Het Chromatische Polynoom

N.C. A'Campo

12 juli 2012

Hoofdstuk 1

Inleiding

Stel de universiteit wilt nog meer maatregelen zodat men sneller gaat studeren en vraagt de netwerkbeheerder om het sociale media gebruik van de studenten in te perken. Deze besluit om niet over één nacht ijs te gaan en het universiteitsnetwerk van het internet los te koppelen. Dit is geen zachte maatregel maar wel doeltreffend want zo hebben studenten alleen nog maar toegang tot blackboard en niet meer tot facebook etc. Studenten zijn echter niet dom en gaan binnen dit universiteitsnetwerk gewoon door met kletsen met hun vrienden van de studie die ook op dit netwerk zitten. Dan bedenkt de beheerder op zijn beurt weer iets slims, hij deelt het universiteitsnetwerk op in meerdere netwerken die allemaal afgesloten van elkaar zijn. Hij gaat de studenten zo indelen, dat binnen een netwerk alleen maar studenten komen te zitten die allemaal onderling niet met elkaar bevriend zijn. Om de studie gerelateerde communicatie te bevorderen moeten de studenten natuurlijk in zo min mogelijk verschillende netwerken worden ingedeeld.

Als je nu een graaf tekent met als punten studenten en vrienden door een kant met elkaar verbonden laat zijn komt bovenstaande neer op het minimale aantal kleuren zoeken waarmee je een graaf kan kleuren. Een graaf kleuren doe je door de knopen een kleur te geven zodat buren(knopen waar een kant tussen zit) niet dezelfde kleur krijgen. Het bekendste voorbeeld hiervan is het vierkleurenprobleem, wat zo bekend is dat het eigenlijk geen uitleg nodig heeft(en het te cliché is om de scriptie mee te beginnen, vandaar bovenstaand enigzins gekunsteld voorbeeld).

Nu is dat vierkleurenprobleem niet zo gemakkelijk geweest om op te lossen. In een poging heeft Birkhoff in 1912 ([2]) het chromatisch polynoom bedacht. Het chromatisch polynoom telt op hoeveel manieren een graaf met k kleuren kan worden gekleurd. Je hebt dus een graaf en daar krijg je door kleuringen te tellen een chromatisch polynoom bij. Maar zijn alle polynomen chromatisch; met andere woorden kun je als je een polynoom krijgt een graaf teruggeven zodat als je de kleuringen van die graaf gaat tellen je weer op dat polynoom uitkomt? Met deze omgekeerde vraagstelling in het achterhoofd is er begonnen met het uitzoeken van zoveel mogelijk eigenaardigheden en eigenschappen van het chromatisch polynoom om deze kennis tenslotte te gebruiken om een algoritme te maken wat bij een gegeven polynoom een graaf kan vinden. Het chromatisch polynoom bleek echter zo interessant te zijn dat het er niet van gekomen is een algoritme te maken. De opgedane kennis kan echter prima dienen om in de toekomst een algoritme te maken wat kan beslissen of een polynoom een chromatisch polynoom is of niet.

De scriptie is als volgt ingedeeld. Er is een hoofdstuk 1 en een hoofdstuk 2. Hoofdstuk 1 bevat een aantal eenvoudig af te leiden eigenschappen van chromatische polynomen. Hoofdstuk 2 bevat een aantal uitgebreidere stellingen met bewijs, waarvan een drietal lange bewijzen. De stelling van Seymour (3.4.2) is een van die drie en valt in de buitencategorie wat betreft taaiheid, de andere bewijzen zijn goed te doen.

Alhoewel het chromatisch polynoom uit 1912 stamt en het vierkleurenprobleem zo goed als opgelost is wordt er nog steeds onderzoek verricht naar chromatische polynomen. Dit gaat onder andere over de eigenschappen van het polynoom zoals nulpunten en coëfficiënten, en over welke grafen een uniek chromatisch polynoom bezitten. (In het algemeen kunnen twee verschillende grafen hetzelfde chromatisch polynoom hebben).

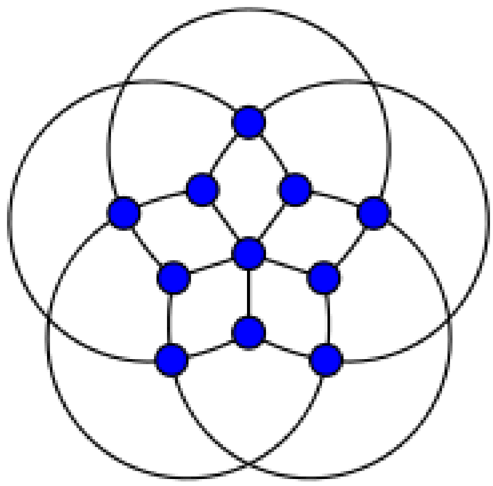
Hoofdstuk 2

1.Het chromatische polynoom

2.1 Definities

We beginnen met een aantal begrippen in te voeren welke standaard zijn in de grafentheorie. Allereerst de **natuurlijke getallen**. In deze scriptie betekent $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ en $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Omdat we kleuringen gaan tellen zullen we vaak faculteiten tegenkomen, dus als korte notatie voeren we in dat $(k)_n = k(k-1)\ldots(k-n+1)$. Met een **graaf** wordt een eindige, enkelvoudige, niet gerichte graaf bedoeld. Lussen zijn dus uitgesloten. Met $G = (V(G), E(G))$ wordt de graaf G bedoeld met **knopen** uit $V(G)$ en **kanten** uit $E(G)$. De **orde** $v(G)$ van een graaf $G = (V(G), E(G))$ is het aantal knopen $|v(G)|$. De **grootte** $e(G)$ van een graaf $G = (V(G), E(G))$ is het aantal **kanten** $|E(G)|$. We eisen verder dat $V(G) \neq \emptyset$, $E(G)$ mag wel leeg zijn. Een **volledige** graaf is een graaf waarbij iedere knoop door een kant verbonden is en wordt genoteerd als K_n. Een graaf zonder kanten, een zogenoemde **lege graaf** op n knopen, wordt genoteerd met L_n. De **graad** van een knoop $d(v)$ is het aantal kanten waar v deel van uitmaakt. Een **pad** tussen een knoop v en een knoop w is een rijtje knopen met kanten ertussen, waarin iedere knoop maar een keer voorkomt, die v met w verbindt. Een **circuit** is een pad waarbij het begin en eindpunt met elkaar verbonden zijn. De **omtrek** (Engels:girth) van een graaf is het minimum aantal kanten dat een circuit van een graaf G bevat. Als een graaf geen ciruits bevat wordt deze genoteerd met $+\infty$, anders met $g(G)$. Een **boom** is een graaf zonder circuit. Een **opspannende deelgraaf** is een deelgraaf van G die dezeflde knopen en een deelverzameling van de kanten van G bevat. Een **samenhangende graaf** is een graaf met de eigenschap dat elke twee knopen door een pad verbonden zijn. Een **brug** is een kant die de eigenschap heeft dat als je deze weghaalt, de graaf niet meer samenhangend is. Een **component** is een maximaal samenhangende deelgraaf. Een **bos** is een graaf waarvan de componenten bomen zijn. Zij G/e de graaf die verkregen wordt door een kant e weg te halen en de twee knopen van deze kant samen te voegen(Dit noemt men in de (Engelstalige) literatuur een edge contraction). De nieuwe knoop die uit de twee knopen van e onstaat noemen we de **samentrekking** van e. Een **kleuring** is een functie f van de knopen van de graaf V naar $\mathbb{N}$. Een **toegestane kleuring** is een functie f van de knopen van de graaf V naar $\mathbb{N}$ zodat voor alle $v, w \in V$ geldt dat als $(v, w) \in E$, dan $f(v) \neq f(w)$. Een kleuring is dus het geven van een kleur aan iedere knoop (let op: je zou ook de kanten kunnen kleuren, maar dat doen we hier niet). Een toegestane kleuring is een kleuring waarbij de buren niet dezelfde kleur hebben. Zij P_G de functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. P_G beeldt een natuurlijk getal af op het aantal mogelijkheden om G een toegestane kleuring te geven. Dit is de **chromatische functie** van G; een paar regels verder zullen we zien dat dit altijd een polynoom is. Deze functie doet dus niets meer en niets minder dan aangeven op hoeveel verschillende manieren je G kan kleuren met k kleuren zodat buren niet dezelfde kleur krijgen. Een **onafhankelijke verzameling** is een verzameling van knopen van een graaf G die niet onderling door een kant verbonden zijn. Bij een gegeven G is $\alpha(G, i)$ het aantal manieren om $V(G)$ in i onafhankelijke verzamelingen op te delen. Een **kliek** is min of meer het tegenovergestelde: een deelgraaf van G die volledig is. Het **kliekgetal** $\omega(G)$ is het maximale aantal van knopen die allemaal onderling verbonden zijn.

Zij $\chi(G)$ het minimaal aantal kleuren waarmee je een graaf een toegestane kleuring kan geven. Dit noemen we het **kleurgetal**. Het kleurgetal moet uiteraard minstens net zo groot zijn als het kliekgetal. Andersom is niet het geval, zoals onderstaande afbeelding illustreert. Deze graaf heeft kleurgetal 4, maar bevat niet één driehoek.



Opmerking 2.1.1. *Uiteraard geldt dat* $\chi(G)$ *het kleinste natuurlijke* k *getal is zodat* $P_G(k) > 0$.

Opmerking 2.1.2. *Voor elke graaf* G *van grootte* m *(dus met* m *kanten) geldt* $\chi(G)(\chi(G) - 1) < 2m$.

Bewijs. Voor ieder paar van verschillende kleuren moet er een kant (v, w) bestaan waarvan v de ene kleur, zeg rood, en w de andere kleur, zeg blauw, is. Stel niet. Dan kunnen we alle blauwe knopen rood maken. Immers zijn geen van de blauwe knopen met een rode knoop verbonden. Maar dat kan niet vanwege het feit dat $\chi(G)$ het kleinste aantal kleuren is dat nodig is om G te kleuren. Er zijn $\frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$ mogelijkheden om een paar van verschillende kleuren te maken, waaruit de opmerking volgt. □

2.2 Elementaire eigenschappen

We zullen een aantal elementaire eigenschappen geven van het chromatische polynoom. De meeste eigenschappen en bewijzen komen uit [8], een uitstekende inleidende tekst over het chromatische polynoom.

Voorbeeld 2.2.1. *Voor de volledige graaf* K_n *geldt:*
$P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)...(k-(n-1)) = (k)_n$.

Dit is eenvoudig in te zien: De eerste knoop die we kleuren kan op k manieren, de tweede knoop op $k - 1$ manieren, want die mag niet dezelfde kleur als de eerste hebben, etc.

Herinner dat $\alpha(G, i)$ het aantal manieren was waarmee je $V(G)$ in i onafhankelijke verzamelingen op kan delen.

Gevolg 2.2.2. (Factoriale vorm) *Zij* G *een graaf met* n *knopen. Dan*

$$P_G(k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(G, i)(k)_i.$$

Stelling 2.2.3. (Factorisatiestelling) *Zij* $G_1, \ldots, G_n$ *componenten van* G. *Dan geldt:*

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k) \cdots P_{G_n}(k).$$

Gevolg 2.2.4. $P_{L_n}(k) = k^n$

Stelling 2.2.5. (Productregel) *Zij* G *en* H *grafen zodat* $G \cap H = K_n$. *Dan geldt:*

$$P_{G \cup H} = \frac{P_G(k) \cdot P_H(k)}{k(k-1) \cdots (k-(n-1))}$$

Bewijs. De kleuringen van G kunnen worden opgedeeld in verschillende klassen al naar gelang de kleuring van de deelgraaf K_n van G. Voor iedere kleuring van K_n zijn er evenveel kleuringen van G te maken, de kleuringen van G kunnen dus in $k(k-1)...(k-n-1)$ klassen van dezelfde grootte worden ingedeeld. Neem nu een vaste kleuring van K_n. Hieruit kunnen we dus $\frac{P_G(k)}{P_{K_n}(k)}$ kleuringen van G verkrijgen, en op dezelfde manier $\frac{P_H(k)}{P_{K_n}(k)}$ kleuringen van H. Dus geldt:

$$P_{G\cup H}(k) = \frac{P_G(k)}{P_{K_n(k)}}.\frac{P_H(k)}{P_{K_n(k)}}.P_{K_n(k)}.$$

□

Stelling 2.2.6. *Als G een boom is met n knopen dan geldt* $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$

Bewijs. Zij G een boom met n knopen. Deze is te verkrijgen door aan een boom van met $n-1$ knopen één knoop en dus één kant toe te voegen. De boom met $n-1$ knopen heeft per inductie de chromatische functie $k(k-1)^{n-2}$ en heeft een knoop gemeen met de kant die toegevoegd is. Hierop kunnen we de productregel toepassen, die geeft dat:

$$P_G(k) = \frac{k(k-1)^{n-2} \cdot k(k-1)}{k} = k(k-1)^{n-1}.$$

□

Opmerking 2.2.7. *De omkering geldt ook en zullen we later in 2.2.26 bewijzen*

Stelling 2.2.8. (Reductie stelling) *Zij G een graaf, en zij $G-e$ en G/e grafen die verkregen worden vanuit G door het weghalen of het samenvoegen van een kant e. Dan geldt*

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k).$$

Bewijs. Zij $e = vw$. Het aantal k-kleuringen van $G-e$ waarin v en w verschillende kleuren hebben is hetzelfde als $P_G(k)$. Het aantal k-kleuringen van $G-e$ waarin v en w dezelfde kleur hebben verandert niet als je v en w samenvoegt, en is dus gelijk aan $P_{G/e}(k)$. We vinden dus dat het totaal aantal k-kleuringen van $G-e$ gelijk is aan $P_G(k) + P_{G/e}(k)$. Dus geldt $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$. □

Voorbeeld 2.2.9. *Zij C_n een circuit met n knopen. Dan geldt dat*

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

Gebruik inductie. Volgens voorbeeld 2.2.1 is C_3 een volledige graaf waarvoor de formule zeker geldt. Merk op dat $C_n - e$ voor iedere kant e een boom is. Met behulp van de reductiestelling 2.2.8 krijgen we dus

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{C_n - e}(k) - P_{C_{n-1}}(k) \\ &= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(k-1) \\ &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1). \end{aligned}$$

Stelling 2.2.10. De chromatische functie van een graaf is een polynoom.

