $x \in s$ en $y \in t$). Omdat C een Eulercykel is, weten we dat C zowel s als t doorloopt. Nu kunnen we punten in C koppelen aan x en y , zeg $x = v_i$ en $y = v_j$. Als $i < j$ dan is $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}, v_j)$ een wandeling tussen x en y . En als $i > j$ dan is $(v_j, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n, v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)$ een wandeling tussen x en y . Hiermee kunnen we concluderen dat G samenhangend is.

Elk punt in C is verbonden aan twee kanten, namelijk $\{v_{i-1}, v_i\}$ en $\{v_i, v_{i+1}\}$ (waarbij $v_{-1} = v_n$ en $v_{n+1} = v_0$).

Dit betekent dat de graad van elke knoop, $w \in V$, het dubbele is van de hoeveelheid keer dat het in C voorkomt. Ofwel de graad van w is

$$2 \cdot \sum_{i=0}^n f(i) |f(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } v_x = w \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

Het is duidelijk dat dit even is.

We zouden ook kunnen zeggen dat voor elke knoop, $u \in V$, $\forall i \in 0, \dots, n \mid u = v_i$ geldt $\{v_{i-1}, u\}, \{u, v_{i+1}\} \in E$. Elk punt in C voegt twee kanten toe aan een knoop in G .

Uit beide redeneringen kunnen we concluderen dat de graad van een willekeurig gekozen punt w of u in G even is. $\square$

4 Ontwerp

Dit onderzoek is uitgevoerd op het Stedelijk Gymnasium en is gericht op leerlingen in de derde klas. Deze groep heeft in de voorgaande jaren gewerkt met de Wageningse Methode, maar heeft nog geen kennis gemaakt met de grafentheorie (*Wageningse Methode 1H/V, 2V en 3V* 2015). Dit heeft als voordeel dat de leerlingen niet terug kunnen grijpen op reeds verworven kennis en dat iedereen wordt uitgedaagd om logisch te redeneren. Tegelijkertijd is dit een nadeel omdat ze vanaf nul moeten beginnen.

De ontwikkelaars van de Wageningse Methode benadrukken het belang van actieve betrokkenheid van leerlingen bij het vak. De methode is zo ontwikkeld dat leerlingen zelf kennismaken met de stof en door het maken van opgaven de theorie ontdekken. Dit onderzoek richt zich op de redeneervaardigheden van de leerlingen. Door de overeenkomst in de leermethode en het doel van dit onderzoek, het zelfstandig ontdekken, zijn deze leerlingen geschikt voor deze studie

We streven ernaar om een gespreksproces met de leerlingen aan te gaan, vergelijkbaar met de methode beschreven in *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976). We willen de leerlingen tijd geven om in kleine groepjes na te denken over de stelling, de bevindingen vervolgens klassikaal te bespreken en de stelling én de concepten te verfijnen, totdat we tot een *onweerlegbare* conclusie zijn gekomen. Door deze stappen kunnen we het gesprek sturen en is er ruimte voor tegenargumenten. Bovendien zullen we samen ontdekken hoe het bewijs zich ontwikkelt zonder dat er formele taal nodig is.

De gesprekken die de leerlingen voeren worden opgenomen met opname-apparatuur. Deze worden vervolgens geanalyseerd met behulp van het model van Toulmin. Hiermee hopen we te ontdekken hoe leerlingen argumenteren tijdens het bewijzen. Verder geeft het ons inzicht in hoeverre hun intuïtie overeenkomt met die van Euler en Hierholzer.

De dataverzameling vindt plaats tijdens twee lessen in twee klassen (vier lessen in totaal). De opzet van deze lessen wordt in het volgende onderdeel omschreven.

4.1 Lesplan

Twee derdeklassen krijgen twee lessen waarin de data voor dit onderzoek worden verzameld. Tijdens de eerste les maken de leerlingen kennis met de basisbeginselen van de grafentheorie, en de tweede les is gericht op de stelling van Euler over Eulergrafen.

Van de leerlingen wordt verwacht dat ze in een relatief korte tijd de stof beheersen. Tijdens de lessen wordt er weinig aandacht besteed aan de formele taal en definities van de grafentheorie. Het doel is om net genoeg informatie te geven om intuïties te ontwikkelen en te kunnen redeneren over de stellingen met betrekking tot Eulergrafen.

4.1.1 Les 1

De eerste fase van ons lesplan richt zich op het opwekken van nieuwsgierigheid en het laten ontdekken van fundamentele concepten binnen de grafentheorie. We willen de leerlingen met grafen laten werken zonder dat ze bewust zijn dat ze met grafen aan het werken zijn. Hiermee hopen we eerst hun intuïtie op dit gebied te vergroten voordat we formele concepten introduceren. Om deze les later te kunnen analyseren wordt er een geluidsopname gemaakt om de klassikale dialoog vast te leggen.

Om dit doel te bereiken hebben we twee verschillende opgaven die de leerlingen uitdagen om te experimenteren met wat wij *wandelingen* noemen in de grafentheorie. Dit doen we voordat we het concept van grafen en wandelingen introduceren. Op deze manier willen we de leerlingen direct laten snappen waarom grafen handige representaties kunnen zijn in bepaalde situaties.

Vergelijkbaar met het Koningsbergen probleem hebben we de leerlingen dezelfde opdracht gegeven in een 4-kamer appartement.

Is het mogelijk om een wandeling te vinden die precies één keer door alle deuren gaat en in dezelfde kamer begint en eindigt?

Het voordeel van deze opgave vergeleken met het vraagstuk over Koningsbergen is dat het mogelijk is om een Eulercykel te vinden.

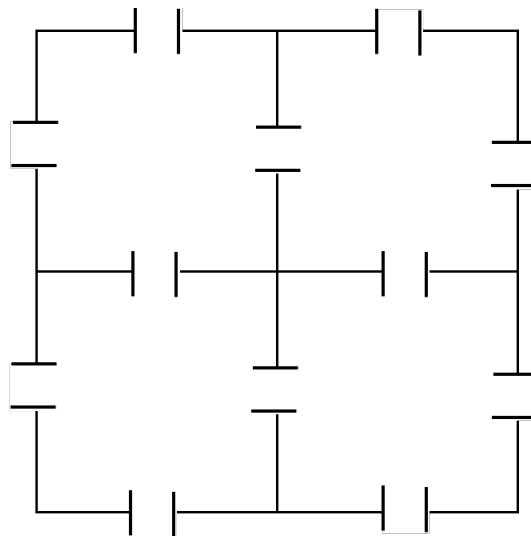


Fig.7

We verwachten dat de leerlingen niet al te lang bezig zullen zijn om een wandeling te vinden die aan de gestelde eisen voldoet. Met hetzelfde voorbeeld zullen de leerlingen nog twee vragen krijgen om hun intuïtie over Eulercykels te vergroten.

Stel dat we één willekeurige deur sluiten. Is het dan nog steeds mogelijk om een wandeling te vinden die precies één keer door alle deuren gaat en in dezelfde kamer begint en eindigt?

Het sluiten van één deur creëert een semi-Eulergraaf (dit is een Eulergraaf waarin de eis dat de wandeling in hetzelfde punt begint en eindigt, vervalt). Dit is een voorbeeld dat laat zien dat zo'n wandeling niet altijd mogelijk is. Het is interessant om te zien hoe leerlingen argumenteren waarom dit niet mogelijk is.

