

RADBOD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

$L(2,1)$ -LABELING VAN GRAFEN

Naam:	Myrte klein Brink
Studentnummer:	4166140
Studie:	Bachelor Wiskunde
Begeleider:	Dr. W. Bosma

11 juli 2014

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	L(2,1)-labeling	4
2.1	Achtergrondkennis	4
2.2	Introductie L(2,1)-labeling	6
2.3	Paden en cykels	7
3	Δ^2-vermoeden	10
3.1	Bewezen bovengrenzen	10
3.2	Diameter 2 grafen	12
3.3	Δ^2 -vermoeden	14
4	Gewogen grafen	16
4.1	(G, H) -labeling probleem	16
4.2	Kleurverbindingsgraaf	17
4.3	Bovengrens	20
5	Oneindige familie	23

Hoofdstuk 1

Inleiding

Het idee voor $L(2,1)$ -labeling, het onderwerp van deze scriptie, komt van het toekennen van frequenties aan radiozenders, zoals zendmasten. Als deze zenders dicht bij elkaar liggen kunnen frequenties die op elkaar lijken met elkaar gaan interfereren. Om dit te voorkomen moeten deze frequenties dus meer van elkaar verschillen. Dit kan concreet worden gemaakt door de radiozenders voor te stellen in een graaf, elke zender is dan een punt van de graaf en twee punten worden verbonden als die twee zenders zeer dicht bij elkaar staan.

$L(2,1)$ -labeling is dan een labeling van de punten van zo'n graaf met natuurlijke getallen. Deze labeling moet voldoen aan twee eisen:

- i) Als twee punten verbonden zijn moeten de labels van die punten minstens twee verschillen.
- ii) Als twee punten niet verbonden zijn, maar wel een gemeenschappelijke buur hebben, moeten de labels minstens een verschillen.

Door aan deze eisen te voldoen worden aan zenders die dicht bij elkaar staan niet dezelfde frequenties toegekend en bij zenders die zeer dicht bij elkaar staan verschillen de frequenties nog meer.

Deze scriptie zal zich vooral richten op de minimale breedte van een $L(2,1)$ -labeling. De breedte van zo'n labeling is het verschil tussen het grootste en het kleinste label dat wordt gebruikt. Er bestaat een vermoeden, opgesteld door de wiskundigen Griggs en Yeh, dat de minimale breedte van een graaf kleiner of gelijk is aan het kwadraat van de maximum graad van die graaf. Dit vermoeden is nog niet voor alle grafen bewezen, maar in deze scriptie zullen een aantal bewijzen voor bovengrenzen van speciale grafen worden gegeven.

Waarom $L(2,1)$ en niet $L(h,k)$?

Hoofdstuk 2

L(2,1)-labeling

In dit hoofdstuk zullen eerst wat standaard definities uit de grafentheorie gegeven worden, daarna worden de definities die met L(2,1)-labeling te maken hebben geïntroduceerd.

2.1 Achtergrondkennis

Grafentheorie is niet voor elke wiskundestudent verplicht, dus zullen een aantal begrippen worden uitgelegd die nodig zijn om deze scriptie te kunnen begrijpen. Om te beginnen volgt de definitie van een graaf.

Definitie 2.1. Een *graaf* G is een paar (V, E) , waarbij V een eindige verzameling is en E een verzameling van paren uit V . De elementen uit V worden *punten* genoemd, de elementen uit E zijn *lijnen*.

Definitie 2.2. Twee punten $x, y \in V(G)$ heten *verbonden* als $\{x, y\} \in E(G)$. x en y zijn dan *buren* van elkaar.

Definitie 2.3. Een *simpele graaf* is een graaf zonder meerdere lijnen tussen twee punten en geen lijnen van een punt naar datzelfde punt terug.

Definitie 2.4. De *graad* van een punt v , genoteerd met $d(v)$, is gelijk aan het aantal buren van v . De *maximum graad*, $\Delta(G)$, van graaf G is het maximum van alle graden die in graaf G voorkomen. Zo ook is de *minimum graad*, $\delta(G)$, het minimum van alle graden.

Definitie 2.5. Een graaf heet *k-regulier* als alle punten graad k hebben.

Definitie 2.6. Een *wandeling* in een graaf G is een rij punten $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ met v_{i-1} verbonden met v_i voor alle $1 \leq i \leq k$, k is de *lengte* van de wandeling. Als een punt maximaal een keer voorkomt in de wandeling, heet de wandeling een *pad*. Ook hier is k de lengte van het pad.

Definitie 2.7. Een *gesloten wandeling* is een wandeling $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ waarin het beginpunt en het eindpunt hetzelfde is, dus $v_0 = v_k$. Als $k \geq 3$ en alle v_i verschillend zijn heet de gesloten wandeling een *cykel*.

Definitie 2.8. Een graaf G heet *samenhangend* als er tussen elke twee punten een pad loopt.

Definitie 2.9. De *afstand* $d(x, y)$ tussen twee punten $x, y \in V(G)$ is de lengte van het kortste pad tussen deze twee punten. Als er geen pad mogelijk is dan is de afstand oneindig. De *diameter* van een samenhangende graaf is de maximale afstand tussen twee punten in G .

Definitie 2.10. Een pad waarin elk punt van de graaf precies een keer voorkomt heet een *Hamiltonpad*. Een cykel met alle punten van de graaf heet een *Hamiltoncykel*. Een graaf is een *Hamilton-graaf* als het een Hamiltoncircuit bevat.

Definitie 2.11. H is een *deelgraaf* van een graaf G , $H \subset G$, als $V(H) \subset V(G)$ en $E(H) \subset E(G)$.

Definitie 2.12. Het *kwadraat* G^2 van een graaf G wordt als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} V(G^2) &= V(G) \\ E(G^2) &= E(G) \cup \{xy : d(x, y) = 2\} \end{aligned}$$

Definitie 2.13. Het *complement* G^c van een graaf G is de graaf met $V(G^c) = V(G)$ en $E(G^c)$ alle paren van punten die niet in $E(G)$ zitten.

Definitie 2.14. Een graaf $G = (V, E)$ heet *bipartiet* als V op te delen is in twee verzamelingen U en W zodat elke lijn een punt in U en een punt in W bevat.

Definitie 2.15. Een deelverzameling van $V(G)$ heet een *stabiele verzameling* van graaf G als geen twee punten uit de deelverzameling in G verbonden zijn. Een *2-stabiele verzameling* is een deelverzameling van de punten van G zodat alle punten minimaal op afstand 3 van elkaar liggen. Een stabiele verzameling U is *maximaal* als er geen punt uit G is zodat U met dat punt nog steeds stabiel is.

Definitie 2.16. Een *kleuring* van G is een functie $f : V(G) \rightarrow K$ met K de verzameling kleuren zodat $f(x) \neq f(y)$ als $\{x, y\} \in E(G)$. Het minimaal aantal kleuren dat nodig is om een graaf G op deze manier te kleuren is het *kleurgetal* $\chi(G)$.

Definitie 2.17. Een *klasse* C_i voor $i \in K$ is een deelverzameling van $V(G)$ met alle punten die kleur i hebben. Een kleuring heet *billijk* als het aantal punten in de klassen met maximaal een verschilt.

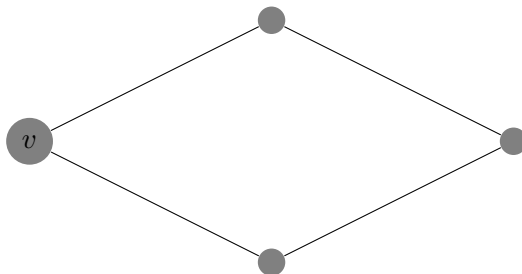
2.2 Introductie L(2,1)-labeling

Deze sectie zal alle definities rond de L(2,1)-labeling geven.