Bewijs. We nemen kanten in G en verwijderen en voegen de knopen hiervan samen, zodat we twee nieuwe grafen verkrijgen. We herhalen dit bij deze twee grafen zodat we vier grafen krijgen enzovoorts. We stoppen het proces wanneer alle grafen lege grafen zijn. Omdat de chromatische functie van een lege graaf een polynoom k^n is, verkijgen we voor de chromatische functie van G een eindige som van monomen, wat een polynoom is. □

Gevolg 2.2.11. *Iedere graaf G heeft precies één chromatische polynoom.*

Bewijs. Stel P_G en $P_G^{'}$ zijn chromatische polynomen van G. Dan geldt $P_G(l) = P_G^{'}(l)$ voor alle gehele $l \geq 0$. Omdat $P_G^{'}$ en P_G polynomen zijn die in oneindig veel punten dezelfde waarde aannemen zijn $P_G^{'}$ en P_G aan elkaar gelijk. □

Definitie 2.2.12. *Zij G een graaf met n knopen en m kanten. De coëfficiënten $a_i(G)$ van G definiëren we als volgt:*

$$P_G(k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i(G) k^i$$

Stelling 2.2.13. *Zij G een graaf met n knopen. Dan is de graad van P_G gelijk aan n en is de kopcoëfficiënt $a_n(G)$ gelijk aan 1.*

Bewijs. Met behulp van de reductie stelling 2.2.8 kunnen we G opdelen in steeds een graaf van orde n en een graaf van een lagere orde, totdat we een graaf van orde n overhouden die geen kanten meer bevat en dus k^n als chromatische polynoom heeft. Omdat er maar een graaf van orde n overblijft op deze manier, is de kopcoëfficiënt gelijk aan 1. □

Stelling 2.2.14. *P_G heeft geen constante term; $a_0(G) = 0$.*

Bewijs. Stel niet, dan zou moeten gelden $P_G(0) \neq 0$. □

Stelling 2.2.15. *Zij G een graaf met n knopen. Dan heeft P_G geen gehele nulpunten die groter zijn dan $n - 1$.* □

Stelling 2.2.16. *De coëfficiënten van P_G alterneren van teken.*

Bewijs. Het is eenvoudig na te gaan dat de stelling waar is voor alle grafen met 1 en 2 knopen. Stel G heeft 3 knopen. Dan is G een volledige graaf, een bos, of een lege graaf. In ieder van de drie gevallen geldt de stelling. Veronderstel dat de stelling waar is voor grafen met hoogstens n knopen. Bekijk grafen op $n+1$ knopen. De lege graaf op $n+1$ knopen voldoet zeker aan de stelling. Zij m een geheel getal zodat de stelling waar is voor alle grafen op $n+1$ knopen en m of minder kanten. Bekijk een graaf H met $n+1$ knopen en $m+1$ kanten. Met behulp van de reductiestelling 2.2.8 geldt dat:

$$P_H(k) = P_{H-e}(k) - P_{H/e}(k)$$

waarbij $H-e$ $n+1$ knopen en m kanten heeft, H/e heeft n knopen. Omdat de stelling waar is voor $H-e$ en H/e kunnen we schrijven dat

$$P_{H-e}(k) = k^{n+1} - a_1k^n + a_2k^{n-1} - a_3k^{n-2} + ...$$

en

$$P_{H/e}(k) = k^n - b_1k^{n-1} + b_2k^{n-2} - ...$$

met alle a_i en b_i positief per aanname. Dus geldt:

$$P_H(k) = k^{n+1} - (a_1+1)k^n + (a_2+b_1)k^{n+1} - (a_3+b_2)k^{n+2} + \dots$$

, zodat de coëficiënten in teken alterneren. □

Gevolg 2.2.17. *Zij G een graaf met minstens één kant. Dan zijn de coëfficiënten bij elkaar opgeteld gelijk aan* 0.

Bewijs. $\sum_i a_i = P_G(1) = 0$. □

De volgende stelling zegt iets over hoe je het chromatische polynoom kan schrijven in termen van gebroken circuits.

Definitie 2.2.18. *Nummer de kanten van G: Aan iedere kant voegen we een getal uit $\{1, 2, \dots, m\}$ toe zodat we de kanten kunnen aftellen. Een gebroken α_i-circuit is een circuit in G waaruit de kant met de hoogste nummering α_i is weggehaald. Een gebroken circuit is een α_i-circuit voor zekere α_i.*

Een eerste triviaal feit is dat een circuit altijd een gebroken circuit bevat.

Merk tevens op dat we nu niet alleen de kanten geordend hebben maar ook vanzelfsprekend de (gebroken) circuits. Als formaliteit spreken we af een gebroken α_i-circuit kleiner dan te noemen dan een gebroken α_j-circuit als de nummering α_i lager is dan α_j.

Stelling 2.2.19. *(Whitney 1932) [13] Zij G een graaf met n knopen en m kanten. Dan*

$$P_G(k) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (-1)^i m_i k^{n-i}.$$

waarbij m_i het aantal opspannende deelgrafen van G is van i kanten die geen gebroken circuits bevatten.

Bewijs. De definitie van gebroken circuits en de manier waarop Whitney het aantal kleuringen telt kan uit de lucht lijken te vallen maar het idee is simpel en gaat als volgt: Je kunt met inclusie-exclusie het aantal k-kleuringen van een graaf tellen door als verzamelingen te nemen de (niet toegestane) kleuringen waarin twee buren hetzelfde gekleurd zijn. Het aantal toegestane kleuringen is dan het complement van de doorsnijding van al deze verzamelingen bij elkaar, immers hierin hebben geen buren meer dezelfde kleur. In de formule waarop je dan uitkomt kan je een aantal termen tegen elkaar wegstrepen, en dat zijn precies de termen die blijken te corresponderen met deelgraaf die een gebroken circuit bevat.

Herhaal dat in dit bewijs en in principe ook in de rest van de scriptie er onderscheid wordt gemaakt tussen kleuringen en toegestane kleuringen, zoals aan het begin van dit hoofdstuk gedefinieerd.

Zij A_{ij} de notatie voor een kleuring van G waarin knoop i en j dezelfde kleur hebben. Dan is het aantal toegestane kleuringen van G wanneer $E = (a, b) \cup (b, c) \cup ... \cup (e, m)$ gelijk aan $|A^c_{ab} \cup A^c_{bc} \cup ... \cup A^c_{em}|$. Met behulp van het principe van inclusie-exclusie geldt er dat:

$$\begin{aligned} P_G(k) &= |A^c_{ab} \cup A^c_{bc} \cup \ldots \cup A^c_{em}| \\ &= k^n - |A_{ab}| - |A_{bc}| - ... - |A_{em}| \\ &+ |A_{ab} \cup A_{bc}| + ... - ... + (-1)^n |A_{ab} \cup A_{bc} ... \cup A_{em}| \end{aligned} \tag{2.1}$$

Een voorbeeld tussendoor ter verduidelijking: Zij K een graaf met knopen a, b, c, d, e, f. De verzameling kleuringen waarbij a,b,c verschillende kleuren krijgen maar d,e,f dezelfde kleur, dus waarvan de collectie onafhankelijke verzamelingen $\{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$ is, is in onze 'verzamelingen' notatie $A_{de} \cup A_{df} \cup A_{ef}$.
Met iedere verzameling kleuringen $\cup A_{ij}$ correspondeert een opspannende deelgraaf H van G waarbij knopen die in de kleuring van G dezelfde kleur hebben door een kant verbonden in H zijn. In onze voorbeeld graaf K zou dat betekenen dat met de kleuring $A_{de} \cup A_{df} \cup A_{ef}$ uit het voorbeeld een graaf J correspondeert met $V(J) = \{a, b, c, d, e, f\}$, en $E(J) = \{(d, e), (d, f), (e, f)\}$.
Merk op dat een samenhangscomponent in H betekent dat in de bijbehorende verzameling van kleuringen alle knopen van deze component

dezelfde kleur hebben. Als een verzameling van kleuringen een bijbehorende opspannende deelgraaf H heeft met p componenten, zijn er dus k^p mogelijkheden om deze te kleuren wat dan ook de kardinaliteit van de verzameling van kleuringen is.

Noem de kanten van G $E(G) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, zodat de kanten genummerd zijn; α_1 is de laagst genummerde kant, α_m is de hoogst genummerde kant. Zij S_i de verzameling van deelgrafen van G waarvan een gebroken α_i-circuit het kleinste gebroken circuit is. Merk ten eerste op dat de verzamelingen S_i ook leeg kunnen zijn. Ten tweede zijn S_1, S_2, …, S_{α_m} disjunct. Noem tenslotte S_{α_m+1} de verzameling van deelgrafen van G die helemaal geen gebroken circuits bevatten.

Bekijk nu alle termen in de 'inclusie-exclusie' vergelijking (1.1) die corresponderen met deelgrafen uit S_1. Iedere deelgraaf in S_1 die α_1 niet bevat correspondeert met een unieke deelgraaf in S_1 die α_1 wel bevat (door gewoon α_1 toe te voegen). De deelgrafen van S_1 en dus de corresponderende termen van (1.1) zijn dus in paren te verdelen. Maar de twee termen van ieder paar vallen in (1.1) tegen elkaar weg: Zij H en $H^{'}$ twee van zulke deelgrafen in S_1 die uit elkaar verkregen kunnen worden door α_1 weg te halen respectievelijk toe te voegen. Als H p componenten heeft, dan heeft $H^{'}$ ook p componenten, want de kant α_1 verbindt twee knopen die ook al door een gebroken circuit verbonden zijn. Beide dragen ze dus k^p bij aan $P_G(k)$ en vallen ze tegen elkaar weg, vanwege de alternerende coëfficiënten in (1.1).

Bekijk alle termen in (1.1) die corresponderen met deelgrafen uit S_2. Bij iedere deelgraaf die α_2 bevat hoort weer een deelgraaf die α_2 niet bevat en omgekeerd. Zodoende vallen de termen in (1.1) opnieuw tegen elkaar weg. Op dezelfde manier zien we dat alle termen van S_3,S_4,...,S_{α_m} tegen elkaar wegvallen.

Een probleem zou nu kunnen zijn dat als aan een deelgraaf uit S_i α_i wordt toevoegd, dat er dan een graaf uit een andere S_j ontstaat zodanig dat $i > j$ ($i < j$ is per definitie van S_l uitgesloten). Dan zou deze S_j een circuit met daarin α_i met $i < j$ moeten bevatten en dus ook een gebroken α_i-circuit, wat ook per definitie van S_l uitgesloten is.

