

RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN

BACHELOR SCRIPTIE

RIPS
Rechtlijnige Ingebedde Planaire Subgrafen

Auteur:
Margot VAN HOEK

Begeleider:
Wieb BOSMA

2^e lezer:
Maarten SOLLEVELD

Ingeleverd aan de:
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
voor de opleiding:
Wiskunde

30 januari 2017



Radboud Universiteit Nijmegen

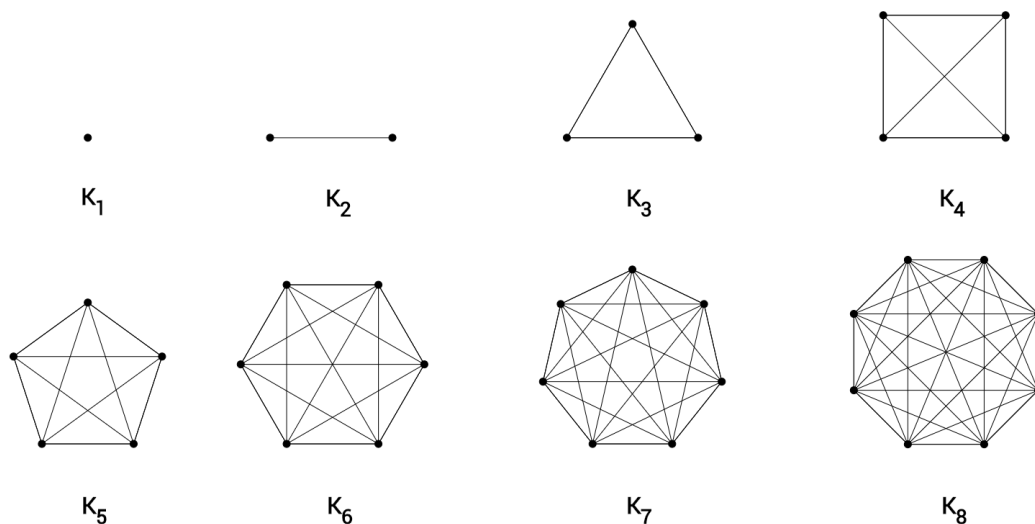
VOORWOORD

In deze scriptie wordt gekeken naar de 'planairheid' van een graaf. In de inleiding staan een aantal basisbegrippen uit de grafentheorie als voorkennis genoemd. Daarna wordt in het hoofdstuk 'Planaire grafen' meer inzicht gegeven in wat een planaire graaf is en hoe die zich gedraagt. Belangrijk daarin is de laatste stelling die een 'dan en slechts dan als'-relatie geeft tussen het planair zijn en de subgrafen van een graaf.

Na deze hoofdstukken worden in het hoofdstuk 'Snijgetal' en 'Dikte' twee begrippen besproken die juist kijken naar hoe 'niet-planair' een graaf is. de vraag is: wat kunnen we nog zeggen over een graaf die niet planair is?.

Als laatste bespreek ik de RIPS: de Rechthoekige Ingebedde Planaire Subgraaf. In het bijzonder bekijk ik de RIPSen van volledige grafen (zie figuur 1) en bespreek ik waarom de K_8 hierin bijzonder is.

Tijdens mijn scriptie heb ik ontelbaar veel contacturen gehad met mijn begeleider Wieb Bosma. Hij gaf me de ruimte om van onderwerp te veranderen als ik iets tegen kwam wat ik wilde onderzoeken en liet me daar zelf induiken. Ook gaf hij me richting als ik even niet meer wist welke kant ik op moest. Door hem heb ik een scriptie kunnen maken die me gedurende het hele proces echt geboeid heeft. Hier wil ik hem graag voor bedanken.



FIGUUR 1: De volledige grafen K_1 tot en met K_8

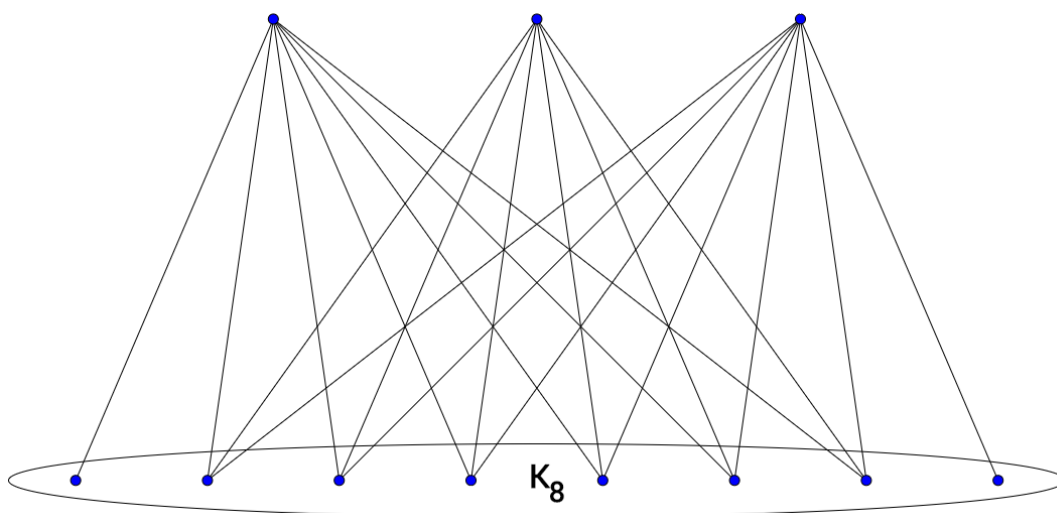
Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Planaire grafen	3
3	Snijgetal $v(G)$	9
3.1	Rechtlijnig snijgetal $\bar{v}(G)$	15
4	Dikte $\theta(G)$	17
4.1	Catlin's grafen $C_n[K_r]$	17
4.2	Rechtlijnige dikte $\bar{\theta}(G)$	19
4.3	Ingebedde dikte $\hat{\theta}(G)$	22
5	RIPS (<i>Rechtlijnige Ingebedde Planaire Subgrafen</i>)	25
5.1	Constructie RIPSen K_8	27
6	Conclusie	31
	Definities	32
	Stellingen	33
	Referenties	34

Hoofdstuk 1

Inleiding

Deze scriptie zou eigenlijk over maan/aarde grafen gaan. Als je een landkaart wilt kleuren zonder buurlanden dezelfde kleur te geven, kan dit met vier kleuren. Maar wat nu als we de maan koloniseren en die koloniën dezelfde kleur willen geven als de landen waar ze een kolonie van zijn? Als we ook in de maankaart geen buurlanden met gelijke kleuren willen, wordt het aantal kleuren dat je nodig hebt groter. Toen ik me over dit onderwerp ging inlezen, kwam ik de volgende maan/aarde graaf tegen:



FIGUUR 1.1: Maan/aarde graaf

Het werd aan de lezer overgelaten om de originele landkaart en de koloniënkaart te vinden. Omdat het plaatje helemaal aan het begin van het artikel stond, kon ik mij niet voorstellen dat dit lastig was. Niets was minder waar. De K_8 had ik in redelijk korte tijd verdeeld in twee planaire grafen, maar de overige 20 lijnen waren lastiger te plaatsen. Daardoor ontstond mijn eerste vraag: Hoe zie je of een graaf in twee planaire grafen onder te verdelen is? Uit deze vraag is de rest van mijn scriptie ontstaan.

Ik zal eerst een aantal definities geven. We beginnen bij het begin: een graaf.

Definitie 1.1 (Graaf). Een *graaf* G is een paar, bestaande uit een eindige (niet-lege) verzameling punten V en een verzameling (richtingloze) lijnen $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$.

Notatie: $G = (V, E)$ of $G = (V(G), E(G))$

Uit definitie 1.1 volgt dat er niet meerdere lijnen tussen twee punten kunnen bestaan. Daarnaast kan er geen lijn bestaan tussen een punt en zichzelf. In andere

woorden: er zijn geen lussen. Een graaf bestaat dus uit punten en lijnen. Het aantal lijnen dat aan een punt vast zit, kunnen we beschrijven met de graad:

Definitie 1.2 ((Maximale) graad). Elk punt in een graaf G heeft een *graad*. Dit is het aantal lijnen waar dat punt deel van uitmaakt. De *maximale graad* van een graaf is het maximum van de graden van alle punten.

Elke lijn loopt tussen twee punten. In een punt is de graad het aantal lijnen waar dat punt deel van uitmaakt, maar elke lijn heeft twee eindpunten. Hierdoor wordt de som van alle graden in een graaf precies $2 \cdot |E(G)|$.

Als we naar een hele graaf kunnen kijken, willen we ook naar een gedeelte van die graaf kijken.

Definitie 1.3 (Subgraaf). Een *subgraaf* G' van G is een graaf (V', E') zodanig dat $V' \subseteq V$ en $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$

Van subgrafen gaan we naar meerdere grafen tegelijkertijd. Sommige grafen lijken zo op elkaar, dat we ze een familie noemen. Een voorbeeld van een familie grafen zijn de volledige grafen.

Definitie 1.4 (Volledige graaf). Een *volledige graaf* (op n punten) is een graaf G met $|V| = n$ en $E = \{uv | u, v \in V, u \neq v\}$. In andere woorden: alle punten zijn met elkaar verbonden.

Notatie: De volledige graaf op n punten noteren we als K_n

Merk op: als K_n nu n punten en m lijnen heeft, geldt dat $m = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. De volgende definities horen bij elkaar. Ze geven een idee over hoe de structuur van onze graaf is.

Definitie 1.5 (Wandeling/Circuit/Cykel). In een graaf G is een *wandeling* van punt a naar punt b een rij, door lijnen verbonden, punten waarvan a het eerste en b het laatste punt is. Een *circuit* is een wandeling waarin het beginpunt gelijk is aan het eindpunt ($a = b$). Een *cykel* is een circuit waarin geen enkel punt twee keer voorkomt, behalve het begin/eindpunt.

Definitie 1.6 (Samenhangend). Een graaf G is *samenhangend* als tussen elke twee punten een wandeling bestaat.

Definitie 1.7 (Bos/Boom). Een graaf G heet een *bos* als het geen circuits heeft. Een *boom* is een samenhangend bos.

Vanuit hier gaan we door naar onze eerste stelling. Dit is een korte stelling met een makkelijk bewijs, maar toch zal hij later goed van pas komen bij een moeilijker bewijs.

Stelling 1.8 (Boom). Voor een boom G met n punten en m lijnen geldt $n = m + 1$

Bewijs. Dit bewijzen we met behulp van inductie naar n .

$n = 1$: Als G bestaat uit een punt, kunnen daar geen lijnen uit lopen, dus $m = 0$.

$n \rightarrow n + 1$: Stel G is een boom met n punten en m' lijnen. Als hier een punt aan toe wordt gevoegd, kan deze slechts aan 1 ander punt verbonden worden, omdat er anders een cykel ontstaat. Dat betekent dat er het aantal lijnen $m = m' + 1$ wordt. Vanwege de inductie hypothese geldt $n = m' + 1$ dus $n + 1 = m' + 1 + 1 = m + 1$. Met inductie volgt dat voor alle G een boom geldt dat $n = m + 1$. $\square$

Hoofdstuk 2

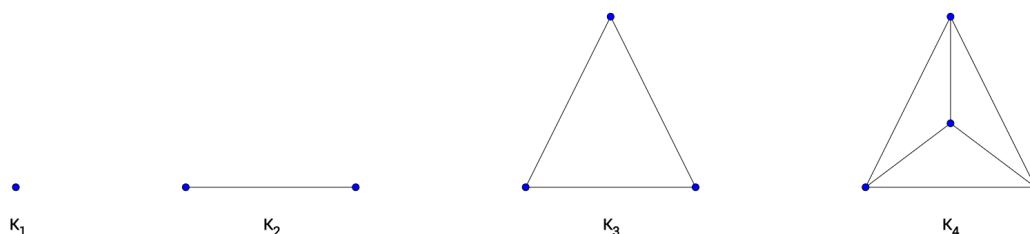
Planaire grafen

Grafen zijn handig om een probleem wiskundig te benaderen. Zo is er bijvoorbeeld het vier-kleurenprobleem, waar ik in de inleiding al wat over verteld heb. Stel je wilt een landkaart zo kleuren dat buurlanden nooit dezelfde kleur hebben. Dit probleem kun je benaderen door elk land te representeren als punt en elke twee punten te verbinden waarvan de landen aan elkaar grenzen. Als je er even over nadenkt, kun je inzien dat deze lijnen elkaar nooit hoeven te snijden.