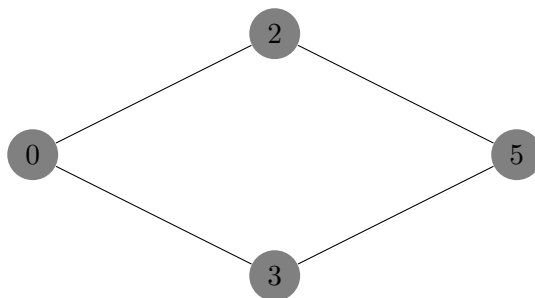
Definitie 2.18. Een $L(2,1)$ -labeling van een simpele graaf G is een functie $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ zodat $|f(x) - f(y)| \geq 2$ als $\{x, y\} \in E(G)$ en $|f(x) - f(y)| \geq 1$ als $d(x, y) = 2$.

Een L(2,1)-labeling geeft dus aan elk punt een label uit $\mathbb{N}$. Hieraan zit een bepaalde eis, namelijk dat de labels van burenen minstens twee moeten verschillen en dat de labels van punten die op afstand 2 liggen minstens een verschillen.

Voorbeeld 2.19. Neem een graaf G op vier punten:

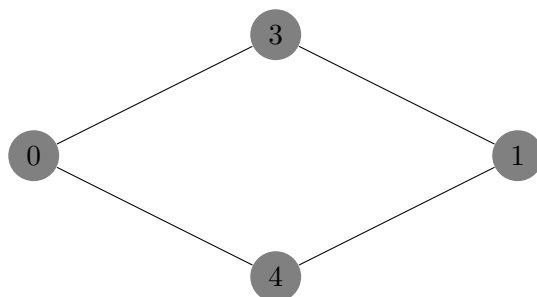


Begin nu met het punt v het label 0 te geven. De burenen van v moeten labels krijgen die minstens twee verschillen met 0, dus één punt kan het label 2 krijgen. Maar omdat de burenen zelf op afstand 2 van elkaar liggen mogen ze niet allebei label 2 krijgen, dus de ander krijgt label 3. Het laatste punt moet dan weer minstens twee verschillen van de labels 2 en 3, maar ook minstens een van het label 0, dus dan is de beste optie het label 5. De L(2,1)-labeling wordt dan:



Definitie 2.20. De *wijde* van een L(2,1)-labeling van graaf G is het verschil tussen het grootste en het kleinste label gebruikt bij die L(2,1)-labeling.

Voorbeeld 2.21. De wijde van de labeling in Voorbeeld 2.19 is $5 - 0 = 5$. Dit is echter niet de meest optimale manier om deze graaf te labelen. Bekijk namelijk de volgende L(2,1)-labeling:



Deze voldoet aan de eisen in de definitie. De wijdte van deze $L(2,1)$ -labeling is echter $4 - 0 = 4$.

Definitie 2.22. De *minimale wijdte* van een graaf G is het minimum van de wijdtes van de mogelijke $L(2,1)$ -labelingen van deze graaf. De minimale wijdte van G wordt aangegeven met $\lambda(G)$.

Voorbeeld 2.23. Bekijk weer Voorbeeld 2.19, deze labeling had duidelijk niet de minimale wijdte omdat Voorbeeld 2.21 een $L(2,1)$ -labeling met een kleinere wijdte geeft. Het blijkt dat dit ook de minimale wijdte is. Elk punt moet namelijk een verschillend label hebben omdat alle punten op maximaal afstand 2 van elkaar liggen. Stel dat we het label 4 niet mogen gebruiken, dan moet een punt label 0 krijgen en zijn burens labels 2 en 3, maar het laatste punt mag dan niet label 1 krijgen omdat dat een buur is van het punt met label 2. Het blijkt dus dat in dit geval $\lambda(G) = 4$.

2.3 Paden en cykels

De minimale wijdte is voor alle paden en cykels bekend. Dit zal ook dienen als een extra voorbeeld voor het bepalen van de minimale wijdte.

Stelling 2.24. Zij P_n een pad met n punten, dan geldt $\lambda(P_2) = 2$, $\lambda(P_3) = \lambda(P_4) = 3$ en $\lambda(P_n) = 4 \quad \forall n \geq 5$.

Bewijs. Zij $n = 2$, er zijn dan twee punten die burens van elkaar zijn. De labels hiervan moeten minstens twee verschillen. Labels 0 en 2 moeten dus gebruikt worden, de minimale is dan 2.



Zij $n = 3$, nu liggen alle punten op maximaal afstand 2 van elkaar. Er mogen dus niet dezelfde labels gebruikt worden. Alleen de labels 0, 1 en 2 gebruiken kan niet, omdat het label van het middelste punt minstens twee moet verschillen van de andere. Dit kan aan de ene kant met de labels 0 en 2, maar dan moet het punt aan de andere kant het label 1 krijgen, wat niet twee verschilt van 0 of 1. De minimale wijdte is dus sowieso minstens 3, aan de graaf hiernaast is te zien dat er ook een $L(2,1)$ -labeling met wijdte

3 mogelijk is, dus is dat de minimale breedte.



Zij $n = 4$, dit pad bevat het pad op drie punten, de minimale breedte kan dus niet minder dan 3 zijn. Er blijkt weer dat hiervoor een $L(2,1)$ -labeling mogelijk is, dus is ook voor $n = 4$ de minimale breedte gelijk aan 3.



Zij nu $n \geq 5$ en label de punten v_i voor $i \in \{1, \dots, n\}$ op de volgende manier:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \equiv 1 \pmod{5} \\ 3 & \text{als } i \equiv 2 \pmod{5} \\ 1 & \text{als } i \equiv 3 \pmod{5} \\ 4 & \text{als } i \equiv 4 \pmod{5} \\ 2 & \text{als } i \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

Het is nu goed te zien dat punten die hetzelfde label krijgen op grote afstand van elkaar liggen. Daarnaast kan snel worden gecontroleerd dat de labels van buren altijd minstens twee van elkaar verschillen. Dit is dus een $L(2,1)$ -labeling met breedte 4. $\lambda(P_n) \leq 3$ voor $n \geq 5$ kan niet, want als een punt label 2 krijgt dan moeten de punten daarnaast label 3 en 4 krijgen. Probeer te labelen met minimale breedte 3, dan kan een punt met label 2 een eindpunt zijn. Het punt daarna krijgt label 0, die daarna label 3, dan label 1, maar hierna is label 4 nodig. Probeer nu zonder het label 2 te gebruiken, dan is het voorbeeld van P_3 de enige mogelijkheid $\square$

Dit is nu eenvoudig uit te breiden tot cyclen, omdat een cykel niks anders is dan een pad waarbij de eindpunten worden verbonden.

Stelling 2.25. *Zij C_n een cykel met n punten. Dan geldt $\lambda(C_n) = 4 \forall n$.*

Bewijs. Zij $n = 3$, elk punt is hierbij een buur van elk ander punt. Dat betekent dat de labels van elke twee punten altijd twee moeten verschillen. Hiervoor worden dus de labels 0, 2 en 4 gebruikt. De minimale breedte is 4.

Zij $n = 4$, zie Voorbeeld 2.23, hierin is de minimale breedte voor een cykel met 4 punten bepaald.