De enige termen in (1.1) die dus overblijven zijn de termen die corresponderen met deelgrafen van G die geen gebroken circuits bevatten, de deelgrafen uit $S_{\sigma+1}$. Bekijk een term in (1.1) uit S_{α_m+1} die i kanten bevat. De corresponderende deelgraaf H bevat geen gebroken circuits en dus ook geen circuits. Als we H kant voor kant opbouwen dan verbindt iedere kant die we toevoegen twee knopen die voorheen niet verbonden waren en dus gaat het aantal componenten met één omlaag iedere keer dat er een kant wordt toegevoeg. Dus het aantal componenten in H is $n-i$, en de corresponderende term draagt $(-1)^i k^{n-i}$ bij aan $P_G(k)$. Sommerend over i verkrijgen we dat $P_G(k) = \sum_i (-1)^i m_i k^{n-i}$. De opspannende deelgraaf met de meeste kanten is een boom en heeft dus $n-1$ kanten, dus i loopt van 0 tot $n-1$,

$$P_G(k) = \sum_{0 \le i \le n-1} (-1)^i m_i k^{n-i}.$$

□

Gevolg 2.2.20. *Zij G een samenhangende graaf. Als de graad van P_G even is, dan is de coëfficiënt behorende bij k in P_G negatief. Als de graad van P_G oneven is, dan is de coëfficiënt behorende bij k in P_G positief.*

Gevolg 2.2.21. *De absolute waarde van de coëfficiënt $a_{n-1}(G)$ behorende bij de op een na hoogste macht van het polynoom is gelijk aan het aantal kanten van de graaf.*

Bewijs. Iedere deelverzameling die uit een kant bestaat kan geen gebroken circuits bevatten. □

Gevolg 2.2.22. *Voor alle $1 \le j \le n$ geldt dat $a_j(G) \le \binom{a_1(G)}{j}$*

De samenhang tussen circuits, gebroken circuits, bomen en componenten levert ons nog een aantal inzichten op:

Lemma 2.2.23. (Wilf 1976) *[14] Zij G een samenhangende graaf met n knopen en m kanten. Dan geldt voor alle $1 \le j \le n-1 : a_j(G) \ge \binom{n-1}{j-1}$*

Bewijs. Kies een opspannende boom T van G. Nummer de kanten van T met de $n-1$ hoogste getallen $m, m-1, \ldots, m-n+1$. Nummer de kanten van $G \backslash T$ willekeurig met $m-n, m-n-1, \ldots, 1$. Herinner dat $a_j(G)$ volgens Whitney 2.2.19 gelijk is aan alle deelgrafen van G zonder gebroken circuits met $n-j$ kanten. Zij S een deelverzameling van T met $n-j$ kanten. Dan bevat S geen gebroken circuits. Dus geldt
$a_j(G) \ge \binom{n-1}{n-j} = \binom{n-1}{j-1}$ □

Opmerking 2.2.24. *Bovenstaand lemma kan ook afgeleid worden uit het chromatische polynoom van een opspannende boom T van G.*

$$P_T(k) = k(k-1)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j-1} \binom{n-1}{j-1} k^j$$

Lemma 2.2.25. *Zij $P_G(k)$ een chromatisch polynoom. De kleinste p waarvoor geldt dat k^p een coëfficiënt heeft die ongelijk is aan nul, is het aantal samenhangscomponenten van G.*

Bewijs. Als $a_i(G) = 0$ voor alle $i < p$ terwijl $a_p(G) > 0$, dan is het grootste bos dat een deelverzameling van G is een bos met $n - p$ kanten en heeft G dus hoogstens p componenten. Immers, als je start met een lege graaf heb je n componenten, iedere kant die toe wordt gevoegd verbindt twee componenten. Dus $n - p$ kanten in het bos dat een deelgraaf van G is betekent hoogstens p componenten in G. Het kunnen er niet minder dan p zijn, dan zou je een opspannende deelverzameling van G kunnen maken dat $n - i$ kanten bevat waarbij $i < p$ en dan zou gelden $a_i(G) > 0$ voor een $i < p$. □

Stelling 2.2.26. *Zij G een graaf met n knopen. Dan geldt dat $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ dan en slechts dan als G een boom is.*

Bewijs. Als G een boom is dat is $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ volgens stelling (2.2.6). Stel $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. Dan is G samenhangend omdat de coëfficiënt van k niet nul is, vanwege lemma 2.2.25. Ook heeft G $n-1$ kanten en n knopen, dus G is een boom. 2.2.21 □

Stelling 2.2.27. *Zij G een samenhangende graaf van orde n. Dan geldt voor iedere $i \in \mathbb{N}$, $i \leq n-1$, dat*

$$a_{i+1}(G) \leq (\frac{n}{i} - 1)a_i(G).$$

Als G een boom is, dan geldt gelijkheid.

Bewijs. Stel G is een boom. Dan is $a_i(G)$ het aantal deelverzamelingen van G van grootte $n - i$ dat geen gebroken circuit bevat. Omdat G een boom is, heeft geen enkele deelverzameling van G een gebroken circuit en is $a_i(G)$ dus simpelweg het aantal deelverzamelingen van G van grootte $n - i$. Dus $a_i(G) = \binom{n-1}{i-1}$ en $a_{i+1}(G) = \binom{n-1}{i}$. Hieruit volgt $\frac{a_{i+1}(G)}{a_i(G)} = \frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n-1}{i-1}} = \frac{i!(n-i-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{n-i}{i}$ en dus $a_{i+i}(G) = (\frac{n}{i} - 1)a_i(G)$.

Voor grafen van orde 2 en 3 kunnen we eenvoudig laten zien dat de bewering geldt. We bewijzen nu de stelling met behulp van inductie naar het aantal knopen en het aantal kanten van G. Zij n_0 een natuurlijk getal zodat de stelling waar is voor alle grafen van orde $n < n_0$. Zij m_0 een natuurlijk getal zodat de stelling waar is voor alle grafen met n_0 knopen en minder dan m_0 kanten. Zij G een graaf van orde n_0 en grootte m_0, die tenminste één circuit bevat. Zij e een kant uit dit circuit. Merk op dat nu G/e en $G - e$ aan de stelling voldoen, want samenhangend en de orde respectievelijk grootte is kleiner dan n_0 en m_0. Met behulp van de reductiestelling geldt:

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$$

en dus

$$\begin{aligned} a_{i+1}(G) &= a_{i+1}(G-e) - a_{i+1}(G/e) \\ &\leq (\frac{n_0}{i} - 1)a_i(G-e) - (\frac{n_0}{i} - 1)a_i(G/e) \\ &\leq (\frac{n_0}{i} - 1)(a_i(G-e) - a_i(G/e)) \\ &= (\frac{n_0}{i} - 1)a_i(G). \end{aligned}$$

voor alle $i \leq n_0 - 2$ (G/e heeft immers een knoop minder, daarom moet het geval $i = n_0 - 1$ apart bekeken worden).
Stel $i = n_0 - 1$. Dan geldt:

$$a_{i+1}(G) = a_{i+1}(G-e) \leq (\frac{n_0}{i} - 1)(a_i(G-e) - a_i(G/e)) \leq (\frac{n_0}{i} - 1)a_i(G).$$

□

Gevolg 2.2.28. *Voor een samenhangende graaf G met orde resp. grootte n en m geldt :*

$$1 = |a_n(G)| < |a_{n-1}(G)| < ... < |a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(G)|$$

Opmerking 2.2.29. *Er is een vermoeden dat de coëfficiënten van $a_n(G)$ tot aan $a_1(G)$ eerst stijgen en dan weer dalen. (Wat bij een boom zo in te zien is uit de formule van Whitney 2.2.19). Meer hierover in sectie 3.2.1.*

Stelling 2.2.30. *Het interval $(-\infty, 0)$ bevat geen nulpunten van het polynoom $P_G(k)$.*

Bewijs. Gebruik de gebroken circuit stelling van Whitney 2.2.19:

$$(-1)^n P_G(k) = (-1)^n \sum_i (-1)^i m_i k^{n-i} = \sum_i (-k)^{2n} m_i > 0.$$

□

Stelling 2.2.31. *Zij G een graaf van orde n die c componenten heeft. Dan geldt:*

$$(-1)^{n-c} P_G(k) > 0,$$

voor alle reële $k \in (0, 1)$.

Bewijs. Als G een bos is dan geldt $P_G(k) = k^c(k-1)^{n-c}$ en volgt de stelling onmiddelijk.
Stel H is een graaf die geen bos is en waarvoor de stelling niet waar is, en waarvoor geldt dat $n + m$ minimaal is, waarbij n het aantal knopen, en m

het aantal kanten is. H is geen bos, dus H bevat circuits. Zij xy een kant van een circuit in H. We zien dat $H - xy$ n knopen, $m-1$ kanten en c componenten heeft. H/xy heeft $n-1$ knopen, op zijn hoogst $m-1$ kanten en c componenten.
De minimale keuze van H impliceert dat de stelling waar is voor zowel $H - xy$ als voor H/xy. Dus voor elke reële $k \in (0,1)$ geldt

$$(-1)^{n-c} P_{H-xy}(k) > 0$$

en

$$(-1)^{n-1-c} P_{H/xy} > 0.$$

Met behulp van de reductiestelling 2.2.8 komen we uit op :

$$\begin{aligned}(-1)^{n-c} P_G(k) &= (-1)^{n-c} P_{H-xy}(k) - (-1)^{n-c} P_{H/xy}(k) \\ &= (-1)^{n-c} P_{H-xy}(k) + (-1)^{(n-1)-c} P_{H/xy}(k) \\ &> 0.\end{aligned}$$

□

Onderstaand gevolg vat de voorgaande twee stellingen 2.2.30 en 2.2.31 samen.

Gevolg 2.2.32. *Zij G een graaf. $P_G(x)$ heeft geen reële nulpunten in het interval* $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

Hoofdstuk 3

Geavanceerde eigenschappen.

We presenteren nu wat diepere resultaten. Dit vereist iets meer voorkennis en een aantal extra definities die we nu zullen geven.
De **omgeving** $N(v)$ van een knoop $v \in V(G)$ is de graaf waarvoor $V(N(v))$ uit alle buren van v bestaat, en waarvoor knopen in $N(v)$ verbonden zijn als ze in G verbonden zijn. Een **simpliciale knoop** van een graaf G is een knoop waarvoor geldt dat $d(v) = 0$ of dat $N(v)$ een volledige deelgraaf is van G.

Zij G een samenhangende graaf met n knopen. Een $u_1, \ldots, u_k$**-knopen-snede** is een verzameling $\{u_1, \ldots, u_k\}$ zodat $G \backslash \{u_1, \ldots, u_k\}$ onsamenhangend is.
Een graaf G heet k**-samenhangend** als er geen knopen-snede bestaat van $k-1$ knopen.
Een graaf G heet **separabel** als G niet 2-samenhangend is.
Een deelgraaf H van een graaf G is een **blok** als het een maximale niet separabele deelgraaf is.
Iedere graaf G is dus opgebouwd uit blokken B_1, ..., B_r die maximaal een knoop met elkaar gemeen kunnen hebben. Met de productregel volgt dat P_G het product is van de P_{B_i}, gecorrigeerd voor de knopen die de blokken met elkaar gemeen hebben. Je kunt de blokken van een graaf schematisch weergeven door een boom te tekenen waarbij ieder blok een knoop is. Dit noemen we een **blok-boom**.
Zij u, v knopen van G. Noem de operatie die het kant uv weghaalt en een knoop x aan G toevoegt en deze verbindt met u en v een **dubbele subdivisie**.

Definitie 3.0.33. *Gegeneraliseerde kant(driehoek) Een gegeneraliseerd kant(driehoek) is een* $K_2(K_3)$ *waarop nul of meer keren een dubbele subdivisie is uigevoerd*

Een eerste observatie is dat een gegeneraliseerde driehoek 2-samenhangend is, en een oneven aantal knopen heeft.

Definitie 3.0.34. Chordale graaf
Zij G een graaf. Als voor iedere deelgraaf H van G één van de volgende twee uitspraken van toepassing is:
(1) H bevat geen circuits.
(2) De minimale lengte van een circuit dat bevat is in H, is 3.
Dan heet G een chordale graaf.

Zij $\mathcal{C}(n, m)$ gedefinieerd als de verzameling van samenhangende chordale grafen met n knopen en m kanten.
Een bijzondere eigenschap van chordale grafen is dat ze geconstrueerd kunnen worden op de volgende manier:

1. Begin met een chordale graaf G (bijvoorbeeld een K_2 of een enkele knoop).
2. Verbind een knoop $v \notin G$ met alle knopen van een $K_r \subseteq G$.

Dit heeft als vanzelfsprekend gevolgen voor het chromatische polynoom van chordale grafen zoals we zullen zien.

We noemen de kant die in een chordale graaf ervoor zorgt dat een circuit van lengte > 3 een circuit van lengte 3 bevat een **koord**.

3.1 Voorkennis

In de eerste weken van de wiskunde opleiding leer je dat geldt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$: Zij V een verzameling van n elementen. Zij $x \in V$. De deelverzamelingen van k elementen uit V kunnen worden opgedeeld in deelverzamelingen waar x in bevat is, hiervoor zijn $\binom{n-1}{k-1}$ mogelijkheden voor en deelverzamelingen waar x niet in bevat is, hier zijn $\binom{n-1}{k}$ mogelijkheden voor.

Zij H een graaf die een K_r als deelgraaf bevat, en zij G de graaf verkregen uit H door een nieuwe knoop w toe te voegen die verbonden is met iedere knoop van K_r, en met geen enkele andere knoop. Dan hebben we

$$P_G(k) = (k - r)P_H(k). \quad (1)$$

Gevolg hiervan is dat als G een chordale graaf is zijn chromatische polynoom gelijk is aan

$$P_G(k) = k^{r_0}(k-1)^{r_1}(k-2)^{r_2} \ldots (k - \chi(G) + 1)^{r_{\chi(G)-1}}$$

waarbij de r_i gehele getallen zijn zodat $\sum_{i=0}^{\chi(G)-1} r_i = n$.
Andersom, voor ieder chromatische polynoom van de vorm $P_H(k) = k^{r_0}(k-1)^{r_1}(k-2)^{r_2} \ldots (k-l)^{r_l}$ is er door gebruik te maken van (1) een chordale graaf H te construeren die $P_H(k)$ als chromatische polynoom heeft.