Definitie 2.1 (Planaire graaf/representatie). Een graaf G heet *planair* als het mogelijk is deze graaf in het platte vlak te tekenen zonder dat er lijnen snijden. Zo'n tekening heet een *planaire representatie*.

In het algemeen heet de tekening van een graaf G een *representatie van G* .

We weten dat de volledige grafen K_1 tot en met K_4 planair zijn. Dit kunnen we ook tekenen:



FIGUUR 2.1: Representaties van K_1 t/m K_4

Een graaf kan echter volledig gedefinieerd worden door zijn punten en lijnen, zonder daadwerkelijk een representatie te maken. Als een graaf planair getekend is, kunnen we dat meteen zien. Maar wat als je geen planaire tekening hebt? Hoe weet je dan of een graaf planair is? Bij grote grafen is het lastig om meteen in te zien of deze planair is of niet. Stellingen kunnen dan meer inzicht bieden over wanneer een graaf planair is, zonder dat je een representatie nodig hebt.

Definitie 2.2 (Gebied). Als een graaf planair is, heeft hij een planaire representatie. Een *gebied* is dan een aaneengesloten deel van het vlak dat ingesloten wordt door een verzameling lijnen in deze representatie. In het bijzonder heet het gebied dat volledig buiten de graaf ligt, het *oneindige gebied*.

Merk op dat een gebied alleen gedefinieerd is voor planaire representaties van grafen. Als een graaf niet planair is, kun je ook niet spreken over zijn gebieden.

Stelling 2.3 (Eulerstelling). Laat G een samenhangende, planaire graaf zijn met n punten, m lijnen en r gebieden (inclusief het oneindige gebied). Dan geldt:

$$n - m + r = 2. \quad (2.1)$$

Bewijs. [12] Dit bewijzen we met behulp van inductie naar m .

$m = 0$: Dan geldt $G = K_1$, want de graaf moet samenhangend zijn. Dat betekent dat $n = 1$ en $r = 1$, dus $n - m + r = 1 - 0 + 1 = 2$.

$m - 1 \rightarrow m$: Neem aan dat de hypothese geldt voor alle grafen met maximaal $m - 1$ lijnen (waarin $m \geq 1$). Laat G een graaf met n punten, m lijnen en r gebieden zijn. We gaan bewijzen dat $n - m + r = 2$.

Stel G is een boom. Dan bevat G maar een gebied en $n = m + 1$ (zie stelling 1.8). Dus geldt er $n - m + r = (m + 1) - m + 1 = 2$. Dus voor een boom met m lijnen geldt de hypothese. Als G geen boom is, bevat hij een lijn e in de rand van een eindig gebied. Dan is $G \setminus \{e\}$ een samenhangende graaf met n punten, $m - 1$ lijnen en $r - 1$ gebieden. Vanwege de inductiehypothese geldt hiervoor $n - (m - 1) + (r - 1) = 2$, dus $n - m + r = 2 + 1 - 1 = 2$. Dus ook als G een graaf met m lijnen is en geen boom, geldt de hypothese. Nu volgt: Voor alle $m \in \mathbb{N}$: als G een samenhangende, planaire graaf met n punten, m lijnen en r gebieden (inclusief het oneindige gebied). Dan geldt $n - m + r = 2$. $\square$

Hieruit is meteen de volgende stelling af te leiden:

Gevolg 2.4. Laat G een planaire graaf zijn met $n \geq 3$ punten en m lijnen. Dan geldt:

$$m \leq 3n - 6 \quad (2.2)$$

Bewijs. [12] Neem aan dat G planair en samenhangend is. De enige samenhangende planaire graaf met $n \geq 3$ en $m \leq 2$ is de graaf met drie punten en twee lijnen daartussen. Hiervoor geldt ongelijkheid 2.2. Stel nu dat $m \geq 3$. G is planair dus er bestaat een representatie met r gebieden, noem deze R_1 t/m R_r . Definieer m_i als het aantal lijnen op de grens van R_i voor elke $1 \leq i \leq r$. Een gebied wordt door minimaal drie lijnen ingesloten, dus geldt: $\sum_{i=1}^r m_i \geq 3r$. Elke lijn is de grens van maximaal twee

gebieden, dus geldt: $\sum_{i=1}^r m_i \leq 2m$. Hieruit volgt: $3r \leq \sum_{i=1}^r m_i \leq 2m$ dus $3r \leq 2m$.

Met stelling 2.3 volgt: $6 = 3n - 3m + 3r \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m$. Hiermee is de stelling bewezen voor samenhangende grafen.

Als G planair en niet-samenhangend is, kunnen er lijnen aan toegevoegd worden totdat de graaf wel samenhangend is. Het nieuwe aantal lijnen heet m' en er geldt $m' \geq m$. Voor de nieuwe graaf geldt $m \leq m' \leq 3n - 6$ dus geldt ook voor onsamenhangende grafen $m \leq 3n - 6$. $\square$

Nu weten we dat als een graaf niet voldoet aan $m \leq 3n - 6$, kan hij niet planair zijn. Daarvoor hoeven van G alleen $|V|$ en $|E|$ bekend te zijn. Merk op dat we hiermee nog niet kunnen vaststellen dat G planair is, als we weten dat de ongelijkheid 2.2 geldt! Planaire grafen zijn prettig om mee te werken omdat ze overzichtelijk zijn. Maar een graaf is niet altijd planair.

Stelling 2.5 (K_5). K_5 is niet planair

Bewijs. [1] Stel dat K_5 planair is. Dan geldt $n - m + r = 2$. In de K_5 is $n = 5$ en $m = 10$, dus moet gelden $r = 2 - 5 + 10 = 7$. Elk gebied is begrensd door minimaal drie lijnen en elke lijn begrensd maximaal twee gebieden, dus er zijn minstens $\frac{3r}{2}$ lijnen nodig om die gebieden in te sluiten. $\frac{3 \cdot 7}{2} = 10\frac{1}{2}$, dus er zijn minstens 11 lijnen nodig, maar K_5 heeft er maar 10. Dit is een tegenspraak, dus K_5 voldoet niet aan de Euler stelling en is niet planair. $\square$

Een familie verwant aan de volledige grafen zijn de volledige *bipartiete* grafen.

Definitie 2.6 ((Volledige) bipartiete graaf). Een *volledige bipartiete graaf* op $n + m$ punten (voor $n, m \geq 1$) is een graaf met $V = U \cup W$ zodanig dat $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ en $E = \{uw | u \in U, w \in W\}$.

In andere woorden: alle punten van U zijn met alle punten van W verbonden, maar binnen deze verzamelingen zijn er geen punten met elkaar verbonden. Een *bipartiete graaf* op $u + v$ punten is een deelgraaf van de volledige bipartiete graaf op $u + v$ punten.

Notatie: De volledige bipartiete graaf op $n + m$ punten noteren we als $K_{n,m}$.

Lemma 2.7. Alle cyclen in een bipartiete graaf bevatten een even aantal lijnen.

Bewijs. [13] Stel $G = (U \cup W, E) \subset K_{n,m}$ is een bipartiete graaf die een oneven cykel C met lengte k bevat. Dan is C te schrijven als $C = (v_1, \dots, v_k, v_1)$ met de punten $v_1, \dots, v_k \in U \cup W$. Neem aan (zonder verlies van algemeenheid) dat $v_1 \in U$. Vervolgens geldt voor alle $1 \leq i \leq k$:

$$v_i \begin{cases} \in U & \text{als } i \text{ oneven} \\ \in W & \text{als } i \text{ even} \end{cases} \quad (2.3)$$

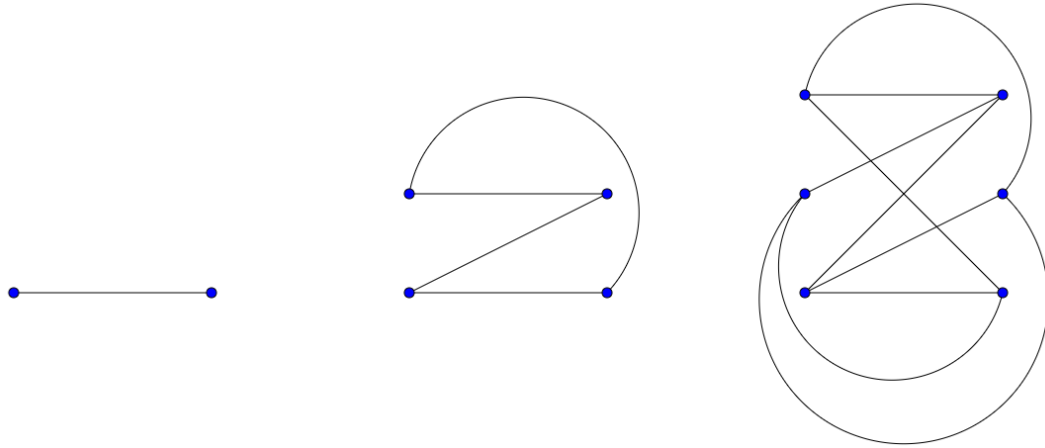
Omdat C oneven is geldt dat zowel v_1 als v_k in U zit. Dus er zijn twee punten uit U met elkaar verbonden. Dit is in tegenspraak met het feit dat $G = U \cup W$ bipartiet is en punten in U niet onderling verbonden kunnen zijn. Dus zijn er in een bipartiete graaf enkel even cyclen. $\square$

Voor bipartiete grafen kunnen we nu gevolg 2.4 aanscherpen:

Gevolg 2.8 (van stelling 2.3 voor bipartiete grafen). Laat G een planaire bipartiete graaf met $n \geq 3$ punten en m lijnen. Dan geldt:

$$m \leq 2n - 4 \quad (2.4)$$

Bewijs. [4] Stel G is een bipartiete planaire graaf met n punten, m lijnen en r gebieden. We weten dat de som van de graden van alle punten precies $2m$ is. Elk gebied wordt ingesloten door minimaal drie lijnen, maar we hebben geen oneven cyclen in een bipartiete graaf, dus wordt elk gebied ingesloten door minimaal vier lijnen en elke lijn grenst aan maximaal twee gebieden. Daaruit volgt dat voor de som van de graden minimaal $4r$ moet zijn, dus $2m \geq 4r$, of $m \geq 2r$. Met stelling 2.3 geldt $2r = 4 - 2n + 2m$. Als we daarin de vorige ongelijkheid invullen, krijgen we $m \geq 4 - 2n + 2m$, oftewel $2n - 4 \geq m$. $\square$

FIGUUR 2.2: $K_{1,1}$ t/m $K_{3,3}$

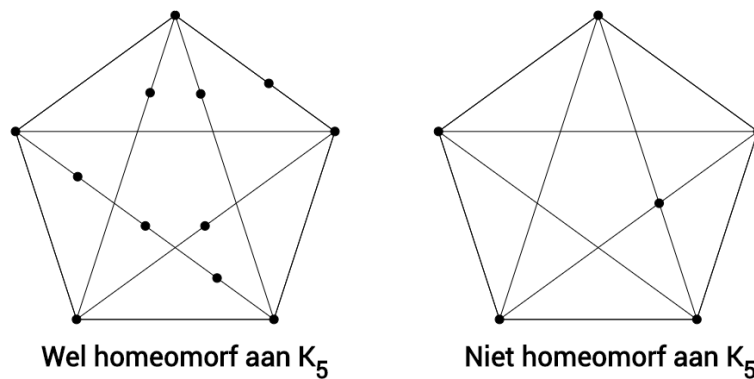
Hierboven is te zien dat $K_{1,1}$ en $K_{2,2}$ planair zijn. $K_{3,3}$ is niet planair getekend. In onderstaande stelling wordt bewezen dat dit niet kan.

Stelling 2.9 ($K_{3,3}$). $K_{3,3}$ is niet planair.

Bewijs. Stel dat $K_{3,3}$ planair is. Het aantal punten $n = 6$ en het aantal lijnen $m = 9$. Met gevolg 2.8 moet gelden $m \leq 2n - 4$. Dit is een tegenspraak. Dus $K_{3,3}$ voldoet niet aan gevolg 2.8 en is niet planair. $\square$

Met behulp van de stellingen 2.5 en 2.9 kunnen we een belangrijke stelling voor de grafentheorie begrijpen: de stelling van Kuratowski (2.11). Hiervoor hebben we eerst een definitie nodig.

Definitie 2.10 (Homeomorf). Twee grafen zijn *homeomorf* als beiden verkregen kunnen worden uit dezelfde graaf door een onderverdeling van de lijnen.