Stel dat we twee willekeurige deuren sluiten. Is het dan mogelijk om een wandeling te vinden die precies één keer door alle deuren gaat en in dezelfde kamer begint en eindigt?

In deze vraag is het afhankelijk van de deuren die gesloten worden. Hierbij kunnen de leerlingen, ontdekken dat het iets te maken heeft met het even of oneven zijn van het aantal deuren in elke ruimte.

Hierna krijgen de leerlingen dezelfde vragen over een 5-kamer appartement (zie figuur 8).

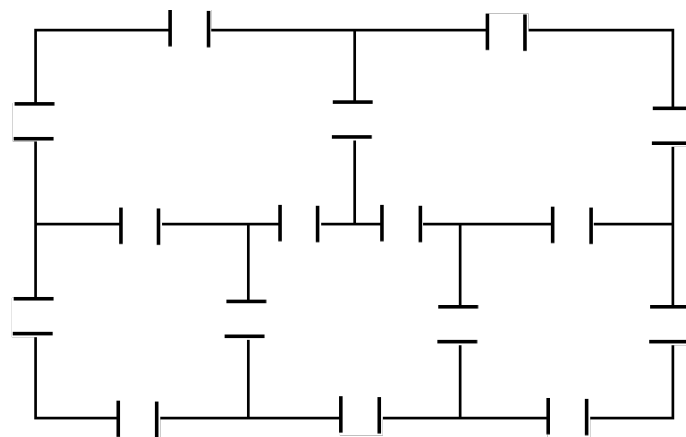


Fig. 8

Aan de hand van het voorbeeld van Koningsbergen worden grafen vervolgens geïntroduceerd. Grafen kunnen op verschillende manieren worden gedefinieerd, maar voor dit onderzoek richten we ons op ongerichte samenhangende (multi)grafen. Onsamenvhangende grafen en gerichte grafen maken de stelling van Euler namelijk ingewikkelder, omdat er dan uitzonderingen gemaakt moeten worden. Verder gebruiken we in de opgave over het 4-kamer appartement een multigraaf. Omdat de stelling net zo goed werkt voor multigrafen is het makkelijker om dit als definitie te gebruiken. Een belangrijk concept dat we willen introduceren, is dat van een wandeling, waar leerlingen al kennis mee hebben gemaakt tijdens het maken van de opgaven. We willen dit concept formaliseren, waarbij een cykel een wandeling is dat begint en eindigt in dezelfde knoop.

De leerlingen zullen te zien krijgen hoe het Koningsbergen probleem gerepresenteerd kan worden als een graaf. De stukken land zijn de knopen en de bruggen zijn de kanten. De leerlingen tekenen hierna de twee voorbeelden van de appartementen als grafen. Hieronder is te zien hoe dit gedaan kan worden.

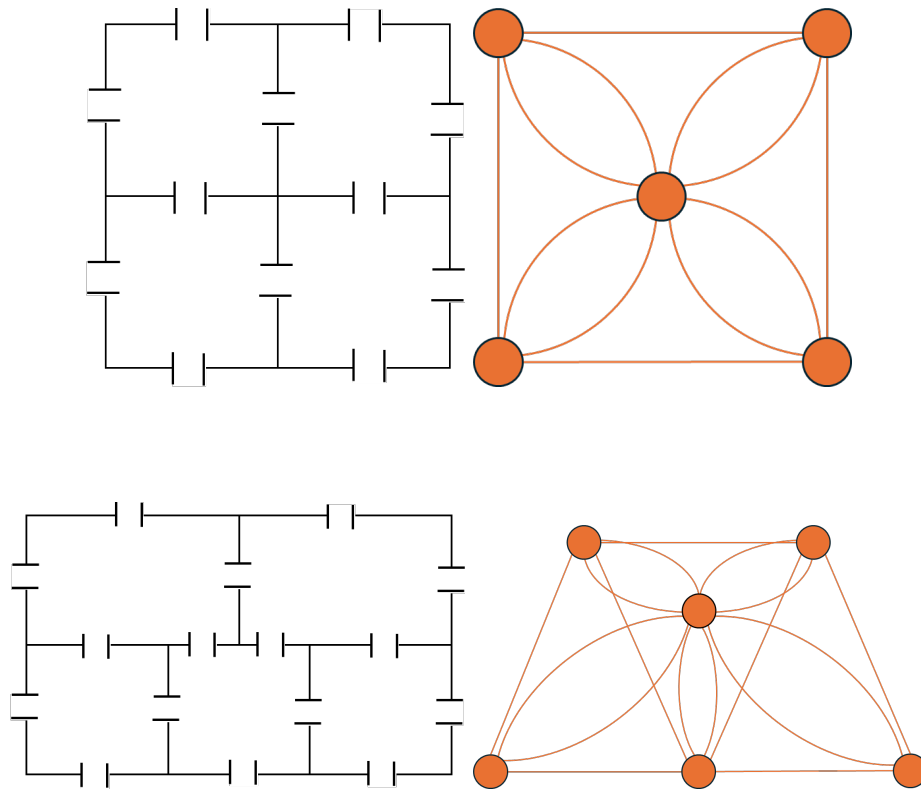


Fig. 9

4.1.2 Les 2

De tweede fase van ons lesplan is gericht op het toepassen van de kennis van grafen om na te denken over de stelling over Eulergrafen. Leerlingen worden in groepjes uitgedaagd om de stelling zelf op te stellen en vervolgens over een bewijs te redeneren.

Om de groepsgesprekken te kunnen analyseren wordt er per groepje van vier leerlingen geluidsopname gemaakt. Hiermee komen we zo dicht mogelijk bij het ongefilterde denkproces van de leerlingen te komen.

...leerlingen [zijn] bezig met het ontwikkelen van logische denkpatronen, en dus zal het denken dat zij in de klas tot uitdrukking brengen veel elementen bevatten die een logische analyse simpelweg als 'onlogisch' zou omschrijven, maar die niettemin belangrijk zijn voor de toekomstige ontwikkeling van hun denken. (Knipping 2008)

Na een korte herhaling van het Koningsbergen probleem worden de leerlingen, net als Euler, uitgedaagd om na te denken over een stelling omtrent Eulercyclen. De verwachting is dat de opdrachten van de afgelopen les de leerlingen genoeg intuïtie hebben gegeven om hierop te komen.

Zoals in *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976) willen we een dialoog op gang brengen om na te denken over het bewijs van de stelling. Dit gebeurt

voornamelijk in kleine groepjes. Om de drie tot vijf minuten is er een klassikale bespreken over wat er in de groepjes gedeeld is. Hierin kan de docent sturen of verduidelijking geven om de leerlingen verder te helpen. Tijdens de les kan de docent rondlopen om kritische vragen te stelling die tot *rebuttal* kan leiden.

5 Data collectie en analyse

Zoals Antonini (2019) maken we geluidsopnames van de lessen. Deze worden vervolgens getranscribeerd en geanalyseerd om de onderzoeksvragen te beantwoorden.

Tijdens de eerste lessen wordt het geluid klassikaal opgenomen. Deze opnames kunnen inzicht geven in de argumentatievaardigheden van de leerlingen in dialoog met de docent. Dit is vergelijkbaar met het idee dat omschreven is in *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976). In de tweede les worden de gesprekken in de groepjes opgenomen. Hiermee komen we dichterbij de ongefilterde argumentatie van de leerlingen. Bovendien geeft dit inzicht in hoe leerlingen kritisch inhaken op elkaars argumenten (*rebuttal*).