Stelling 3.1.1. (Menger 1927) *[12] Zij G een graaf van orde minstens* 3*. Dan geldt het volgende:*
G is een 2*-samenhangende graaf $\Leftrightarrow$ voor ieder paar knopen u, v zijn er twee knoop-disjuncte paden van u naar v.*

Bewijs. Stel G is niet 2-samenhangend. Dan bestaat er een knoop-snede w in G. Zij v en u knopen die uit verschillende componenten van $G - w$ komen. Dan gaat ieder pad van v naar u door w. Dus bestaan er geen twee disjuncte paden van v naar w.
Stel G is een 2-samenhangende graaf. Zij $d(v, w)$ de afstand van het kortste v,w pad. Neem knopen v, w zodanig dat $d(v, w) = 1$. vw is per aanname geen brug en dus ligt vw op een circuit. Dus is de stelling waar voor $d(v, w) = 1$. Stel dat de stelling waar is voor alle knopen(x, y) waarvoor geldt dat $d(x, y) \leq k$. Zij v, w knopen waarvoor geldt $d(v, w)$=$k + 1$. Zij P een kortste pad van v naar w, zeg P=$v...uw$, zodat u de voorlaatste knoop van P is. Dan geldt $d(v, u) = k$ en dus bestaan er vanwege de inductie aanname tussen v en u twee knoop disjuncte paden P_1 en P_2. $G - u$ is samenhangend, dus bestaat er een pad Q tussen v en w in $G - u$. Als we starten in v, zij p de laatste knoop die Q gemeen heeft met P_1 of P_2 , zeg met P_1. Zij P_{12} het gedeelte van P_1 dat bij v begint en bij p eindigt. Zij Q_{12} het gedeelte van Q dat bij w begint en bij p eindigt. Dan is $P_{12}Q_{12}$ een pad van v naar w. Ook is P_2uw een pad van v naar w. Deze paden zijn disjunct. □

Lemma 3.1.2. *Zij G een* 2*-samenhangende graaf. Dan is er een $e \in E(G)$ zodat G/e* 2*-samenhangend is.*

Bewijs. Zij v,w de beide knopen van e. Als G een K_2 is dan volgt de stelling onmiddelijk. Stel dat G 2-samenhangend is, maar geen K_2. Het is duidelijk dat wanneer G/e een knopen-snede zou bevatten, dit alleen $\{v, w\}$ kan zijn, anders was G niet 2-samenhangend. Het moge ook duidelijk zijn dat $\{v, w\}$ een knopen snede is in G/e dan en slechts dan als $\{v, w\}$ een knopen-snede is in G. We moeten deze knopen v,w nu alleen nog vinden.

Zij p_l het langste pad in G. Zij $i, j \in V(G)$ zodat i en j aan het einde van dit pad liggen. Stel $\{i, j\}$ is een knopen-snede, zodat G zonder i en j uit minstens twee componenten bestaat. In een van die compontenten zit het gehele pad p_l op i en j na. In de andere component zit minstens één knoop, zeg q. Er bestaat een pad tussen i en q, zeg p_q, omdat G 2-samenhangend is. Dan is het pad p_l uit te breiden met p_q terwijl p_l het langste pad was, tegenspraak. Dus $\{i, j\}$ is geen knopen-snede in G en dus is voor $e = ij$ G/e de knoop die onstaat door samentrekking van i en j geen knopen snede en dus is G/e 2-samenhangend. □

Lemma 3.1.3. *Voor iedere niet-triviale samenhangende graaf H, is de multipliciteit van het nulpunt* '1' *het aantal blokken in H.*

Zij $w = k - 1$. Schrijf $P_H(k)$ geschreven in machten van w:
$P_H(k) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (k-1)^i$. Er geldt $P_G(1) = 0$, dus in deze vorm heeft het polynoom geen constante term. Zij $a(H)$ de coëfficiënt van w in $P_H(k)$. Het is voldoende om te laten zien dat als B een blok is, dat dan geldt dat $'1'$ een nulpunt met multipliciteit 1 is van $P_B(k)$. Dit volgt uit het volgende lemma:

Lemma 3.1.4. *Als H een samenhangende graaf is van orde $n \geq 2$, dan geldt $a(H) = (-1)^n q$ voor zekere $q \in \mathbb{N}_0$.*
Bovendien, H is een blok dan en slechts dan als $q \in \mathbb{N}$.

Als H meer dan een blok bevat(en dus zelf geen blok is), dan volgt uit

$$P_H(k) = \frac{1}{k^{r-1}} \prod_{i-1}^{r} P_{B_i}(k),$$

dat $k(k-1)^2 | P_H(k)$, dus $(w+1)w^2 | P_H(k)$. Dus $a(H) = q = 0$.

Stel H is een blok. We zullen bewijzen dat $a(H) = (-1)^n q$ voor zekere $q \in \mathbb{N}$, met inductie naar $v(G) + e(H)$. Als $v(G) = 2$ en $e(H) = 1$, dan is H een K_2 en dus $P_H(k) = k(k-1) = w + w^2$, en dus $a(H) = 1 = (-1)^{v(G)}$. Stel dus dat H een blok is van orde $n \geq 3$ en de inductie aanname geldt. Zij $v_1 v_2 \ldots v_k$ het langste pad in H. Dan is $H - v_1 v_2$ samenhangend omdat H een blok is. Ook geldt dat $H/v_1 v_2$ een blok is vanwege het voorgaande lemma 3.1.2. Dus met behulp van de inductiehypothese geldt

$$a(H - v_1 v_2) = (-1)^n q_1 \ , \ a(H/v_1 v_2) = (-1)^n q_2,$$

waarbij $q_1 \in \mathbb{N}_0$ en $q_2 \in \mathbb{N}$. Vanwege de reductiestelling volgt dat

$$a(H) = (-1)^n q_1 - (-1)^{n-1} q_2 = (-1)^n (q_1 + q_2),$$

waarbij $q_1 + q_2 \in \mathbb{N}$.

3.2 Coëfficiënten van het chromatische polynoom

Vermoeden 3.2.1. Unimodal conjecture(Read) 1968 *[8] Er bestaat een k zodanig dat:*

$$|a_n(G)| \leq |a_{n-1}(G)| \leq \ldots \leq |a_{k+1}(G)| \leq |a_k(G)| \geq \ldots \geq |a_2(G)| \geq |a_1(G)|.$$

Vermoeden 3.2.2. Log concavity(Hoggar) 1974 *[9] Zij G een graaf van orde n met p componenten. Dan geldt voor iedere j:*

$$a_{j-1}(G) a_{j+1}(G) < a_j(G)^2$$

Feit 3.2.3. *Vermoeden 3.2.2 is geverifieerd voor alle grafen tot aan 11 knopen door Hoggar ([9]).*

Opmerking 3.2.4. *Het log concavity vermoeden impliceert dat de coëfficiënten vanaf $a_{n-1}(G)$ stijgen of dalen, maar dat zodra er één daalt, de volgenden ook dalen. Dat is precies het Unimodal vermoeden zoals we hieronder bewijzen:*

Bewijs. Uiteraard geldt $a_n(G) \leq a_{n-1}(G)$ vanwege de gebroken circuit stelling van Whitney (2.2.19). Als $a_j(G) \leq a_{j-1}(G)$ voor alle coëfficiënten dan valt er niks te bewijzen. Stel er is een coëfficiënt zodat $a_l(G) \geq a_{l-1}(G)$. (Dit kan natuurlijk niet de kopcoëfficiënt zijn). Dan geldt vanwege het Log concavity vermoeden dat $a_r(G) > a_{r-1}(G)$ voor alle $r < l$.

□

Definitie 3.2.5. *Voor alle $k \in \mathbb{N}_0$ en $i \in \mathbb{N}$, definiëren we:*

$$\phi(k,i) = \begin{cases} 1 & \text{als } k < 2i \\ \lfloor \frac{k}{i} \rfloor ! \phi(k - \lfloor \frac{k}{i} \rfloor, i) & \text{als } k \geq 2i \end{cases}$$

Merk op dat in het bijzonder $\phi(k,1) = k!$. De volgende tabel geeft de waarden van $\phi(20,i)$ voor $i = 1,2,3,4$:

i	1	2	3	4
$\phi(20,i)$	20!	10!x5!x2!	6!x4!x3!x2!	5!x3!x3!x2!

Stelling 3.2.6. (Dong et al. 2004)*[5] Zij G een graaf en P_G het bijbehorende chromatische polynoom. Zij $\chi(G)$ het kleurgetal van G. Dan geldt voor elke $i = 1,2,\ldots,\chi(G)-1$ dat $a_i(G)$ deelbaar is door $\phi(\chi(G)-1,i)$.*

Lemma 3.2.7. *Zij $k,i \in \mathbb{N}$, en zij $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \in \mathbb{N}_0$. Als $\sum_{j=1}^{i} x_j > k - i$, dan is $\prod_{j=1}^{i}(x_j!)$deelbaar door $\phi(k,i)$.*

Bewijs. Als $i = 1$, dan geldt $x_1 > k-1$ en $\phi(k,1) = k!$. Stel nu dat $i \geq 2$. Gebruik inductie naar k. Stel $k \leq 2i-1$, dan geldt $\phi(k,i) = 1$ en is de stelling waar. Zij $m \in \mathbb{N}$ zodat de stelling waar is wanneer $k < m$, waarbij $m \geq 2i$. Zij $x_1, \ldots, x_i$ niet negatieve getallen zodat $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j > k - i$. Er is een x_l, zeg x_1, zodat $x_1 \geq \lfloor m/i \rfloor$, anders zou gelden

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i \leq i(\lfloor m/i \rfloor - 1) \leq i(m/i - 1) = m - i,$$

een tegenspraak. Merk op dat

$$x_1! = \lfloor m/i \rfloor ! (x_1 - \lfloor m/i \rfloor)! \binom{x_1}{\lfloor m/i \rfloor}$$

.
Zij $x_1' = x_1 - \lfloor m/i \rfloor$.Dan

$$\prod_{j=1}^{i}(x_j)! = \lfloor m/i\rfloor! \binom{x_1}{\lfloor m/i\rfloor} x_1'!x_2!\ldots x_i! \quad (1)$$

Vanwege de volgende ongelijkheid (en omdat $\lfloor m/i\rfloor \geq 2$),
$x_1' + x_2 + \ldots + x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i - \lfloor m/i\rfloor > (m - \lfloor m/i\rfloor) - i$,
verkrijgen we met de inductie aanname dat $x_1'!x_2!\ldots x_i!$ deelbaar is door $\phi(m - \lfloor m/i\rfloor, i)$. Vanwege (1), $\prod_{j=1}^{i}(x_j)! = \lfloor m/i\rfloor!\binom{x_1}{\lfloor m/i\rfloor}x_1'!x_2!\ldots x_i!$, volgt tenslotte dat $x_1!x_2!\ldots x_i!$ deelbaar is door $\phi(m, i)$. □

Lemma 3.2.8. *Zij $n, k \in \mathbb{N}$ zodat $n > k \geq 1$. Dan is $a_i(K_n)$ deelbaar door $\phi(k, i)$ voor iedere $i = 1, 2, \ldots k$.*

Bewijs. We hebben al laten zien dat $P_{K_n}(k) = \prod_{l=0}^{n-1}(k-l)$. Zij
$N = \{1, 2, \ldots n-1\}$. Dan

$$a_i(K_n) = \sum_{R\subseteq N;|R|=n-i} \prod_{r\in R} r.(2)$$

Merk op dat voor $R \subseteq N$ met $|R| = n - i$, er $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1} \in N$ bestaan zodat $b_1 < b_2 < \ldots < b_{i-1}$, en zodat:

$$\prod_{r\in R} r = \frac{(n-1)!}{b_1 b_2 \ldots b_{i-1}} = (b_1-1)!\prod_{j=2}^{i}(b_j - b_{j-1} - 1)!\binom{b_j - 1}{b_j - b_{j-1} - 1},$$

waarbij $b_i = n$. De eerste gelijkheid is makkelijk in te zien, je deelt van $n-1$ termen er $i-1$ termen uit waarna je er $|R| = n-i$ overhoudt. De tweede gelijkheid is door eenvoudige algebraïsche manipulaties te verkrijgen. De $b_1, \ldots, b_{i-1}$ liggen nu vast, maar de $x_1, \ldots x_i$ zijn vrij te kiezen zolang $\sum_{j=1}^{i} x_j > k - i$.

Zij $x_1 = b_1 - 1$ en $x_j = b_j - b_{j-1} - 1$ voor $j = 2, \ldots i$. Dus $\prod_{r\in R} r$ is deelbaar door $\prod_{j=1}^{i}(x_j)!$. Merk op dat de volgende reeks een telescopende reeks is en herinner dat $b_i = n$. Dan

$$\sum_{j=1}^{i} x_j = (b_1 - 1) + (b_2 - b_1 - 1) + \ldots + (n - b_{i-1} - 1) = n - i > k - i$$

Vanwege het voorgaande Lemma 3.2.7 , geldt er dat $\prod_{j=1}^{i} x_j!$ deelbaar is door $\phi(k, i)$.
De bewering volg nu uit (2), $(a_i(K_n) = \sum_{R\subseteq N;|R|=n-i} \prod_{r\in R} r)$.

□

Bewijs. Bewijs van Stelling 3.2.6
Zij G een graaf met n knopen. Dan kan P_G geschreven worden in factoriale vorm:

$$P_G(k) = \sum_{j=\chi(G)}^{n} b_j (k)_j,$$

waarbij n het aantal knopen $v(G)$ is van G, en b_j het aantal manieren is om $V(G)$ in j niet-lege onafhankelijke verzamelingen in te delen.
Dus

$$a_i(G) = \sum_{j=\chi(G)}^{n} (-1)^{n-j} b_j a_i(K_j).$$

Vanwege het voorgaande lemma 3.2.8 is $a_i(K_j)$ deelbaar door $\phi(\chi(G)-1, i)$ voor alle $j \geq \chi(G)$, en $i = 1, 2, \ldots, \chi(G)-1$. Daarom is $a_i(G)$ deelbaar door $\phi(\chi(G)-1, i)$, voor $i = 1, 2, \ldots, \chi(G)-1$. □

Zij G een samenhangende graaf met n knopen en m kanten. Men kan een klasse van grafen maken die bij deze n en m altijd een chromatische polynoom met minimale coëfficiënten hebben. Bij een vast aantal knopen en kanten kunnen we zo een scherpe ondergrens maken voor de coëfficiënten van alle grafen van deze orde en grootte! De constructie komt uit het boek Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs [1] , een boek dat chromatische polynomen uitgebreid behandeld, maar niet zo gedetailleerd is als deze tekst.