Zij nu $n \geq 5$, C_n bevat P_n , dus $\lambda(G)$ is minimaal 4. Zij $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ de punten van C_n zodat voor $0 \leq i \leq n-2$ v_i verbonden is met v_{i+1} en v_{n-1} met v_0 . Er zijn drie mogelijkheden voor n :

1. $n \equiv 0 \pmod{3}$, definieer f dan als volgt:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \equiv 0 \pmod{3} \\ 2 & \text{als } i \equiv 1 \pmod{3} \\ 4 & \text{als } i \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

2. $n \equiv 1 \pmod{3}$, gebruik dezelfde f , maar definieer die anders in de punten $v_{n-4}, \dots, v_{n-1}$:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{als } i = n - 4 \\ 3 & \text{als } i = n - 3 \\ 1 & \text{als } i = n - 2 \\ 4 & \text{als } i = n - 1 \end{cases}$$

3. $n \equiv 2 \pmod{3}$, gebruik hierbij weer de f uit (1) en herdefinieer f in de punten v_{n-2}, v_{n-1} :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{als } i = n - 2 \\ 3 & \text{als } i = n - 1 \end{cases}$$

Het is eenvoudig te controleren punten op afstand 2 niet dezelfde labels krijgen en dat de labels van burens minstens twee verschillen. Er is dus een $L(2,1)$ -labeling mogelijk met wijdte 4, dus $\lambda(C_n) = 4$. $\square$

Het is niet altijd mogelijk om precies de minimale wijdte voor een graaf te geven. Daarom wordt er gezocht naar een bovengrens die geldt voor elke graaf, zodat er voor elke graaf iets te zeggen is over de minimale wijdte.

Hoofdstuk 3

Δ^2 -vermoeden

In dit hoofdstuk zal er worden gekeken naar een bovengrens voor de minimale wijdte. Griggs en Yeh [?] hebben in 1992 een vermoeden opgesteld, het Δ^2 -vermoeden. Dit zegt dat voor elke graaf G met maximum graad $\Delta \geq 2$ geldt dat $\lambda(G) \leq \Delta^2$. Dit vermoeden is alleen bewezen met bepaalde extra eisen. De beste bovengrens die voor elke willekeurige graaf G is bewezen is $\lambda(G) \leq \Delta(G)^2 + \Delta(G) - 2$ [?]. Dit hoofdstuk zal de bewijzen hiervoor geven.

3.1 Bewezen bovengrenzen

De eerste bovengrens die wordt behandeld is een bovengrens die eenvoudig te bewijzen is, Griggs en Yeh [?] hebben dit gedaan in hun artikel.

Stelling 3.1. *Zij G een simpele graaf met maximum graad Δ , dan geldt $\lambda(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$*

Bewijs. Orden de punten van G willekeurig en label ze op die volgorde steeds met het kleinst mogelijke label. Voor elk willekeurig punt v geldt dat het maximaal Δ burens heeft. Voor elk van die punten geldt hetzelfde, maar een van hun burens is punt v , dus zijn er maximaal $\Delta(\Delta - 1) = \Delta^2 - \Delta$ punten op afstand 2 van v . Voor het labelen van v kan je voor elke buur maximaal drie labels niet gebruiken, namelijk niet hetzelfde label, maar ook niet een minder of meer. Voor elk punt op afstand 2 is er een label dat niet gebruikt mag worden. Uiteindelijk geldt voor v dat er maximaal $3\Delta + \Delta^2 - \Delta = \Delta^2 + 2\Delta$ labels niet gebruikt kunnen worden, dus zijn er maximaal $\Delta^2 + 2\Delta + 1$ labels nodig. Aangezien dit geldt voor elk punt v , blijkt dus dat de minimale wijdte $\Delta^2 + 2\Delta$ is. $\square$

Hierna hebben Chang en Kuo [?] deze bovengrens verbeterd met een iets minder eenvoudig bewijs. Dit bewijs gebruikt een iteratieve methode waarin de eisen uit de definitie van een $L(2,1)$ -labeling slim zitten verwerkt.

Stelling 3.2. *Zij G een simpele graaf met maximum graad Δ , dan geldt $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta$.*

Bewijs. Het bewijs gaat op een iteratieve manier. Zij om te beginnen $S_{-1} = \emptyset$. Zolang nog niet alle punten gelabeld zijn en S_{i-1} bekend is, wordt S_i gedefinieerd. Alle punten in S_i zullen het label i krijgen. Het definiëren van S_i gaat als volgt:

Definieer $F_i = \{x \in V(G) : x \text{ niet gelabeld en } d(x, y) \geq 2 \ \forall y \in S_{i-1}\}$. Alle burens van punten met het label $i-1$ worden hieruit weggelaten, want die burens kunnen niet het label i krijgen. Nu moet er alleen nog voor worden gezorgd dat de punten die label i krijgen op minstens afstand 3 van elkaar liggen. Dat wordt gedaan door voor $S_i \subset F_i$ een maximale 2-stabiele deelgraaf te kiezen, maximaal betekent dat er geen punt uit F_i bij zou kunnen zodat S_i nog steeds een 2-stabiele graaf is. Dit gaat zo door totdat alle punten gelabeld zijn, deze methode zorgt er altijd voor dat dit gebeurt. Zou dit namelijk niet het geval zijn, dan is dus $S_i = \emptyset$ voor een i terwijl nog niet alle punten een label hebben. F_{i+1} is dan echter niet leeg en daardoor S_{i+1} ook niet leeg. Uiteindelijk krijgen dus alle punten een label. Deze labeling is zo gemaakt dat deze voldoet aan de eisen voor een L(2,1)-labeling.

Nu moet de wijdte van deze L(2,1)-labeling worden bepaald. Zij k het grootste label dat wordt gebruikt en zij x een punt met label k . Bekijk de volgende verzamelingen:

$$I_1 = \{i : 0 \leq i \leq k-1 \text{ en } d(x, y) = 1 \text{ voor een } y \in S_i\},$$

$$I_2 = \{i : 0 \leq i \leq k-1 \text{ en } d(x, y) \leq 2 \text{ voor een } y \in S_i\},$$

$$I_3 = \{i : 0 \leq i \leq k-1 \text{ en } d(x, y) \geq 3 \text{ voor alle } y \in S_i\}.$$

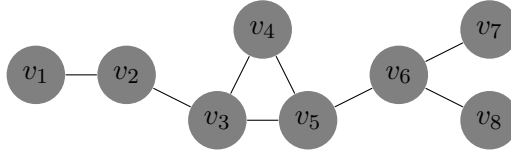
Elke $0 \leq i \leq k$ ligt in precies een van I_2 en I_3 , dus $|I_2| + |I_3| = k$.

Daarnaast geldt $|I_2| \leq \Delta^2$, want x heeft maximaal Δ burens. Deze burens hebben ook maximaal Δ burens, maar een daarvan is altijd x , dus zijn er maximaal $\Delta(\Delta - 1)$ punten op afstand 2 van x . In totaal geldt dus $|I_2| \leq \Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2$.

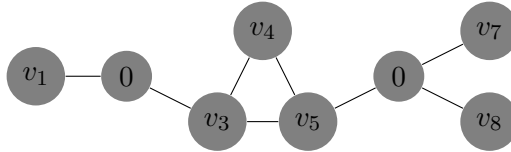
Nu moet alleen $|I_3|$ nog bepaald worden. x heeft maximaal Δ burens, dus $|I_1| \leq \Delta$. Voor elke $i \in I_3$ geldt dat $x \notin F_i$. x heeft namelijk label $k \geq i$ gekregen, als $x \in F_i$ voor $i \in I_3$ ligt x dus op afstand 3 van alle punten in S_i , wat betekent dat S_i niet maximaal is gekozen en zou x dus het label i hebben. Dus $x \notin F_i$ wat betekent, omdat x op dat moment nog niet gelabeld is dat $d(x, y) = 1$ voor een $y \in S_{i-1}$, dus $i-1 \in I_1$. Voor elke $i \in I_3$ geldt dus dat $i-1 \in I_1$, dus $|I_3| \leq |I_1|$.

Hiermee kan $\lambda(G)$ worden uitgeschreven: $\lambda(G) \leq k = |I_2| + |I_3| \leq |I_2| + |I_1| \leq \Delta^2 + \Delta$. $\square$

Voorbeeld 3.3. Het bewijs van Stelling 3.1 zal hier in een voorbeeld verduidelijkt worden. Bekijk de volgende graaf:



Deze wordt gelabeld volgens de methode van het bewijs. Begin dus met $S_{-1} = \emptyset$, dan is dus $F_0 = V(G)$. Kies hieruit een maximale 2-stabiele deelgraaf, bijvoorbeeld $S_0 = \{v_2, v_6\}$, deze punten krijgen dus label 0.



