

RADBOUD UNIVERSITEIT

BACHELORSRIPTIE WISKUNDE

Moore grafen

Geschreven door:
J.W.C. Hupkes
(s4369483)

Begeleider:
Dhr. dr. W. Bosma



27 augustus 2017

Inhoudsopgave

1	Introductie	2
2	Moore grafen	3
2.1	Basale definities	3
2.2	Tot stand komen definitie	4
2.3	Hoffman-Singleton stelling	7
3	Uitbreidingen	13
3.1	Moore geometries	13
3.2	(k, g) -grafen	14
3.3	Moore cages	16
4	Openstaande problemen	19
4.1	Packing	19
4.2	Onbekende cages	21

1 Introductie

De eerste onderzoeken naar 'pad problemen' vonden plaats in het begin van de jaren 50. Wetenschappers zochten naar methodes om het kortste pad tussen twee gegeven punten te vinden. Ook *alternative routing*, waarbij gezocht werd naar het kortste pad tussen twee punten als het daadwerkelijke kortste pad geblokkeerd was, was een populair onderwerp. Enkele van de vele toepassingen van deze pad-theorieën zijn het snelwegennetwerk en de verbindingen tussen telefoons. Deze toepassingen passen geheel in het tijdsbeeld. Het telefoneren op grote afstand was in de VS pas net geautomatiseerd. Bellen naar de andere kant van het land behoorde mede hierdoor tot de mogelijkheden. Tot dan toe werden verbindingen nog met de hand gelegd in telefooncentrales. Dit was voor Moore de aanleiding om tot een algoritme te komen dat het kortste pad in een netwerk zoekt.

Op het *International Symposium on the Theory of Switching* op Harvard in 1957 presenteerde hij zijn werk "*A shortest path through a maze*" [20]. Hierin besprak hij vier algoritmes. Het eerste gaf een kortste pad in een gegeven netwerk. De twee daaropvolgende deden dat ook, maar hadden daarbij minder bits nodig. De laatste gaf een kortste pad voor het geval dat elke lijn van een gegeven graaf een positieve lengte heeft. Als voorbeeld schetste hij het vinden van een snelste verbinding tussen twee stations. In 1959 verwerkte hij zijn ideeën in het *Breadth First Search* algoritme. Deze methode gebruikte hij in eerste instantie om een kortste weg uit een doolhof te kunnen bepalen. Later gebruikte hij dezelfde theorie ook in het optimaliseren van de telefoonverbinding. Om de telefoonverbinding sneller tot stand te laten komen, stortte Moore zich op het *Degree/diameter-problem*:

"Wat is het grootste aantal punten in een graaf met gegeven graad en diameter?"

Naast de twee gegeven eisen zocht Moore specifiek naar reguliere grafen. Het antwoord op deze vraag zou gegeven worden door A.J. Hoffman en R.R. Singleton in 1960 [16]. De grafen waar Moore zich als eerste om bekommerde, staan bekend als *Moore grafen*. Zij vormen de aanleiding voor deze scriptie.

2 Moore grafen

In dit hoofdstuk wordt de definitie van een Moore graaf opgebouwd uit basis-kenmerken in de grafentheorie. De Hoffman-Singleton stelling en het werk van Bannai, Ito en, afzonderlijk van hen, Damerell geeft extra duidelijkheid met betrekking tot het al dan niet bestaan van een Moore graaf. Ook worden de eigenschappen van deze grafen bestudeerd. Uiteindelijk leidt dit alles tot een korte lijst grafen die aan de gegeven definitie voldoen.

2.1 Basale definities

In deze paragraaf passeren enkele standaard begrippen uit de grafentheorie de revue. Deze zullen door de hele scriptie heen gebruikt worden.

Definitie 2.1. Een **graaf** G is een paar (V, E) waarbij V een eindige verzameling is en E een verzameling paren van elementen uit V . De elementen uit V heten de punten van G , de elementen van E heten de lijnen van G .

Als $v_1, v_2 \in V$ door een lijn verbonden zijn noteren we $\{v_1, v_2\} \in E$.

We zeggen dat G van orde n is als G n punten heeft.

Definitie 2.2. $\tilde{G}$ is een deelgraaf van een graaf G als $V(\tilde{G}) \subset V(G)$ en $E(\tilde{G}) \subset E(G)$.

Definitie 2.3. Een graaf G heet **enkelvoudig** als voor alle $v, w \in V$ er hoogstens één $\{v, w\} \in E$ bestaat. Merk op: grafen zijn ongericht omdat $\{v, w\}$ een ongeordend paar is. De lijn $\{v, w\}$ is daarmee dezelfde als $\{w, v\}$.

Definitie 2.4. Een **wandeling** in een graaf G is een rij $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_i \in V$, zodanig dat $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ voor elke $i = 1, \dots, n-1$.

Een **pad** in G is een wandeling waarin alle punten v_i verschillend zijn, mogelijk met uitzondering van v_1 en v_n .

Een wandeling of een pad heet **gesloten** als $v_1 = v_n$.

Een **cykel** of **circuit** is een gesloten wandeling.

Definitie 2.5. Een graaf heet **samenhangend** als er tussen ieder tweetal punten in V een pad bestaat.

Een **samenhangscomponent** van G is een deelgraaf waarvan tussen ieder tweetal punten een pad bestaat.

Definitie 2.6. De **lengte** van een wandeling $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ is het aantal lijnen dat wordt doorlopen tussen de gegeven punten. De **afstand** tussen punten v en w is de lengte van het kortste pad tussen v en w , genoteerd met $d(v, w)$.

De **diameter** van een graaf is de maximale afstand tussen twee punten.

De **girth** van een graaf is de lengte van het kortste circuit in de graaf.

Definitie 2.7. Twee punten $v, w \in V$ heten **buren** als er een pad bestaat van v naar w . We noteren de verzameling buren van $v \in V$ als $B(v) = \{w \mid \{v, w\} \in E\}$.

Definitie 2.8. De *graad* van een punt $v \in V$ is gelijk aan het aantal burens van v .

Definitie 2.9. Een *lus* is een lijn waarop slechts één punt ligt. Oftewel $\{v, v\} \in E$ is een lus.

Opmerking 2.10. In de rest van deze scriptie beschouwen we alleen nog onge-richte, enkelvoudige grafen G waarin geen lussen voorkomen. Ook zullen vrijwel alle grafen en hun eigenschappen die aan bod komen samenhangend zijn. Omdat deze eigenschap van belang is voor de definitie van een Moore graaf, zal deze herhaaldelijk apart worden benoemd.

2.2 Tot stand komen definitie

Zoals al eerder vermeld was Edward Forrest Moore (23 november 1925 – 14 juni 2003) de eerste die op zoek ging naar een samenhangende, reguliere graaf met een minimaal aantal punten voor een gegeven graad en diameter. Een ondergrens voor het aantal punten kan worden gevonden door middel van een algoritme dat bekend staat als het *Breadth First Search Algorithm*, kortweg *BFS*. *BFS* begint in een punt en gaat vervolgens alle burens van dit punt af, laag 1. Zodra deze allemaal gelabeld zijn, is de vervolgstap het nagaan van alle burens van de punten in laag 1.