De volgende stap is het transcriberen van de verkregen opnames. Om deze in zijn geheel te transcriberen is een te grote opdracht voor de grootte van dit onderzoek. Er is gekozen om deze selectief te transcriberen. Dat wil zeggen dat we de relevante gesprekken filteren. Alleen de gefilterde gesprekken worden getranscribeerd en geanalyseerd. We coderen de argumenten aan de hand van het model van Toulmin. Het fragment wordt opgesplitst in de onderdelen van het model (*claim*, *grounds*, *warrant*, *backing* en *rebuttal*).

Naast de analyse van de argumentatie in de fragmenten wordt er gekeken naar de intuïtie achter de argumenten. We zoeken naar elementen in gesprekken die overeenkomen met de intuïtieve denkwijzen van Euler en Hierholzer.

6 Resultaten van analyse

Zoals omschreven in het vorige hoofdstuk hebben we het model van Toulmin gebruikt om de dialoog van de leerlingen te analyseren. In dit onderdeel presenteren we een vijftal fragmenten die geanalyseerd zijn. Telkens wordt eerst de getranscribeerde dialoog weergegeven. Daarna hoe we dit geplaatst hebben in de onderdelen van het model van Toulmin. Als laatste wordt gekeken naar de intuïtie achter de argumentatie. Hiermee schetsen we een beeld dat ons inzicht geeft hoe we de onderzoeksvragen kunnen beantwoorden.

De fragmenten zullen we nu één voor één afgaan.

6.1 Fragment 1

Het eerste fragment is afkomstig uit de eerste les, die als oriënterend kan worden beschouwd. Tijdens deze les maakten de leerlingen kennis met de grafentheorie aan de hand van het '4-kamer appartement'. Zoals beschreven in paragraaf 4.1.1 stelde de docent de vraag:

Is het mogelijk om een wandeling te vinden die precies één keer door alle deuren gaat en in dezelfde kamer begint en eindigt?

De docent presenteert de vraag als een stelling (de *claim*), met de bedoeling dat de leerlingen deze zouden onderbouwen met een redenatie (*warrant*) en eventueel met ondersteunende argumenten (*backing*).

De dialoog verliep als volgt (*de dikgedrukte delen zijn uitspraken van de docent*):

Mijn bewering is dat ... je niet precies één keer door alle deuren heen kan en op een andere plek kan eindigen [als dat je begonnen was].

...mag ik het bord gebruiken?... Elke ruimte heeft vier, of (uhm) een aantal, deuren. Dus je kunt er in en er weer uit. En als je er dan weer ingaat kun je er niet nog een keer in en uit.

{De leerling heeft aan de hand van een tekening geprobeerd hun uitleg te verduidelijken.}

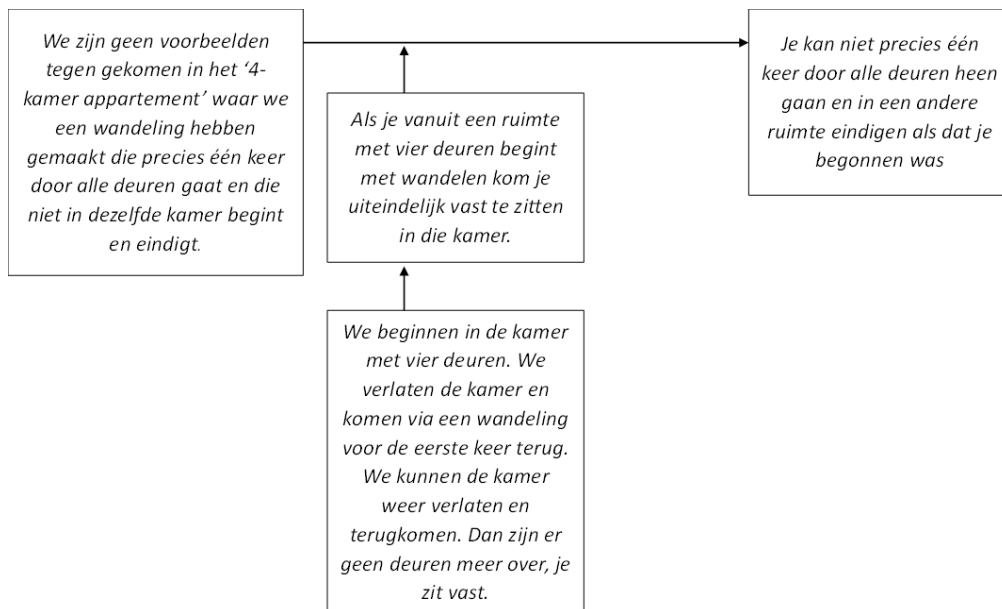
Dus wat leerling G zei is, als je in één ruimte begint, stel we beginnen in deze ruimte [met 4 deuren], en stel we verlaten de ruimte, hoeveel deuren zijn er nu nog over in deze ruimte?

drie deuren

Stel dat we nu terugkomen bij die eerste [kamer] dan kun je nog een keer weg. Maar als je dan nog een keer terugkomt kun je niet meer weg. Dus of je eindigt in de kamer of je komt er helemaal niet [nog een keer].

Model van Toulmin

Deze dialoog is als volgt in het model van Toulmin geplaatst:



Fragment 1

In dit voorbeeld maakt de docent de *claim*. Hij beweert dat het niet mogelijk is om precies één keer door alle deuren te gaan en in een andere kamer te eindigen dan waar je begonnen bent. Dit is de contrapositieve verklaring van hetgeen dat nodig is voor het bewijs, namelijk:

Een wandeling die precies één keer door alle deuren heen gaat, begint en eindigt in dezelfde kamer
 (dit volgt uit de logische verklaring $\neg(a \implies b) \implies (a \implies \neg b)$)

De leerlingen kregen de kans om in het '4-kamer appartement' wandelingen te tekenen, dit vergrootte hun intuïtie bij het bedenken van een *warrant* ter ondersteuning van de *claim*. Dit is de *grounds* waarop het argument is gebouwd.

De leerling redeneerde als volgt:

Elke ruimte heeft vier ... deuren. ... [uiteindelijk] kun je er niet nog een keer in en uit.

Deze uitspraak werd verduidelijkt met een tekening en uitleg tijdens zijn antwoord:

... je kunt er in en er weer uit. En als je er dan weer ingaat, kun je er niet nog een keer in en uit.

De docent vat het denkproces als volgt samen:

Stel dat we [na het verlaten van de eerste kamer] terugkomen bij die eerste [kamer], dan kun je nog een keer weg. Maar als je dan nog een keer terugkomt kun je niet meer weg.

De samenvatting vormt de *backing* voor het argument.

Aangezien het doel van wiskundig bewijs is om tot een waarheidsuitspraak te komen, is de *qualifier* vaak een impliciete zekerheid.

De vorm die deze dialoog volgt, is één die we in het onderwijs vaker tegenkomen. De docent schetst een probleem en de leerlingen geven daarop antwoord. Dit fragment komt hierdoor niet verder dan een dialoog tussen docent en leerling.

Intuïtie

In dit fragment draait de argumentatie om een concreet voorbeeld, een appartement met vier kamers. We zien dat de leerlingen voor dit voorbeeld een belangrijk inzicht van het bewijs van Hierholzer onder woorden proberen te brengen. *Een zo lang mogelijke wandeling begint en eindigt in dezelfde knoop.*

De nadruk bij het *formele* bewijs in 3.1.3 ligt op het idee dat als *een zo lang mogelijke wandeling* niet in het beginpunt eindigt we de wandeling kunnen verlengen. De leerling redeneert vanuit het feit dat het niet mogelijk is om een niet-gesloten wandeling te creëren en alsnog door alle deuren te gaan.