Herhaal deze stap voor volgende i :

$F_1 = \{v_4\}$, dan is $S_1 = \{v_4\}$

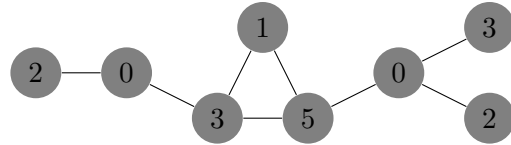
$F_2 = \{v_1, v_7, v_8\}$, kies $S_2 = \{v_1, v_7\}$

$F_3 = \{v_3, v_5, v_8\}$, kies $S_3 = \{v_3, v_8\}$

$F_4 = \emptyset$, dan is $S_4 = \emptyset$

$F_5 = \{v_5\}$, dan is $S_5 = \{v_5\}$

Nu zijn alle punten als volgt gelabeld:



Het is nu duidelijk dat dit een $L(2,1)$ -labeling is. In dit voorbeeld is $k = 5$, $I_1 = \{0, 1, 3\}$, $I_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ en $I_3 = \{4\}$.

De bovengrens is daarna verbeterd tot $\Delta^2 + \Delta - 1$ door [?]. De beste bovengrens die tot nu toe bewezen is voor elke willekeurige graaf met $\Delta \geq 2$ is $\Delta^2 + \Delta - 2$.

3.2 Diameter 2 grafen

Er zal nu worden gekeken naar een speciale familie van grafen, namelijk alle grafen met diameter 2. Bij deze grafen is het makkelijker om de minimale wijdte te bepalen, omdat de tweede eis van de definitie van een $L(2,1)$ -labeling nu betekent dat geen twee punten uit de graaf hetzelfde label mogen krijgen. De tweede eis is namelijk dat punten op afstand 2 van elkaar niet hetzelfde label mogen krijgen, en diameter 2 betekent juist dat elke twee punten in de graaf op maximaal afstand 2 van elkaar liggen. Het blijkt inderdaad dat er voor deze grafen een betere bovengrens kan worden gegeven.

Stelling 3.4. *Zij G een graaf met diameter 2, met maximum graad Δ . Dan is $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Bewijs. Als $\Delta = 2$ geldt dat G een pad is met 3 punten of een cykel met 4 of 5 punten. In Sectie 2.3 is laten zien dat $\lambda(G) \leq \Delta^2$.

Bekijk dus $\Delta \geq 3$. Stel $\Delta < \frac{|V|-1}{2}$, dan geldt $\delta(G^c) \geq \frac{|V|}{2}$. Nu wordt de stelling van Dirac[?] gebruikt, deze zegt dat als G een simpele graaf met $|V(G)| \geq 3$ minimum graad $\delta \geq \frac{|V(G)|}{2}$ heeft, dat dan G een Hamiltonpad heeft. G heeft diameter 2, dus moet $|V(G)| = |V(G^c)| \geq 3$, dus G^c bevat een Hamiltonpad. Nu zegt Lemma 3.5, dat hierna bewezen zal worden, dat er een injectie $f : V(G) \rightarrow [0, |V| - 1]$ bestaat zodanig dat $|f(x) - f(y)| \geq 2 \forall \{x, y\} \in E(G)$. Nu geldt dat f een $L(2,1)$ -labeling is en $\|f(G)\| = |V| - 1$. Bekijk een willekeurig punt x , elk punt ligt op maximaal afstand 2. x heeft maximaal Δ burens en maximaal $\Delta(\Delta - 1)$ punten op afstand 2. Dus het aantal punten van G is maximaal $\Delta + \Delta(\Delta - 1) + 1 = \Delta^2 + 1$ want dit zijn alle burens van x , alle punten op afstand 2 van x en x zelf. Nu geldt dus $\lambda(G) \leq \|f(G)\| = |V| - 1 \leq \Delta^2$.

Stel nu $\Delta \geq \frac{|V|-1}{2}$, dus $2\Delta + 1 \geq |V|$. Voor elke graaf geldt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, zie Lemma 3.6. Dus volgens Lemma 3.7 geldt $\lambda(G) \leq |V(G)| + \chi(G) - 2 \leq 2\Delta + 1 + \Delta + 1 - 2 = 3\Delta \leq \Delta^2$. Dit is verkeerd in het artikel, moet dat genoemd worden? $\square$

Lemma 3.5. *Zij G een graaf, dan bevat G^c een Hamiltonpad dan en slechts dan als er een injectie $f : V(G) \rightarrow [0, |V| - 1]$ bestaat zodanig dat $|f(x) - f(y)| \geq 2$ voor alle $\{x, y\} \in E(G)$.*

Bewijs. $\Rightarrow$: G^c bevat een Hamiltonpad, zij $P = \{v_0, v_1, \dots, v_{|V|-1}\}$ een Hamiltonpad van G^c . Definieer de injectie $f : V(G) \rightarrow [0, |V| - 1]$ door $f(v_i) = i$ voor alle $0 \leq i \leq |V| - 1$. Zij $\{x, y\} \in E(G)$ dan geldt $\{x, y\} \notin E(G^c)$. Dan is $x = v_i$ voor een $0 \leq i \leq |V| - 1$ en $y = v_j$ voor een $0 \leq j \leq |V| - 1$ met $|i - j| \geq 2$. Maar dan dus ook $|f(x) - f(y)| = |f(v_i) - f(v_j)| = |i - j| \geq 2$. $\Leftarrow$: Neem zo'n injectie f en bekijk zijn inverse f^{-1} . Maak nu een Hamiltonpad $P = \{v_0, v_1, \dots, v_{|V|-1}\}$ van G^c met $v_i = f^{-1}(i)$ voor $0 \leq i \leq |V| - 1$. Dit kan, want v_i kan niet verbonden zijn met v_{i+1} in G , omdat $|f(v_i) - f(v_{i+1})| = |i - (i + 1)| = 1$, dus voor alle $0 \leq i \leq |V| - 2$ is v_i verbonden met v_{i+1} in G^c . $\square$

Lemma 3.6. *Zij G met maximum graad Δ , dan geldt $\chi(G) \leq \Delta + 1$*

Bewijs. Het bewijs gaat met behulp van volledige inductie naar Δ .

Zij $\Delta = 0$, geen enkel punt is dan verbonden met een ander punt. Elk punt kan dus dezelfde kleur krijgen, dus $\chi(G) = 1 = \Delta + 1$.

Stel nu dat het lemma geldt voor $\Delta - 1$. Zij x een punt in G met graad Δ , haal dit punt met alle lijnen weg. De graad van alle burens van x gaat dus 1 omlaag, dus hier is geen punt meer met graad Δ . Als er nog een

punt is met graad Δ haal dan ook dit punt met alle lijnen weg. Herhaal dit per punt met graad Δ , tot er een graaf G' overblijft met maximum graad $\Delta - 1$. Het lemma geldt hiervoor, dus $\chi(G') \leq \Delta - 1 + 1 = \Delta$. Kleur G' met $\chi(G')$ kleuren, voeg nu alle weggehaalde punten en lijnen weer toe, zodat er weer graaf G komt en kleur al die weggehaalde punten met een nieuwe kleur. Deze punten zijn namelijk geen burens van elkaar zoals al is uitgelegd. Nu is G dus gekleurd met $\chi(G') + 1$ kleuren, dus $\chi(G) \leq \chi(G') + 1 \leq \Delta + 1$.