FIGUUR 2.3: Twee grafen, wel en niet homeomorf aan K_5

In figuur 2.3 zijn twee grafen te zien die beiden lijken op K_5 . Hierin is het eerste figuur wél homeomorf aan K_5 omdat de lijnen enkel gesplitst worden door de toegevoegde punten. Het tweede figuur is echter níet homeomorf aan K_5 omdat er een snijpunt veranderd is in een gewoon punt. Hierdoor zijn de eigenschappen van de graaf veranderd. Deze graaf is bijvoorbeeld wel planair, in tegenstelling tot de K_5 zelf (de planaire representatie voor deze graaf word aan de lezer overgelaten).

Stelling 2.11 (Kuratowski). Een graaf G is planair $\Leftrightarrow G$ bevat geen subgrafen die homeomorf zijn aan K_5 of $K_{3,3}$

Het bewijs van deze stelling is lastig om te schetsen, omdat het redelijk lang is en verschillende gevalsonderscheidingen bevat. Voor het bewijs refereer ik naar Planaire en toroïdale grafen van G. Hebbink.[6]

Maar wat kunnen we nog met een graaf die niet planair is? We kunnen ons afvragen hoe niet-planair de graaf is. Dit kan door middel van het *snijgetal* en de *dikte* van een graaf. Beide worden toegelicht in de volgende hoofdstukken.

Hoofdstuk 3

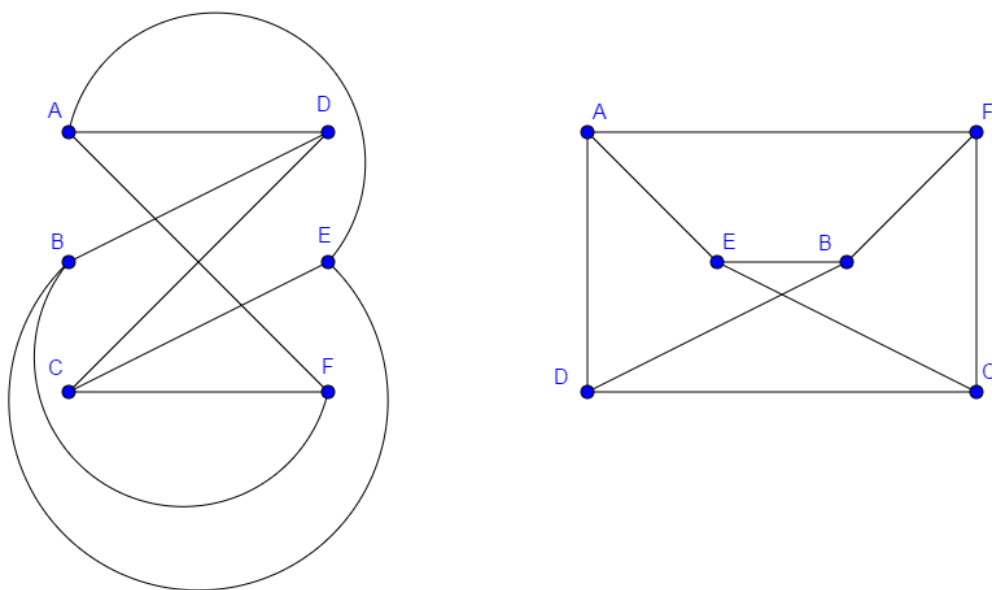
Snijgetal $v(G)$

Een manier om te kijken hoe *niet-planair* een graaf is, is door te kijken hoeveel snijpunten er in de graaf voor komen. Een planaire graaf heeft geen snijpunten, dus elke snijding maakt de graaf meer *niet-planair*.

Definitie 3.1 (Snijgetal). Het *snijgetal* van een graaf G is het kleinste getal k zodanig dat G in het platte vlak kan worden getekend met k snijpunten van lijnen.

Notatie: $v(G)$

Bedenk hierbij dat het aantal snijpunten niet gelijk hoeft te zijn aan het aantal lijnen dat je weg moet halen voordat de graaf planair is. Het kan zijn dat er meerdere snijpunten zijn in een graaf die door één lijn veroorzaakt worden (zie de $K_{3,3}$ in figuur 2.2). In dit voorbeeld kunnen we echter $K_{3,3}$ ook met maar één snijpunt tekenen.



FIGUUR 3.1: $K_{3,3}$ met 3 en met 1 snijding

Beide bovenstaande figuren zijn $K_{3,3}$; V en E zijn bij beide hetzelfde. Maar het aantal snijpunten is niet gelijk. Hoe kun je dan weten dat je het minimale aantal snijpunten hebt? Vanuit Eulers stelling (stelling 2.3) kunnen we relatief eenvoudig een ondergrens voor het snijgetal van een willekeurige graaf afleiden.

Stelling 3.2 (Ondergrens $v(G)$). [10] Zij $G = (V, E)$ graaf met $|V| = n \geq 3$ en $|E| = m$. Dan geldt:

$$v(G) \geq m - 3 \cdot n + 6. \quad (3.1)$$

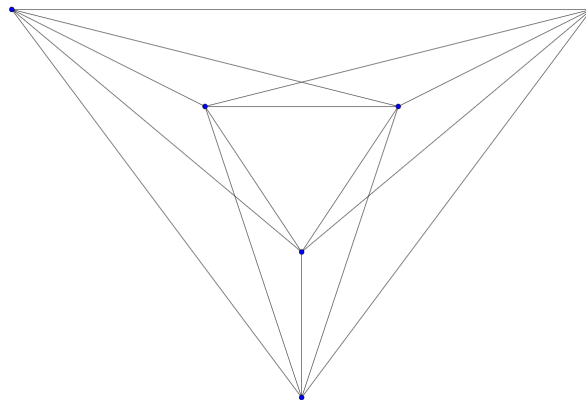
Bewijs. Als G planair is, dus $v(G) = 0$, met minimaal drie punten geldt gevolg 2.4: $m \leq 3n - 6$ oftewel $m - 3n + 6 \leq 0$. $v(G) = 0$ dus hieruit volgt $m - 3n + 6 \leq v(G)$. Stel G is niet planair, dus $v(G) \geq 1$. Nu kun je een voor een lijnen weghalen die snijden met een andere lijn, totdat de nieuwe graaf G' planair is. Dus elke lijn die je weg haalt, zorgt voor minimaal een snijpunt. Je haalt dus evenveel of meer snijpunten weg dan dat je lijnen verwijdert. G' is planair dus $v(G') = 0$. Stel het aantal lijnen wat je weggehaald hebt is a . Dan is het aantal lijnen van G' gelijk aan $m - a$ en $v(G) \geq a + v(G')$. G' is planair dus geldt $v(G') \geq (m - a) - 3 \cdot n + 6$, oftewel $v(G') + a \geq m - 3 \cdot n + 6$. De vorige twee ongelijkheden samen geven: $v(G) \geq a + v(G') \geq m - 3 \cdot n + 6$. Dus ook voor niet planaire grafen geldt de stelling. $\square$

Een bovengrens is echter minder relevant. We kunnen in een graaf een representatie maken met zoveel mogelijk lijnen die elkaar snijden, maar daar wordt die graaf niet overzichtelijker van. Je kunt als bovengrens het aantal snijpunten nemen dat je krijgt als elke lijn van de graaf met elke andere lijn snijdt. Dan krijg je voor een graaf G met m lijnen de bovengrens $v(G) \leq \frac{m \cdot (m-1)}{2}$. Lijnen kunnen echter ook nog meermaals met elkaar snijden als de lijnen niet recht getekend worden. In dat geval kan het snijgetal van elke graaf willekeurig groot worden. Over volledige (bipartiete) grafen waarbij lijnen elkaar niet meermaals snijden kunnen we echter meer zeggen, omdat deze structuur overzichtelijker is.

Definitie 3.3 (Verantwoordelijkheid). De *verantwoordelijkheid van een punt* is het totaal aantal snijpunten van alle lijnen waar het punt in bevat is.

Merk op dat elk snijpunt veroorzaakt wordt door twee lijnen die beide twee eindpunten bevatten. Hieruit volgt dat in een graaf G de som van alle verantwoordelijkheden $4 \cdot v(G)$ is.

Lemma 3.4 (Unieke representatie K_6). Elke representatie van K_6 met 3 snijpunten is isomorf met figuur 3.2.



FIGUUR 3.2: K_6 met 3 snijpunten

Bewijs. De graaf is te verdelen in drie K_4 grafen die met de twee andere volledige grafen een lijn gemeenschappelijk hebben. Binnen elk van die drie deelgrafen ligt

een snijpunt. Door deze vorm ontstaan er ook twee 3-cykels, een in het midden en een om het geheel heen. Een snijpunt wordt altijd veroorzaakt door vier punten (zie boven). In andere woorden: er zijn vier punten verantwoordelijk voor een snijpunt. Elk punt in de graaf heeft graad vijf, en elk punt ligt alleen in de buitenste of de binnenste 3-cykel. Daardoor moet elk punt onderdeel zijn van twee K_4 deelgrafen en verantwoordelijk zijn voor twee snijpunten. Hierdoor is figuur 3.2 uniek op isomorfismes na. $\square$

Stelling 3.5 (Bovengrens $v(K_n)$). [10]

$$v(K_n) \leq \frac{1}{4} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \quad (3.2)$$

Voor $n \leq 10$ is dit een gelijkheid.

Opmerking. Ik zal de gelijkheid bewijzen voor K_1 tot en met K_8 , omdat die in mijn scriptie terug komen. Voor het volledige bewijs verwijs ik naar *Crossing numbers of graphs* van R. Guy [5].

Bewijs. [5] K_1 tot en met K_4 zijn planair, dus $v(K_1) = v(K_2) = v(K_3) = v(K_4) = 0$ (zie figuur 2.1). Een representatie van een graaf geeft een bovengrens, maar aangezien het snijgetal nooit negatief kan zijn, moeten de snijgetallen gelijk zijn aan 0. In figuur 5.2 zijn de K_5, K_6 en K_7 getekend met respectievelijk 1, 3 en 9 snijpunten. Dit is gelijk aan $\frac{1}{4} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ en geeft een bovengrens voor de snijgetallen. Nu rest nog te bewijzen dat het snijgetal niet kleiner is.

Voor K_5 is dit duidelijk. We hebben al bewezen dat deze graaf niet planair is, wat betekent dat $v(K_5) > 0$. Dus moet gelden $v(K_5) = 1$.

Voor het snijgetal van K_6 gebruiken we Eulers stelling (stelling 2.3) $n - m + r = 2$. Van een representatie van K_6 met c snijpunten kun je een nieuwe planaire graaf G' maken door van alle snijpunten echte punten te maken. Nu geldt G' heeft $6 + c$ punten en $15 + 2c$ lijnen, dat laatste omdat K_6 zelf 15 lijnen heeft en elk snijpunt 2 lijnen in tweeën splitst. Met de Euler formule geldt nu dat $(6 + c) - (15 + 2c) + r = 2$ dus $r = 2 - 6 + 15 - c + 2c = 11 + c$ gebieden. Elk gebied wordt door minimaal drie lijnen ingesloten en elke lijn grenst aan maximaal twee gebieden, dus $3 \cdot (11 + c) \leq 2 \cdot (15 + 2c)$. Hieruit volgt $33 + 3c \leq 30 + 4c$ oftewel $3 \leq c$. Dus $v(K_6) \geq 3$ en daaruit volgt met figuur 5.2 dat $v(K_6) = 3$.