Het proces wordt herhaald totdat alle punten zijn doorlopen. Ook kan het aantal punten van boven worden begrensd door middel van een minimale graad en een gegeven girth. Het samennemen van deze grenzen zal leiden tot de definitie van een Moore graaf.

Propositie 2.11. In een samenhangende graaf met diameter d en maximale graad k is het aantal punten n van boven begrensd. Er geldt:

$$n \leq 1 + k \sum_{i=0}^{d-1} (k-1)^i = 1 + k \frac{(k-1)^d - 1}{k-2}. \quad (1)$$

Bewijs. We bewijzen dat er hoogstens $k(k-1)^{i-1}$ punten op afstand i van een gegeven $v \in V$ liggen met behulp van volledige inductie op de afstand i . Stel $i = 1$, dan zijn er inderdaad hoogstens k burens van v vanwege de maximale graad in G .

Bekijk afstand $i + 1$. Uit de inductiehypothese weten we dat er hoogstens $k(k-1)^{i-1}$ punten op afstand i liggen. Voor ieder van deze punten zijn er wederom maximaal k burens vanwege de maximale graad k . Echter tellen we hierbij de paren (w_1, w_2) met $d(v, w_1) = i$ en $d(v, w_2) = i + 1$ dubbel. Voor w_1 zijn maximaal $k(k-1)^{i-1}$ keuzemogelijkheden. Hiervan is ieder verbonden met één punt op afstand $i - 1$ van v , namelijk die op het kortste pad van v naar w_1 . Gegeven w_1 zijn er dus nog hoogstens $k - 1$ keuzes voor w_2 . Aan de andere kant is er voor iedere w_2 één w_1 die op het kortste pad van v naar w_2 . Dus er zijn

hoogstens $k(k-1)^i$ van deze w_2 .

De bewering volgt uit het sommeren van deze aantallen. $\square$

Propositie 2.12. Zij G een graaf met girth g en zij d de diameter door $d = \lfloor \frac{1}{2}(g-1) \rfloor$. Stel dat G minimale graad k heeft, dan is het aantal punten n van onder begrensd. Er geldt:

$$n \geq 1 + k \sum_{i=0}^{d-1} (k-1)^i = 1 + k \frac{(k-1)^d - 1}{k-2}. \quad (2)$$

Bewijs. De opzet van het bewijs is hetzelfde als bij de vorige propositie. Het verschil zit hem in de aanpak bij het dubbel tellen van de paren (w_1, w_2) met $d(v, w_1) = i$ en $d(v, w_2) = i+1$. Voor w_1 is er precies één buur op afstand $i-1$ van v , namelijk die op het kortste pad van v naar w_1 . Er ligt geen buur van w_1 op afstand i van v . Anders zou er een gesloten cykel bestaan van v via w_1 en zijn buur met een lengte die kleiner is dan g . Dus liggen er $k-1$ buren van w_1 op afstand $i+1$ van v . Op dezelfde manier bestaat er voor het gegeven punt w_2 slechts één punt op afstand i van v . Er volgt dat er minimaal $k(k-1)^{i-1}$ punten op afstand i van v liggen. Sommatie over de gevonden aantallen geeft ook hier de gezochte ondergrens voor het aantal punten. $\square$

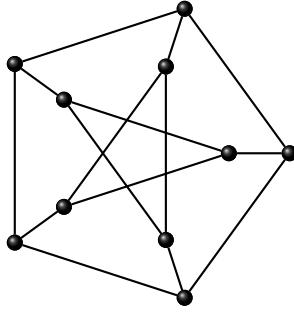
Definitie 2.13. Een samenhangende graaf G met $|G| = n$, graad k , diameter d en girth $g = 2d+1$ heet een **Moore graaf** als geldt:

$$n = 1 + k \sum_{i=0}^{d-1} (k-1)^i = 1 + k \frac{(k-1)^d - 1}{k-2}. \quad (3)$$

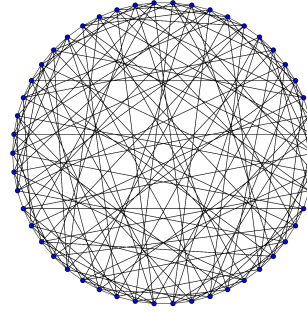
Opmerking 2.14. We duiden een Moore graaf met graad k en diameter d aan met $M(d, k)$.

Een andere verklaring voor de gelijkheid in 2.13 is eerder kort geïllustreerd: *BFS*. Neem een willekeurig punt op de graaf G vast, zeg n_0 . We zeggen dat n_0 op niveau 0 ligt. Aangezien voor iedere $v \in G$ geldt dat $\deg(v) = k$, geldt dat het aantal buren van n_0 gelijk is aan k . Deze liggen op niveau 1 aangezien deze afstand 1 tot n_0 hebben. Merk op dat deze onderling geen buren zijn omdat dit een tegenspraak zou geven met de gegeven girth. Ieder van deze punten heeft, naast n_0 , nog $k-1$ buren op niveau 2. Dit geeft een totaal van $k(k-1)$ punten op niveau 2. Het herhalen van deze constructie geeft dat op niveau $k-1$ de punten op afstand k van n_0 liggen. Deze punten moeten onderling verbonden worden, want de graad van ieder punt is gelijk aan k . Bovendien liggen er $k(k-1)$ punten op niveau i , met $i \in \{2, \dots, k-1\}$. Het sommeren over het aantal punten per niveau geeft de gelijkheid in 2.13.

Voorbeeld 2.15. Voorbeelden van Moore grafen zijn de $M(2, 3)$, de Petersen graaf, en de $M(2, 7)$, de Hoffman-Singleton graaf.



Figuur 1: De Petersen graaf.



Figuur 2: De Hoffman-Singleton graaf.

In de definitie van een Moore graaf staat vermeld dat deze regulier moet zijn. Echter blijkt dat regulariteit afgeleid kan worden uit de overige eigenschappen. Desondanks zorgt deze notie wel voor een duidelijkere definitie en dus nemen we deze toch op. In Propositie 2.21 zal de regulariteit worden afgeleid uit de overige eisen in de definitie [21]. Voor dat het zo ver is, hebben we een ander resultaat nodig.

Definitie 2.16. Zij G een graaf met diameter d . Twee punten v en w heten **antipodale punten** of **antipoden** als de onderlinge afstand gelijk is aan d .

Definitie 2.17. Zij G een graaf. T is de **antipodaalgraaf** van G waarbij T dezelfde punten heeft als G en waarbij de relatie geldt: Twee punten v en w zijn buren in T dan en slechts dan als v en w zijn antipodaal in G .

Lemma 2.18. Zij G een samenhangende graaf met diameter d en girth $g = 2d + 1$, dan hebben antipodale punten gelijke graad.

Bewijs. Zij $v_1, v_2 \in V$ antipoden in G . Dan is er een $v_3 \in V$ met v_3 een buur van v_1 en op afstand $d - 1$ van v_2 . Ieder andere buur van v_2 is antipodaal met v_1 ; stel niet dan ontstaat een circuit met lengte kleiner dan $2d - 1$. Er zijn $\deg(v_2) - 1$ andere buren dan v_3 . Deze buren geven een circuit van lengte $2d + 1$ met v_1 en v_2 . Dus ieder circuit op v_1 en v_2 bevat een buur van v_2 die antipodaal is met v_1 . Er volgt dat er $\deg(v_2) - 1$ circuits op v_1 en v_2 zijn met lengte $2d + 1$. Analoog geeft het verwisselen van de rollen van v_1 en v_2 dat er $\deg(v_1) - 1$ circuits op v_1 en v_2 zijn met lengte $2d + 1$. Dus $\deg(v_1) = \deg(v_2)$. $\square$

Gevolg 2.19. Alle punten van T' , met T' een samenhangscomponent van T , hebben dezelfde graad.