Het lemma geldt dus voor elke Δ . $\square$

Lemma 3.7. *Zij G een graaf met $\chi(G) = k$ en $|V| = v$, dan is $\lambda(G) \leq v + k - 2$.*

Bewijs. Laat G gekleurd zijn met k kleuren en definieer voor alle $1 \leq i \leq k$ $G_i \in G$ als alle punten uit G met kleur i . Nu is elke G_i een onafhankelijke deelverzameling van G . Zeg $|V(G_i)| = \nu_i$ en $V_i = V(G_i) = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,\nu_i}\}$ voor alle $1 \leq i \leq k$. Definieer nu de labeling f als volgt, voor alle $1 \leq j \leq \nu_i$:

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} j - 1 & \text{als } i = 1 \\ \sum_{t=1}^{i-1} \nu_t + i + j - 2 & \text{als } 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

Het is duidelijk dat de punten binnen een G_i allemaal verschillende labels krijgen, omdat i niet verandert en j steeds 1 omhoog gaat. De labels van deze punten hoeven niet twee te verschillen omdat ze dezelfde kleur hebben gekregen en dus geen burens van elkaar zijn. Nu moet er alleen nog worden gekeken naar het grootste label voor G_i en het kleinste label voor G_{i+1} , dat zijn dus het laatste label van G_i en het eerste label van G_{i+1} . Voor $i = 1$ geldt dat $\nu_1 - 1$ het grootste label in G_i is, en $\nu_1 + 2 + 1 - 2 = \nu_1 + 1$ het kleinste label in G_{i+1} . Bekijk nu $2 \leq i \leq k - 1$, het grootste label in G_i is nu $\sum_{t=1}^{i-1} \nu_t + i + \nu_i - 2 = \sum_{t=1}^i \nu_t + i - 2$ en het kleinste label in G_{i+1} is $\sum_{t=1}^{i+1-1} \nu_t + i + 1 + 1 - 2 = \sum_{t=1}^i \nu_t + i$. Deze verschillen dus altijd 2. Het is nu duidelijk dat twee punten nooit dezelfde labels hebben en dat alleen labels binnen een G_i 1 verschillen en het is duidelijk dat daar geen burens van elkaar zijn. f is dus een L(2,1)-labeling.

Het kleinste label dat gebruikt wordt is duidelijk 0, voor $i = 1$ en $j = 1$. Het grootste label dat gebruikt wordt is voor $i = k$ en $j = \nu_k$, dus dat is $\sum_{t=1}^{k-1} \nu_t + k + \nu_k - 2 = \sum_{t=1}^k \nu_k + k - 2 = v + k - 2$. De wijdtte van deze labeling is dus $v + k - 2$, dus geldt $\lambda(G) \leq v + k - 2$. $\square$

3.3 Δ^2 -vermoeden

Uit het bewijs van Stelling 3.4 is duidelijk dat voor $\Delta \geq 3$ en $\Delta \geq \frac{|V|-1}{2}$ de eis dat G diameter 2 heeft niet wordt gebruikt. Voor alle grafen die aan deze voorwaarden voor $\Delta(G)$ voldoen geldt dus dat $\lambda(G) \leq \Delta^2$. Hier kwamen

Griggs en Yeh [?] achter, wat voor hun een reden gaf om het volgende vermoeden op te stellen.

Vermoeden 3.8. *Zij G een graaf met maximum graad $\Delta \geq 2$, dan geldt $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Dit vermoeden is dus niet bewezen voor alle grafen, maar wel als er meer voorwaarden aan de graaf worden opgelegd. Het vermoeden is namelijk bewezen voor:

- $\Delta(G) \geq 3$ en $\Delta(G) \geq \frac{|V|-1}{2}$ (Griggs en Yeh in 1992[?])
- $\Delta(G) \geq \Delta_0$ met $\Delta_0 \approx 10^{69}$ (Havet, Reed en Sereni in 2008[?])
- $|V(G)| \leq (\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1)(\Delta^2 - \Delta + 1) - 1$ (Franks in 2013[?])

Zoals hierboven al gezegd is de eerste in Sectie 3.2 bewezen. Het bewijs voor de laatste is een stuk lastiger. Er wordt hierbij gebruik gemaakt van gewogen grafen en het (G, H) -labeling probleem. Dit is een generalisatie van het $L(2,1)$ -labeling probleem en zal in het volgende hoofdstuk worden uitgelegd.

Hoofdstuk 4

Gewogen grafen

Zoals hierboven al genoemd zal er hier een generalisatie worden gegeven van het $L(2,1)$ -labeling probleem en daarvoor zal een resultaat volgen dat dus ook voor $L(2,1)$ -labeling geldt.

4.1 (G, H) -labeling probleem

Eerst worden een aantal definities gegeven en zal duidelijk worden hoe het gebruik van gewogen grafen in verband staat met $L(2,1)$ -labeling.

Definitie 4.1. Een *gewogen graaf* is een graaf $G = (V, E)$ met een gewichtsfunctie $\omega : E \rightarrow \mathbb{Z}$. Een labeling f heet *toelaatbaar* voor (G, ω) als $|f(x) - f(y)| \geq \omega(xy) \quad \forall xy \in E(G)$.

Er zal nu weer worden gekeken naar het verschil tussen het grootste en het kleinste label dat gebruikt wordt bij een toelaatbaar labeling. Vergelijk de volgende definitie met de minimale wijdt.

Definitie 4.2. $Wijdte(G, \omega)$ is het kleinste verschil tussen het grootste en het kleinste label gekeken naar alle toelaatbaar labelings.

De volgende definitie zal helpen met het verband leggen tussen de $L(2,1)$ -labelings en deze toelaatbaar labelings. Hiervoor wordt een specifieke gewichtsfunctie gegeven.

Definitie 4.3. Zij G een graaf en $H \subset G$, dan is het (G, H) -labeling probleem het vinden van een toelaatbaar labeling voor (G, ω) met

$$\omega(xy) = \begin{cases} 2 & \text{als } xy \in E(H) \\ 1 & \text{als } xy \in E(G) \setminus E(H) \end{cases}$$

$Wijdte(G, H)$ is $Wijdte(G, \omega)$ met ω zoals hierboven gedefinieerd.

Lemma 4.4. Zij F een graaf, dan $Wijdte(F^2, F) = \lambda(F)$.

Bewijs. $Wijdte(F^2, F) = Wijdte(F^2, \omega)$ met

$$\omega(xy) = \begin{cases} 2 & \text{als } xy \in E(F) \\ 1 & \text{als } xy \in E(F^2) \setminus E(F) \end{cases}$$

Maar dit betekent dat voor een toelaatbaar labeling de labels van burens in F minstens twee moeten verschillen, omdat de weging op die lijnen 2 is. $E(F^2) \setminus E(F)$ zijn precies de lijnen tussen punten die in F op afstand 2 van elkaar liggen. De labels hiervan moeten bij een toelaatbaar labeling minstens een verschillen. Het blijkt dus dat een toelaatbaar labeling voor (F^2, ω) ook een $L(2,1)$ -labeling is van F en andersom. Het kleinste verschil tussen het grootste en het kleinste label is dus voor toelaatbaar labelings en $L(2,1)$ -labelings hetzelfde, dat betekent dat $Wijdte(F^2, F) = \lambda(F)$. $\square$

Hier is het verband tussen toelaatbaar labelings en $L(2,1)$ -labelings duidelijk gemaakt. Deze eigenschap kan gebruikt worden om te kijken naar meer algemene stellingen over het (G, H) -labeling probleem, die dan een resultaat voor een $L(2,1)$ -labeling als gevolg hebben. Er wordt daarvoor gekeken naar grafen $H \subset G$ met de eigenschappen zoals in het volgende lemma.