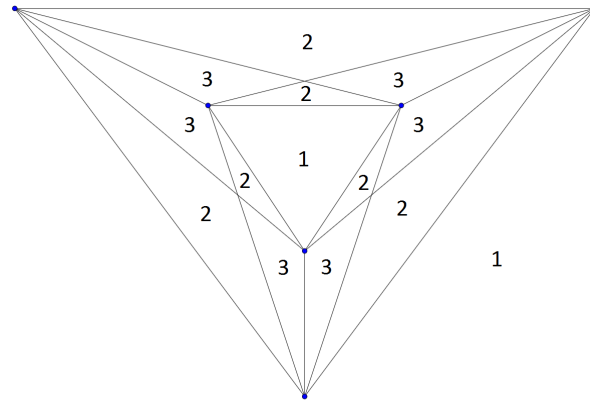
Stel K_7 heeft c snijpunten. Omdat de totale verantwoordelijkheid van de graaf $4c$ is, bestaat er een punt met verantwoordelijkheid minimaal $\lceil \frac{4c}{7} \rceil$. Als dit punt weggehaald wordt (en daarmee alle lijnen die eraan verbonden zijn), blijft precies de K_6 over, omdat er zes punten over blijven die allemaal met elkaar verbonden zijn. Omdat er uit de graaf nu minstens $\lceil \frac{4c}{7} \rceil$ snijpunten verdwijnen, heeft de nieuwe tekening hoogstens $c - \lceil \frac{4c}{7} \rceil = \frac{7c}{7} - \lceil \frac{4c}{7} \rceil = \lfloor \frac{3c}{7} \rfloor$ snijpunten. Om dit in te zien moeten we de volgende dingen nagaan:

$$\frac{7c}{7} - \lceil \frac{4c}{7} \rceil = \begin{cases} \frac{3c}{7} & \text{als } \frac{4c}{7} \in \mathbb{N} \\ \lfloor \frac{3c}{7} \rfloor + 1 & \text{als } \frac{4c}{7} \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\lfloor \frac{3c}{7} \rfloor = \begin{cases} \frac{3c}{7} & \text{als } \frac{3c}{7} \in \mathbb{N} \\ \lfloor \frac{3c}{7} \rfloor + 1 & \text{als } \frac{3c}{7} \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.4)$$

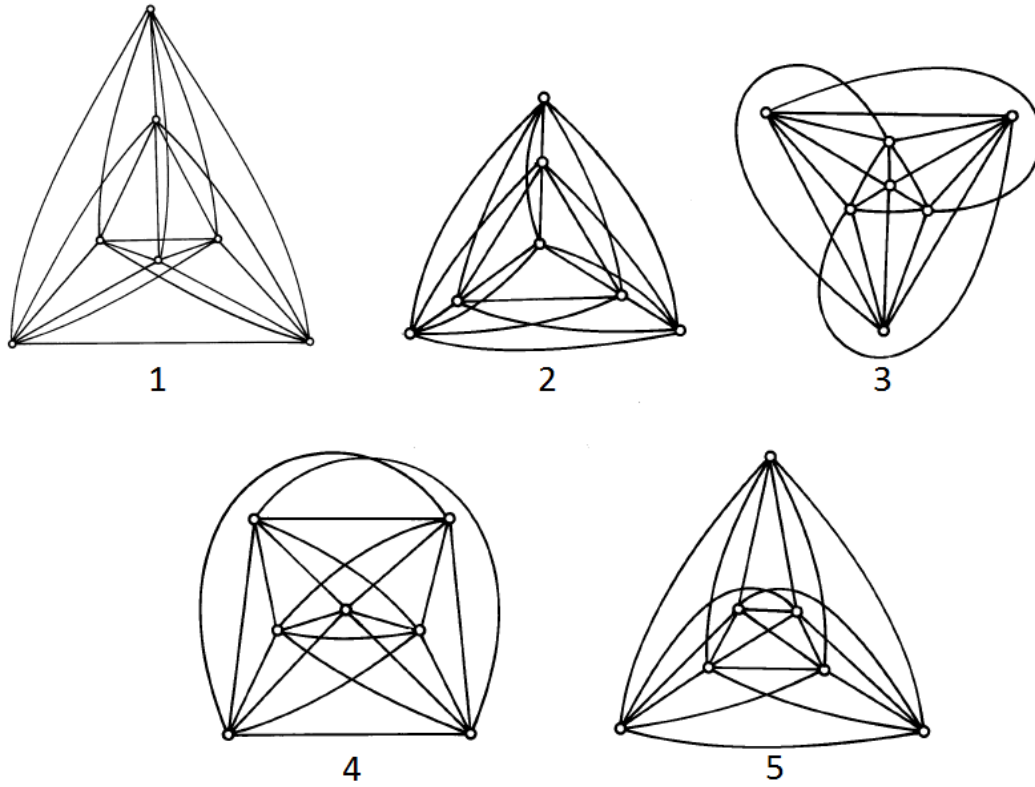
Ga na dat $\frac{4c}{7} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{3c}{7} \in \mathbb{N}$ omdat 3 en 4 geen delers van 7 zijn (7 is priem) en daardoor deze situatie alleen voorkomt als c een veelvoud van 7 is. Dus (3.3) = (3.4) en bovenstaande gelijkheid klopt. We weten al dat de K_6 met drie snijpunten te maken is. We gaan kijken wat er gebeurt als we aan een representatie van K_6 met

drie snijpunten een punt toevoegen en die met elk ander punt verbinden (zodat we weer een K_7 krijgen). Omdat elke representatie van K_6 met 3 snijpunten isomorf is met figuur 3.2, volstaat het om alleen aan deze representatie een punt toe te voegen (zie lemma 3.4). figuur 3.2 bestaat uit slechts drie echt verschillende gebieden: zie figuur 3.3.



FIGUUR 3.3: K_6 met 3 gebieden

Hieruit volgt volgens Guy dat er slechts vijf niet-isomorfe representaties zijn van K_7 met een minimaal aantal snijpunten: zie figuur 3.4. In elk van deze figuren zijn er negen snijpunten. Hieruit volgt dat $v(K_7) = 9$. Merk op dat in figuur 2, 3 en 4 een punt is toegevoegd in gebied 1 en in figuur 1 en 5 is een punt toegevoegd in gebied 2. Hoe Guy heeft gecontroleerd dat dit de enige isomorfismen zijn van K_7 met negen snijpunten staat niet in het artikel uitgelegd.

FIGUUR 3.4: De 5 niet isomorfe representaties van K_7

Een representatie van K_8 met c snijpunten bevat een punt met verantwoordelijkheid minstens $\lceil \frac{4c}{8} \rceil$. Als je dit punt (en daarmee ook de lijnen die daaraan vast zitten) verwijdert, houd je een representatie van K_7 over met $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor \geq 9$, oftewel $c \geq 18$ (net als bij het bewijs van K_6). Hieruit volgt samen met figuur 5.2 dat $v(K_8) = 18$. Hiermee is voor K_1 tot en met K_8 de gelijkheid uit de stelling bewezen. $\square$

Stelling 3.6 (Ondergrens $v(K_n)$). [10] Als $n \geq 5$ geldt:

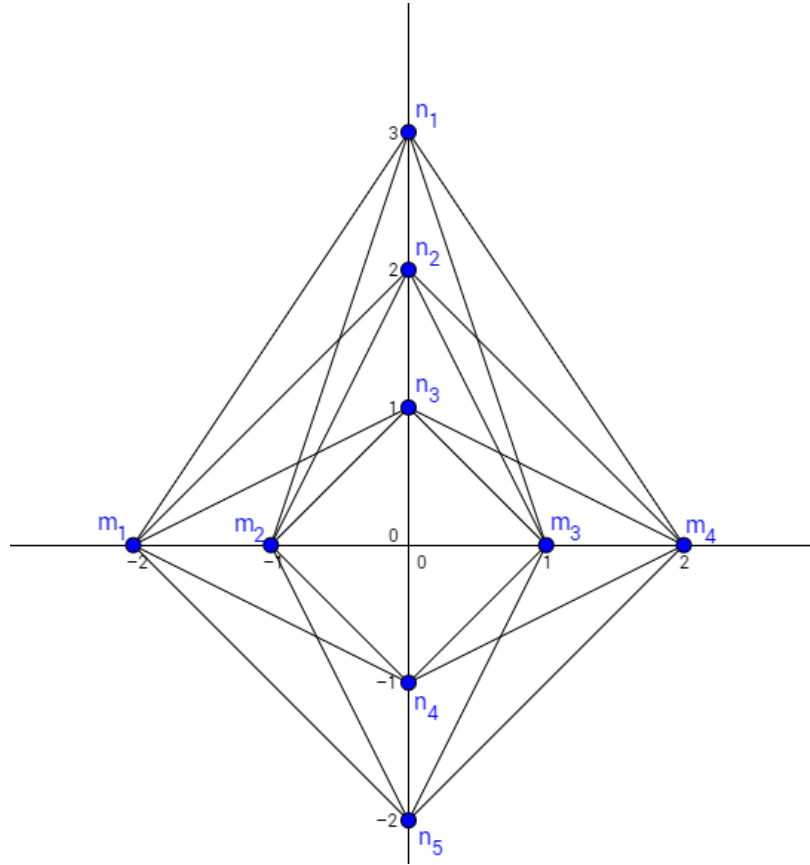
$$v(K_n) \geq \frac{1}{120} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \quad (3.5)$$

Bewijs. [9] Laat D een representatie van K_n zijn met het kleinste snijgetal $v(K_n)$. We mogen aannemen dat lijnen die aan hetzelfde punt grenzen niet snijden, omdat anders deze lijnen omgedraaid kunnen worden en het snijgetal kleiner wordt, maar we hadden al het kleinste snijgetal. Bekijk alle deelgrafen van K_n waarin er een punt is weggehaald (en daarmee alle aangrenzende lijnen). Dat zijn n deelgrafen. Elke snijding bestaat uit twee lijnen die elk aan twee punten grenzen, daarom komt elke snijding precies $n-4$ keer voor in de deelgrafen. Elke deelgraaf is een representatie van K_{n-1} omdat ze elk $n-1$ punten hebben die allemaal verbonden zijn. Daarom moeten alle subgrafen minstens $v(K_{n-1})$ snijpunten hebben. Hieruit volgt dat $(n-4) \cdot v(K_n) \geq n \cdot v(K_{n-1})$. We weten al dat $v(K_5) = 1$, dus kunnen we uit de ongelijkheid recursief concluderen dat $v(K_n) \geq \frac{n}{n-4} \cdot \dots \cdot \frac{6}{2}$. In deze breuken vallen alleen de eerste vier tellers en de laatste vier noemers niet tegen elkaar weg, waardoor je overhoudt: $v(K_n) \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Conclusie: voor K_n met $n \geq 5$ geldt $v(K_n) \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \frac{1}{120}$. $\square$

Stelling 3.7 (Bovengrens $v(K_{n,m})$). [10]

$$v(K_{n,m}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \quad (3.6)$$

Bewijs. [14] Stel m is even, neem k zodanig dat $m = 2k$. Plaats deze $2k$ punten op de x -as van een assenstelsel met als y -coördinaten: $-k, -k-1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, k-1, k$. Stel m is oneven, neem dan k zodanig dat $m = 2k+1$. Plaats deze punten ook op de x -as van een assenstelsel met als y -coördinaten: $-k, -k-1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, k-1, k, k+1$. (Merk op dat dit gelijk is aan het geval dat m even is, behalve dat er 1 punt rechts op de x -as extra is geplaatst). Nu hoeven we alleen de snijpunten te tellen. Dit heb ik bekeken per kwart van de grafiek. Dit kostte het nodige rekenwerk. Uiteindelijk geldt, ongeacht of n en m even of oneven zijn, dat het aantal snijpunten per kwart maximaal $\frac{1}{4} \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ is. Dat vier keer bij elkaar opgeteld geeft precies bovengrens 3.6. $\square$



FIGUUR 3.5: Voorbeeld constructie: $K_{5,4}$

Opmerking. Voor $\min(n, m) \geq 6$ is de gelijkheid van bovenstaande vergelijking een open probleem wat het Zarankiewicz's vermoeden heet. Zarankiewicz leverde wel een bewijs voor het vermoeden, maar die bevatte een fout. Hij gaf echter wel een correcte constructie voor een representatie voor $K_{n,m}$ met precies $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ snijpunten, wat resulteert in de bovengrens.

3.1 Rechthoekig snijgetal $\bar{v}(G)$

Definitie 3.8 (Rechthoekig/ Geometrisch snijgetal $\bar{v}(G)$). Het *rechthoekige snijgetal* van een graaf G is het snijgetal van die graaf, als de graaf enkel rechte lijnen bevat.

Notatie: $\bar{v}(G)$

Opmerking. Het bewijs van stelling 3.7 wordt gegeven door een constructie. Omdat deze constructie rechthoekig is, volgt dat deze bovengrens ook voor de het rechthoekige snijgetal geldt!

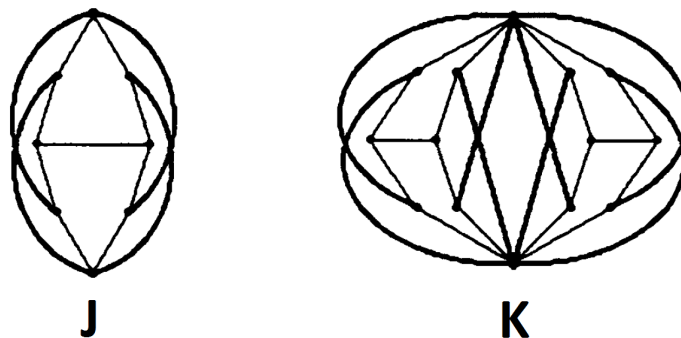
Stelling 3.9 (Rechthoekig snijgetal $\bar{v}(G)$). Neem $k \geq 4$ vast. Dan geldt:

$$\text{Voor alle } m > k \text{ bestaat er een graaf } G \text{ met } v(G) = k \text{ en } \bar{v}(G) \geq m \quad (3.7)$$

Met andere woorden: Het rechthoekige snijgetal $\bar{v}(G)$ kan willekeurig groot worden in vergelijking met het snijgetal $v(G)$.