Lemma 2.20. Ieder punt op samenhangende graaf G met diameter d en girth $g = 2d + 1$ heeft minstens graad 2.

Bewijs. Zij $v_1 \in V$ met $\deg(v_1) = 1$. Zij v_2 een buur van v_1 . Dan liggen alle punten van G op afstand kleiner of gelijk aan $d - 1$ van v_2 .

$g = 2d + 1 \implies$ Er bestaat een circuit. v_1 en v_2 zijn geen onderdeel van dit circuit want $\deg(v_1) = 1$ en v_2 heeft geen antipodale punten. Zij w_1 en w_2 buren in het ontstane circuit met w_1 is een buur van v_2 . Omdat G samenhangend is, geldt dat er een pad bestaat van v_2 naar w_1 , waarbij de lengte van dit pad hoogstens $d - 1$ is. Hierdoor bestaat er een circuit met lengte kleiner dan $2(d - 1) + 1 = 2d + 1$. Dit is in tegenspraak met $g = 2d + 1$. $\square$

Propositie 2.21. Een samenhangende graaf G met diameter d en girth $g = 2d + 1$ is regulier.

Bewijs. Zij T de antipodaalgraaf van G . Stel dat v_1 en v_2 willekeurige punten zijn op G .

Als v_1 en v_2 antipoden zijn in G , dan zijn v_1 en v_2 buren in T . Dan is T automatisch samenhangend.

Als v_1 en v_2 niet antipoden zijn in G , dan bestaat er een pad van v_1 naar v_2 van lengte kleiner dan d . Uit 2.20 en $g = 2d + 1$ volgt dat het pad kan worden uitgebreid tot op een punt v_3 op afstand d van v_1 . Er geldt dat $\deg(v_3) \geq 2$ en dus bestaat er een circuit van lengte $2d + 1$ op v_1, v_2 en v_3 . In dit oneven circuit bestaat een rij $(v_1, v_3, w_1, w_2, \dots, v_2)$ met alle elementen antipodaal t.o.v. de voorgangers. Er volgt dat v_1 en v_2 buren zijn in T en dus dat T samenhangend is. Omdat T samenhangend is volgt uit 2.19 dat G regulier is. $\square$

Gevolg 2.22. Zij G een Moore graaf met $d = 1$, graad k en $n > 2$, dan is G de complete graaf K_{k+1} .

Opmerking 2.23. Definitie 2.13 en de bijbehorende bewezen eigenschappen bieden de mogelijkheid tot het geven van een equivalente definitie van een Moore graaf. Een graaf G is een Moore graaf met graad k en diameter d als ieder tweetal van de volgende uitspraken de derde uitspraak impliceert.

1. G is samenhangend met maximale graad k en diameter d .
2. G heeft minimale graad k en girth $g = 2d + 1$
3. G heeft precies $1 + k \sum_{i=0}^{d-1} (k - 1)^i = 1 + k \frac{(k-1)^d - 1}{k-2}$ punten.

2.3 Hoffman-Singleton stelling

Hoewel Moore de eerste was die zich openlijk afvroeg of (de later naar hem vernoemde) grafen bestonden, waren A.J. Hoffman en R.R. Singleton [16] de eerste die zich over het bestaan van deze grafen bogen. Zij formuleerden en bewezen in 1960 de naar hen vernoemde stelling. Deze laat slechts vier mogelijkheden over als de diameter van de graaf gelijk is aan twee. Het duurde tot de 1973 totdat het bestaan van Moore grafen met diameter groter dan twee en graad groter dan 2 werd ontkracht. Het bestaan van $M(2, 57)$ is tot op heden een openstaand vraagstuk.

Het bewijs dat Hoffman en Singleton opstelden [8], maakt gebruik van verbindingsmatrices en hun deelmatrices. De bijbehorende structuur, eigenwaarden en eigenvectoren leiden tot een gevalsonderscheiding: rationale of irrationale eigenwaarden. Voor volledig begrip van dit bewijs is enige voorkennis van lineaire algebra noodzakelijk.

Definitie 2.24. Zij G een graaf met n punten. Definieer $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ door $A = (a)_{ij}$ waarbij

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \text{ en } j \text{ buren zijn} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dan heet A de *verbindingsmatrix van graaf G* .

Gevolg 2.25. Een verbindingsmatrix is symmetrisch.

Lemma 2.26. Zij G een Moore graaf met $d = 2$, girth $g = 2d + 1 = 5$ en graad k . Zij A de verbindingsmatrix van G , I de identiteitsmatrix en J de $n \times n$ -matrix met enkel enen. Dan geldt:

$$A^2 = kI + (J - I - A).$$

Bewijs. Merk op dat voor een paar $(A^2)_{ij}$ geldt dat $\sum_{h=1}^n (A)_{ih}(A)_{hj} = 1$ als $(A)_{ih} = (A)_{hj} = 1$. Dus volgt dat $(A^2)_{ij}$ gelijk is aan het aantal gemeenschappelijke buren van i en j . G is een Moore graaf en $d = 2$, dus geldt:

$$(A^2)_{ij} = \begin{cases} k & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } \{i, j\} \in V(G) \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $A^2(G)$ k op de diagonaal heeft staan en verder 1 en 0, afhankelijk van A . $\square$

Stelling 2.27 (Hoffman-Singletonstelling). Zij G een Moore graaf met diameter $d = 2$ en girth $g = 2d + 1 = 5$, dan heeft G graad 2, 3, 7 of 57.

Bewijs. Zij G een Moore graaf met $d = 2$, dan is $n = 1 + d^2$. Zij A de verbindingsmatrix van G en $\mathbf{j}$ de vector met enkel enen. Dan is $A\mathbf{j}_i$ gelijk aan de som van de i^e rij van A . Dit is gelijk aan k , omdat G regulier is met graad k . Dus $A\mathbf{j} = k\mathbf{j}$ waaruit volgt dat $\mathbf{j}$ een eigenvector is van A met eigenwaarde k , die multiplicititeit 1 heeft.

A is een symmetrische matrix en dus inproduct behoudend. Zij $\mathbf{w} \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ een vector die loodrecht staat op $\mathbf{j}$. Nu geldt

$$0 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{j} \rangle = \langle A\mathbf{w}, A\mathbf{j} \rangle = \langle A\mathbf{w}, k\mathbf{j} \rangle = k \langle A\mathbf{w}, \mathbf{j} \rangle.$$

Dit geeft na het toepassen van 2.26 dat

$$A^2 \mathbf{w} = k \mathbf{w} + (-I - A) \mathbf{w} = 0.$$

En vervolgens

$$(A^2 + A - (k - 1)I) \mathbf{w} = 0.$$

Zij λ een eigenwaarde van A met $\mathbf{w}$ bijbehorende eigenvector, dan volgt uit de vorige vergelijking dat

$$\lambda^2 + \lambda - (k - 1) = 0.$$

$\lambda_{1,2}$ zijn wortels van deze vergelijking en derhalve gelijk aan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k - 3}).$$

Vervolgens onderscheiden we twee gevallen, namelijk wanneer $4k - 3$ een kwadraat is en wanneer dit geen kwadraat is.