Zij $\mathcal{L}(n, m)$ een familie van samenhangende grafen L met n kanten en m kanten zodat een blok B van H het kliek getal $\omega(B)$ tenminste $v(B) - 1$ heeft en alle andere blokken K_2 zijn.
Zij $\mathcal{J}(n, m)$ een familie van samenhangende grafen J met n kanten en m kanten zodat alle blokken van H de volgende klieken zijn:

$$K_3, K_r, K_2, \ldots, K_2.$$

Waarvoor geldt $r \geq 2$. Het aantal K_2 kan ook gelijk nul gekozen worden. We zullen laten zien dat alle grafen uit $\mathcal{L}(n, m) \cup \mathcal{J}(n, m)$ hetzelfde chromatische polynoom hebben, en dat de chromatische polynomen van deze grafen minimale coëfficiënten hebben. Eerst laten we dit zien voor alleen samenhangende chordale grafen en daarna voor alle samenhangende grafen. Omdat voor samenhangende grafen geldt dat $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, moet tenminste gelden dat $\mathcal{L}(n, m) \cup \mathcal{J}(n, m)$ niet leeg is voor iedere n, m waarvoor geldt $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$.

Lemma 3.2.9. *(i)* $\mathcal{L}(n,m) \neq \emptyset$ *voor alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *zodat* $n-1 \leq m \leq \binom{n}{2}$.
(ii) $\mathcal{J}(n,m) \neq \emptyset \Leftrightarrow n \leq m \leq n + \binom{n-3}{2}$ *en* $m - n = \binom{q}{2}$ *voor zekere* $q \in \mathbb{N}$.

Bewijs. *(i)* Zij $n, m \in \mathbb{N}$ zodat $n-1 \leq m \leq \binom{n}{2}$. Zij l het aantal K_2 in de graaf L uit $\mathcal{L}(n,m)$ die we willen construeren. Zij r het aantal knopen in het enige blok B met kliekgetal $\omega(B) \geq v(B) - 1$. Dan moet gelden:

$$\begin{aligned} m &= l + \binom{r-1}{2} + c \\ n &= l + r \end{aligned}$$

waarbij $2 \leq c \leq r-1$. Immers, als $\omega(B) = v(B)$, dan geldt $c = r-1$, anders geldt $2 \leq c \leq r-2$. c geeft dus aan in hoeverre B 'verzadigd' is. Er geldt dus $m - n = \binom{r-1}{2} + c - r = \binom{r-1}{2} + c^*$ waarbij $2 - r \leq c^* \leq -1$, dus $m - n = \binom{r-1}{2} - c^*$ waarbij $1 \leq c^* \leq r-2$. Omdat $\binom{r-1}{2} - (r-2) = \binom{r-2}{2}$, geldt dat er bij de gegeven n en m altijd een r bestaat zodat $m - n = \binom{r-1}{2} - c^*$. Nu we weten dat we r kunnen vinden, kunnen we uit $n = l + r$ ook een l vinden. Dus we kunnen een graaf L construeren met een blok B met r knopen waarvoor geldt $\omega(B) \geq v(B) - 1$ en overige l blokken K_2 zodat $L \in \mathcal{L}(n,m)$.

(ii) Stel er is een $J \in \mathcal{J}(n,m)$. Deze J bestaat per definitie uit blokken K_3, K_r en eventueel K_2. Omdat J samenhangend is, is het duidelijk dat $n \leq m$. Merk op dat $r \leq n-3$. De waarde van $m - n$ is gelijk aan $\binom{r}{2} - (r-1) = \binom{r-1}{2}$. Dus $n \leq m \leq n + \binom{n-3}{2}$. Uit het feit dat $m - n = \binom{r-1}{2}$, volgt ook dat $m - n = \binom{q}{2}$, voor $q = r - 1$. Uit dit laatste en $r \geq 2$ volgt dat $q \in \mathbb{N}$.

Zij andersom n,m gegeven zodat $n \leq m \leq 3 + \binom{n-3}{2}$ en $m - n = q$ voor een zeker geheel getal q. Gevraagd is om hier een $J \in \mathcal{J}(n,m)$ bij te construeren. We hebben drie keuze's die hier relevant zijn als we een $J \in \mathcal{J}$ construeren.
1. K_r, oftewel hoe groot is r?
2. Hoeveel K_2 gaan er deel uitmaken van $J \in \mathcal{J}$.
3. $K_3 \cap K_r = \emptyset$ of $|K_3 \cap K_r| = 1$.
Kies $K_3 \cap K_r = \emptyset$. We bepalen eerst r, en daarna l. Uit vergelijkingen voor het aantal kanten en aantal knopen bij gegeven r en l leiden we af dat r aan de volgende vergelijkingen moet voldoen.

$$\begin{aligned} r - 1 &= n - (4 + l) \\ \binom{r}{2} &= m - (4 + l) \end{aligned}$$

Oftewel
$$m - n = \binom{r}{2} - (r-1) = \binom{r-1}{2}.$$
Omdat $m - n = \binom{q}{2}$ voor een geheel getal q, kunnen we een r^* vinden die aan bovenstaande vergelijking voldoet. Dan kunnen we ook een l vinden, namelijk $l = n - r^* - 3$. Dus als we een graaf J maken die bestaat uit K_3, K_{r^*}, $n - r^* - 3$ blokken K_2 en zodat $K_3 \cap K_r = \emptyset$, dan $J \in \mathcal{J}(n, m)$.

□

Lemma 3.2.10. *Stel $L \in \mathcal{L}(n, m)$. Dan geldt:*
(i) $\omega(L)$ is het minimale gehele getal q zodat $m - n + 2 \leq \binom{q}{2}$, i.e.
$\omega(L) = \lceil (1 + \sqrt{8m - 8n + 17})/2 \rceil$
(ii) $P_L(k) = (k)_{\omega(L)}(k-1)^{n-\omega(L)-1}(k-r)$, waarbij
$r = m - n + 2 - \binom{\omega(L)-1}{2}$.

Bewijs. (i) Zij $L \in \mathcal{L}(n, m)$. L heeft een blok B zodat $\omega(B) = \omega(L)$ en $v(B) = \omega(B)$ of $v(B) - 1 = \omega(B)$. Stel $v(B) = \omega(B)$. Wat is $m - n$? Daarvoor is het niet relevant hoeveel blokken K_2 er zijn. Dus $m - n = \binom{\omega(B)}{2} - \omega(B)$. Dan enerzijds,
$$m - n + 2 = \binom{\omega(B)}{2} + (2 - \omega(B)) \leq \binom{\omega(B)}{2}.$$
En anderzijds
$$m - n + 2 = \binom{\omega(B)}{2} - (\omega(B) - 1) + 1 \geq \binom{\omega(B) - 1}{2}.$$
Stel $v(B) - 1 = \omega(B)$. In dit geval $m - n = \binom{\omega(B)}{2} - \omega(B) - 1 + r$ waarbij $2 \leq r \leq \omega(B) - 2$. Dan geldt weer aan de ene kant
$$m - n + 2 = \binom{\omega(B)}{2} - (r + 1 - \omega(B)) \leq \binom{\omega(B)}{2},$$
en aan de andere kant
$$m - n + 2 = \binom{\omega(B)}{2} + r - (\omega(B) - 1) \geq \binom{\omega(B) - 1}{2}.$$
En dus is $\omega(B)$ het gehele getal q zodat $\binom{q-1}{2} + 1 \leq m - n + 2 \leq \binom{q}{2}$. Zoeken naar het nulpunt van de kwadratische formule $f(q) = m - n + 2 - \binom{q}{2}$ en deze afronden naar het eerste gehele getal wat groter is geeft $\omega(L) = \lceil (1 + \sqrt{8m - 8n + 17})/2 \rceil$.

(*ii*) Als L volledig is, dan geldt $\omega(L) = n$ en daarmee de uitspraak. Stel dus dat L niet volledig is. Stel L bevat geen blokken van K_2 of $L = K_2$. Dan geldt $\omega(L) = n - 1$ en dus
$$P_G(k) = (k)_{n-1}(k - r)$$

voor zekere $r \in \mathbb{N}$.
Het is duidelijk dat $r = m - \binom{n-1}{2} = m - n + 2 - \binom{\omega(L)-1}{2}$.
Stel dat L wel blokken K_2 bevat. Dan is er een punt $x \in L$ met graad 1.
Maar dan geldt

$$P_L(k) = (k-1)P_{L-x}(k),$$

waarbij $L - x \in \mathcal{L}(n-1, m-1)$, en de uitspraak volgt met inductie. Je kan immers op deze graaf alle knopen van graad 1 weghalen waarna je terug bent in de eerste situatie waar $\omega(L) = n - 1$ geldt. $\square$

Lemma 3.2.11. *Zij $J \in \mathcal{J}(n, m)$ en zij q een geheel getal zodat $\binom{q}{2} = m - n$. Dan*

$$P_J(k) = (k)_{q+1}(k-1)^{n-q-2}(k-2).$$

Bewijs. Stel dat er een knoop $v \in v(J)$ is zodat de graad van v gelijk is aan 1. Dan

$$P_J(k) = (k-1)P_{J-v}(k)$$

En volgt de stelling met inductie.
Stel dat alle $v \in v(J)$ tenminste 2 buren hebben. Dan kan er één of geen blok K_2 deel uitmaken van J.
Stel er maken geen K_2 deel uit van J. Dan geldt $J = K_r \cup K_3$ met $K_r \cap K_3 = K_1$, $r \geq 2$.
Dus volgens de factorisatiestelling:

$$P_{K_r \cup K_3}(k) = \frac{P_{K_r}(k)P_{K_3}(k)}{P_{K_1(k)}} = \frac{k(k-1)...(k-r+1)k(k-1)(k-2)}{k} = (k)_r(k-1)(k-2).$$

Omdat in dit geval geldt dat $m - n = \binom{r}{2} - (r-1) = \binom{r-1}{2} = \binom{q}{2}$, geldt dat $r = q + 1$.
Dus $q = r - 1 = n - 3$, en daarom $n - q - 2 = 1$. Dus geldt

$$P_J(k) = (k)_r(k-1)(k-2) = (k)_{q+1}(k-1)^{n-q-2}(k-2).$$

Stel er maakt één K_2 deel uit van J. Dan geldt dat $J = K_r \cup K_2 \cup K_3$, waarbij $K_r \cap K_3 = \emptyset$, $K_2 \cap K_r = K_1$, $K_2 \cap K_3 = K_1$ en $r \geq 2$. Opnieuw hebben we volgens de factorisatiestelling:

$$P_{K_r \cup K_2 \cup K_3}(k) = \frac{P_{K_r}(k).P_{K_2}(k).P_{K_3}(k)}{P_{K_1(k)}P_{K_1(k)}} = \frac{(k)_r(k)_2(k)_3}{k^2} = (k)_r(k-1)^2(k-2).$$

In dit geval geldt ook dat $m - n = \binom{r}{2} - (r-1) = \binom{r-1}{2} = \binom{q}{2}$ en dus $r = q + 1$.
Dus $q = r - 1 = n - 4$, en daarom,vanwege $n - q - 2 = 2$

$$P_J(k) = (k)_r(k-1)^2(k-2) = (k)_{q+1}(k-1)^{n-q-2}(k-2).$$

Lemma 3.2.12. *(i) Voor iedere twee grafen* $L, J \in \mathcal{L}(m,n) \cup \mathcal{J}(n,m)$ *geldt dat* $P_L(k) = P_J(k)$.
(ii) Zij H *een graaf met* n *knopen. Als*

$$P_H(k) = (k)_q(k-1)^{n-q-1}(k-r)$$

voor zekere $q, r \in \mathbb{N}$ *met* $2 \leq q \leq n-1$ *en* $1 \leq r \leq q-1$, *dan* $H \in \mathcal{L}(m,n) \cup \mathcal{J}(n,m)$, *waarbij* $m = \binom{q-1}{2} + n + r - 2$.