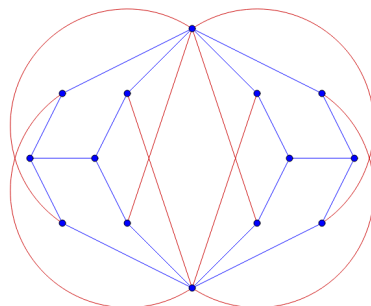
Opmerking. Van dit bewijs zal ik een schets geven, voor het volledige bewijs verwijs ik naar het artikel in *Journal of Graph Theory* van Bienstock et al [3].

Bewijs. [3] Laat $m > 4$. We zullen eerst een graaf G_m construeren zodanig dat $v(G_m) = 4$ en $\bar{v}(G_m) \geq m$. Om G_m te maken nemen we eerst de graaf J twee keer en verbinden de bovenste punten en de onderste punten met elkaar. Op die manier krijgen we graaf K .



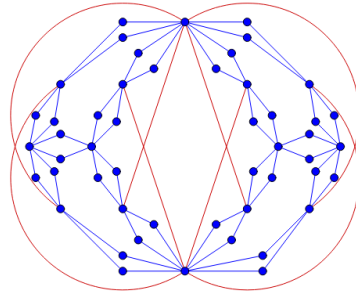
FIGUUR 3.6: Graaf J en Graaf K

Merk op dat K twee disjuncte 8-cykels C_8 bevat met een lijn ertussen zodat er vier 5-cykels C_5 ontstaan. Deze figuren zijn hieronder blauw gekleurd, de rest rood.



FIGUUR 3.7: De gekleurde Graaf K

Uit dit figuur gaan we G_m maken. Elke blauwe lijn $e = \{u, v\}$ wordt vervangen door een verzameling $P(e)$ van m paarsgewijs disjuncte paden van lengte 2 waarvan u en v de uitersten zijn. Voor $e \neq e'$ geldt dat $P(e)$ disjunct is met $P(e')$.



FIGUUR 3.8: Voorbeeld: graaf G_2

De nieuwe blauwe subgraaf van K noemen we K_B . In het originele bewijs wordt opgemerkt dat er maar twee manieren om deze K_B te tekenen. Vervolgens wordt bewezen dat $\bar{v}(G_m) \geq m$ in een lemma met behulp van tegenspraak. Het is duidelijk dat in deze representatie vier snijpunten zitten, dus $v(G_m) \leq 4$. We willen bewijzen dat $v(G_m) = 4$. Graaf K bestaat uit twee keer graaf J (zie figuur 3.6). In het artikel wordt bewezen dat $v(J) \geq 2$. Hieruit volgt dat $v(K) \geq 4$ en dat resulteert in $v(G_m) = 4$.

We hebben nu bewezen dat geldt: Voor alle $m > 4$ bestaat er een graaf G_m met $v(G_m) = 4$ en $\bar{v}(G_m) \geq m$. Hieruit volgt direct de uitspraak 3.7 als aan graaf G_{m-k+4} precies $k - 4$ disjuncte kopieën van de K_5 worden toegevoegd. $\square$

Stelling 3.10 ($\bar{v}(G) = 0 \Leftrightarrow v(G) = 0$). [5] Voor G een graaf geldt:

$$\bar{v}(G) = 0 \Leftrightarrow v(G) = 0 \quad (3.8)$$

Deze stelling is (in essentie) gelijk aan stelling 4.6 en daarmee zijn bewijs ook, dus dat zal ik hier nog niet uitwerken. Uit de stelling volgt dat als een graaf planair is, deze ook een planaire representatie heeft met rechte lijnen.

We hebben nu gekeken naar een aantal eigenschappen van het snijgetal. Als er een of twee snijpunten zijn, is dit nog wel te overzien. Als het er echter meer worden, wordt een graaf onoverzichtelijk. We zouden dus graag een manier vinden om ook die grafen te bekijken. Een manier om dat te doen, is om de lijnen van een graaf onder te verdelen in verschillende subgrafen, waarvan de vereniging weer de originele graaf is. Als we ze dan toch gaan verdelen, kunnen we dat net zo goed doen zodat de subgrafen allemaal planair zijn. Dit doen we met behulp van het begrip dikte, wat in het volgende hoofdstuk aan bod komt.

Hoofdstuk 4

Dikte $\theta(G)$

Definitie 4.1 (Dikte $\theta(G)$). De *dikte* van een graaf G is het minimaal aantal planaire subgrafen wat er nodig is zodat de vereniging van die grafen G vormt. (In het bijzonder is de dikte van een planaire graaf 1).

Notatie: $\theta(G)$

Het bepalen van de dikte van een willekeurige graaf is een probleem dat we nu nog niet door een computer uit kunnen laten rekenen binnen afzienbare tijd. Niet zo raar, aangezien het controleren of een graaf planair is ook nog niet kan binnen afzienbare tijd. We kunnen wel kijken naar bepaalde groepen grafen, die gelijke vormen hebben. Zo kunnen we ook zien dat de grootte van de graaf, het aantal punten en lijnen, niet ook de dikte hoeft te bepalen. In onderstaande paragraaf bespreken we de Catlin grafen. Dit zijn grafen die heel groot kunnen worden, maar waarvan de dikte altijd 2 blijft.

4.1 Catlin's grafen $C_n[K_r]$

Definitie 4.2 (Catlin's graaf). Zij C_n de cyclische graaf met $n \geq 4$ punten en K_r de volledige graaf op $r \geq 3$ punten. De constructie van de bijbehorende *Catlin's graaf* gaat als volgt:

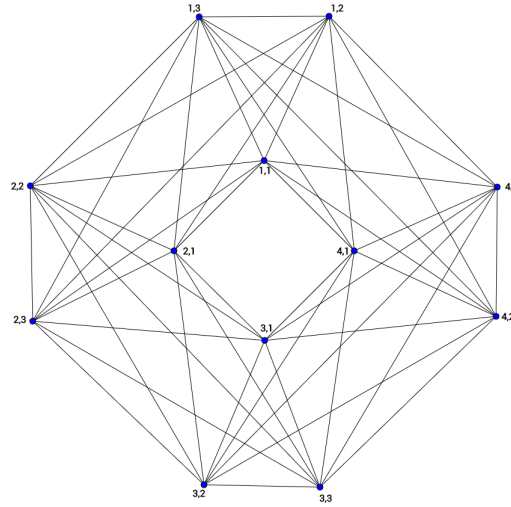
1. Neem C_n de cykel op n punten. Noem deze punten punt 1 t/m n . Dan is punt i dus verbonden met punt $(i - 1)$ en $(i + 1) \bmod n$.
2. Vervang vervolgens elk punt door K_r . Noem de r punten die punt i vervangen punt i_1 t/m i_r . Deze punten zijn allemaal onderling verbonden, maar ze zijn ook allemaal verbonden met alle punten die eerst $i - 1$ en $i + 1$ waren.

In andere woorden: punt i_x is verbonden met alle punten uit:

- $\{i_1, \dots, i_r\} \setminus i_x$
- $\{(i - 1)_1, \dots, (i - 1)_r\}, (i - 1) \bmod n$.
- $\{(i + 1)_1, \dots, (i + 1)_r\}, (i + 1) \bmod n$.

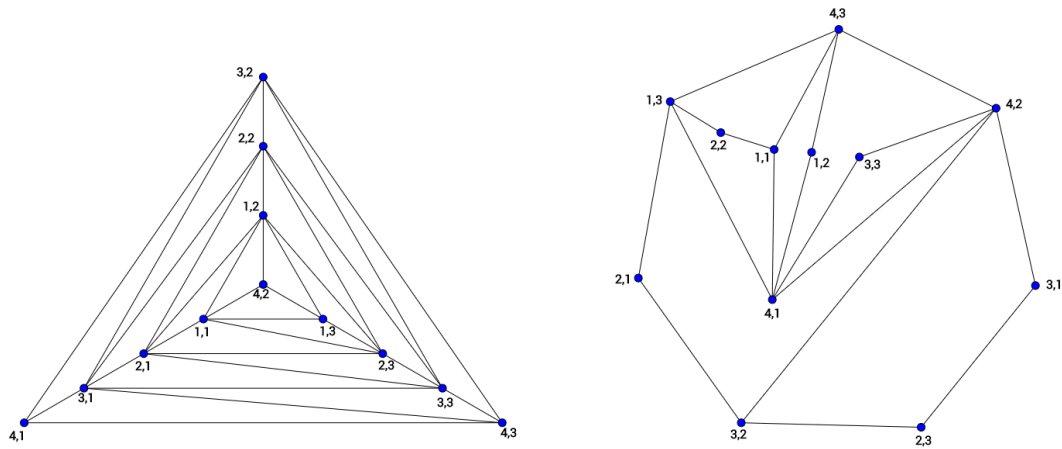
Notatie: $C_n[K_r]$

$C_4[K_3]$ is dus een 4-cykel waarvan elk punt is vervangen door K_3 :



FIGUUR 4.1: $C_4[K_3]$

Catlin's grafen zijn te verdelen in twee planaire deelgrafen. De algemene constructie is te vinden in *Thickness Two Graphs Part One* - Boutin, Gethner, Sulanke. De planaire subgrafen van $C_4[K_3]$ zien er als volgt uit:



FIGUUR 4.2: Planaire subgrafen van $C_4[K_3]$: $G_{4,1}$ en $G_{4,2}$

Merk op dat de meeste 3-cykels in G_1 zitten. Drie van de vier K_3 grafen zijn in elkaar geplaatst, met punt 4, 2 als het midden. Deze graaf is de kleinste Catlin's graaf. Voor $C_n[K_r]$ ziet $G_{n,1}$ eruit als $G_{4,1}$ met $n - 1$ K_3 grafen in elkaar geplaatst. $G_{n,2}$ is minder overzichtelijk, maar uit de constructie volgt dat ook deze graaf planair blijft.

4.2 Rechthoekige dikte $\bar{\theta}(G)$

Definitie 4.3 (Rechthoekige/Geometrische dikte $\bar{\theta}(G)$). De *rechthoekige dikte* van een graaf G is de dikte van G op voorwaarde dat de planaire subgrafen enkel rechte lijnen bevatten.

Notatie: $\bar{\theta}(G)$

Definitie 4.4 (Equivalentente representatie). Zij G een graaf met representaties P en P' . Deze zijn *equivalent* als geldt:

Een verzameling zijdes sluit een gebied in representatie P in $\Leftrightarrow$ Een verzameling zijdes sluit een gebied in representatie P' in.

Ik wil graag bewijzen dat voor elke willekeurige graaf G geldt dat als de graaf planair is, hij ook met rechte lijnen planair getekend kan worden. Het is echter lastig om iets te bewijzen voor een willekeurige graaf. Om dat te omzeilen kunnen we eerst extra voorwaarden aannemen voor een graaf, de stelling bewijzen en daarna laten zien dat die voorwaarden eigenlijk geen restrictie op de graaf hebben gelegd. Een veelgebruikte voorwaarde voor een graaf is dat hij *2-samenhangend* is. Dat betekent dat de graaf niet alleen samenhangend is, maar ook nog samenhangend is als je een punt weghaalt. Elke onsamenhangende graaf bestaat uit samenhangende deelgrafen en als we door een lijn weg te halen een graaf onsamenhangend kunnen maken, kunnen deze twee deelgrafen die ontstaan zonder extra snijpunten te veroorzaken om elkaar bewegen. In onderstaand bewijs nemen we een net andere voorwaarde aan: dat elk gebied een cykel moet zijn. Om dit aan te mogen nemen, moeten we eerst bewijzen dat dit equivalent is aan de eerste aanname.

Lemma 4.5 (2-samenhangend $\Leftrightarrow$ cyclen). Neem aan dat G planair is. Dan geldt: G is 2-samenhangend $\Leftrightarrow$ de grens van elk gebied in G is een cykel.

Ik zal hieronder een schets geven van het bewijs. Hierin gebruik ik dat als een graaf samenhangend is, er tussen elk paar punten uit de graaf twee disjuncte paden te vinden zijn (Graph theory with applications van J A Bondy en U S R Murty [7]).