Stel $4k - 3$ is geen kwadraat, dan is $\lambda \notin \mathbb{Q}$. De multipliciteit van λ_1 is gelijk aan die van λ_2 , dus bij gevolg gelijk aan $\frac{n-1}{2} = \frac{k^2}{2}$. Nu gebruiken we het feit dat de som van de eigenwaarden gelijk is aan de trace van de verbindingsmatrix. We weten dat $\text{tr}(A) = 0$ dus

$$0 = k \cdot 1 + \frac{k^2}{2} \left(\frac{-1 + \sqrt{4k - 3}}{2} \right) + \frac{k^2}{2} \left(\frac{-1 - \sqrt{4k - 3}}{2} \right) = k - \frac{k^2}{2}.$$

Waaruit volgt dat $k = 0$ of $k = 2$. Aangezien $d = 2$ moet $k > 0$ en zo volgt dat $k = 2$.

Stel $4k - 3$ is een kwadraat, dan is $\lambda \in \mathbb{Q}$. Bovendien is $4k - 3$ oneven, dus zijn kwadraat ook. Stel dat $4k - 3 = (2s + 1)^2$ voor zekere $s \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt dat

$$k = s^2 + s + 1.$$

De eigenwaarden van A zijn k (multipliciteit 1), $\lambda_1 = s$ (multipliciteit m_1) en $\lambda_2 = -s - 1$ (multipliciteit m_2). Oftewel $m_1 + m_2 = n - 1 = k^2$. Wederom met behulp van de regel dat de trace van A gelijk moet zijn aan de som van de eigenwaarden volgt:

$$k + m_1 s + m_2 (-s - 1) = 0.$$

Uit de twee voorgaande vergelijkingen kan worden afgeleid dat

$$m_1 = \frac{s(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 2)}{2s + 1}.$$

De conclusie die we uit bovenstaande regel trekken is dat $2s + 1$ een deler is van $s(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 2)$. Door te vermenigvuldigen met 32 en enkele manipulaties toe te passen volgt dat $2s + 1$ een deler is van 15. Uiteindelijk resulteert dit in de volgende mogelijke waarden:

Mogelijke waarden		
s	k	n
0	1	2
1	3	10
3	7	50
7	57	3250

Tabel 1: Mogelijke waarde.

Een graaf met 2 punten en graad 1 heeft slechts 1 lijn, terwijl de diameter 2 moet zijn. Hierdoor voldoet dit geval niet.

De Moore grafen met diameter $d = 2$ hebben graad $k \in \{2, 3, 7, 57\}$ $\square$

Uit de Hoffman-Singletonstelling volgt dat er slechts enkele Moore grafen mogelijk zijn met $d = 2$. We gaan al deze mogelijkheden af op orde van grootte van de graad. Van deze Moore graaf is het bestaan van $M(2, 57)$ onduidelijk. Uit de volgende proposities blijkt dat de overige Moore grafen eenduidig bepaald zijn.

Propositie 2.28. De enige Moore graaf G met $d = 2$ en $k = 2$ is C_5 .

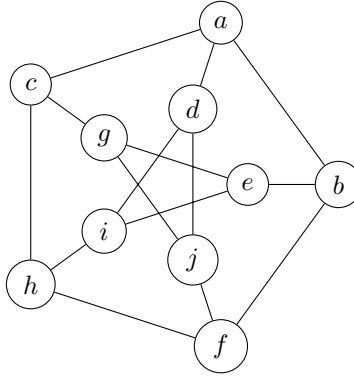
Bewijs. Zij G een Moore graaf met $d = 2$ en $k = 2$. Per definitie geldt dat $n = 1 + k \frac{(k-1)^d - 1}{k-2} = 5$. Uit 2.21 volgt dat voor alle $v \in V$ geldt $\deg(v) = 2$. Uit de aanname dat G een enkelvoudige graaf is, volgt dat $G = C_5$. $\square$

Gevolg 2.29. In het bijzonder geldt dat iedere cykel C_{2d+1} een Moore graaf is met graad 2, girth $2d + 1$ en diameter d door het herhalen van bovenstaand argument.

Propositie 2.30. De enige Moore graaf G met $d = 2$ en $k = 3$ is de Petersen graaf.

Bewijs. Zij G een Moore graaf met $d = 2$ en $k = 3$. Dit impliceert dat $g = 5$ en $|G| = 10$. Zij $\{a, b\} \in E$ met $a, b \in V$. Dan hebben deze punten ieder twee buren die niet onderling verbonden zijn. Laat $B(a) = \{b, c, d\}$ en $B(b) = \{a, e, f\}$. Er bestaat geen pad $\{v, w\} \in E$ met $v, w \in \{c, d, e, f\}$, anders zouden er circuits van lengte 3 of 4 bestaan. Er geldt echter dat de girth gelijk is aan 5.

Nu geldt dat c en e een gemeenschappelijke buur hebben, zeg $g \in V$, aanzien $\{c, e\} \notin E$. Analoog geldt $B(d) \cap B(f) = \{j\}$, $B(d) \cap B(e) = \{i\}$ en $B(c) \cap B(f) = \{h\}$. Alle punten in $\{a, b, c, d, e, f\}$ hebben 3 buren, de punten in $\{g, h, i, j\}$ hebben er 2. g kan niet op een lijn liggen met i of j . Dus completeren de lijnen $\{g, j\}$ en $\{h, i\}$ de graaf. $\square$

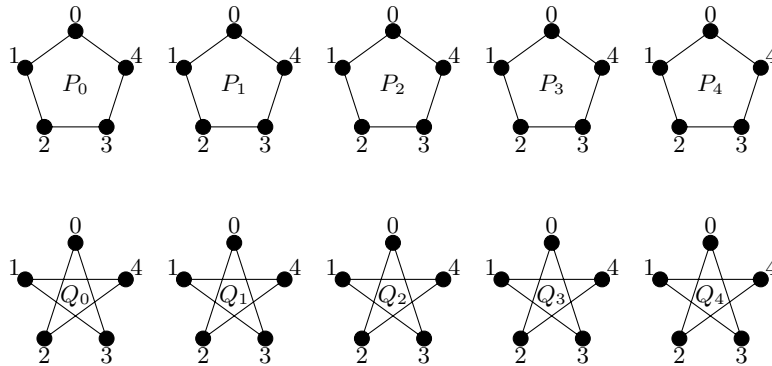


Figuur 3: Constructie Petersen graaf.

Propositie 2.31. De enige Moore graaf G met $d = 2$ en $k = 7$ is de Hoffman-Singleton graaf.

Het bewijs van de uniciteit komt aan bod in "*Structure of the Hoffman-Singleton Graph*" [13]. De constructie van deze graaf maakt direct duidelijk dat de Hoffman-Singleton graaf een Moore graaf is.