Bewijs. (i) Zij $L \in \mathcal{L}(m,n)$. Dan $P_L(k) = (\lambda)_{\omega(L)}(k-1)^{n-\omega(L)-1}(k-r)$, waarbij $r = m - n + 2 - \binom{\omega(L)-1}{2}$ en $\omega(L)$ het minimale gehele getal q zodat $m - n + 2 \leq \binom{q}{2}$. Dus alle twee de parameters, $\omega(L)$ en r, liggen vast door de keuze van n en m. Dus alle $L \in \mathcal{L}(m,n)$ hebben hetzelfde chromatische polynoom.
Zij $J \in \mathcal{J}(n,m)$. Dan $P_J(k) = (k)_{q+1}(k-1)^{n-q-2}(k-2)$. waarbij q het niet-negatieve gehele getal is zodat $\binom{q}{2} = m - n$. Dus ook alle $J \in \mathcal{J}(n,m)$ hebben hetzelfde polynoom. Resteert te bewijzen het geval $L \in \mathcal{L}(n,m)$ en $J \in \mathcal{J}(n,m)$.
Stel $n = m$. Dan zijn zowel J als L opgebouwd uit een blok K_3 en voor de rest uit blokken K_2 zodat $K_2 \cap K_3 = K_1$.
Dus $\mathcal{J}(n,m) = \mathcal{L}(n,m)$ als $m - n = 0$. En zeker ook $P_L(k) = P_J(k)$.
Stel $n \geq m$. (Waarom is er geen $n \leq m$). Dan geldt $m - n = \binom{q}{2}$ voor een $q \geq 2$. Het kliekgetal $\omega(L)$ moet het kleinste gehele getal p zijn zodat $m - n + 2 \leq \binom{p}{2}$. Er geldt dat $m - n + 2 \leq m - n + q = \binom{q}{2} + q = \binom{q+1}{2}$ en uiteraard $m - n + 2 > \binom{q}{2}$.
Dus $\omega(L) = p = q + 1$ en $r = m - n + 2 - \binom{\omega(L)-1}{2} = \binom{q}{2} + 2 - \binom{q}{2} = 2$.
Hieruit volgt de bewering, want

$$P_L(k) = (k)_{\omega(L)}(k-1)^{n-\omega(L)-1}(k-r) = (k)_{q+1}(k-1)^{n-q-2}(k-2) = P_J(k).$$

(ii) Zij H een graaf met n knopen. Stel dat

$$P_H(k) = (k)_q(k-1)^{n-q-1}(k-r)$$

voor zekere $q, r \in \mathbb{N}$. met $2 \leq q \leq n-1$ en $1 \leq r \leq q-1$.
Vanwege Lemma 3.1.4 heeft H $n-q$ blokken $B_1, \ldots, B_{n-q}$. Dus geldt
$P_H(k) = \frac{1}{k^{n-q+1}} \prod_{i=1}^{n-q} P_{B_i}(k)$.
Stel $r \geq 3$. Voor ieder blok B geldt: Als $(k-i)|P_B(k)$, dan ook $(k-i+1)|P_{B(k)}$, als een knoop immers niet met k te kleuren is dan zeker ook niet met $k-1$ kleuren. Hieruit volgt dat H bestaat uit één blok B_1 met polynoom $P_{B_1}(k) = (k)_q(k-r)$ en uit $n-q-1$ blokken $B_2, \ldots, B_{n-q-2}$ met polynoom $P_{B_i}(k) = k(k-1)$. Dus $B_i = K_2$ voor alle $2 \leq i \leq n-q-1$. Omdat iedere K_2 maar één extra knoop aan G bijdraagt

heeft B_1 $n-(n-q-1)=q+1$ knopen. Wat kan B_1 voor een graaf zijn? Schrijf $P_{B_1}(k)$ in factoriale vorm.

$$P_{B_1}(k)=(k)_q(k-r)=(k)_q(k-q)+(q-r)(k)_q=(k)_{q+1}+(q-r)(k)_q.$$

Dus als we de $q+1$ knopen van B_1 in $q+1$ onafhankelijke verzamelingen willen indelen kan dat natuurlijk op slechts één manier, maar als we $q+1$ knopen in q onafhankelijke verzamelingen willen stoppen kan dat alleen op precies $q-r$ manieren. Er zijn géén mogelijkheden om de $q+1$ knopen in $q-1$ onafhankelijke verzamelingen in te delen.
Dit kan alleen met de volgende methode. Zij $x_1,\ldots,x_{q+1}$ de knopen van B_1. Stop x_1 $q-r$ keer bij een $x_i\neq x_1$, zeg de knopen $x_2,\ldots,x_{q-r+1}$ Dan krijg je als onafhankelijke verzamelingen:

$$\{\{x_1,x_2\},\{x_3\},\ldots,\{x_{q+1}\}\},,\ldots,\{\{x_1,x_{q-r+1}\},\{x_2\},\{x_3\},\ldots\{x_{q+1}\}\}.$$

Als bijvoorbeeld $\{x_1,x_2\}$ en $\{x_3\ x_4\}$ onafhankelijke verzamelingen van B_1 zouden zijn, dan zou het circuit van lengte 4 $x_1x_2x_3x_4$ geen koorden bevatten, dit zijn immers $\{x_1,x_2\}$ en $\{x_3\ x_4\}$ en dus niet chordaal en dus een ander chromatische polynoom moeten hebben.
De enige manier om een graaf te maken die bovenstaande collectie van onafhankelijke verzamelingen geeft is een graaf waarbij alle knopen $x_2,\ldots x_{q+1}$ met elkaar verbonden zijn en waarbij x_1 slechts met r andere knopen verbonden is. Dit geeft het blok B met kliekgetal $\omega(B)$=$v(B)-1$. Omdat de rest van de blokken K_2 zijn, geldt $H\in\mathcal{L}(n,m)$.

Stel $r=2$. Dan hebben we dat $P_H(k)=(k)_q(k-1)^{n-q-1}(k-2)$. Nu zijn er twee mogelijkheden:
1. H bestaat uit een blok B_1 met polynoom $P_{B_1}(k)=(k)_q(k-2)$ en voor de rest uit $n-q-1$ K_2 blokken.
2. H bestaat uit een blok B_1 met polynoom $P_{B_1}(k)=(k)_q$, een blok B_2 met polynoom $P_{B_2}(k)=k(k-1)(k-2)$ en voor de rest uit K_2 blokken. In geval 1 geldt $H\in\mathcal{L}(n,m)$, in het tweede geval geldt $H\in\mathcal{J}(n,m)$.

Stel $r=1$. Dan geldt $P_H(k)=(k)_q(k-1)^{n-q-1}(k-1)=(k)_q(k-1)^{n-q}$. Op eenzelfde manier als bij het geval $r\geq 3$ kunnen we herleiden dat H bestaat uit $n-q$ blokken $B_1,\ldots,B_{n-q}$, waarvan, zeg $B_2,\ldots B_{n-q}$, gelijk aan K_2 zijn. Dus H is een graaf met een blok B_1 dat polynoom $P_{B_1}(k)=(k)_q$ heeft en dus een K_q is. Dus $H\in\mathcal{L}(n,m)$.

Het aantal kanten m is gelijk aan de coëfficiënt horende bij k^{n-1}, deze is dus gelijk aan de som van de nulpunten. Dit is
$n-q-1+r+(1+\ldots+q-1)=n-q-1+r+\binom{q}{2}=$
$n-1+r+\binom{q}{2}-q=\binom{q-1}{2}+n+r-2.$ $\square$

Lemma 3.2.13. *Stel $K, H \in \mathcal{C}(n,m)$, de verzameling van samenhangende chordale grafen. Zij $a_i(K) \preccurlyeq a_i(H)$ als $a_j(K) \leq a_j(H)$ voor alle $1 \leq j \leq n-2$. Als $a_i(K) \preccurlyeq a_i(H)$ en $a_i(H) \preccurlyeq a_i(K)$, dan $P_K = P_H$.*
Voor alle $K, H \in \mathcal{C}(n,m)$ geldt dat $a_i(K) \preccurlyeq a_i(H)$ of dat $a_i(H) \preccurlyeq a_i(K)$.
Voor alle $G, H, K \in \mathcal{C}(n,m)$ geldt dat als $a_i(G) \preccurlyeq a_i(H)$ en $a_i(H) \preccurlyeq a_i(K)$, dan $a_i(G) \preccurlyeq a_i(K)$.

Bewijs. Zij $K, H \in \mathcal{C}(n,m)$. Stel $a_k(K) \geq a_k(H)$ voor een gehele $k \leq n-2$. Zij $P_K(k) = \prod_{i=1}^n (k - r_i)$, waarbij als $P_K(k)$ een nulpunt r heeft hij ook een nulpunt $r-1$ heeft. (Geen kleuring met k kleuren betekent ook geen kleuring met $k-1$ kleuren). Zij $P_H(k) = \prod_{i=1}^n (k - p_i)$. Zij $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ de nulpunten van P_K en $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de nulpunten van P_H.
Dan geldt

$$a_k(K) = \sum_{\substack{J \subseteq R \\ |J| = n-k}} \prod_{r_i \in J} r_i, \quad a_k(H) = \sum_{\substack{J \subseteq P \\ |J| = n-k}} \prod_{p_i \in J} p_i,$$

en dus

$$\sum_{\substack{J \subseteq R \\ |J| = n-k}} \prod_{r_i \in J} r_i \geq \sum_{\substack{J \subseteq P \\ |J| = n-k}} \prod_{p_i \in P} p_i.$$

Dus er is een $J_R \subseteq R$ en een $J_P \subseteq P$ zodat $\prod_{r \in J_R} r \geq \prod_{p \in J_P} p$. Dus is er een $J'_P \subseteq J_P$ en een $J'_R \subseteq J_R$ zodat $|J'_P| = |J'_R| = 2$ en zodat $\prod_{r \in J'_R} r \geq \prod_{p \in J'_P} p$.
Zij $l \neq k$ zodat $l \leq n-2$. Dan $a_l(K) - a_l(H) = \sum_{J \subseteq R} c(\prod_{r \in J'_R} r - \prod_{p \in J'_P} p) \geq 0$,
en dus $a_l(K) \geq a_l(H)$.
Dus als voor een enkele gehele $k \leq n-2$ geldt $a_k(K) \geq a_k(H)$,dan geldt $a_i(K) \geq a_i(H)$ voor alle $i \leq n-2$.
Dus $a_i(K) \preccurlyeq a_i(H)$ of $a_i(K) \succcurlyeq a_i(H)$. De overige eisen voor een totale ordening volgen nu meteen. Zij $a_i(K) \prec a_i(H)$ als $a_j(K) < a_j(H)$ voor alle $1 \leq j \leq n-2$.
We kunnen nu voor gegeven n en m een zo lang mogelijke keten maken van $H_i \in \mathcal{C}(n,m)$ zodat $a_i(H_1) \succ a_i(H_2) \succ a_i(H_3) \succ \ldots \succ a_i(H_q)$.
We zijn zeer geïnteresseerd in de graaf die aan het eind staat in deze keten, deze heeft minimale coëfficiënten. □

Lemma 3.2.14. *Zij H een graaf in $\mathcal{C}(n,m)$. Dan bestaat er een $K \in \mathcal{C}(n,m)$, zodat $a_i(H) \succ a_i(K)$, mits H voldoet aan één van de volgende voorwaarden:*
(i) P_H heeft een nulpunt r, waarbij $r \geq 2$ met multipliciteit tenminste 3.

(ii) P_H heeft nulpunten r_1 en r_2, waarbij $2 \leq r_1 < r_2$, beiden met multipliciteit tenminste 2.

Bewijs. Stel H voldoet aan voorwaarde (i). Dan
$P_H(k) = \prod_{i=1}^{n-3}(k - r_i)(k - r)^3$ voor een $r \geq 2$.
Stel $P_K(k) = \prod_{i=1}^{n-3}(k - r_i)(k - r - 1)(k - r)(k - r + 1)$. Dan geldt
$a_{n-2}(H) - a_{n-2}(K) = [r^2 - (r-1)(r+1)]c = c$, waarbij $c > 0$ en dus $a_{n-2}(H) > a_{n-2}(K)$ en dus $a_i(H) \succ a_i(K)$. Aan het begin van dit hoofstuk (3.1) zagen we dat er dan een chordale graaf K bestaat met chromatische polynoom P_K. Omdat $r - 1 + r + 1 = 2r$, volgt dat K evenveel kanten als H heeft en dus $K \in \mathcal{C}(n, m)$.

Stel H voldoet aan voorwaarde (ii). Dan
$P_H(k) = \prod_{i=1}^{n-3}(k - r_i)(k - p)^2(k - q)^2$, waarbij $2 \leq p < q$.
Zij K een graaf zodat
$P_K(k) = \prod_{i=1}^{n-3}(k - r_i)(k - (p-1))(k - p)(k - q)(k - (q+1))$.
Dan geldt $a_{n-2}(H) - a_{n-2}(K) = (pq - (p-1)(q+1))c = (q - p + 1)c > 0$ waarbij $c > 0$ en dus $a_{n-2}(H) > a_{n-2}(K)$ en dus $a_i(H) \succ a_i(K)$. □

Lemma 3.2.15. *Voor iedere $H \in \mathcal{C}(n, m) \setminus \mathcal{J}(n.m) \cup \mathcal{L}(n, m)$ en iedere $K \in \mathcal{J}(n.m) \cup \mathcal{L}(n, m)$ geldt*

$$a_i(H) \succ a_i(K).$$

Bewijs. Zij $H \in \mathcal{C}(n, m) \setminus \mathcal{J}(n, m) \cup \mathcal{L}(n, m)$. Stel $a_i(H) \succ a_i(K)$ is niet waar voor een $K \in \mathcal{J}(n.m) \cup \mathcal{L}(n, m)$.
P_K voldoet dan niet aan beide eisen van (3.2.14), dus er is geen $L \in \mathcal{C}(n, m)$ zodat $a_i(K) \succ a_i(L)$. Als $a_j(K) = a_j(L)$ voor alle $1 \leq j \leq n$, dan geldt $L \in \mathcal{J}(n, m) \cup \mathcal{L}(n, m)$. Dus is er geen $L \in \mathcal{C}(n, m)$ zodat $a_i(H) \succ a_i(L)$.
Dus voldoet H niet aan beide eisen van (3.2.14). Maar dan mag slechts één nulpunt $r \geq 2$ multipliciteit 2 hebben. Dus is
$P_H(k) = (k)_q(k-1)^{n-q-1}(k - r)$, en dus $H \in \mathcal{J}(n, m) \cup \mathcal{L}(n, m)$, tegenspraak. □

Stelling 3.2.16. (Dong 2000) *[4]*
Zij G een graaf van orde n waarbij $n \geq 3$ en $x \in V(G)$ zodat $G - x$ samenhangend is. Dan bestaat er een verzameling $\mathcal{S}$ van samenhangende

grafen van orde $n-2$ zodat

$$P_G(k) = (k - d(x))P_{G-x}(k) + \sum_{G' \in \mathcal{S}} P_{G'}(k).$$

Waarbij $\mathcal{S}$ leeg is dan en slechts dan als x een simpliciale knoop van G is.