Lemma 4.5. *Zij G een graaf en $H \subset G$ met $|V(G)| = n$ en $\Delta(G) \leq \Delta(H)^2$. Als nu $Wijdte(G, H) \leq g(\Delta(H))$ voor alle paren van grafen (G, H) die hieraan voldoen, dan geldt voor alle grafen F met $|V(F)| = n$ dat $\lambda(F) \leq g(\Delta(F))$.*

Bewijs. Bekijk weer F^2 en $F \subset F^2$ en zeg $|V(F^2)| = n$. De graad van een punt in F^2 is de graad van dat punten in F plus alle punten op afstand 2. Zoals in Hoofdstuk (?) al vaker is opgemerkt is dat aantal maximaal $\Delta(F) + \Delta(F)(\Delta(F) - 1) = \Delta(F)^2$, dus $\Delta(F^2) \leq \Delta(F)^2$. Stel nu dat $Wijdte(G, H) \leq g(\Delta(H))$ voor alle paren van grafen (G, H) die voldoen aan de aannames van het lemma, dan geldt dit ook voor alle paren (F^2, F) met $|V(F^2)| = n$. Volgens de definitie van F^2 geldt $|V(F^2)| = |V(F)| = n$, en er geldt $Wijdte(F^2, F) = \lambda(F) \leq g(\Delta(F^2))$. Dus dan ook voor alle grafen F met $|V(F)| = n$ geldt $\lambda(F) \leq g(\Delta(F))$. $\square$

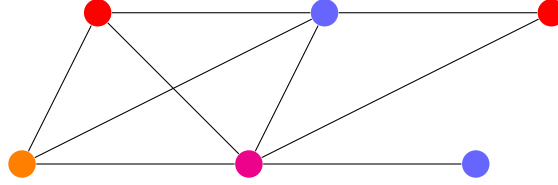
4.2 Kleurverbindingsgraaf

Voor de stelling in de volgende sectie zijn een aantal lemma's en stellingen nodig die hier bewezen zullen worden.

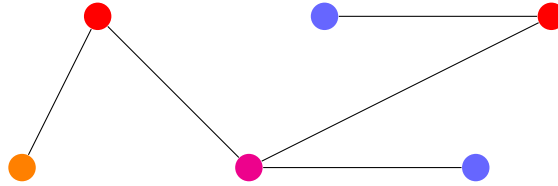
Definitie 4.6. Zij (G, H) een paar grafen met $H \subset G$ en $C = \{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ een puntenkleuring van G . De *kleurverbindingsgraaf* van (C, G, H) genoteerd met $\mathcal{CGH}$ is een graaf met $V(\mathcal{CGH}) = C$ en

$$E(\mathcal{CGH}) = \{\{C_i, C_j\} : \{x, y\} \in E(H) \text{ voor een } x \in C_i, y \in C_j\}$$

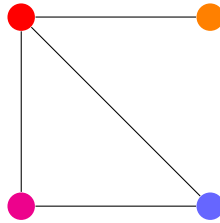
Voorbeeld 4.7. Bekijk de graaf G met puntenkleuring C :



Neem hiervan een deelgraaf H , met dezelfde puntenkleuring C :



Nu ziet de kleurverbindingsgraaf $\mathcal{CGH}$ er als volgt uit:



Er is in H namelijk makkelijk te zien dat er een lijn is tussen een punt uit de klasse die kleur rood heeft gekregen en alle andere klassen. Daarnaast is er ook een lijn in H tussen een paars punt en een blauw punt, dus in $\mathcal{CGH}$ is er ook nog een lijn tussen de paarse en de blauwe klasse.

Nu zal deze definitie gebruikt worden in een lemma dat het bewijzen van de stelling in de volgende sectie een stuk korter zal maken.

Lemma 4.8. *Wijdte(G, H) $\leq L - 1$ dan en slechts dan als er een kleuring C van G bestaat met L klassen zodanig dat het complement $\mathcal{CGH}^c$ van de kleurverbindingsgraaf van (C, G, H) een Hamiltonpad bevat.*

Bewijs. $\Rightarrow$: $Wijdte(G, H) \leq L - 1$, dus er bestaat een (G, H) -labeling f van G met wijdte maximaal $L - 1$. Definieer nu voor elk label $0 \leq i \leq L - 1$ de verzameling C_i die alle punten met label i bevat, deze C_i kan leeg zijn als label i niet wordt gebruikt. Bekijk nu $P = (C_0, C_1, \dots, C_{L-1})$, in $\mathcal{CGH}$ kan er geen lijn zijn tussen C_{i-1} en C_i voor alle $1 \leq i \leq L - 1$, omdat er geen lijn kan zijn in H tussen een punt met label $i - 1$ en label i . Dus voor elke $1 \leq i \leq L - 1$ is C_{i-1} verbonden met C_i in $\mathcal{CGH}^c$, dus is C een Hamiltonpad in $\mathcal{CGH}^c$.

$\Leftarrow$: Neem nu aan dat $\mathcal{CGH}^c$ een Hamiltonpad $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{L-1}\}$ bevat. $\square$

Om dit lemma te kunnen gebruiken moet er ook kunnen worden bepaald wanneer een graaf een Hamiltonpad bevat. Daarvoor zullen eerst twee stellingen bewezen worden waaruit een eenvoudig gevolg vloeit dat dat kan zeggen voor grafen met een bepaalde eigenschap.

Stelling 4.9. *Zij G een graaf met $n \geq 3$ punten. Als $\{u, v\} \in E(G)$, $u \neq v$ en $d(u) + d(v) \geq n$, dan heeft G een Hamiltoncykel dan en slechts dan als G' met $V(G') = V(G)$ en $E(G') = E(G) \cup \{u, v\}$ een Hamiltoncykel bevat.*

Bewijs. $\Rightarrow$: Als G een Hamiltoncykel bevat, dan heeft G' dat ook, want $V(G') = V(G)$ en alle lijnen van G liggen ook in G' .

$\Leftarrow$: Stel G' heeft een Hamiltoncykel. Als $\{u, v\}$ hier niet in ligt, dan heeft G dezelfde Hamiltoncykel, dus neem aan dat $\{u, v\}$ wel in de cykel ligt. Dan heeft G dus een Hamiltonpad $(u, p_1, p_2, \dots, p_{n-2}, v)$. Nu wordt er gezocht naar een $1 \leq i \leq n-2$ zodat v verbonden is met p_i en u met p_{i+1} . Als die bestaan kan er namelijk de volgende Hamiltoncykel worden gemaakt: $(u, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{n-2}, v, p_i, p_{i-1}, \dots, p_1, u)$.

Hiervoor worden er twee verzamelingen gedefinieerd, $N(u) = \{p_i : 1 \leq i \leq n-2 \text{ en } \{u, p_i\} \in E(G)\}$, dus de verzameling van alle burens van u en $P(u) = \{p_i : 1 \leq i \leq n-3 \text{ en } p_{i+1} \in N(u)\}$, dus de verzameling punten p_i waarvoor p_{i+1} een buur is van u . Nu wordt er dus gezocht naar een punt in $N(v) \cap (P(u) \setminus \{u\})$. $|P(u)| = |N(u)|$ en u zit altijd in $P(u)$, dus $|P(u) \setminus \{u\}| = |N(u)| - 1$. Daarnaast geldt dat $N(v) \subset V(G) \setminus \{u, v\}$ en ook $P(u) \setminus \{u\} \subset V(G) \setminus \{u, v\}$, en $|V(G) \setminus \{u, v\}| = n-2$. Dus

$$\begin{aligned} |N(v) \cap (P(u) \setminus \{u\})| &= |N(v)| + |P(u) \setminus \{u\}| - |N(v) \cup (P(u) \setminus \{u\})| \\ &\geq |N(v)| + |P(u) \setminus \{u\}| - (n-2) = |N(v)| + |N(u)| - 1 - (n-2) = d(v) + d(u) - n + 1 \geq 1 \end{aligned}$$

Het is dus duidelijk dat er minstens een punt p_i in de doorsnede zit, dus kan in G de Hamiltoncykel $(u, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{n-2}, v, p_i, p_{i-1}, \dots, p_1, u)$ gemaakt worden. $\square$

Voorbeeld 4.10.