We weten dat de Moore graaf G met $d = 2$ en $k = 7$ vijftig punten bevat. Deze worden verdeeld in tien deelgrafen: 5 vijfhoeken en 5 pentagrammen (stervormen). De deelgrafen zijn dusdanig genummerd dat een vijfhoek en een pentagram complementair aan elkaar zijn. De vijfhoeken noemen we P_j en de pentagrammen Q_k , waarbij $1 \leq j \leq 5$ en $1 \leq k \leq 5$. Nu wordt punt i in P_j verbonden met de punten in de pentagrammen Q_k die voldoen aan $i + jk \pmod{5}$. Op deze manier worden alle vijfhoeken en pentagrammen met elkaar verbonden, zonder dat twee pentagrammen of twee vijfhoeken met onderling verbonden worden.



Figuur 4: Constructie Hoffman-Singleton graaf.

Stelling 2.32. Er bestaan geen Moore grafen voor $d \geq 3$ en $k \geq 3$.

Bewijs. Het bewijs voor deze stelling is gegeven door Bannai en Ito in 1973 [2]. Onafhankelijk van hen gaf Damerell in hetzelfde jaar een ander bewijs [11]. $\square$

Uit dit hoofdstuk hebben we alle bekende Moore grafen gevonden. Hieronder een kort overzicht van alle Moore grafen. Merk op dat het bestaan van $M(2, 57)$ tot op heden onbekend is.

Lijst van Moore grafen			
Naam	Graad	Girth	Punten
K_{k+1}	k	3	$n > 2$
C_{2d+1}	2	$2d + 1$	$2d + 1$
Petersen graaf	3	5	10
Hoffman-Singleton graaf	7	5	50
$M(2, 57)$	57	5	3250

Tabel 2: Lijst van Moore grafen.

3 Uitbreidingen

In het vorige hoofdstuk werden de Moore grafen met girth $g = 2d + 1$ geïntroduceerd. Deze klasse van grafen is verder uit te breiden. Moore grafen werden eerder gedefinieerd aan de hand van de graad en de diameter. Deze klasse van grafen past in een groter plaatje, namelijk in enkele klassen die zijn geformuleerd aan de hand van hun graad, girth en aantal punten.

3.1 Moore geometries

Opmerking 3.1. De ondergrens in 2.12 kan ook als volgt worden uitgedrukt met behulp van de graad k en de girth g . Het aantal punten van G wordt genoteerd met $v(k, g)$.

$$v(k, g) \geq \begin{cases} 1 + \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(g-3)} k(k-1)^i & \text{als } g \text{ oneven is,} \\ 2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(g-2)} (k-1)^i & \text{als } g \text{ even is.} \end{cases}$$

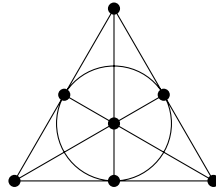
De eerste uitbreiding van de Moore grafen zijn de eveneens naar hem vernoemde Moore geometries. De definitie en enkele eigenschappen zijn in 1971 door R.C. Bose en T.A. Dowling [5] opgesteld.

Definitie 3.2. Een *Moore geometry* met diameter d en parameters s en t is een punt-lijn-systeem dat voldoet aan de volgende drie eisen:

- (i) ieder punt ligt op precies $t + 1$ lijnen;
- (ii) op iedere lijn liggen precies $s + 1$ punten;
- (iii) ieder tweetal punten $v, w \in V$, $v \neq w$ is verbonden met een uniek kortste pad van lengte d . Ieder ander pad dat hen verbindt heeft $d(v, w) > d$.

Voorbeeld 3.3. Uit de definitie volgt dat Moore grafen Moore geometries zijn met $s = 1$.

Voorbeeld 3.4. Moore geometries met diameter 1 zijn de Steiner tripelsystemen $S(2, s+1, v)$. Neem bijvoorbeeld $s = 2$ en $t = 3$. Dit geeft precies $S(2, 3, 7)$, zie figuur 5.



Figuur 5: $S(2, 3, 7)$.

Hoewel de Moore geometries een grotere klasse van grafen is dan de Moore grafen, zijn er ook hier maar enkele bekend. Over de existentie is de volgende stelling bewezen met dank aan Damerell, Fuglister en Georgiacodis.

Stelling 3.5. Een Moore geometry is of een $(2d + 1)$ -gon als $(s = t = 1)$ of het heeft hoogstens diameter 2.

Bewijs. Het bewijs is in delen gevonden door de eerder genoemde wiskundigen. Fuglister [14] [15] sloot de gevallen $d = 3$ en $d = 4$ uit. Damerell en Georgiacodis [12] deden dit samen voor het geval dat $d > 12$. Tot slot behandelde Damerell [10] het geval dat $4 < d \leq 12$. $\square$

3.2 (k, g) -graf

Voor willekeurige grafen G kan worden gezocht naar het minimale aantal punten met graad k en diameter d dat exact gelijk is aan het rechter lid in 3.1. De eerste wiskundige die op zoek ging naar deze grafen was W.T. Tutte [23]. De structuren die hieraan voldoen noemen we (k, g) -graf. Deze voldoen aan de volgende definitie.

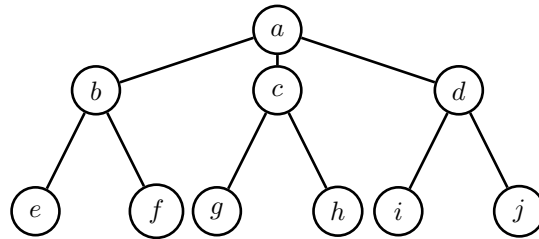
Definitie 3.6. Een (k, g) -**graaf** is een reguliere, samenhangende graaf G met graad $k \geq 2$, girth $g \geq 3$ waarbij aantal punten $v(k, g)$ een gelijkheid geeft in 3.1.

Uit de bovenstaande definitie is het duidelijk dat alle Moore grafen ook (k, g) -graf zijn. Hierdoor zijn de Petersen graaf en de Hoffman-Singleton graaf voorbeelden van (k, g) -graf. Dit zijn de unieke $(3, 5)$ -graaf en $(7, 5)$ -graaf.

Voorbeeld 3.7. Een ander voorbeeld van een (k, g) -graaf is de Heawood graaf. Dit zal de unieke $(3, 6)$ -graaf blijken te zijn, zie Figuur 7.

Propositie 3.8. De Heawood graaf is de unieke $(3, 6)$ -graaf.

Bewijs. Het uitgangspunt van deze constructie is de Petersen graaf. Merk op dat dit per constructie de unieke $(3, 5)$ -graaf is met 10 punten. De Heawood graaf heeft volgens de definitie 14 punten. We nemen de Petersen graaf in de volgende vorm:



Figuur 6: Petersen graaf.

Hieruit is direct duidelijk dat $\{e, f\}, \{g, h\}, \{i, j\} \in E$ 5-cykels vormen en dus verwijderd moeten worden. Hierdoor volgt dat $\deg(e) = \deg(f) = 2$. Dus we voegen vier punten k, l, m en n toe die verbonden worden aan de graaf door $\{e, k\}, \{e, l\}, \{f, m\}, \{f, n\} \in E$, wat de graaf op 14 punten brengt. Hierdoor hebben de punten a t/m f graad 3.