De redentie van de leerling sluit aan bij de claim van de docent. We zullen later duidelijker zien dat de claim niet sterk genoeg is om te concluderen dat een wandeling die precies één keer door alle deuren gaat, begint en eindigt op dezelfde plek.

Strikt gesproken heeft de leerling de *claim* voor dit voorbeeld nog niet volledig onderbouwd. De leerling heeft in zijn redentie niet uitgelegd wat er gebeurt als we in de ruimte met acht deuren beginnen. Dit had zijn bewering nog sterker gemaakt.

6.2 Fragment 2

Het tweede fragment komt ook uit de eerste les. Zoals het is omschreven in paragraaf 4.1.1 stelde de docent de vraag:

Stel dat we één willekeurige deur sluiten. Is het dan nog steeds mogelijk om een wandeling te vinden die precies één keer door alle deuren gaat en in dezelfde kamer begint en eindigt?

De volgorde van de les verliep anders dan aangegeven in 4.1.1. De leerlingen werkten aan '5-kamer appartement' voordat ze terugkeerde naar het '4-kamer appartement'. Mogelijk heeft dit bijgedragen aan het feit dat de leerlingen snel begrepen dat het mogelijk is om een wandeling te vinden die precies één keer door alle deuren gaat en in dezelfde kamer begint en eindigt. Echter vinden de leerlingen het lastig om duidelijk te maken waarom dit zo is. Dit is een bekend probleem op alle niveaus van wiskunde. Het kan eenvoudig lijken om te erkennen dat een bepaalde stelling waar is. Echter is het leveren van een bewijs dat aantoonst dat dit daadwerkelijk het geval is vaak een grote uitdaging.

De dialoog verliep als volgt:

Kijk wat er gebeurt als we één deur sluiten, je mag zelf kiezen welke. Kun je dan door alle deuren heenlopen en nog steeds in dezelfde kamer eindigen [als dat je begonnen bent]/?

Een aantal leerlingen roepen meteen: *nee, dat kan niet want dan hebben sommige kamers een oneven hoeveelheid deuren*

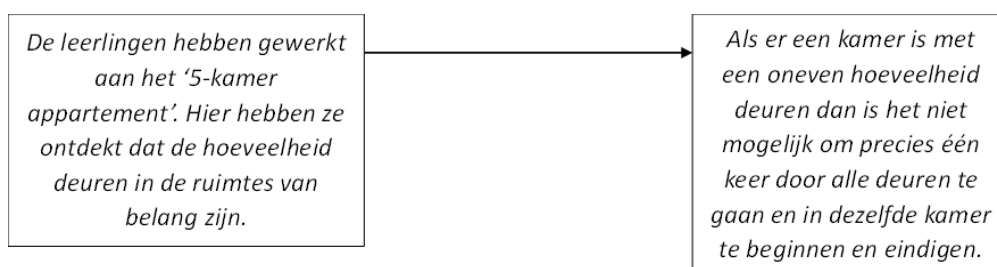
Is het mogelijk om een bewijs of redentie te bedenken waarom dit niet mogelijk zou zijn? Leerling J weet je iets?

(Een beetje, maar het is een beetje dom.) Het is eigenlijk gewoon, of je start in die kamer [met drie deuren] of je gaat erin. Maar altijd als je ... bijvoorbeeld als je start in die kamer dan ga je dus uit, maar als dan bijvoorbeeld uhm begonnen was in een andere kamer dan moet je er sowieso weer uit door die deur, maar dan kun je niet meer terug want je hebt jezelf eruit gehaald. En als je naar die ene kamer toegaat bijvoorbeeld, dan ga je gewoon zo [tekenen op het bord] via onder, maar dan kom je weer vast te zitten.

Model van Toulmin

In dit fragment wordt de *claim* geleidelijk gevormd. De docent begint met een vraag aan de klas, waarop de leerlingen reageren met een algemene verklaring die echter niet onderbouwd is. De leerlingen geven geen inzicht in waarom dit het geval zou zijn of waarop hun uitspraak gebaseerd is.

Dit onderdeel van de dialoog kan als volgt in het model van Toulmin worden geplaatst:



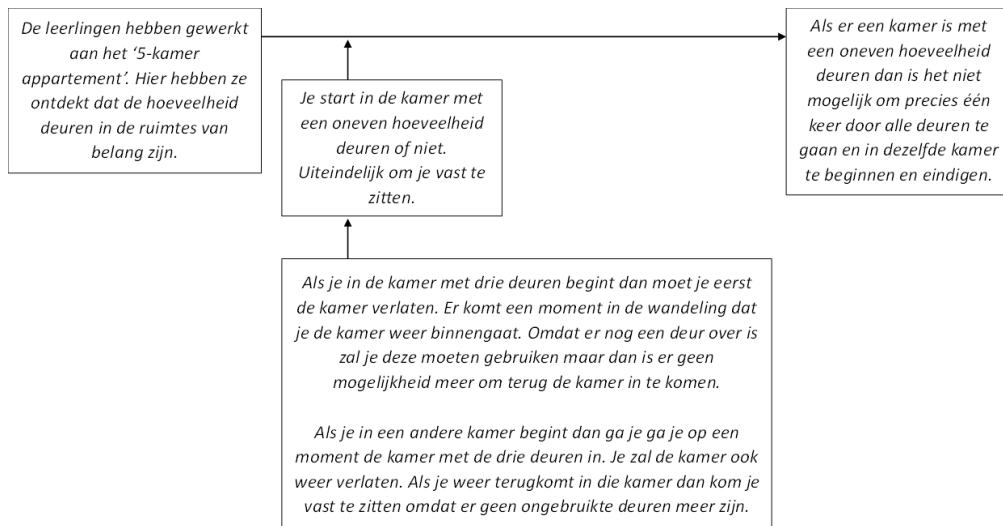
Fragment 2a

Vervolgens vraagt de docent aan een leerling voor een uitleg over de *claim* die de klas heeft gemaakt om de leerlingen kritisch te laten nadenken over hun uitspraak. De ondervraagde leerling probeert een *warrant* en nodige *backing* te geven voor de *claim*. Hij baseert zijn redenering op het '4-kamer appartement', wat echter beperkt is tot slechts één voorbeeld.

Vermoedelijk heeft de leerling ontdekt dat als je in de ruimte met een oneven aantal deuren start, je uiteindelijk in een situatie komt dat je die kamer niet meer

in kan. En als je in een kamer met een even aantal deuren start dan kom je in een situatie waar je in de kamer met een oneven aantal deuren vast komt te zitten. Dit probeert de leerling te formuleren.

Deze *warrant* en *backing* kunnen toegevoegd worden aan het model. Dit heeft het volgende resultaat:



Fragment 2b

Intuïtie

Weer hebben we een fragment waarin de dialoog draait om een concreet voorbeeld, deze keer een appartement met vijf kamers. Er worden twee verschillende situaties bekeken. De situatie waarbij je begint in een kamer met vier deuren (even) en de situatie dat je begint in de kamer met drie deuren (oneven).