Stelling 4.11. *Zij G een graaf met $n \geq 3$ punten. Als voor alle $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ geldt $|\{v : d(v) \leq k\}| < k$, dan bevat G een Hamiltoncykel.*

Bewijs. Stel dat G geen Hamiltoncykel bevat. Voeg nu zoveel mogelijk lijnen toe zolang er geen Hamiltoncykel ontstaat, noem de nieuwe graaf $\tilde{G}$. Deze graaf voldoet nog steeds aan de aannames omdat de graden niet kleiner zijn geworden. Bekijk twee punten $u \neq v$ met $\{u, v\} \notin E(\tilde{G})$, er is dan een Hamiltonpad $(u, p_1, p_2, \dots, p_{n-2}, v)$, anders zou $\{u, v\}$ nog in $E(\tilde{G})$ kunnen. Volgens Stelling 4.9 moet $d(u) + d(v) < n$, want anders heeft $\tilde{G}$ een Hamiltoncykel. Kies nu zulke u en v zodat $d(u) + d(v)$ maximaal is. u en v kunnen niet beide graad groter dan $\frac{n-1}{2}$ hebben, dus stel $d(u) = k \leq \frac{n-1}{2}$. Bekijk weer $P(u)$ zoals in Stelling 4.9, nu geldt $|N(v) \cap (P(u) \setminus \{u\})| = 0$. Dus als

$x \in P(u)$ dan moet $d(x) \leq k$, want anders was $d(x) + d(v) \geq d(u) + d(v)$ met x niet verbonden met v . Nu zijn er dus $|P(u)| = |N(u)| = d(u) = k$ punten met graad maximaal k , wat een tegenspraak is met de aannames. Dus bevat G een Hamiltoncykel. $\square$

Gevolg 4.12. *Zij G een graaf met n punten. Als voor alle $0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$ geldt dat $|\{v : d(v) \leq k\}| \leq k$, dan heeft G een Hamiltonpad.*

Bewijs. Stel voor alle $0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$ geldt dat $|\{v : d(v) \leq k\}| \leq k$. Voeg nu een punt x toe dat verbonden is met elk ander punt, noem de nieuwe graaf $\tilde{G}$. Neem een willekeurige $0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$, nu geldt $|\{v : d(v) \leq k\}| \leq k$, dus in $\tilde{G}$ geldt dan dat $|\{v : d(v) \leq k+1\}| \leq k$. Dus in $\tilde{G}$ geldt voor alle $1 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$ dat $|\{v : d(v) \leq l\}| < l$, dus volgens Stelling 4.11 bevat $\tilde{G}$ een Hamiltoncykel $(x, p_1, p_2, \dots, p_n, x)$. Haal nu punt x weer weg, dan is $(p_1, \dots, p_n)$ een Hamiltonpad in G . $\square$

Wat er nu nog mist is een stelling die bewijst dat er een kleuring van graaf G bestaat met een bepaald aantal kleuren. Deze stelling is bewezen door Hajnal en Szemerédi [?]

Stelling 4.13. *Als voor een graaf G geldt $\Delta(G) \leq r$, dan kan G billijk gekleurd worden met $r+1$ kleuren.*

4.3 Bovengrens

Stelling 4.14. *Zij (G, H) een paar van grafen met $H \subset G$, $L \in \mathbb{Z}$ en $\Delta = \Delta(H) \leq 1$. Stel $\Delta(G) \leq \Delta^2$ en $L \leq \Delta^2 + 1$. Als nu $|V(G)| \leq (L - \Delta)(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - 1$, dan geldt $Wijdte(G, H) \leq L - 1$.*

Bewijs. Zeg $M = (L - \Delta)(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - 1$. Het is duidelijk dat $L \geq \Delta^2 + 1 \geq \Delta(G) + 1$, dus $\Delta(G) \leq L - 1$. Volgens Stelling (?) kan G nu equitabyl gekleurd worden met L kleuren, druk nu $|V(G)|$ uit als $|V(G)| = Lq + r$ met $q \geq 0$ en $0 \leq r \leq L - 1$. Dan hebbe $L - r$ klassen q punten en r klassen $q + 1$ punten, want $q(L - r) + (q + 1)r = qL - qr + qr + r = Lq + r = |V(G)|$.

Het is nu voldoende om te bewijzen dat CGH^c een Hamiltonpad heeft van met Lemma (?) volgt de stelling dan vanzelf.

Neem C_i willekeurig, met $0 \leq i \leq L - 1$. Voor elke lijn in CGH vanuit een klasse C_i naar een andere moet er minstens een lijn zijn in H tussen een punt uit C_i en een punt uit die andere klasse. In H kunnen maximaal $\Delta|C_i|$ lijnen uit klasse C_i gaan, want dit is precies het aantal punten in die klasse vermenigvuldigd met de maximale graad die ze kunnen hebben. Dan geldt dat de graad van C_i altijd kleiner is dan dat getal, dus $d_{CGH}(C_i) \leq \Delta|C_i| \forall C_i \in V(CG H)$.

$|V(G)| = Lq + r \leq M = (L - \Delta)(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - 1 = L(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - \Delta(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - 1$, dus $Lq < L(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1)$, dan moet gelden dat $q \leq \lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor$

- Neem eerst aan dat $q \leq \lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor - 1$. $\delta(CG H^c) \leq L-1-\Delta(CG H)$, want er zijn L klassen, dus een klasse kan maximaal $L-1$ burens hebben. Dit kan als volgt worden uitgeschreven:

$$\delta(CG H^c) \geq L-1-\Delta(CG H) \geq L-1-\Delta(q+1) \geq L-1-\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor \leq \frac{L-1}{2}$$

Met behulp van Gevolg (?) geldt dat $CG H^c$ een Hamiltonpad heeft, omdat in het gevolg $k \leq \frac{L-2}{2}$, dus $|\{v : d(v) \leq k\}| = 0 \forall k$.

- Stel nu $q = \lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor$, dus $M = (L-\Delta)(q+1) - 1$. Om Gevolg (?) te gebruiken moet er een willekeurige $k \in \mathbb{Z}$ met $0 \leq k \leq \frac{L-2}{2}$ worden genomen. Stel nu dat $d_c(C_i) \leq k$ voor een i , dan moet daarvoor gelden dat $|C_i| > q$. Er geldt namelijk dat:

$$\frac{L-2}{2} \geq k \geq d_c(C_i) \geq L-1-d_{CGH}(C_i) \geq L-1-\Delta|C_i|$$

Dus:

$$|C_i| \geq \frac{1}{\Delta} \left(L-1-\frac{L-2}{2} \right) = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2L-2-L+2}{2} \right) = \frac{L-1}{2\Delta} + \frac{1}{2\Delta} > \left\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \right\rfloor = q$$

Dus als $d_c(C_i) \leq k$ dan is $|C_i| = q+1$. Er zijn r klassen waarvoor dit geldt, dus maximaal r klassen C_i met $d(C_i) \leq k$. Nu moet nog gekeken worden naar de grootte van r , neem daarvoor een willekeurige klasse C_i met $d_c(C_i) \leq k$.

$$0 \leq r \leq M-Lq = Lq+L-\Delta(q+1)-1-Lq = L-1-\Delta(q+1) = L-1-\Delta|C_i| \leq k$$

Hieruit blijkt dat voor alle $0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$ geldt dat $|\{C_i : d_c(C_i) \leq k\}| \leq r \leq k$, dus Gevolg (?) zegt dat CGH^c een Hamiltonpad bevat.