Lemma 3.2.17. *Zij G een graaf met de eigenschap $v(G) \geq 2$ en zij $x \in G$ zodat $d(x) = 0$ of $N(x)$ een kliek is in G. Dan geldt.:*

$$P_G(k) = (k - d(x))P_{G-x}(k).$$

Bewijs. Voor $d(x) = 0$ geldt de stelling vanwege de factorisatieregel. **??**factorisatie)

Stel $N(x)$ is een kliek. Kleur G met k kleuren. We kleuren eerst $G - x$ in met k kleuren, dit kan op $P_{G-x}(k)$ manieren. De enige knoop waaraan nog een kleur moet worden gegeven, is x. Omdat $N(x)$ een kliek is hebben alle buren van x verschillende kleuren en blijven er dus $k - d(x)$ mogelijkheden voor x over. □

Zij $x_1, x_2, \ldots, x_i$ verschillende knopen in G. Met $G + x_1x_j + \ldots + x_{j-1}x_j$ wordt bedoeld de graaf G waaraan de kanten $\{x_1x_j\}, \ldots, \{x_{j-1}x_j\}$ toe zijn gevoegd.
Herhaald toepassen van de reductiestelling 2.2.8 geeft het volgende lemma:

Lemma 3.2.18.
$P_G(k) = P_{G+x_1x_j+\ldots+x_{j-1}x_j}(k) + \sum_{1 \leq i < j} P_{(G+x_1x_j+\ldots+x_{i-1}x_j)/x_ix_j}(k)$

Lemma 3.2.19. *Stel $x \in V(G)$ en $N(x) = \{x_1, \ldots x_d\}$. Zij $G^* = G - x$. Dan geldt.:*

$$P_G(k) = (k-1)P_{G^*}(k) - \sum_{i=2}^{d} P_{G^*+x_1x_i+\ldots+x_{i-1}x_i}(k).$$

Bewijs. Stel $d = 1$, dan volgt de uitspraak uit (3.2.17). Stel $d \geq 2$. Dan geldt vanwege (3.2.18):

$$P_G(k) = P_{G-x_dx}(k) - P_{G^*+x_1x_d+\ldots+x_{d-1}x_d}(k),$$

Nu volgt het resultaat met inductie naar d. □

Bewijs. Bewijs van de stelling (3.2.16):
Vanwege 3.2.19 geldt

$$P_G(k) = (k-d)P_{G^*}(k) + \sum_{i=2}^{d}(P_{G*}(k) - P_{G*+x_1x_i+\ldots x_{i-1}x_i}(k))$$

Vanwege 3.2.18 volgt:

$$P_G(k) = (k-d)P_{G^*}(k) + \sum_{i=2}^{d} \sum_{1 \leq i < j} P_{(G^* + x_1x_2 + \ldots + x_{i-1}x_j)/x_ix_j}(k).$$

Stel $x \in V(G)$ is een simpliciale knoop. Uit (3.2.17) volgt
$P_G(k) = (k-d)P_{G^*}(k)$ en dus

$$\sum_{i=2}^{d} \sum_{1 \leq i < j} P_{(G^* + x_1x_2 + \ldots + x_{i-1}x_j)/x_ix_j}(k) = 0$$

Stel

$$\sum_{i=2}^{d} \sum_{1 \leq i < j} P_{(G^* + x_1x_2 + \ldots + x_{i-1}x_j)/x_ix_j}(k) = 0$$

Dan hebben we dat $P_G(k) = (k-d)P_{G-x}(k)$ en dit kan alleen als x een simpliciale knoop is. □

Lemma 3.2.20. *Zij G een samenhangende graaf met n knopen en m kanten. Dan bevat G een knoop v zodat $m - n + 1 \geq \binom{d(v)}{2}$.*

Bewijs. Zij $d_{min} := min\{d(v)|v \in G\}$. Stel er bestaan knopen $v_1, \ldots, v_k$ met de eigenschap dat $d(v_i) > d_{min}$. Dan kunnen we kanten weghalen zodat $d(v_i) = d_{min} \forall v_i \in v(G)$.
Door het weghalen van deze kanten ontstaan een nieuwe graaf G^* met $m^* < m$ kanten en n knopen. Het is duidelijk dat
$m - n + 1 \geq m^* - n + 1 \geq min\{\binom{d(v)}{2}|v \in v(G)\}$. We kunnen ons dus beperken tot grafen G^* waarvoor geldt dat alle knopen dezelfde graad hebben.

Als $d_{min} = 1$, dan is $\binom{d_{min}}{2}$ gelijk aan 0 en geldt de bewering want voor alle samenhangende grafen geldt $m - n + 1 \geq 0$.

Stel dus dat $d_{min} \geq 2$.
Zij G_d^* nu een samenhangende graaf met n knopen, m kanten, waarbij iedere knoop een graad gelijk heeft aan d.
Volgens het handshake lemma geldt dat $nd = 2m$. Te bewijzen dat
$m - n + 1 - \binom{d}{2} \geq 0$. Dus te bewijzen dat

$$\frac{nd}{2} - n + 1 - \frac{d(d-1)}{2} \geq 0.$$

Beschouw $f(d) = \frac{nd}{2} - n + 1 - \frac{d(d-1)}{2}$. Merk op dat $f(d)$ een bergparabool is met nulpunten $d = n-1$ en $d = 2$.
Dus in het interval $[2, n-1]$ geldt $f(d) \geq 0$. Dus $m - n + 1 - \binom{d}{2} \geq 0$, waaruit het lemma volgt. □

Stelling 3.2.21. *Voor iedere samenhangende graaf G met n knopen en m kanten niet element van $\mathcal{L}(n,m) \cup \mathcal{J}(n,m)$ en iedere $H \in \mathcal{L}(n,m) \cup \mathcal{J}(n,m)$ geldt:*

$$a_i(G) \succ a_i(H)$$

De bewering is waar als G een chordale graaf is, dus sowieso voor $n = 2$ en $n = 3$. Neem dus aan dat $n \geq 4$ en dat G niet chordaal is. Het is voldoende om te laten zien dat $a_i(G) \succ a_i(H)$ voor een $H \in \mathcal{C}(n,m)$.

Stel G is 2-samenhangend. Vanwege Lemma 3.2.20, heeft G een knoop v zodat $m - n + 1 \geq \binom{d(v)}{2}$. Dus $G - v \in \mathcal{C}(n-1, m-d(v))$, en

$$m - d(v) - (n-1) + 1 \geq \binom{d(v)}{2} - d(v) + 1 = \binom{d(v)-1}{2}.$$

Zij $H_1 \in \mathcal{L}(n-1, m-d(v))$. Dan geldt vanwege 3.2.10(i) dat $\omega(H_1) \geq d(v)$. Zij H_2 de graaf verkregen uit H_1 door een nieuwe knoop w toe te voegen en deze te verbinden met een $d(v)$-kliek in H_1. Merk op dat $H_2 \in \mathcal{C}(n,m)$ en dat $P_{H_2}(k) = (k - d(v))P_{H_1}(k)$. Vanwege de inductieaanname geldt $a_i(G - v) \succeq a_i(H_1)$. Noem

$$(k - d(v))P_{G-v}(k) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} b_i k^i,.$$

dan geldt $b_i \geq a_i(H_2)$ voor alle $1 \leq i \leq n-2$, waarbij strikte ongelijkheid geldt als $G - v$ niet chordaal is.
Als v een simpliciale knoop is van G, dan is $G - v$ niet chordaal en dus

$$a_i(H_2) < b_i = a_i(G)$$

voor alle $1 \leq i \leq n-2$.
Stel dat v geen knoop is. Vanwege (3.2.16) geldt dan

$$a_i(G) \geq a_i(H_2) + \sum_{G' \in \mathcal{S}} a_i(G') > a_i(H_2),$$

voor iedere $1 \leq i \leq n-2$ omdat $\mathcal{S}$ niet leeg is en $a_i(G') > 0$.
Stel dat G niet 2-samenhangend is.
In deze situatie heeft G tenminste een blok G_1 die niet chordaal is. Laat $G_2, \ldots, G_s$ de andere blokken van G. Dan hebben we

$$P_G(k) = \frac{1}{k^{s-1}} \prod_{j=1}^{s} P_{G_j}(k).$$

Zij $H_j \in \mathcal{L}(n_j, m_j)$, waarbij $n_j = v(G_j)$ en $m_j = e(G_j)$ voor iedere $1 \leq j \leq s$. Vanwege de inductiehypothese geldt $a_i(G_j) \geq a_i(H_j)$ voor alle

$j = 1, 2, \ldots s$ en $i = 1, 2, \ldots, n_j - 2$, waarbij de ongelijkheid strikt is wanneer $j = 1$, omdat G_1 chordaal is. Plak $H_1, \ldots, H_s$ aan elkaar zodat $|e(H_i) \cap e(H_j)| = 1$ als $i + 1 = j$ en $e(H_i) \cap e(H_j) = \emptyset$ elders. Noem deze graaf $H^{'} = H_1 \cup \ldots \cup H_s$. Dan is $H^{'}$ een chordale graaf met n knopen en m kanten en geldt

$$P_{H'}(k) = \frac{1}{k^{s-1}} \prod_{j=1}^{s} P_{H_j}(k).$$

Hieruit volgt eenvoudig $a_i(G) \succ a_i(H)$. □

3.3 Nulpunten van het chromatische polynoom

Stelling 3.3.1. *Zij G een samenhangende graaf. Dan voldoet de afgeleide van het chromatische polynoom $P_G(k)$ aan $(-1)^n P_G^{'}(1) \geq 0$. Stel G is een 2-samenhangende graaf. Dan voldoet de eerste afgeleide van het chromatische polynoom aan $(-1)^n P_G^{'}(1) > 0$*

Bewijs. Stel G is niet 2-samenhangend. Dan bestaat er een knooop-snede v en niet lege deelgrafen G_1 en G_2 zodat $G = G_1 \cup G_2$ en $G_1 \cap G_2 = v$ Dus geldt:

$$P_G(k) = \frac{P_{G_1}(k) P_{G_2}(k)}{k}$$

Nu geldt dat $(k-1)^2 | P_G(k)$, omdat G_1 en G_2 beide 1 als nulpunt hebben. Dus $(k-1)|P_G^{'}(k)$. en dus volgt $P_G^{'}(1) = 0$.

Stel $G = (V(G), E(G))$ is 2-samenhangend. Voor K_2 geldt $P_{K_2}^{'}(1) = 1 > 0$. Als G niet K_2 is dan zijn zowel G/e als $G - e$ samenhangend. Dus geldt sowieso dat $P_G(k) \geq 0$ met behulp van de reductiestelling. Volgens lemma (3.1.2) is er een e zodat G/e 2-samenhangend is en dus geldt met behulp van inductie naar het aantal knopen dat:

$$\begin{aligned}
(-1)^n P_G^{'}(1) &= (-1)^n P_{G-e}^{'}(1) - (-1)^n P_{G/e}^{'}(1) \\
&\geq 0 + (-1)^{n-1} P_{G/e}^{'}(1) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3.2. *Zij G een 2-samenhangende graaf en $\{u, v\}$ een 2-knopen-snede van G zo dat $\{u, v\}$ geen kant is van G. Stel G_1 en G_2 zijn deelgrafen van G zodat $G_1 \cup G_2 = G$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$, $|G_1| \geq 3$, en $|G_2| \geq 3$. Voor $H \in \{G, G_{1,} G_2\}$, zij $H + uv = H'$ en $H'/uv = H^*$. Dan geldt:*

(a) $t(t-1)P_G(t) =$
$(t-1)P(G_1^*, t)P(G_2, t) + P(G_2', t)[(P(G_1', t) - (t-1)P(G_1^*, t)]$

(b) $t(t-1)P_G(t) = tP(G_1', t)P(G_2', t) + (t-1)[P(G_1, t)P(G_2, t) -$
$P(G_1', t)P(G_2, t) - P(G_1, t)P(G_2', t)]$

Bewijs. Beide uitspraken volgen uit het herhaald toepassen van
$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$ en $P(G \cup H) = \frac{P_G(k)P_H(k)}{P_{G\cap H}(k)}$. □

Lemma 3.3.3. *Een graaf G is een gegeneraliseerde driehoek als het aan de volgende eigenschappen voldoet:*

(i) *G is 2-samenhangend.*

(ii) *Voor iedere $e \in E(G)$ heeft $G - e$ precies twee blokken.*

(iii) *Voor iedere 2-knopen-snede $\{u, v\}$ heeft $G - \{u, v\}$ een oneven aantal componenten.*

(iv) *Als $\{u, v\}$ een 2-element knopen snede van G is zodat $G = G_1 \cup G_2, V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}, V(G_i) \geq 3$ voor iedere $i = 1, 2$ en als G_1 een gegeneraliseerde uv-kant is, dan is G_2 separabel met precies twee blokken.*

Stelling 3.3.4. (Jackson 1993) *[7] Zij G een samenhangende graaf op n knopen met $n \geq 2$ en zij b het aantal blokken van G. Dan is $P_G(t)$ ongelijk aan nul met teken $(-1)^{n+b+1}$ voor alle $t \in (1, 32/27]$.*

Zij G een samenhangende graaf van orde $n \geq 3$ en $t \in \mathbb{R}$ zodat $t \in [1, 32/27]$, en zodat $P_G(t)$ niet aan de stelling voldoet. Neem aan dat G gekozen is zodat $f(G) = v(G) + e(G)$ minimaal is. Met andere woorden, G is het 'kleinste' tegenvoorbeeld van de stelling. Als $f(G) = 3$, dan geldt $G \simeq K_2$ en is de stelling waar. Dus $f(G) \geq 4$. Gegeven een graaf G_i zijn n_i en b_i het aantal blokken van G_i.