Bewijs. 2-samenhangend $\Leftarrow$ de grens van elk gebied is een cykel: Neem aan dat in $G = (V, E)$ de grens van elk gebied een cykel is. Stel nu dat er een punt p bestaat in G zodanig dat als dit weggehaald wordt, G onsamenhangend is. Dit punt is deel van minstens een cykel, omdat p anders op de grens van een gebied ligt dat geen cykel is. Maar een cykel is zelf altijd 2-samenhangend, dus dit is een tegenspraak. Dus G is 2-samenhangend.

2-samenhangend $\Rightarrow$ de grens van elk gebied is een cykel: Neem aan dat de graaf G planair en 2-samenhangend is, dan heeft hij een representatie D die ook planair en 2-samenhangend is. Bekijk een willekeurig gebied f in deze representatie. Noem de punten die aan f grenzen $p_1, \dots, p_n$. Bekijk dan de deelgraaf $H \subset G$ die enkel de punten $p_1, \dots, p_n$ bevat en alle lijnen uit E die f insluiten. Deze heeft een planaire representatie D_H door representatie D te nemen en daar alle punten en lijnen uit te halen die niet in H zitten. Stel dat D_H niet 2-samenhangend is:

1) Stel dat D_H onsamenhangend is. Dat bestaat D_H uit minstens twee componenten. Bekijk punt p_i uit een component en punt p_j uit een ander component. D is 2-samenhangend, dus in D loopt er een pad tussen p_i en p_j . Nu zijn er 2 opties:

1. Het pad valt volledig binnen het gebied f , dan wordt f gescheiden door dat pad en zijn er eigenlijk twee gebieden. Dit is een tegenspraak.

2. Het pad loopt buiten f om, wat betekent dat er een lijn in het pad zit dat een lijn uit de grens van f snijdt. Maar D is een planaire representatie, dus ook dit is een tegenspraak.

Dus D_H kan niet onsamenvhangend zijn.

2) Stel dat D_H 1-samenhangend is. Dan zijn er twee punten, p_x en p_y , in D_H die wel verbonden zijn door een pad, maar niet door twee disjuncte paden. D is 2-samenhangend, dus er is een pad tussen p_x en p_y weggevallen in D_H . Omdat D_H 1-samenhangend is en er geen 2 disjuncte paden tussen p_x en p_y lopen, is er een punt p_z in het pad tussen p_x en p_y zodanig dat als je het weg haalt, D_H onsamenvhangend wordt. Maar nu zitten we in dezelfde situatie als optie 1). Dus D_H kan niet maar 1-samenhangend zijn.

Dus D_H is zelf ook minimaal 2-samenhangend. Hieruit volgt dat vanuit elk punt p_a naar elk ander punt p_b in H twee disjuncte paden te vinden zijn, die enkel door $p_1, \dots, p_n$ lopen. Bekijk twee punten p_m en p_l , daar lopen 2 disjuncte paden tussen die samen een cykel vormen die f insluit. Stel dat er nog een punt p_r met $1 \leq r \leq n$ is die niet in deze cykel zit. Dat punt moet in het gebied f liggen, anders grenst het niet aan f . Neem een punt p_s op de cykel. Als er in beide pad al eerder een punt uit de cykel voorkomt, nemen we dat als punt p_s . D_H is 2-samenhangend, dus er zijn twee disjuncte paden tussen p_r en p_s . Dan zijn er 2 opties:

1. p_r is van alle punten uit de cykel alleen met p_s direct verbonden door een pad. In dat geval is D_H 1-samenhangend, dus dit is een tegenspraak.
2. p_r is met nog een punt p_t uit de cykel verbonden door een pad wat niet door p_s gaat. In dat geval loopt er een pad tussen alle drie de punten p_r, p_s en p_t en het gebied wat daartussen ligt is gescheiden van f . Maar dit gebied hoort bij gebied f , dus dit is een tegenspraak.

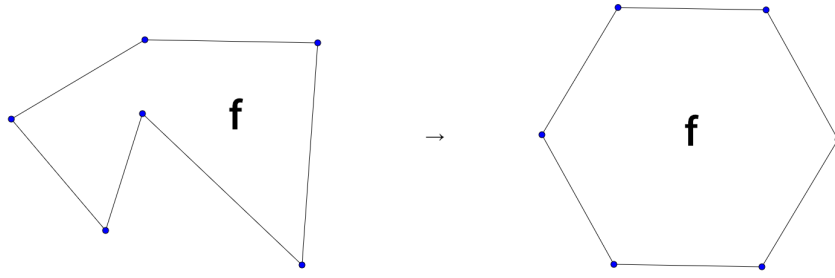
Dus alle punten $p_1, \dots, p_n$ liggen in een cykel die f insluit en f is hiermee begrensd door een cykel. f was een willekeurig gebied uit G , dus de grens van elk gebied in G wordt ingesloten door een cykel. $\square$

Stelling 4.6 ($\bar{\theta}(G) = 1 \Leftrightarrow \theta(G) = 1$). Zij gegeven een planaire representatie P van een graaf G waarin de grens van elk gebied een cykel is (in het bijzonder het oneindige gebied) met een gebied f .

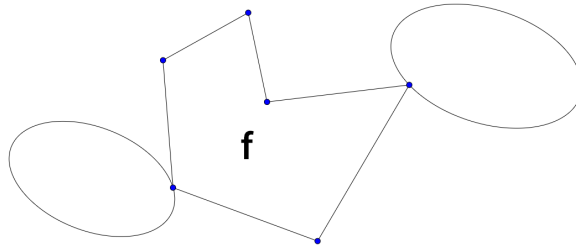
Dan is er een equivalente planaire representatie P' waarin elke zijde recht is en waarin het gebied f een convexe veelhoek is.

Bewijs. [2] Het bewijs gaat met inductie naar k , waarin k het aantal eindige gebieden in de representatie P is.

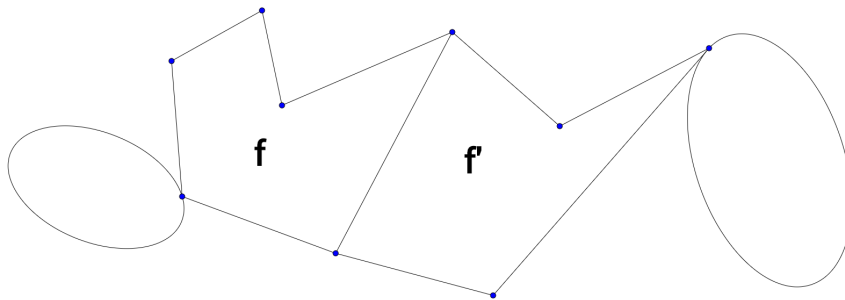
Inductie Hypothese: Voor alle $k \in \mathbb{N}$ is er voor P een equivalente P' met rechte lijnen. $k = 1$: Er is maar een eindig gebied (f). Dus dit gebied kun je altijd tot een convexe veelhoek vormen.

FIGUUR 4.3: Willekeurig gebied $\rightarrow$ Convex gebied

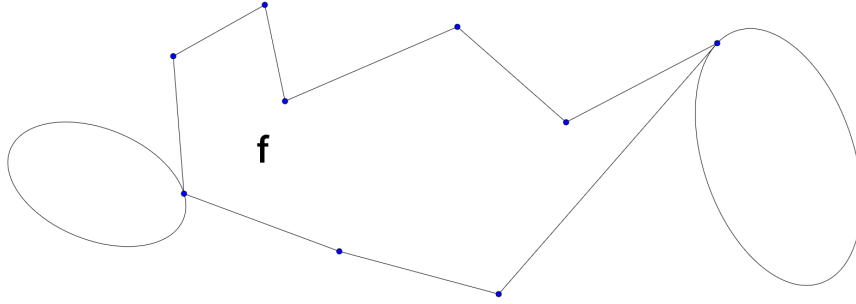
$k \geq 1 \rightarrow k + 1$: Neem aan: voor elke representatie P met k gebieden van elke graaf G is er een equivalente representatie P' . Bekijk een representatie P_{k+1} van G met $k + 1$ gebieden, een daarvan heet f . Stel elke lijn die f insluit, sluit ook het oneindige gebied in.

FIGUUR 4.4: Elke lijn die f insluit, sluit ook het oneindige gebied in

Dan is de grens die het oneindige gebied insluit geen cykel. Dus er is minstens één lijn die f insluit, maar ook een ander eindig gebied, zeg f' .

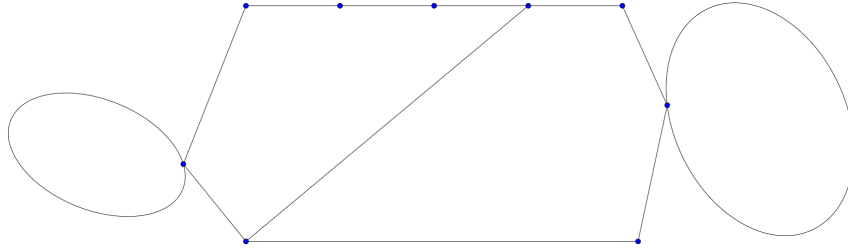
FIGUUR 4.5: Er is minstens één lijn die f insluit, maar ook een ander eindig gebied, zeg f'

In het gedeelte waar $f \cup f'$ is, kunnen we f en f' opnieuw tekenen zodanig dat de rand $f \cup f' \setminus (f \cap f')$ een (lege) veelhoek is, dit wordt de nieuwe f .



FIGUUR 4.6: f en f' vormen samen een gebied ingesloten door een cykel

Nu is deze graaf een representatie met k gebieden waarvan een gebied f , dus met de inductie hypothese kunnen we een rechtlijnige representatie P' vinden met f een convex gebied. Omdat f convex is, kunnen de lijnen die weggehaald zijn, rechtlijnig en planair ingevoegd worden in de nieuwe representatie.



FIGUUR 4.7: De rechtlijnige planaire representatie

Conclusie: Voor alle $k \in \mathbb{N}$ is er voor P een equivalente P' met rechte lijnen, hiermee is de stelling bewezen. $\square$

Uit de stelling 4.6 volgt samen met lemma 4.5 dat voor elke willekeurige graaf G geldt: $\bar{\theta}(G) = 1 \Leftrightarrow \theta(G) = 1$.

4.3 Ingebedde dikte $\hat{\theta}(G)$

Definitie 4.7 (Punt-identificatie). Laten G_1 en G_2 grafen zijn, met $v \in G_1$ en $w \in G_2$. Deze twee punten kun je met elkaar *identificeren*.

Definitie 4.8 (Inbedding). Zij $G = (V, E)$ een graaf. De *inbedding* van graaf G is een tekening van de graaf op een oppervlak zodanig dat de lijnen niet snijden. In het bijzonder kunnen planaire grafen ingebed worden in het platte vlak.

Zij G_1 en G_2 grafen waarvan alle punten met elkaar zijn geïdentificeerd (zie definitie 4.7). Dan hebben deze grafen *dezelfde inbedding* als de tekeningen van de grafen zodanig op elkaar passen dat punten die met elkaar zijn geïdentificeerd, op elkaar liggen.

Definitie 4.9 (Ingebedde dikte $\hat{\theta}(G)$). De *ingebbede dikte* van graaf G is de dikte van G voorwaarde dat de planaire subgrafen allemaal dezelfde inbedding hebben.

Notatie: $\hat{\theta}(G)$

Voor stelling 4.12 hebben we wat topologie nodig. Dit is net iets anders dan kijken naar de dikte van een graaf.

Definitie 4.10 ($f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$). Laat G een graaf zijn. Dan kunnen we $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiëren als een continue functie van de graaf $G = (V, E)$ naar een inbedding op $\mathbb{R}^2$.

Lemma 4.11 (Inbedding punten G_i). Laat G een graaf met planaire subgrafen $G_1, \dots, G_r$ en bekijk $f_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ voor $1 \leq i \leq r$. Dan is er een homeomorfisme $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zodanig dat voor $g_i = h \circ f_i$ geldt:

$$g_i|_{V(G_i) \cap V(G_j)} = g_j|_{V(G_i) \cap V(G_j)}. \quad (4.1)$$

In andere woorden: als de planaire subgrafen $G_1, \dots, G_r$ van G een inbedding hebben in $\mathbb{R}^2$, dan is het mogelijk $\mathbb{R}^2$ zo te vervormen dat gelijke punten op elkaar liggen. Het bewijs van dit lemma wordt geleverd in *Thickness and Coarseness of Graphs* door P. Kainen [8].