Met Lemma (?) volgt nu, omdat CGH^c een Hamiltonpad bevat, dat er een (G, H) -labeling bestaat met $Wijdte(G, H) = L-1$. $\square$

Gevolg 4.15. Zij G een graaf met $\Delta = \Delta(G) \geq 1$ en $L \in \mathbb{Z}$ met $L \geq \Delta^2 + 1$. Dan geldt dat $\lambda(G) \leq L-1$ als

$$|V(G)| \leq (L-\Delta)(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - 1$$

Bewijs. Bekijk alle paren van grafen (G, H) met $H \subset G$, $|V(G)| = n$ en $\Delta(G) \leq \Delta(H)^2$. Als $|V(G)| = n \leq (L'-\Delta)(\lfloor \frac{L'-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - 1$, dan geldt $Wijdte(G, H) \leq L'-1$ met $L' \geq \Delta(H)^2 + 1$. Volgens Lemma (?) geldt nu voor alle grafen G met $|V(G)| = n \leq (L-\Delta)(\lfloor \frac{L-1}{2\Delta} \rfloor + 1) - 1$ dat $\lambda(G) \leq L-1$ met $L \geq \Delta^2 + 1$. $\square$

Gevolg 4.16. Zij G een graaf en $\Delta = \Delta(G) \geq 1$. Dan is $\lambda(G) \leq \Delta^2$ als

$$|V(G)| \leq \left(\left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor + 1 \right) (\Delta^2 - \Delta + 1) - 1$$

Bewijs. Gebruik Gevolg (?) met $L = \Delta^2 + 1$. Als dan geldt

$$|V(G)| \leq (L - \Delta) \left(\left\lfloor \frac{L - 1}{2\Delta} \right\rfloor + 1 \right) - 1 = (\Delta^2 + 1 - \Delta) \left(\left\lfloor \frac{\Delta^2}{2\Delta} \right\rfloor + 1 \right) - 1 = \left(\left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor + 1 \right) (\Delta^2 - \Delta + 1) - 1$$

dan is $\lambda(G) \leq L - 1 = \Delta^2$. □

Hoofdstuk 5

Oneindige familie

Om te zien dat de bovengrens van $\lambda(G) \leq \Delta^2$ een nuttig vermoeden is, wordt er gezocht naar een oneindige familie van grafen die een hoge ondergrens heeft voor de minimale breedte. Als deze ondergrens namelijk in de buurt zit van Δ^2 kan er worden geconcludeerd dat de bovengrens voor alle grafen voor alle Δ inderdaad in de buurt zit van Δ^2 .

De oneindige familie van grafen die hier bekeken wordt is de incidentiegraaf van een projectief vlak. nu volgen eerst de definitie daarvan.

Definitie 5.1. Zij X een verzameling en $\mathcal{L}$ een verzameling deelverzamelingen van X . $(X, \mathcal{L})$ heet dan een *projectief vlak* als het aan de volgende axioma's voldoet:

1. Er bestaat een verzameling $F \subset X$ met vier elementen zodanig dat $|L \cap F| \leq 2$ voor alle $L \in \mathcal{L}$.
2. Elke $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ met $L_1 \neq L_2$ hebben exact een punt gemeen, dus $|L_1 \cap L_2| = 1$.
3. Voor elke $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$ is er precies een $L \in \mathcal{L}$ zodat $x_1 \in L$ en $x_2 \in L$.

De elementen van X worden *punten* genoemd en de elementen van $\mathcal{L}$ heten *lijnen*. $x \in X$ ligt op de lijn $L \in \mathcal{L}$ als $x \in L$.

Notatie 5.2. De lijn door twee punten $a, b \in X$ wordt genoteerd met $\overline{ab}$.

Definitie 5.3. De *orde* van een projectief vlak $(X, \mathcal{L})$ is gelijk aan $|L| - 1$ voor $L \in \mathcal{L}$.

De orde hangt niet af van de keuze van L , omdat voor alle $L, L' \in \mathcal{L}$ geldt dat $|L| = |L'|$.

Stelling 5.4. Zij $(X, \mathcal{L})$ een projectief vlak van orde n . Dan geldt dat er precies $n + 1$ lijnen door elk punt $x \in X$ gaan.

Bewijs. Neem een willekeurig punt $x \in X$, dan is er minstens een lijn L die niet x bevat. Bekijk namelijk axioma 1 in Definitie 5.1, er is dus zo'n verzameling F met vier elementen, zeg $a, b, c \in F$ met $a, b, c \neq x$. Stel nu dat x op de lijn $\overline{ab}$ ligt, maar ook op de lijn $\overline{ac}$. Volgens axioma 2 moet nu gelden dat $\overline{ab} = \overline{ac}$, maar dan is dus ook $a, b, c \in \overline{ab} = \overline{ac}$ wat in tegenspraak is met axioma 1.

Zij nu $L \in \mathcal{L}$ zo'n lijn met $x \notin L$. Bekijk voor alle $y \in L$ de lijn $\overline{xy}$, dit zijn al $n + 1$ lijnen door x . Elke lijn bevat namelijk $n + 1$ punten, dus er liggen $n + 1$ punten y op L . Daarnaast moet elke lijn door x de lijn L ergens snijden in een punt $y \in L$ volgens axioma 2, dus dat zijn er maximaal $n + 1$. Er gaan dus precies $n + 1$ lijnen door x . $\square$

Stelling 5.5. *Zij $(X, \mathcal{L})$ een projectief vlak van orde n , dan is $|X| = n^2 + n + 1$ en $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$.*

Bewijs. Kies een lijn $L = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{L}$ en een punt $a \notin L$. Zeg $L_i = \overline{ax_i}$ voor alle $0 \leq i \leq n$. Elke L_i en L_j snijden in precies een punt volgens axioma 2, dat is het punt a . Daarnaast heeft elke L_i nog n punten die dus allemaal verschillen. Er zijn dus minstens $(n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$ punten. Bekijk nu een $x \in X \setminus \{a\}$, $\overline{ax}$ moet de lijn L snijden in een x_i vanwege axioma 2. Nu geldt met axioma 3 dat $\overline{ax} = L_i$, dus elke $x \in X \setminus \{a\}$ ligt op een van L_i . Dus geldt $|X| = n^2 + n + 1$.

De tweede gelijkheid zal hier niet worden bewezen. $\square$

Definitie 5.6. G is een *incidentiegraaf* van een projectief vlak $\Pi(n) = (X, \mathcal{L})$ van orde n , als $G = (A, B, E)$ een bipartiete graaf is zodat:

1. $|A| = |B| = n^2 + n + 1$,
2. Elke $a \in A$ correspondeert met een punt $p_a \in X$ en elke $b \in B$ met een lijn $l_b \in \mathcal{L}$,
3. $E(G) = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B \text{ zodanig dat } p_a \in l_b \text{ in } \Pi(n)\}$.

Stelling 5.7. *Zij G de incidentiegraaf van een projectief vlak met orde n , dan geldt $\lambda(G) \geq n^2 + n = \Delta(G)^2 - \Delta(G)$.*

Bewijs. Er liggen $n + 1$ punten op een lijn, en er gaan $n + 1$ lijnen door een punt volgens Stelling 5.4. Een incidentiegraaf is dus $(n + 1)$ -regulier, dus $\Delta(G) = n + 1$. Daarnaast geldt voor alle $x, y \in A$ dat $d(x, y) = 2$, want elke twee punten liggen precies op een lijn, en voor alle $u, v \in B$ geldt $d(u, v) = 2$, want elke twee lijnen snijden in precies een punt. Dus alle punten in A moeten een verschillend label krijgen, zo ook alle punten in B . Dan zijn er minstens $n^2 + n + 1 - 1 = n^2 + n$ labels nodig, dus $\lambda(G) \geq n^2 + n = (\Delta(G) - 1)^2 + \Delta(G) - 1 = \Delta(G)^2 - \Delta(G)$. $\square$

Voorbeeld 5.8.

Er zijn oneindig veel projectieve vlakken, er bestaat namelijk een projectief vlak van orde n als er een lichaam met n elementen bestaat, en deze bestaat dan en slechts dan als n een macht van een priemgetal is. Dan zijn er dus ook oneindig veel incidentiegrafen, dus is dit een oneindige familie van grafen met een hoge ondergrens voor de minimale breedte, namelijk $\lambda(G) \geq \Delta(G)^2 - \Delta$.