Voor punt g zijn de volgende lijnstukken uitgesloten:

$$\begin{cases} \{g, h\} & \implies \text{geeft een 3-cykel } (a, g, h). \\ \{g, i\} \text{ of } \{g, j\} & \implies \text{geeft een 5-cykel respectievelijk } (a, c, g, i, d) \text{ of } (a, c, g, j, d). \\ \{g, k\} \text{ en } \{g, l\} & \implies \text{geeft een 4-cykel } (e, k, g, l). \\ \{g, h\} \text{ en } \{g, m\} & \implies \text{geeft een 4-cykel } (f, m, g, n). \end{cases}$$

Dus we voegen ofwel $\{g, k\}$ en $\{g, m\}$ ofwel $\{g, l\}$ en $\{g, n\}$ toe. Deze opties zijn hetzelfde aangezien we de rollen van de punten k en l kunnen verwisselen, net zo voor m en n . We voegen $\{g, k\}$ en $\{g, m\}$ aan de graaf toe. Met een analoge redenering volgt dat voor punt k alleen $\{i, k\}$ of $\{j, k\}$ kan worden toegevoegd. Wederom kunnen de rollen verwisseld worden $\implies \{j, k\} \in E$.

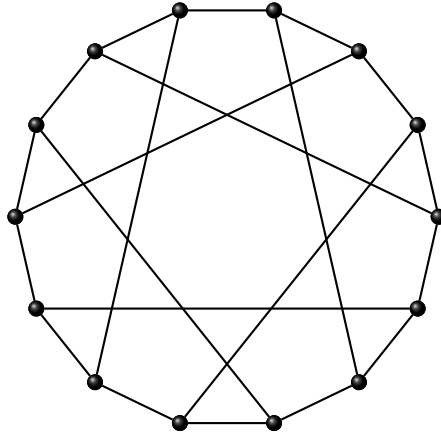
Voor h zijn naast $\{g, h\}$ de volgende lijnstukken uitgesloten:

$$\begin{cases} \{h, i\} \text{ of } \{h, j\} & \implies \text{geeft een 5-cykel respectievelijk } (a, c, h, i, d) \text{ of } (a, c, h, j, d). \\ \{h, m\} & \implies \text{geeft een 4-cykel } (e, g, m, h). \end{cases}$$

Voeg $\{h, l\}$ en $\{h, n\}$ toe. Een zelfde argument resulteert in $\{i, l\}$ en $\{i, m\} \in E$.

Nu zijn er slechts twee punten met graad 2: j en $n \implies \{j, n\} \in E$.

Uit deze constructie volgt dat er geen andere keuzes waren voor het toevoegen van punten en lijnen. Dus is de gevonden graaf uniek bepaald. $\square$



Figuur 7: Heawood graaf.

3.3 Moore cages

Na enkele voorbeelden van een (k, g) -graaf gezien te hebben, is de vraag gerechtvaardigd of er altijd een (k, g) -graaf bestaat, als er een graaf bestaat van graad k en girth g . Dit blijkt niet het geval te zijn. Er zijn voorbeelden van grafen met minimaal aantal punten die wel aan de geëiste regulariteit en samenhang voldoen, maar waarvoor de ongelijkheid in 3.1 ook daadwerkelijk een ongelijkheid is. Dit verklaart ook direct waarom $v(k, g)$ als ondergrens is geformuleerd.

Definitie 3.9. Een (k, g) -**cage** is een reguliere, samenhangende graaf G van graad k , girth g en minimaal aantal punten $v(k, g)$.

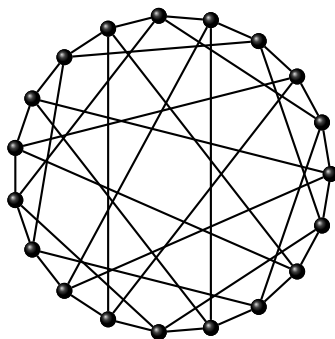
Opmerking 3.10. De verzamelingen van minimale grafen die we in deze scriptie gezien hebben zijn als volgt geordend:

$$\text{Moore grafen} \subset \text{Moore geometries} \subset (k, g)\text{-graf en} \subset (k, g)\text{-cages}.$$

Voorbeeld 3.11. Een voorbeeld van een (k, g) -cage die geen (k, g) -graaf is, is de Robertson graaf [19]. Dit is de unieke $(4, 5)$ -cage met $v(k, g) = 19$. Echter, het invullen van de formule rechts van de ongelijkheid in 3.1 geeft $v(4, 5) \geq 17$. Deze graaf wordt als volgt geconstrueerd:

Definieer $V(G) = \{a_i, b_j, c_k \mid i \in \mathbb{Z}_{12}, j \in \mathbb{Z}_4, k \in \mathbb{Z}_3\}$ de verzameling punten. Verbind nu de punten a_i met a_{i+1} , b_i en c_i en b_j met b_{j+2} . Deze graaf is 4-regulier, heeft 17 punten en kleinste gesloten pad van lengte 5.

Merk op dat het bestaan van de Robertson graaf niet in tegenspraak is met de Hoffman-Singleton stelling aangezien het aantal punten $v(k, g)$ niet gelijk is aan de gegeven ondergrens in 3.1. Om te laten zien dat dit daadwerkelijk een cage is, resteert het aan te tonen dat er geen G met graad 4 en girth 5 bestaat met 17 of 18 punten. Ook dit werk staat op naam van Robertson.



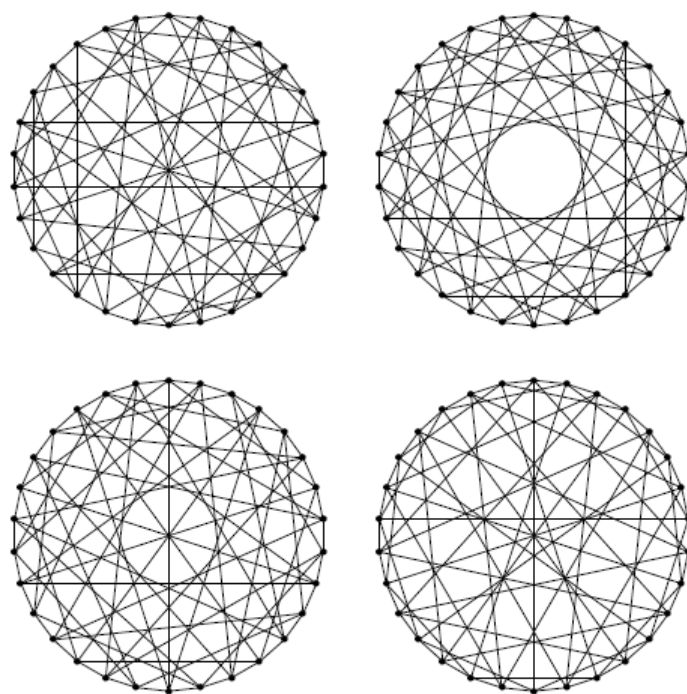
Figuur 8: De Robertson graaf.

Propositie 3.12. Er bestaat geen graaf G met graad 4, girth 5 en minder dan 19 punten. [19]

Nu we weten dat Moore cages wel degelijk verschillen van de (k, g) -*graf*en, rest ons alleen nog de vraag of er ook meerdere mogelijkheden zijn voor een (k, g) -cage. Tot nu toe zijn alle voorbeelden die in deze scriptie aan bod zijn gekomen uniek bepaald met betrekking tot de gestelde eisen. Voor cages geldt echter dat er voorbeelden zijn waarin een (k, g) -cage niet langer uniek is.