Stelling 4.12 ($\theta(G) = \hat{\theta}(G)$). [10] Gegeven een graaf G met dikte $\theta(G)$. Dan bestaat er een tekening van G , en er bestaan subgrafen $G_1, \dots, G_{\theta(G)}$ waarvan de vereniging gelijk is aan G , zodanig dat de tekening van G begrensd op G_i een planaire inbedding van G_i is, voor $1 \leq i \leq \theta(G)$. In andere woorden: $\theta(G) = \hat{\theta}(G)$.

Bewijs. [8] $\theta(G) \leq \hat{\theta}(G)$ is vanzelfsprekend. Als er een representatie van G is met $\hat{\theta}(G)$ planaire subgrafen met gelijke inbedding die samen G vormen, zijn dit in het planaire subgrafen, dus zijn er $\hat{\theta}(G)$ planaire subgrafen waarvan de vereniging G is, dus $\theta(G) \leq \hat{\theta}(G)$.

$\theta(G) \geq \hat{\theta}(G)$: Bekijk G met $\theta(G) = \theta$ planaire subgrafen die samen G vormen. Noem ze $G'_1, \dots, G'_\theta$. Als $E(G'_i) \cap E(G'_j) \neq \emptyset$ voor $1 \leq i < j \leq \theta$, haal alle dubbele lijnen dan weg uit G'_j . De nieuwe grafen zonder dubbele lijnen noem ik $G_1, \dots, G_\theta$. De vereniging hiervan is nog steeds G , omdat elke lijn nog steeds in een van de subgrafen zit. Bekijk $f_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, de inbedding van elke subgraaf in $\mathbb{R}^2$. Met lemma 4.11 krijgen we $g_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ voor $1 \leq i \leq \theta$. Omdat $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ geldt voor $1 \leq i < j \leq \theta$ kunnen we $g : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiëren zdd $g|_{G_i} = g_i$ voor $1 \leq i \leq \theta$. Hiermee kunnen we θ subgrafen maken van G , allemaal met gelijke inbedding zodanig dat de vereniging G vormt. Deze representaties van de subgrafen zijn nog steeds planair. Hieruit volgt dat $\theta = \theta(G) \geq \hat{\theta}(G)$. $\square$

Hoofdstuk 5

RIPS (Rechtlijnige Ingebedde Planaire Subgrafen)

In de vorige hoofdstukken hebben we het over de dikte van grafen gehad. Hierbij keken we naar planaire subgrafen waarvan de vereniging weer de originele graaf vormt. In het bijzonder hadden we de voorwaarde gesteld dat de grafen rechtlijnig ($\bar{\theta}(G)$) of met gelijke inbedding ($\hat{\theta}(G)$) moesten zijn. In dit hoofdstuk bekijken we de combinatie hiervan:

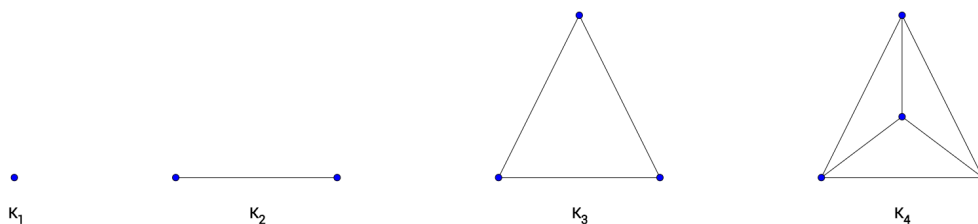
Definitie 5.1 (Rechtlijnige ingebedde dikte $\tilde{\theta}(G)$). De *rechtlijnige ingebedde dikte* van G is precies het minimale aantal planaire subgrafen van G waarvan de vereniging weer G vormt, op voorwaarde dat deze subgrafen rechtlijnig zijn én allemaal gelijke inbedding hebben.

Notatie: $\theta(G)$

Vanuit deze defenitie is het logisch om te kijken naar rechtlijnige ingebedde planaire subgrafen van een graaf G :

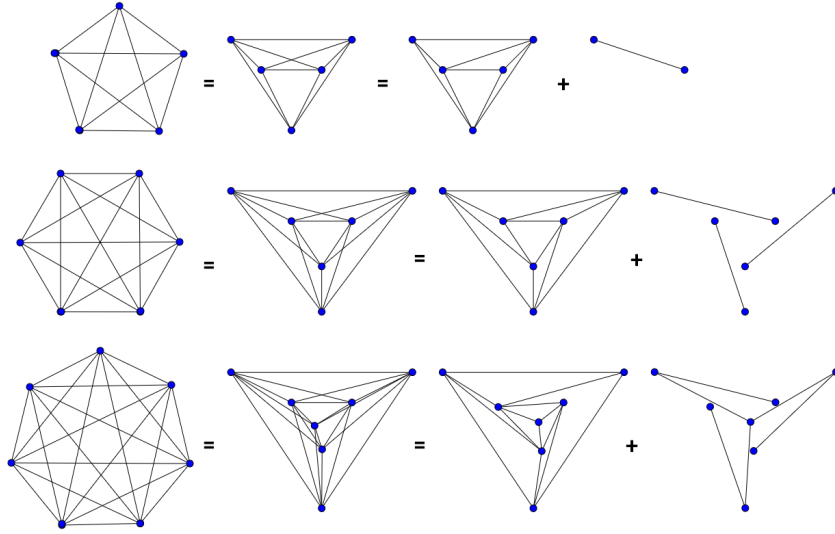
Definitie 5.2 (RIPS). Een *RIPS* G' van graaf G is een rechtlijnige ingebedde planaire subgraaf van G .

Dit fenomeen is niet terug te vinden in de literatuur. Daarom is het handig eerst een idee te krijgen van hoe RIPSen zich gedragen. Dit heb ik gedaan aan de hand van de volledige grafen K_n . De K_1 tot en met de K_4 zijn planair dus het makkelijkst te herleiden. Uit stelling 4.6 volgt dat, omdat ze een planaire representatie hebben, ze ook een rechtlijnige representatie hebben. Omdat ze planair zijn, hebben we maar 1 planaire subgraaf nodig en hoeven we niet te kijken naar de inbedding van de punten. Conclusie: Voor $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ geldt $\tilde{\theta}(K_n) = \theta(K_n)$. Onderstaand figuur is gelijk aan figuur 2.1, maar zal ik hier voor de volledigheid nog een keer toevoegen.



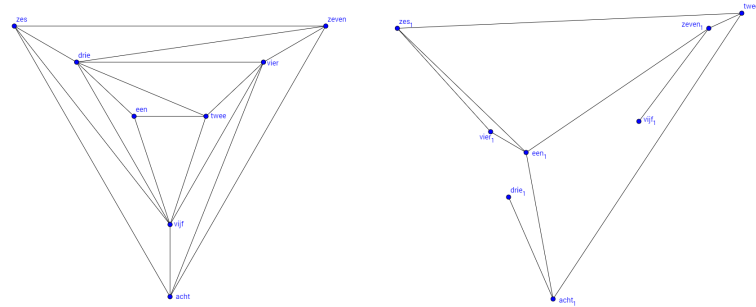
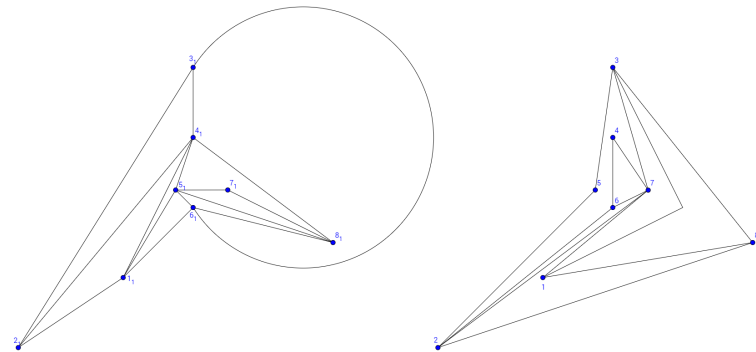
FIGUUR 5.1: De RIPSen van K_1 t/m K_4

Vervolgens kijken we naar de K_5 tot en met de K_8 , waarvan we weten dat $\bar{\theta}(K_n) = 2$. De eerste drie van deze grafen waren met behulp van de constructie van de Catlin's grafen relatief makkelijk te herleiden. In deze constructie worden er 3-cykels in elkaar geplaatst en de overige punten in het midden van de middelste cykel. Dit werkte voor de K_5 , de K_6 en de K_7 ook zo en leverde zelfs een representatie op met voor elke graaf het minste aantal snijpunten $v(K_n)$.

FIGUUR 5.2: De RIPSen van K_5 , K_6 en K_7

Omdat in het algemeen geldt $\tilde{\theta}(K_n) \geq \theta(K_n)$, volgt met deze representaties dat ook voor $n \in \{5, 6, 7\}$ geldt: $\tilde{\theta}(K_n) = \theta(K_n)$.

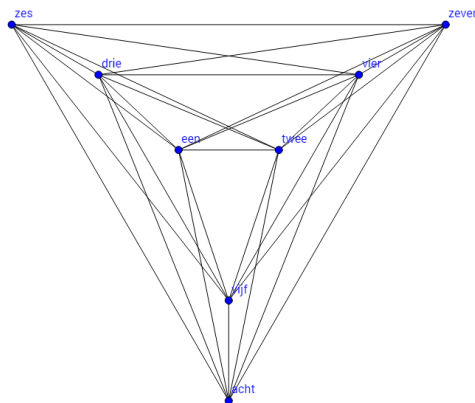
Vanaf K_8 wordt het echter lastiger. We weten dat $\theta(K_8) = 2$ (K_9 is de kleinste volledige graaf met $\theta(K_n) = 3$ [11]), maar het is lastig RIPSen te vinden waarvan de vereniging weer de K_8 vormt. Er geldt al: $\theta(K_8) = \bar{\theta}(K_8) = \hat{\theta}(G) = 2$. Hieronder staan twee representaties van planaire subgrafen die respectievelijk rechtlijnig en met gelijke inbedding zijn.

FIGUUR 5.3: $\bar{\theta}(K_8) = 2$ FIGUUR 5.4: $\hat{\theta}(G) = 2$

De vraag is nu: Bestaan er G_1 en G_2 rechte lijnige grafen met gelijke inbedding zodanig dat de vereniging precies K_8 is? Of anders geformuleerd: geldt $\tilde{\theta}(K_8) = \theta(K_8)$? Hiervoor gaan we een representatie proberen te vinden van de K_8 met 2 RIPSen. In de volgende paragraaf staat mijn constructie hiervoor beschreven.

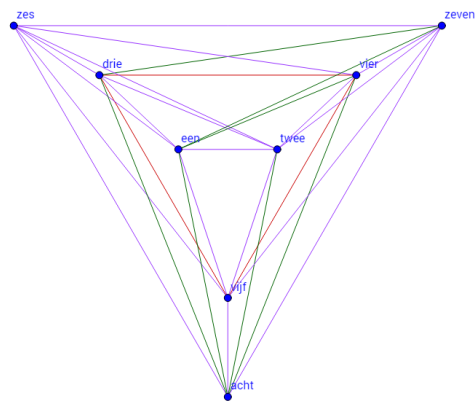
5.1 Constructie RIPSen K_8

We beginnen onze zoektocht naar de RIPSen van de K_8 op dezelfde manier als bij de K_1 tot en met de K_7 , door middel van 3-cykels. We kunnen twee 3-cykels in elkaar plaatsen met in het midden de twee overige punten.



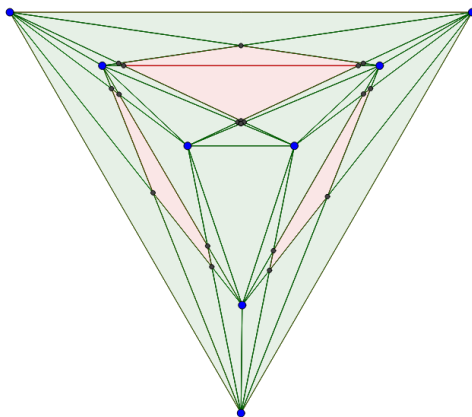
FIGUUR 5.5: Constructie K_8 : 1

Vervolgens gaan we de lijnen kleuren. Hiervoor nemen we drie kleuren: groen voor de eerste RIPS, paars voor de tweede en rood voor de lijnen die we in geen van beide RIPSen kunnen plaatsen. In deze kleuring mogen lijnen die elkaar snijden niet dezelfde kleur krijgen. Doordat deze graaf rechte lijnig is, zijn de subgrafen dat ook. Door de lijnen in één graaf te houden tijdens het kleuren, weten we zeker dat de inbedding gelijk blijft. In deze eerste representatie houden we drie lijnen over die in geen van beide RIPSen te plaatsen zijn. Dit is de eerste verdeling van de K_8 in drie RIPSen.