In deze redentatie laat de leerling zien dat het aantal deuren in een ruimte ervoor kan zorgen dat het niet mogelijk is om een wandeling door alle deuren te vinden. We zien dit niet terug in de *formele* bewijzen van 3.1.3. De stelling over Eulercyclen zegt dat als er een graaf is waar alle knopen een even graad hebben dat het dan (en slechts dan) een Eulercykel bevat. Het argument van de leerlingen zegt dat als een knoop een oneven graad heeft het niet mogelijk is, maar het zegt niets over wanneer het wel mogelijk is.

De leerlingen maken belangrijke ontdekkingen, wat hun steeds meer inzicht geeft in Eulercyclen. Dit zijn belangrijke stappen van bewijzen.

6.3 Fragment 3

Het volgende fragment, afkomstig van de tweede lesdag, illustreert een interactie tussen docent en leerlingen tijdens de discussie over Eulercyclen. Aan het begin van de les herhaalt de docent de vraag waarom sommige situaties het vinden van een Eulercykel onmogelijk maken.

Een leerling maakt een initiële bewering:

Het is gewoon onmogelijk

Maar waarom?

Omdat er een oneven aantal deuren zijn

Zijn jullie het daarmee eens?

In één kamer. Het gaat om een even aantal deuren in één vierkante kamer

Model van Toulmin

In dit fragment zien we hoe leerlingen snel *claims* maken zonder een duidelijke rechtvaardiging. De beweringen worden tot drie keer toe verfijnd tijdens de discussie. Hoewel er geen uitgebreide argumentatie plaatsvindt, tonen de leerlingen wel kritisch denken door hun *claims* te analyseren en te vergelijken met eerdere bevindingen.

De eerste leerling beweert dat het vinden van een Eulercykel in sommige situaties onmogelijk is. Hoewel deze *claim* niet onjuist is, blijft het vaag en onbepaald. De docent vraagt om een meer gedetailleerde uitleg.

De volgende leerling verfijnt de *claim* door te zeggen dat het onmogelijk is vanwege het oneven aantal deuren. Hoewel dit waar is in bepaalde gevallen, mist deze bewering de nuance dat er uitzonderingen kunnen zijn, zoals twee niet direct verbonden kamers met een oneven aantal deuren.

Na verdere instructie van de docent om de *claim* kritisch te bekijken verfijnt een andere leerling het door te stellen dat het onmogelijk is vanwege het oneven aantal deuren in sommige kamers.

Deze uitspraak biedt een nauwkeurigere verklaring voor de *claim*. Echter zien we hetzelfde als in fragment 2. De leerlingen zien steeds duidelijker in waarom een Eulercykel niet mogelijk is in bepaalde situaties. Dit is een belangrijke stap in de richting van bewijzen wanneer een Eulercykel wél mogelijk is.

6.4 Fragment 4

Het fragment van de vierde opname toont een groep leerlingen die een stelling probeert te formuleren na het bestuderen van het 'Koningsbergen probleem'. De docent vraagt hen om na te denken over de vereisten voor een wandeling door Koningsbergen, waarbij ze precies één keer over alle bruggen lopen en op dezelfde plek beginnen en eindigen. De leerlingen proberen een algemene stelling te bedenken die breder toepasbaar is dan alleen op Koningsbergen. Zoals omschreven in 3.1.3 is dit vergelijkbaar met hoe Euler dit ook heeft gedaan.

De docent stelde de volgende vraag:

Euler wilde weten of het mogelijk is om een wandeling te maken door Koningsbergen, die aan bepaalde eisen voldoet. Hij wilde precies één keer over alle bruggen lopen en op dezelfde plek beginnen en eindigen. Ga allemaal na wat er

nodig is om dit wel te laten kloppen. Wat is de stelling die Euler zou hebben kunnen bedenken?

Dit lijkt heel erg op het voorbeeld uit de eerste les met het '4-kamer appartement'. Het verschil is dat ze nu een stelling moeten bedenken die algemeen toepasbaar is.

Een leerling oppert het volgende:

Het moment dat één enkel eiland een oneven aantal bruggen heeft, zal het onmogelijk zijn om alle eilanden te bezoeken en alle bruggen te nemen, aangezien je dan geen weg naar binnen hebt, nee nee, geen weg naar buiten hebt als je er uiteindelijk binnen bent gekomen ... We kunnen de stelling nemen: als twee eilanden een oneven aantal paden hebben is het onmogelijk om ergens te beginnen, alle bruggen te nemen en weer terug te komen. Maar kunnen we misschien wel een ontcrachting vinden voor deze stelling waarbij het zelfs bij één oneven aantal is en dat zou misschien kunnen als, uhm?

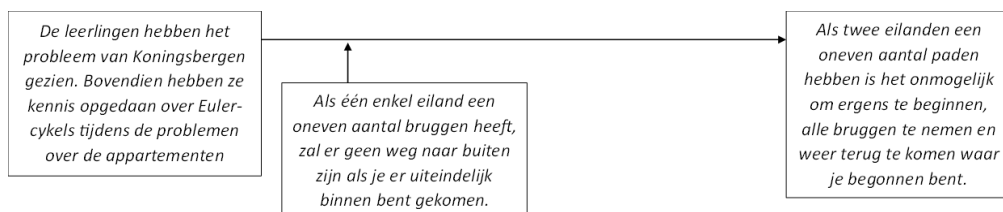
Model van Toulmin

De *claim* die de leerling maakt is dat:

Als twee eilanden een oneven aantal paden hebben is het onmogelijk om ergens te beginnen alle bruggen [precies één keer] te nemen en weer terug te komen.

De *warrant* is dat, wanneer een enkel eiland een oneven aantal bruggen heeft, het onmogelijk is om alle eilanden te bezoeken en alle bruggen te nemen, omdat als je uiteindelijk binnen bent er geen weg meer naar buiten is.

Dit zou als volgt in het model van Toulmin geplaatst kunnen worden:



Fragment 4

Intuïtie

We zien wederom dat de leerling zijn *claim* gericht heeft op de situatie dat Eulercykels niet mogelijk zijn. Maar deze keer heeft de leerling het argument al veel algemener weten op te stellen. Het argument is breder toepasbaar dan alleen op Koningsbergen. De specifieke terminologie van *grafen*, *knopen* en *kanten* ontbreekt nog.

Het veralgemeniseren van een argument is een belangrijke stap tijdens bewijzen. Na het ontdekken van een terugkerend verschijnsel in concrete voorbeelden moet de stap gemaakt worden om te ontdekken of het in het algemeen geldt.

We zien hier hoe de leerlingen de ontdekte stelling langzaam aan het aanscherpen zijn.

6.5 Fragment 5

Het laatste fragment is weer afkomstig van een groep leerlingen die de opdracht kreeg om na te denken over één kant van het bewijs voor de stelling over Eulercyclen. Dit fragment toont een verbetering in het vermogen van de leerlingen om algemene uitspraken te formuleren. De leerlingen proberen hun argumentatie zo algemeen mogelijk te maken, hoewel ze nog geen volledig ontwikkelde taal hebben waarmee ze kunnen redeneren zoals wiskundigen.

De docent gaf de initiële *claim*:

Een graaf die een Eulercykel bevat, heeft uitsluitend knopen die een even graad hebben.

De dialoog ging als volgt:

Als er een oneven aantal is dan kan het niet omdat je dan uiteindelijk in een ander punt blijft.