Voorbeeld 3.13. Stel $k = 5$ en $g = 5$, dan zijn er vier mogelijke $(5, 5)$ -cages op 30 punten. Van de eerste twee is ook een constructie gegeven.

1. Deelgraaf Hoffman-Singleton. [7]
De constructie gaat op dezelfde manier, alleen gebruikt deze slechts drie vijfhoeken P_j en drie pentagrammen Q_k . Wederom worden de punten i in P_j met de punten in Q_k verbonden middels $i + jk(\text{mod } 5)$.
2. De Robertson-Wenger graaf. [7]
De Robertson-Wenger graaf heeft $V(G) = \{a_i, b_i, c_i \mid i \in \mathbb{Z}_{10}\}$. De punten worden onderling verbonden op de volgende manier:
 a_i met a_{i+2}, b_i, c_{i+2} en c_{i+3} ;
 b_i met b_{i+1}, c_{i+4} en c_{i-1} ;
 c_i met c_{i+5} .
3. De Foster graaf. De derde mogelijke graaf was gevonden door Foster, maar nooit door hem gepubliceerd. [24]
4. De Meringer graaf Nadat heel lang gedacht werd dat er slechts drie $(5, 5)$ -cages bestaan, beschreef Meringer in 1999 [17] een vierde. Om tot deze graaf te komen heeft hij een computerprogramma geschreven dat deze graaf uiteindelijk als vierde optie gaf.



Figuur 9: De vier (5,5)-cages.

4 Openstaande problemen

Dit hoofdstuk maakt de cirkel in deze scriptie rond. In de beginsituatie werd gezocht naar het maximale aantal punten in een graaf met gegeven graad en diameter. Vervolgens bleek de gevonden klasse die hieraan voldeed, de Moore grafen, uitgebreid te kunnen worden tot grotere klassen van grafen. Tot op heden is onduidelijk of deze klassen volledig uitgediept zijn. Ook is nog geen woord gerept over de functie van de Moore geometries, de (k, g) -*graf*en en de (k, g) -*cages*. Enkele functies van deze klassen zullen nu verder worden belicht. Nog openstaande, recent geformuleerde problemen staan hiervan aan de basis.

4.1 Packing

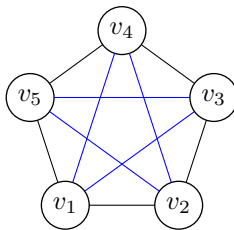
'Packing' is een voorbeeld van een toepassing in de grafentheorie. Kopieën van een graaf worden op elkaar gelegd om tot een volledige graaf te komen, waarbij uitgesloten wordt dat twee lijnen samenvallen. Bij verscheidene bekende grafen, zoals de Petersen graaf, is deze toepassing al geprobeerd. Toch blijkt het niet altijd even duidelijk of door middel van packing de volledige graaf bereikt kan worden. Ook het aantal kopieën dat hiervoor nodig is, is niet altijd evident.

Definitie 4.1. Zij $G_1, \dots, G_k$ k grafen met n punten. Er bestaat een **packing** van $G_1, \dots, G_k$ in K_n als er k permutaties $\sigma_i : V(G_i) \rightarrow V(K_n)$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) bestaan zodanig dat $\sigma_i^*(E(G_i)) \cap \sigma_j^*(E(G_j)) = \emptyset$ met $i \neq j$. Hier is $\sigma_i^* : E(G_i) \rightarrow E(K_n)$ de geïnduceerde afbeelding van σ_i .

Definitie 4.2. Een packing van twee kopieën van een graaf G in K_n heet een **inbedding**.

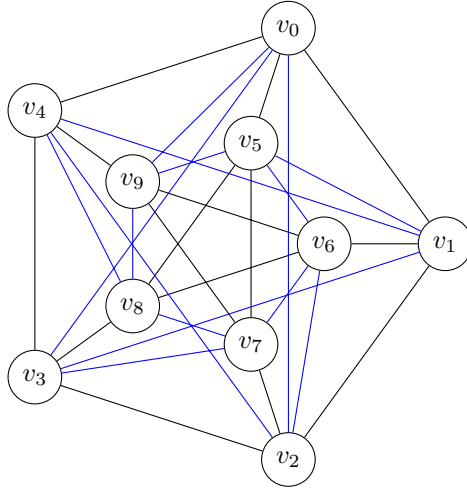
Opmerking 4.3. Er bestaat een packing voor ieder tweetal grafen G_1 en G_2 van orde n als G_1 een deelgraaf is van het complement van G_2 .

Voorbeeld 4.4. Met twee kopieën van C_5 kan K_5 worden gemaakt zonder dat lijnen samenvallen. Dit is een voorbeeld van packing.



Figuur 10: Packing in K_5 .

Voorbeeld 4.5. Het is mogelijk om twee kopieën van de Petersen graaf te packen in K_{10} . Dit ziet er als volgt uit:



Figuur 11: Packing Petersengraaf in K_{10} .

Hoewel we gezien hebben dat packing van twee kopieën van de Petersen graaf mogelijk is, is de volgende stap het construeren van de K_{10} m.b.v. drie kopieën van de Petersen graaf. Dit blijkt onmogelijk te zijn. Hiervoor zijn meerdere bewijzen opgesteld. Van deze bewijzen is dat van B. Tayfeh-Rezaie uit 2006 [22] zeer overzichtelijk.

Stelling 4.6. K_{10} heeft geen ontbinding in drie disjuncte kopieën van de Petersen graaf.

Bewijs. Zij G_1, G_2 en G_3 kopieën van de Petersen graaf, zie Figuur 1. Stel $K_{10} = \sum_{f=0}^3 G_f$. Met ' $G_1 + G_2$ ' bedoelen we de packing van G_1 en G_2 . Beschouw de volgende partitie op de punten van K_{10} : $V = \{1, \dots, c\}$ en $W = \{c+1, \dots, 10\}$ met $0 \leq c \leq 10$. Definieer k_i^f en $(3 - l_j^f)$ de graden van de punten in de geïnduceerde deelgraaf van G_f op respectievelijk V en W . Merk op dat geldt dat $1 \leq i \leq c$ en $c+1 \leq j \leq 10$. In de Petersen graaf geldt dat twee burens nul gemeenschappelijke burens hebben. Daarnaast hebben twee niet-verbonden punten precies één gemeenschappelijke buur. Uit deze feiten leiden we de volgende gelijkheden af:

$$\sum_{i=1}^c k_i^f + \sum_{j=c+1}^{10} l_j^f = 3c. \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^c (k_i^f)^2 + \sum_{j=c+1}^{10} l_j^f (l_j^f - 1) = c(c-1). \quad (5)$$

Neem nu dat $c = 5$, V de vijfhoek gevormd door de buitenste vijf punten en W de ster gevormd door de binnenste vijf punten. Er volgt direct dat $k_i^1 = 2$ en

dat $l_j^1 = 1$. Nu moet gelden dat $(k_i^2, k_i^3) \in \{(0, 2), (2, 0), (1, 1)\}$ en dat $(l_j^2, l_j^3) \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$. Zij x_1, x_2, x_3 en y_1, y_2, y_3 de getallen voor respectievelijk (k_i^2, k_i^3) en (l_j^2, l_j^3) als boven. Dit geeft het stelsel vergelijkingen m.b.v. de gelijkheden 4 en 5:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 15 \\ 4x_2 + x_3 + 6y_2 + 2y_3 = 20 \\ 2x_1 + x_3 + 3y_1 + y_2 + 2y_3 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + 6y_1 + 2y_3 = 20 \end{cases}$$