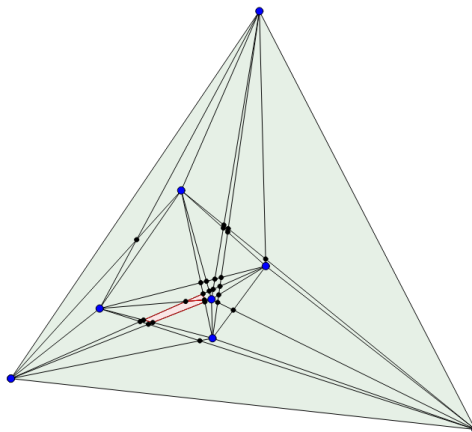


FIGUUR 5.6: Constructie K_8 : 2

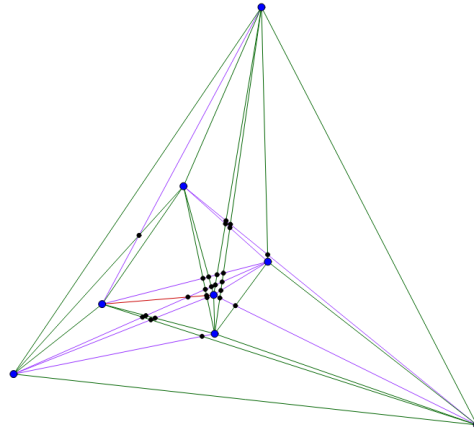
Vervolgens gaan we de "probleem gebieden" bekijken. Hiervoor kijken we naar "cykels" van snijpunten. Dit zijn andere cykels dan die we hiervoor hebben gezien, omdat die cykels alleen gevormd worden door gehele lijnen tussen punten. Deze "cykels" van enkel snijpunten zullen we *snijpunt-cykels* noemen, om verwarring te voorkomen. Bij een snijpunt-cykel kunnen we iets zeggen over de kleuring. Een oneven snijpunt-cykel is namelijk niet te kleuren met twee kleuren. Als we een lijn paars kleuren, moet de volgende groen worden omdat die snijdt met de eerste lijn. Zo geldt dat ook voor de andere lijnen in de snijpunt-cykel. Echter, omdat de snijpunt-cykel oneven is, komen we voor de laatste lijn een kleur tekort. Merk op: zodra een van de punten in de snijpunt-cykel een normaal punt is, gaat dit niet meer op. We kunnen dan met een lijn grenzend aan het normale punt beginnen met kleuren. De laatste lijn krijgt dan dezelfde kleur, maar dat maakt niet uit omdat deze lijnen elkaar niet snijden. Met dit inzicht kunnen we alle oneven snijpunt-cykels van alleen snijpunten rood gaan kleuren en alle snijpunt-cykels die even zijn of waar een gewoon punt in ligt, groen. Daar komt onderstaand plaatje uit:

FIGUUR 5.7: Constructie K_8 : 3

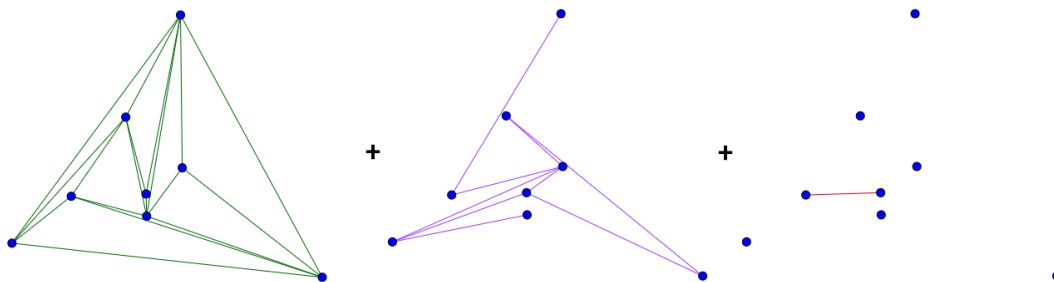
We zien hier dat er vier oneven snijpunt-cykels zijn. Vanaf hier wordt de constructie wat rommeliger. We moeten met de punten gaan schuiven en kijken wat minder oneven snijpunt-cykels oplevert. Uiteindelijk zitten er in de volgende representatie nog maar twee oneven snijpunt-cykels en wel zo dat ze naast elkaar liggen.

FIGUUR 5.8: Constructie K_8 : 4

In deze representatie is het kleuren van de graaf ineens veel overzichtelijker. Met deze twee snijpunt-cykels weten we dat er minstens een lijn in mijn graaf rood gekleurd moet worden. Door de lijn tussen deze snijpunt-cykels rood te kleuren, is de rest heel makkelijk in twee kleuren te kleuren.

FIGUUR 5.9: Constructie K_8 : 5

Dit is een representatie van de K_8 die op een lijn na onder te verdelen is in twee $RIPSen$. Voor de volledigheid zijn ze in volgend plaatje ook nog los van elkaar getekent.

FIGUUR 5.10: De 3 $RIPSen$ van K_8

Deze $RIPSen$ zijn het bewijs dat $\tilde{\theta}(K_n) \leq 3$. Hiermee is de vraag ($\tilde{\theta}(K_8) = \theta(K_8)$?) echter nog niet beantwoord.

Hoofdstuk 6

Conclusie

We hebben nu gekeken naar planaire grafen, waarvan de dikte $\theta(G) = 1$ en het snijgetal $\nu(G) = 0$. We hebben ook gekeken naar Catlin's grafen, volledige (bipartiete) grafen en in het bijzonder de K_1 tot en met de K_8 . We weten dat een graaf G planair is $\Leftrightarrow G$ bevat geen subgrafen die homeomorf zijn aan K_5 of $K_{3,3}$. We kunnen met behulp van boven- en ondergrenzen een inschatting maken van hoe groot het snijgetal van een graaf is. We hebben bewezen dat als een graaf planair is, hij ook een rechte lijnige representatie heeft. We hebben plaatjes gezien waaruit volgt dat voor de K_1 tot en met de K_7 geldt dat $\theta(K_n) = \tilde{\theta}(K_n)$ en tot slot: $2 = \theta(K_8) \leq \tilde{\theta}(K_8) \leq 3$. Maar wat weten we nog niet?

Open vragen:

- $\tilde{\theta}(K_8) = \theta(K_8) = 2$? Hiervoor moeten we nog een lijn in een van de twee andere subgrafen krijgen. Het is aannemelijk omdat $\theta(K_8) = \bar{\theta}(K_8) = \hat{\theta}(K_8) = 2$ en omdat $\theta(K_n) = \tilde{\theta}(K_n)$ voor $n \in \mathbb{N}$. Echter als toch geldt $\tilde{\theta}(K_8) \neq \theta(K_8)$, wat is hier de reden van? We weten dat $\theta(K_9) = 3$, dus het is niet onwaarschijnlijk dat met twee extra voorwaarden de dikte van K_8 een hoger wordt. Hoe kunnen we dit bewijzen? Wat hebben we hier nog voor nodig?
- Hoe zit het met de RIPSen van $K_{n,m}$? Deze vraag ligt erg dicht bij de vraag over de RIPSen van de K_n . Toch verdient deze familie het om hiernaar te kijken. Vooral omdat de bipartiete grafen vanaf de $K_{3,3}$ al niet meer planair zijn. Hebben we hier ook grafen waarvan de dikte niet per se gelijk hoeft te zijn aan de rechte lijnige ingebedde dike?

Met deze vragen wil ik mijn scriptie graag afsluiten. Ik hoop wat meer inzicht in de planairheid van de volledige grafen en grafen in het algemeen gegeven te hebben.

Definities

1.1	Definitie (Graaf)	1
1.2	Definitie ((Maximale) graad)	2
1.3	Definitie (Subgraaf)	2
1.4	Definitie (Volledige graaf)	2
1.5	Definitie (Wandeling/Circuit/Cykel)	2
1.6	Definitie (Samenhangend)	2
1.7	Definitie (Bos/Boom)	2
2.1	Definitie (Planaire graaf/representatie)	3
2.2	Definitie (Gebied)	3
2.6	Definitie ((Volledige) bipartiete graaf)	5
2.10	Definitie (Homeomorf)	6
3.1	Definitie (Snijgetal)	9
3.3	Definitie (Verantwoordelijkheid)	10
3.8	Definitie (Rechtlijnig/ Geometrisch snijgetal $\bar{v}(G)$)	15
4.1	Definitie (Dikte $\theta(G)$)	17
4.2	Definitie (Catlin's graaf)	17
4.3	Definitie (Rechtlijnige/Geometrische dikte $\bar{\theta}(G)$)	19
4.4	Definitie (Equivalenten representatie)	19
4.7	Definitie (Punt-identificatie)	22
4.8	Definitie (Inbedding)	22
4.9	Definitie (Ingebedde dikte $\check{\theta}(G)$)	22
4.10	Definitie ($f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$)	23
5.1	Definitie (Rechtlijnige ingebedde dikte $\tilde{\theta}(G)$)	25
5.2	Definitie (RIPS)	25

Stellingen

1.8	Stelling (Boom)	2
2.3	Stelling (Eulerstelling)	3
2.5	Stelling (K_5)	5
2.9	Stelling ($K_{3,3}$)	6
2.11	Stelling (Kuratowski)	7
3.2	Stelling (Ondergrens $v(G)$)	9
3.5	Stelling (Bovengrens $v(K_n)$)	11
3.6	Stelling (Ondergrens $v(K_n)$)	13
3.7	Stelling (Bovengrens $v(K_{n,m})$)	13
3.9	Stelling (Rechtlijnig snijgetal $\bar{v}(G)$)	15
3.10	Stelling ($\bar{v}(G) = 0 \Leftrightarrow v(G) = 0$)	16
4.6	Stelling ($\bar{\theta}(G) = 1 \Leftrightarrow \theta(G) = 1$)	20
4.12	Stelling ($\theta(G) = \dot{\theta}(G)$)	23

Referenties

- [1] R. Barrow. *Proofs that K_5 and $K_{3,3}$ are not planar*. Youtube. 2009. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=YqEeaudxghE>.
- [2] V W Bryant. "Straight line representations of planar graphs". In: *Elemente der Mathematik* 44 (1989), pp. 64–66.
- [3] Nathaniel Dean Daniel Bienstock. "Bounds for rectilinear crossing numbers". In: *Journal of Graph Theory* 17 (1993), 333–348. URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jgt.3190170308/full>.
- [4] Margaret M. Fleck. *Planar Graphs II*. College aantekeningen. 2008.
- [5] Richard K Guy. *Graph Theory and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 1972, pp. 111–124. ISBN: 978-3-540-38114-3. URL: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0067363>.
- [6] Gerjan Hebbink. *Planaire en toroïdale grafen*. Bachelorscriptie. 2010. URL: <http://www.math.ru.nl/OpenGraphProblems/Gerjan/Bachelorscriptie/%20Gerjan%20Hebbink.pdf>.
- [7] U S R Murty J A Bondy. *Graph theory with applications*. 5th ed. Elsevier Science Publishing Co., Inc, 1976. ISBN: 0-444-19451-7. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.721.3161&rep=rep1&type=pdf>.
- [8] Paul C. Kainen. "Thickness and coarseness of graphs". In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (1973), pp. 88–95. URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02992822>.
- [9] Frank T Leighton. "New lower bound techniques for VLSI". In: *Foundations of Computer Science* 22 (1981). URL: <http://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4568311/>.
- [10] Annegret Liebers. "Planar Graphs". In: *Journal of Graph Algorithms and Applications* 5.1 (2001), 1–74. URL: <http://www.emis.ams.org/journals/JGAA/accepted/01/Liebers01.5.1.pdf>.
- [11] Daniel S Hirschberg Michael B Dillencourt David Eppstein. "Geometric Thickness of Complete Graphs". In: *Journal of Graph Algorithms and Applications* 4.3 (2000), pp. 5–17. URL: <http://www.emis.ams.org/journals/JGAA/accepted/00/Dillencourt+00.4.3.pdf>.
- [12] Jason J Molitierno. *Applications of Combinatorial Matrix Theory to Laplacian Matrices of Graphs*. CRC Press, 2012. ISBN: 978-1-4398-6337-4.
- [13] Onbekend. *Graph is Bipartite iff No Odd Cycles*. Wiki Proofs. 2013. URL: https://proofwiki.org/wiki/Graph_is_Bipartite_iff_No_Odd_Cycles.
- [14] Wouter van Orsouw. *Zarankiewicz's Conjecture*. Online gepubliceerd. 2010. URL: <http://www.math.ru.nl/OpenGraphProblems/Wouter/>.