Stel je hebt een graaf met miljoen punten één punt heeft er, heeft drie wegen erin en alle andere vier. Dan kunnen we gewoon simpelweg beredeneren dat als je dat punt ... Stel we nemen aan, je hebt een graaf met een miljoen punten, hypothetisch niet belangrijk getal ... het kunnen er vier zijn, een miljoen, dertig of oneindig veel zijn, doet er niet toe. Het punt is: één van die punten heeft drie, de rest vier lijnen er naartoe. Dan is de uh, bij dat punt. Stel we beginnen uit dat punt, dan moet je eerst uit dat punt, dan kom je uiteindelijk weer terug bij dat punt en dan ga je er uiteindelijk weer uit. Dus dan kun je niet terugkomen bij dat punt omdat je alle andere lijnen al hebt gebruikt zal ik maar zeggen. Maar je kunt ook niet daarbuiten beginnen, want dan ga je van buiten naar binnen, van binnen naar buiten en wederom van buiten naar binnen en dan loopt het weer spaak omdat je niet naar buiten kan. Dus in beide gevallen is het onmogelijk aangezien als je binnen begint eindig je buiten en als je van buiten komt eindig je binnen dus is er geen enkele mogelijkheid dit te volbrengen. Bewijs.

Model van Toulmin

We zien de belangrijke onderdelen van het argumentatiemodel terugkomen. De leerling gaf een *warrant* voor de gepresenteerde *claim*. Vervolgens werd dit uitgewerkt in twee verschillende situaties. De situatie dat we beginnen in de

knoop met een oneven graad en de situatie dat we beginnen in een knoop met een even graad.

Het argument van de leerling zou als volgt in het model van Toulmin kunnen worden geplaatst:



Fragment 5

Intuïtie

In dit fragment zien we de leerling het argument nog verder veralgemeniseren. De leerling gebruikt al meer de taal van de grafentheorie (*graaf*, *punt*, *graad*, *lijn*). We zien ook hoe de leerling worstelt om aan te geven dat het niet uitmaakt hoeveel punten er in de graaf zitten. Deze generalisaties leiden tot een verbeterd argument vergeleken met de vorige fragmenten.

We zien geen groei richting het formelere bewijs van Euler en/of Hierholzer, maar wel dat de leerlingen beter begrijpen wat belangrijk is voor een wiskundig bewijs.

7 Conclusie/Discussie

7.1 Bevindingen

Tijdens het analyseren van de geluidsopnames zijn we te weten gekomen dat leerlingen kunnen bewijzen. We hebben gezien hoe leerlingen voor een concreet voorbeeld een stelling hebben gevonden. Over de onderbouwing hebben ze met elkaar geredeneerd. Herhaaldelijk is het bewijs aangescherpt door het los te koppelen van het concrete voorbeeld met behulp van formelere taal.

We kunnen bevestigen dat er een groot verschil is tussen de activiteit bewijzen en het opstellen van een bewijs. Het opstellen van een bewijs is een formele activiteit die precisie vereist. Het publiek is in principe iedereen, waardoor je geen ruimte kan laten voor onduidelijkheden. Tijdens het bewijzen of het opdoen van intuïtie voor het formeel bewijzen is het publiek beperkt tot de mensen die meedoen in de dialoog. Het is dus minder van belang om precies te zijn, omdat er nog ruimte is om vragen te stellen en de argumentatie aan te scherpen.

Met behulp van het model van Toulmin kunnen we concluderen dat leerlingen het nog lastig vinden om kritisch te zijn op uitspraken van anderen. Er was weinig *rebuttal* wat het verfijningsproces van de stelling efficiënter had kunnen laten verlopen. In *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976) was dit een essentieel onderdeel om de gemaakte *claims* aan te scherpen en te funderen.

Bovendien kunnen we stellen dat taal een belangrijk onderdeel is van bewijzen. Vaak worstelden leerlingen om hun argumenten algemeen te maken. Wiskundige taal maakt dit makkelijker. Door het te hebben over een knoop in plaats van een kamer wordt het argument losgetrokken van het voorbeeld. Er is een groot verschil tussen een graaf met een miljoen punten en een graaf met een arbitraire hoeveelheid punten. Het onder woorden brengen hiervan kan lastig zijn, terwijl het besef ervan er wel aanwezig is.

7.2 Conclusie

De bevindingen van dit onderzoek bieden inzicht in het redeneergedrag van derde klas gymnasium leerlingen tijdens het bewijzen, evenals hun vermogen om de stelling over Eulergrafen te begrijpen en toe te passen. De onderzoeksvragen die we wilden beantwoorden met dit onderzoek zijn:

Hoe redeneren leerlingen tijdens het bewijzen?

Hoe is dit te vergelijken met het bewijs van de stelling over Eulergrafen?

Onze analyse onthulde dat leerlingen kunnen bewijzen. Ze hebben in een korte tijd (twee lessen) laten zien dat ze van een concreet voorbeeld een algemeen geldend argument kunnen formuleren. De leerlingen zijn aan de slag gegaan met een opgave over een 4-kamer appartement. Hiermee hebben ze ontdekt dat de hoeveelheid deuren in een kamer van belang is om te concluderen of een wandeling die precies één keer door alle deuren gaat mogelijk is. In de tweede les hebben ze dit uitgebreid naar een stelling die luidt:

Stel ... je hebt een graaf met een ... hypothetisch niet belangrijk [hoeveelheid punten]. Als [al] één van die punten drie lijnen er naartoe heeft dan is [een Eulercykel niet] te volbrengen.

We kunnen zien hoe de leerlingen zijn gegroeid in hun begrip van veralgemeniseren. Dit kunnen we zien in de terminologie; in plaats van kamers en deuren, spreken ze nu over punten en lijnen. Verder zien we hoe ze de stelling hebben weten los te halen van het concrete voorbeeld. Van een graaf met vijf punten zijn ze naar een graaf met een *hypothetisch niet belangrijk* hoeveelheid punten gegaan.

Maar er is nog ruimte om te groeien. Een belangrijk aspect van bewijzen is een kritische houding. Niet alleen richting uitspraken die je zelf maakt, maar ook richting de uitspraken van de andere leerlingen. Kijkend naar het model van Toulmin zien we dit terug in de afwezigheid van *rebuttal*.

In de lessen zijn de leerlingen begonnen met het idee dat *een zo lang mogelijke wandeling* moet beginnen en eindigen in hetzelfde punt. Dit was ook een belangrijk punt in de bewijzen die we hebben gezien in onderdeel 3.1.3. Hierna hebben de leerlingen vooral gekeken naar de situatie waarbij een Eulergraaf niet mogelijk is. Het is onduidelijk of Hierholzer of Euler hier ook over nagedacht heeft voor het opstellen van een bewijs.

Als we de leerlingen meer tijd zouden geven, hadden ze meer ruimte gehad om het bewijs verder uit te werken. Hierdoor zouden we een completer beeld krijgen of de intuïtieve denkstappen overeenkomen met die van Euler en/of Hierholzer.

We hebben in dit onderzoek laten zien dat intuïtieve argumentatie nodig is om een *claim* aan te scherpen. Dit is een belangrijk onderdeel van bewijzen. Door de geluidsopnames te analyseren hebben we ontdekt dat leerlingen bewijsvaardigheden kunnen laten zien zonder dat ze gebruik maken van formele taal. Dit is in lijn met wat Antonini (2019) heeft gevonden in zijn kwalitatieve onderzoek naar bewijsvoering.

Het beheersen van de formele wiskundige taal was niet nodig om aan te tonen dat leerlingen bewijsvaardigheden bezitten. Echter zagen we dat het wel een belemmering is in het veralgemeniseren van een *claim*. De afwezigheid van formele taal maakte het moeilijker om tot een onweerlegbaar bewijs te komen. Dit sluit aan bij de bevindingen van Fischbein (1987).