Het optellen van deze vergelijkingen met de coëfficiënten 6, -3 , -4 en 1 geeft dat $x_1 + y_1 = \frac{5}{2}$. Maar $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ geeft een tegenspraak. $\square$

Het bekijken van packing voor bekende grafen was een logisch gevolg van het formuleren van de definitie. Zoals eerder vermeld is, weten we niet altijd of packing van een graaf leidt tot de K_n . Een voorbeeld hiervan is de Petersen graaf en K_{10} . Het geschetste bewijs is zeker niet het enige. Een geval waarvan onbekend is hoe vaak packing precies mogelijk is, is de Hoffman-Singleton graaf en de K_{50} . Dit is een van de openstaande problemen. Er zijn meerdere pogingen gedaan om dit probleem te kraken met behulp van de methoden die al bekeken zijn voor het geval van de Petersen graaf en de K_{10} . Tot op heden is het succes uitgebleven.

Openstaand probleem 4.7. Met hoeveel kopieën van de Hoffman-Singleton graaf is er een packing mogelijk in de K_{50} ?

Opmerking 4.8. Het is reeds bewezen dat packing met vijf kopieën van de Hoffman-Singleton graaf mogelijk is. Ook is bekend dat het maximale aantal kopieën zeven is, omdat $k = 7$ geeft packing met acht kopieën een te hoge graad.

4.2 Onbekende cages

Tot op heden zijn nog niet alle cages voor alle paren (k, g) gevonden. Deze groep nog onbekende grafen vallen uiteen in twee delen. De eerste groep is de klasse van volledig onbekende grafen, waarvan het bestaan nog niet is aangetoond. Het bekendste voorbeeld uit deze groep grafen is de $(57, 5)$ -cage. Dit brengt ons terug bij het probleem dat we in hoofdstuk 1 al hadden.

Openstaand probleem 4.9. Bestaat $M(2, 57)$, de Moore graaf met diameter 2 en graad 57?

De tweede groep is de klasse van grafen waarbij nog niet duidelijk is of het minimale aantal punten bereikt is. Uit deze klasse bespreken we twee voorbeelden.

Voorbeeld 4.10. Ten eerste het bestaan van de $(3, 9)$ -cage. In 1952 construeerde R.M. Foster [24] de eerste $(3, 9)$ -graaf op 60 punten. In de daarop volgende jaren volgden meer dan 30 niet-isomorfe $(3, 9)$ -graf en op 60 punten. N.I. Biggs

en M.J. Hoare [4] vonden 28 jaar later een $(3, 9)$ -graaf op 58 punten met behulp van een computer. Er zijn nog geen grafen gevonden met $k = 3$, $g = 9$ en een kleiner puntenaantal. Wel weten we uit 3.1 dat $v(3, 9) \geq 54$ en dus dat $54 \leq v(3, 9) \leq 58$.

Openstaand probleem 4.11. Bestaat er een $(3, 9)$ -graaf met minder dan 58 punten? Zo ja, wat is het aantal punten van de $(3, 9)$ -cage?

Voorbeeld 4.12. Tot slot een geval waarbij slechts één graaf bekend is: de $(3, 11)$ -cage. A.T. Babalan beschreef in 1973 een $(3, 11)$ -graph op 112 punten. Hij vond deze graaf door van de al bekende, minimale $(3, 12)$ -cage 14 punten te verwijderen en hun burens op geschikte wijze te verbinden. Verder is bekend uit 3.1 dat $v(3, 11) \geq 93$ en dus dat $93 \leq v(3, 11) \leq 112$.

Openstaand probleem 4.13. Bestaat er een $(3, 11)$ -graaf met minder dan 112 punten? Zo ja, wat is het aantal punten van de $(3, 11)$ -cage?

Referenties

- [1] A.T. Babalan, Trivalent graphs of girth nine and eleven and relationships among cages, *Rev. Roumaine Math.* **18** (1973) 1033–1043.
- [2] E. Bannai and T. Ito, On finite Moore graphs, *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.* **20** (1973) 191–208.
- [3] N.I. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, Second Edition, Great-Britain (1993).
- [4] N.I. Biggs and M.J. Hoare, A trivalent graph with 58 vertices and girth 9, *Discrete Math.* **20** (1980) 299–301.
- [5] R.C. Bose and T.A. Dowling, A generalization of Moore graphs of diameter two, *J. Comb. Th.* **11** (1971) 213–226.
- [6] G. Brinkmann, B.D. McKay and C. Saager, The smallest cubic graphs of girth nine, In: Combinatorics, Probability and Computing (317–329), *Cambridge Univ. Press*, Cambridge England (1995)
- [7] A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag (1989).
- [8] P.J. Cameron, Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge England (1994).
- [9] P.J. Cameron and M. Cioaba, A graph partitioning problem, *The American Mathematical Monthly*, vol. 122, **10** (2015) 972–982.
- [10] R.M. Damerell, On Moore geometries II, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **90** (1981) 33–40.
- [11] R.M. Damerell, On Moore graphs, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **74** (1973) 227–236.
- [12] R.M. Damerell and M.A. Georgiagadis, On Moore geometries, I, *J. London Math. Soc. (2)* **23** (1981) 1–9.
- [13] C. Fan and A.J. Schwenk, Structure of the Hoffman-Singleton Graph, *Congressus Numerantium*, **94** (1993) 3–8.
- [14] F.J. Fuglister, On finite Moore geometries, *J. Combin. Th. (A)* **23** (1977) 187–189.
- [15] F.J. Fuglister, The nonexistence of Moore geometries of diameter 4, *Discrete Math.* **67** (1987) 249–258.
- [16] A.J. Hoffman and R.R. Singleton, On Moore graphs with diameter 2 and 3, *IBM J. Res. Develop.* **4** (1960) 497–504.

- [17] M. Meringer, Fast generation of regular graphs and construction of cages, *Journal of graph theory* **30** (1999) 137–146.
- [18] M. Miller and J. Siran, Moore graphs and beyond: a survey on the degree/diameter problem, *Electronic Journal of Combinatorics* (2015).
- [19] N. Robertson, The smallest graph of girth 5 and valency 4, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**, (1964) 824–825.
- [20] A. Schrijver, On the history of combinatorial optimization (till 1960), In: K. Aardal, G.L Nemhauser, R. Weismantel, Handbook of Discrete Optimization, Amsterdam, The Netherlands *Elsevier*, (2005) 1–68.
- [21] R. Singleton, There is no irregular Moore graph, *Amer. Math. Monthly* **75** (1968) 42–43.
- [22] B. Tayfeh-Rezaie, Yet another quick proof that $K_{10} \neq P + P + P$, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **48** (2006) 119–120.
- [23] W.T. Tutte, A family of cubical graphs, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **43** (1943) 459–474.
- [24] P.K. Wong, On cages—a survey, *J. Graph Theo.* (1982).