Ten slotte kunnen we stellen dat bewijsvoering in het voorgezet onderwijs een grotere rol mag hebben. Naast het onderzoek van Knipping (2008) kan er gekeken worden naar hoe argumentatie een rol speelt in het onderwijzen van bewijsvoering. Dit kan de leerlingen een completer beeld geven van wat bewijzen inhoudt. Dit komt overeen met de conclusie van Oosterom (2018).

7.3 Reflectie

In dit onderdeel zal er kritisch gekeken worden naar de manier waarop het onderzoek is uitgevoerd en de eventuele implicaties daarvan. Dit kan meegenomen worden in vervolgonderzoek of bij het toepassen van bevindingen. Eerst zal

gekeken worden naar de manier waarop het onderzoek is uitgevoerd en daarna naar het ontwerp van de lessenreeks.

7.3.1 Methode

In dit onderdeel zullen we stilstaan bij twee onderwerpen; de doelgroep en de tak van de wiskunde die gebruikt is voor dit onderzoek.

Doelgroep

Dit onderzoek richtte zich op derde klas gymnasiumleerlingen die gebruikmaken van de *Wageningse Methode*. De keuze voor jaarlaag, het niveau en de methode hebben gevolgen op de resultaten.

De methode die in het onderwijs gebruikt wordt, kan invloed hebben op de ontwikkeling van de leerling. Zo legt de *Wageningse Methode* de nadruk op het zelf ontdekken van de theorie. Dit heeft als gevolg dat deze leerlingen weten wat het betekent om op zoek te gaan naar een stelling. Hierdoor vertoont deze groep leerlingen mogelijk betere redeneervaardigheden dan leerlingen die een andere methode gewend zijn.

Verder kan vanuit dit onderzoek moeilijk een conclusie getrokken worden over mavo- en havoleerlingen. Er zijn mogelijk zelfs verschillen zijn tussen atheneum en gymnasiumleerlingen. Hoewel de resultaten tussen vwo-leerlingen waarschijnlijk een stuk meer overeenkomen dan de andere niveaus.

Dit onderzoek was gericht op leerlingen in de derde klas. Hieruit kunnen we de conclusie trekken dat leerlingen in de bovenbouw van het gymnasium minimaal evenveel redeneervaardigheden bezitten als onze doelgroep. Als leerlingen vaker uitgedaagd worden om kritisch naar een stelling te kijken, zullen hun redeneervaardigheden beter worden. Over de rest van de onderbouw is moeilijk een conclusie te trekken.

Grafentheorie

Grafentheorie is gekozen als middel om redeneervaardigheden in kaart te brengen. Zoals beschreven zijn hier voor- en nadelen te benoemen.

Een voordeel is dat grafentheorie een toegankelijke tak van de wiskunde is, waarvoor weinig voorkennis nodig is om de basis te begrijpen. Dit biedt veel mogelijkheden voor leerlingen van de middelbare school om hiermee te redeneren. Bovendien is het een onderwerp dat niet standaard in het middelbare schoolcurriculum zit, waardoor leerlingen worden uitgedaagd om redeneervaardigheden toe te passen zonder terug te vallen op eerdere kennis.

Een nadeel van het gebruik van grafentheorie is echter dat leerlingen weinig tot geen ervaring hebben met grafen, waardoor het moeilijk is om hierover te discussiëren. Dit maakt het lastig voor leerlingen om concrete voorbeelden los te laten en uitspraken te doen over grafen in het algemeen. Onderwerpen zoals goniometrie, algebra of meetkunde sluiten beter aan bij de kennis van leerlingen. Deze onderwerpen kunnen mogelijk voor betere resultaten zorgen.

7.3.2 Ontwerp

Verder willen we stilstaan bij het ontwerp. Voor dit onderzoek is er gekozen voor een tweetal lessen die gericht waren op het ontdekken van Eulergrafen. De keuzes zullen in het volgende blok worden uitgewerkt.

Lesplan

De opzet van de les kan verder worden geoptimaliseerd. Een belangrijk punt van kritiek is de duur van de module. Voor de grootte van dit onderzoek was het niet haalbaar om een langer lesplan te ontwerpen en uit te voeren. Voor de leerlingen zou het nuttig zijn geweest om meer tijd te krijgen om vertrouwd te raken met grafen en om de terminologie van grafentheorie te leren.

Een langer lesplan, waarin leerlingen beginnen met de basis van grafen, zou diepere discussies kunnen bevorderen. Door leerlingen kennis te laten maken met formele definities, zou de terminologie waarmee ze redeneren breder zijn geweest. Een andere aanpak had mogelijk betere data kunnen opleveren met een duidelijker beeld van de redeneervaardigheden van de leerlingen.

Een ander punt van aandacht was dat leerlingen bleven hangen in een *claim* die niet direct gelinkt was aan de stelling over Eulergrafen. Dit zorgt ervoor dat we weinig inzicht gekregen hebben of de intuïtieve stappen van de leerlingen overeenkomen met die van Euler en Hierholzer. De *claim* waar de leerlingen in bleven hangen was het volgende:

Als een graaf een knoop heeft waarvan de graad oneven is dan is een Eulercykel niet mogelijk.

Dit suggereert dat de stelling niet goed is gepresenteerd, of dat deze te ingewikkeld was. Betere begeleiding en alertheid van de docent had mogelijk kunnen leiden tot breder inzicht in de intuïtie die nodig is om de stelling te bewijzen.

Een ander struikelblok was de groepsgrootte. Een klas met vijftientig tot dertig leerlingen die allemaal proberen te discussiëren over een stelling zorgt voor een drukke les. Een kleinere groepsgrootte zou voor meer concentratie kunnen zorgen en de les soepeler laten verlopen.

7.4 Praktische implicaties

De NVvW (*Wiskunde in het VO* 2019) benadrukt het belang van bewijzen in het voortgezet onderwijs. Dit onderzoek toont aan dat middelbare scholieren genoeg bewijsvaardigheden vertonen om hier dieper op in te gaan. Het onderwijzen van bewijzen zou zich moeten richten op argumentatievaardigheden. Naast de praktische implicaties van de wiskunde is het belangrijk om de leerlingen te laten zien waarom wiskunde klopt.

Leerlingen moeten vaker opdrachten maken waarin ze een stelling formuleren of onderbouwen. Om van een concreet voorbeeld naar een algemene oplossing te werken is waar de wiskunde om draait. Hier zou meer nadruk op moeten komen.

Deze opdracht ligt voor een deel bij docenten. Docenten kunnen ruimte maken om leerlingen te laten discussiëren over een stelling. Hierdoor worden ze geactiveerd om te redeneren. Hetzelfde geldt voor de schrijvers van de lesmethode. Vind manieren om de vragen zo te formuleren dat de leerlingen theoriën en stellingen actief ontdekken.

7.5 Vervolgonderzoek

Alleen al uit de reflectie kunnen we stellen dat vervolgonderzoek nodig is om een completer beeld te vormen over de bewijsvaardigheden van leerlingen op het voortgezet onderwijs. Een aantal suggesties volgen hieronder.

Vergelijkend onderzoek zou zich kunnen richten op de leeftijd, het niveau en de onderwijsmethode. Hierdoor zou er een completer beeld geschets kunnen worden welke zaken invloed hebben op de redeneervaardigheden van leerlingen. Dit zou concretere implicaties kunnen hebben voor de manier waarop bewijzen onderwezen wordt.

Verder wordt er in de derde klas een keuze gemaakt tussen wiskunde A en wiskunde B. Onderzoek zou zich ook kunnen richten op de verschillen tussen deze groepen in de loop van hun schoolcarrière. Er kan gekeken worden of leerlingen al een verschil vertonen voordat een keuze gemaakt wordt. Bovendien kan er gekeken worden of de leerlingen die wiskunde B kiezen een completer beeld ontwikkelen van bewijzen.

Ten slotte zou een dialoog met leerlingen beter tot zijn recht komen in kleinere groepen. Een onderzoek als deze zou herhaald kunnen worden voor een kleinere groep van bijvoorbeeld zes tot twaalf leerlingen. Dit kan als gevolg hebben dat de dialoog meer in lijn is met dat van *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976). Bovendien zou dit de docent helpen om de gesprekken te sturen en zelf meer sturing geven door middel van *rebuttal*.

Voorbehoud

Dit project is geschreven in LaTeX. Het programma wat ik hiervoor gebruik heeft geen ingebouwde spellingscontrole. Aan het begin van het project heb ik ChatGPT gebruikt om deze controle uit te voeren (zie het voorbeeld hieronder). Na verloop van tijd kwam ik erachter dat dit niet beste en efficiënte manier was om dit te doen. Later heb ik een browserextensie gevonden die voor LaTeX werkt en deze gebruikt.

Voorbeeld

Prompt:

Zou je het volgende stuk tekst kunnen corrigeren op spelling en grammatica:

Als er een ruimte is met een oneven aantal deuren, dan is het niet mogelijk om pad te vinden **die** door alle deuren gaat en in dezelfde ruimte begint en eindigt.

Antwoord:

*Als er een ruimte is met een oneven aantal deuren, dan is het niet mogelijk om een pad te vinden **dat** door alle deuren gaat en in dezelfde ruimte begint en eindigt.*

Literatuur

- Antonini, Samuele (June 2019). “Intuitive acceptance of proof by contradiction”. In: *ZDM* 51. DOI: 10.1007/s11858-019-01066-4.
- Ayalon, Michal et al. (2022). “Relating students’ emotions during argumentative discourse to their learning of real-life functional situations”. English. In: *Educational Studies in Mathematics* 110. Publisher Copyright: © 2021, The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature B.V., pp. 23–48. ISSN: 0013-1954. DOI: 10.1007/s10649-021-10121-5.
- Biggs, Norman, Lloyd, and Robin J. Wilson (Feb. 1986). *Graph theory, 1736-1936*. Clarendon Press. ISBN: 0198539169.
- Blanco, Rocío and Melody García-Moya (2021). “Graph Theory for Primary School Students with High Skills in Mathematics”. In: *Mathematics* 9.13. ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math9131567. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/13/1567>.
- Blanton, Maria et al. (Apr. 2022). “Progressions in young learners’ understandings of parity arguments”. In: *Mathematical Thinking and Learning* 26, pp. 1–32. DOI: 10.1080/10986065.2022.2053775.
- Brown, Stacy Ann (2018). “Are indirect proofs less convincing? A study of students’ comparative assessments”. In: *The Journal of Mathematical Behavior* 49, pp. 1–23. ISSN: 0732-3123. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.12.010>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312316302000>.
- College van Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo* (2015). <https://www.cvte.nl/onze-toetsen-en-examens/centrale-examens-vo>.
- Ferrarello, Daniela and maria Flavia Mammana (Jan. 2018). “Graph Theory in Primary, Middle, and High School”. In: pp. 183–200. ISBN: 978-3-319-70307-7. DOI: 10.1007/978-3-319-70308-4_12.
- Fischbein, Efraim (Oct. 1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, pp. 15–27. ISBN: 978-90-277-2506-6.
- Hanna, Gila (Dec. 2000). “Proof, Explanation and Exploration: An Overview”. In: *Educational Studies in Mathematics* 44, pp. 5–23. DOI: 10.1023/A:1012737223465.
- Hilbert D. en Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. J. Springer. URL: <https://books.google.nl/books?id=z3rXxwEACAAJ>.
- Knipping, Christine (Aug. 2008). “A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes”. In: *ZDM* 40, pp. 427–441. DOI: 10.1007/s11858-008-0095-y.

- Knuth, E. et al. (Aug. 2020). “Teachers’ Views about the Role of Examples in Proving-related Activities”. In: *Journal of Educational Research in Mathematics* 30, pp. 115–134. DOI: 10.29275/jerm.2020.08.sp.1.115.
- Knuth, Eric et al. (2019). “The role and use of examples in learning to prove”. In: *The Journal of Mathematical Behavior* 53, pp. 256–262. ISSN: 0732-3123. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312317300226>.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge Philosophy Classics. Cambridge University Press. ISBN: 9780521290388. URL: <https://books.google.nl/books?id=1n6SFdXC0BQC>.
- Oosterom, K. (Mar. 2018). “Leren redeneren en bewijzen binnen het nieuwe examenprogramma voor vwo wiskunde B: een kwalitatief onderzoek naar de mogelijkheden om te leren redeneren en bewijzen in de meetkunde bij het vak wiskunde B in klas 5 vwo na de curriculumwijziging van 2015”. In:
- Rav, Yehuda (1999). “Why Do We Prove Theorems?” In: *Philosophia Mathematica* 7.1, pp. 5–41. DOI: 10.1093/philmat/7.1.5.
- Selden, Annie (2012). “Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level”. In: *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*. Ed. by Gila Hanna and Michael de Villiers. Dordrecht: Springer Netherlands, pp. 391–420. ISBN: 978-94-007-2129-6. DOI: 10.1007/978-94-007-2129-6_17. URL: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_17.
- Stylianides, Andreas J. (Mar. 2014). “Impacting positively on students’ mathematical problem solving beliefs: An instructional intervention of short duration”. In: *The Journal of Mathematical Behavior* 33, pp. 8–29. DOI: 10.1016/j.jmathb.2013.08.005.
- (2007). “Proof and Proving in School Mathematics”. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 38.3, pp. 289–321. ISSN: 00218251, 19452306. URL: <http://www.jstor.org/stable/30034869> (visited on 04/17/2024).
- Stylianides, G et al. (2023). “Proof and proving in school and mathematics education research: a systematic review”. In: *ZDM - Mathematics Education* 56.1, pp. 47–59.
- Stylianides, G. et al. (Sept. 2017). “Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward”. In: pp. 237–266. ISBN: 978-0-87353-711-7.
- Thurston, William P. (1994). “On Proof and Progress in Mathematics”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 30, pp. 161–177. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16776751>.
- Toulmin, Stephen E. (1958). *The Uses of Argument*. 2nd ed. Cambridge University Press.

- Tye G. Campbell, Shande King en Jeremy Zelkowski (2021). “Comparing middle grade students’ oral and written arguments”. In: *Research in Mathematics Education* 23.1, pp. 21–38. DOI: 10.1080/14794802.2020.1722960. URL: <https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1722960>.
- Villiers, Michael and Gila Hanna (Feb. 2012). “Aspects of Proof in Mathematics Education”. In: pp. 13–22. ISBN: 978-94-007-2128-9. DOI: 10.1007/978-94-007-2129-6_1.
- Wageningse Methode 1H/V, 2V en 3V* (2015). <https://wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/>.
- Wiskunde in het VO* (2019). Nederlands Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en Platform Wiskunde Leraren (PWL) geschreven visie op wiskundeonderwijs.