Lemma 3.3.5. *1. G is 2-samenhangend, en dus $b = 1$.*

2. *G/e is 2-samenhangend voor iedere $e \in E(G)$.*

3. *Zij $\{u, v\}$ een 2-knopen snede van G. Dan is $uv \notin E(G)$ en $G - \{u, v\}$ heeft een oneven aantal componenten.*

4. *$G - e$ heeft precies twee blokken voor iedere $e \in E(G)$.*

5. *Stel $\{u, v\}$ is een 2-knopen-snede van van G zodat $G = G_1 \cup G_2, V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$, $v(G_i) \geq 3$ voor alle $i = 1, 2$, en zodanig dat G_1 een gegeneraliseerde uv-kant is. Dan is G_2 seperabel met precies twee blokken.*

Bewijs

(1) Stel G is separabel. Dan kunnen we G uitdrukken als $G = G_1 \cup G_2$ voor twee deelgrafen G_1 en G_2 van tenminste twee knopen en waarvoor geldt $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$ voor een knoop $\{v\}$ van G. Dan geldt $tP_G(t) = P_{G_1}(t)P_{G_2}(t)$. G_1 en G_2 voldoen aan de stelling, dus $P_G(t)$ is ongelijk aan 0 met teken $(-1)^{n_1+b_1+n_2+b_2-2} = (-1)^{n+b+1}$, omdat $n_1 + n_2 = n + 1$ en $b_1 + b_2 = b$. Dit is in tegenspraak met de aanname dat G en t niet aan de stelling voldoen.

(2) Stel dat G/e separabel is. Dan mogen we gebruikmaken van (1) en kunnen we dus G schrijven als $G = G_1 \cup G_2$ voor twee 2-samenhangende deelgrafen G_1 en G_2 van G, ieder met tenminste 3 knopen, en $G_1 \cap G_2 \cong K_2$. Dus $t(t-1)P_G(t) = P_{G_1}(t)P_{G_2}(t)$. Omdat G_1 en G_2 voldoen aan de stelling, volgt dat $P_G(t)$ ongelijk aan 0 is met teken $(-1)^{n_1+n_2} = (-1)^n$. Dit is in tegenspraak met de aanname dat G en t een tegenvoorbeeld zijn.

(3) Als $\{u, v\}$ een knopen-snede van G is, dan is de samenvoeging van uv een knoop-snede van G/uv en dat kan niet vanwege (2). Zij $G_1, G_2, \dots, G_s$ de componenten van G na weghalen van u en v, waarbij u en v vervolgens aan $E(G_i)$ worden toegevoegd. Zij $G_i' = G_i + uv$ en $G_i^* = G_i'/uv$. Omdat G 2-samenhangend is, zijn G_i' en G_i^* dat ook. Dus we verkrijgen met behulp van de vertrouwde reductiestelling en productregel

$$\begin{aligned} P_G(t) &= P_{G+uv}(t) + P_{G+uv/uv}(t) \\ &= t^{-s+1}(t-1)^{-s+1}\prod_{i=1}^{s} P_{G_i'}(t) + t^{-s+1}\prod_{i=1}^{s} P_{G_i^*}(t). \end{aligned}$$

Door de stelling toe te passen op $P_{G_i'}(t)$ en $P_{G_i^*}(t)$ en er van gebruik makend dat de stelling niet waar is voor $P_G(t)$ en dat

$$\sum_{i=1}^{s}|V(G_i')| \equiv n \bmod 2 \; en \; \sum_{i=1}^{s}|V(G_i^*)| \equiv n - s \bmod 2,$$

kan het onmogelijk zijn dat s even is en dus is s oneven.

(4) Zij b^* het aantal blokken van $G - e$. Vanwege (3.3.2), $P_G(t) = P_{G-e}(t) - P_{G/e}(t)$. Met gebruik van inductie naar $G - e$ en G/e, en de tweede claim uit dit lemma op G/e, leiden we af dat wanneer b^* oneven is, $P_G(t)$ voldoet aan de stelling. Dus b^* is even. Omdat G een blok is, is de boom die je krijgt

door van ieder blok uit $G - e$ een knoop te maken en alle kanten tussen blokken intact te laten een pad $B_1 u_1 B_2 u_2 \dots u_{r-1} B_r$ voor een zekere geheel getal $r > 1$ waarbij $u_1 \in B_1$ en $u_{r-1} \in B_r$. Als $r \geq 4$, dan is $\{u_1, u_{r-1}\}$ een 2-knopen snede van G, en $G - \{u_1, u_{r-1}\}$ heeft precies twee componenten. Dit is in tegenspraak met de derde claim van dit lemma en dus moet er gelden dat $b^* = r = 2$.

(5) Het volgt uit de derde claim dat $uv \notin E(G)$. Dus, als $n_2 = 3$, dan is G_2 een boom en is de bewering waar. Dus we mogen aannemen dat $n_2 \geq 4$. Zij H de graaf die verkregen wordt vanuit G_1 door het verbinden van een nieuwe knoop x aan zowel u als aan v. Dan is H 2-samenhangend, en omdat G_1 een gegeneraliseerde kant is, is n_1 even en dus is $v(H)$ oneven. Vanwege de inductiehypothese mogen we aannemen dat

$$P_H(t) < 0 \ \ (3).$$

Het toepassen van Lemma 3.3.2(a) op de graaf H met $H = G_1 \cup H_2$ waarbij H_2 het pad uxv is, geeft

$$t(t-1)P_H(t) = (t-1)P_{G_1^*}(t)t(t-1)^2 + t(t-1)(t-2)[P_{G_1'}(t) - (t-1)P_{G_1^*}(t)]. \ (4)$$

Omdat G_1 een gegeneraliseerde $\{u, v\}$ kant is, volgt het dat $v(G_1^*)$ oneven is en dat G_1^* separabel is met precies twee blokken. De stelling toepassend op G_1^* leiden we af dat

$$P_{G_1^*}(t) > 0. \ (5)$$

Gebruikmakend van (3),(4) en (5), en het feit dat $1 < t < 2$ geeft

$$P_{G_1'}(t) - (t-1)P_{G_1^*}(t) > 0. \ (6)$$

Uit Lemma 3.3.2(b) waarbij $G = G_1 \cup G_2$ volgt

$$t(t-1)P_G(t) = (t-1)P_{G_1^*}(t)P_{G_2}(t) + P_{G_2'}(t)[P_{G_1'}(t) - t(t-1)P_{G_1^*}(t)]$$

Als G_2 2-samenhangend is, kunnen we de stelling met $b = 1$ toepassen op G_2 en G_2', en gebruikmakend van (5), (6) en het feit dat $v(G_2)$, $v(G_2')$, $v(G)$ gelijk aan elkaar zijn modulo 2 verkrijgen we dat $P_G(t)$ ongelijk aan nul is met teken $(-1)^n$. Dit is in tegenspraak met de 'minimale' keuze voor G en t en dus is G_2 separabel.

Het volgt dat de blok-boom van G_2 een pad $B_1 u_1 B_2 u_2 \dots u_{r-1} B_r$ is voor een zeker geheel getal $r > 1$

waarbij $u_1 \in B_1$ en $u_{r-1} \in B_r$. Als $r \geq 3$, dan is $\{u_1, v\}$ een 2-knopen snede van G met precies twee componenten in G. Dit zou in tegenspraak zijn met de derde bewering van dit Lemma en dus $1 < r < 3$ en dus $r = 2$.

□

Vanwege de beweringen uit het bovenstaande lemma (3.3.5) volgt dat G een gegeneraliseerde driehoek is. Merk op dat dit betekent dat n oneven is, en dat omdat G en t een tegenvoorbeeld vormen dat

$$P_G(t) \geq 0.$$

Omdat de orde van een gegeneraliseerde driehoek altijd oneven is en $b = 1$, geldt voor $P_G(k)$ dat de orde $(-1)^{n+b+1}$ gelijk aan -1 is. Stel dus dat we een G en een t hebben zodat $P_G(t)$ een tegenvoorbeeld is, dan moet gelden $P_G(t) \geq 0$.
We laten nu zien dat ook moet gelden $P_G(t) < 0$, en er dus geen tegenvoorbeeld kan bestaan.

Lemma 3.3.6. *Zij G_0 een 2-samenhangende graaf met $f(G_0) \leq f(G)$.*
(a) Stel $G_0 = G_1 \cup G_2$, waarbij G_1 en G_2 gegeneraliseerde uv-kanten zijn zodat $G_1 \cap G_2 = \{u, v\}, n_1 \geq 4$ en $n_2 \geq 4$. Dan geldt:

$$P_{G_0}(t) \geq \frac{9}{4} t^{-1} P_{G_1}(t) P_{G_2}(t).$$

(b) Stel $G_0 = G_1 \cup G_2 + uv$, waarbij G_1 een gegeneraliseerde wu-kant is, G_2 een gegeneraliseerde wv-kant is, en $G_1 \cap G_2 = \{w\}$. Dan geldt:

$$P_{G_0}(t) \leq -\frac{5}{9} P_{G_0}/uv(t).$$

(c) Stel dat G_0 een gegeneraliseerde uv-kant en $n_0 \geq 4$. Dan geldt:

$$P_{G_0+uv}(t) \geq \frac{5}{8} P_{G_0}(t).$$

Bewijs. We gebruiken inductie naar n_0. Als $n_0 \leq 2$, dan zijn (a), (b) en (c) lege uitspraken. Dus neem aan dat $n_0 \geq 3$ en dat (a), (b) en (c) waar zijn voor alle grafen met minder kanten dan G_0.
(a) Als we Lemma 3.3.2(b) toepassen op G_0 vinden we dat

$$t(t-1)P_{G_0}(t) = tP_{G_1'}(t)P_{G_2'}(t) + (t-1)[P_{G_1}(t)P_{G_2}(t) - P_{G_1'}(t)P_{G_2}(t) - P_{G_1}(t)P_{G_2'}(t)].$$

Dus

$$\begin{aligned} tP_{G_0}(t) &= P_{G_1'}(t)[\frac{t}{2(t-1)}P_{G_2'}(t) - P_{G_2}(t)] \\ &+ P_{G_2'}(t)[\frac{t}{2(t-1)}P_{G_1'}(t) - P_{G_1}(t)] + P_{G_1(t)}P_{G_2(t)}. \ (6) \end{aligned}$$

Zij $i \in \{1,2\}$. Gebruik makend van de inductiehypothese van (c) op G_i, leiden we af dat $P_{G_i'}(t) \geq \frac{5}{8}P_{G_i}(t)$. We mogen, omdat $f(G_i) < f(G)$, de stelling toepassen op G_i om af te leiden dat $P_{G_i}(t) > 0$, en dat vanwege $t \geq 32/27$, we hebben dat $t/2(t-1) \geq 16/5$. Dit invullen in bovenstaande vergelijking (6) geeft

$$tP_{G_0}(t) \geq \frac{5}{8}P_{G_1}(k)(2P_{G_2} - P_{G_2}) + \frac{5}{8}P_{G_2}(k)(2P_{G_1}(k) - P_{G_1}(k)) + P_{G_1}P_{G_2}.$$

Dus geldt (a) voor G_0.

(b) Als $n_0 = 3$ dan geldt (b), omdat $G_0 \cong K_3$ en

$$P_{K_3}(t) = (t-2)P_{K_2}(t) \leq -\frac{22}{27}P_{K_2}(t) < -\frac{5}{9}P_{K_2}(t).$$

Dus we mogen veronderstellen dat $n_0 > 3$. Gebruikmakend van reductiestelling 2.2.8 en de productregel 2.2.5, geeft dit

$$\begin{aligned} 0 &= P_{G_0}(t) + P_{G_0/uv}(t) - P_{G_0-uv}(t) \\ &= P_{G_0}(t) + P_{G_0/uv}(t) - t^{-1}P_{G_1}(t)P_{G_2}(t). \ (7) \end{aligned}$$

Als $n_1 \geq 4$ en $n_2 \geq 4$, kunnen we de inductiehypothese van (a) gebruiken op G_0/uv om af te leiden uit de laatste gelijkheid (7) dat

$$0 \geq P_{G_0}(t) + \frac{5}{9}P_{G_0}/uv(t),$$

en dus is (b) waar voor G_0 met $n_1 \geq 4$ en $n_2 \geq 4$. Stel nu dat $n_1 = 2$ of dat $n_2 = 2$. Omdat $n_0 > 3$, mogen we aannemen dat $n_1 = 2$ en $n_2 \geq 4$. Dus G_1 is een K_2 en dus $P_{G_1}(t) = t(t-1)$. Omdat $f(G_0/uv) < f(G)$, mogen we de stelling 3.3.4 op G_0/uv toepassen om af te leiden dat $P_{G_0}/uv(t) > 0$. Omdat $G_0/uv \cong G_2 + wv$ (Ga dit na!), mogen we de inductiehypothese van (c) toepassen op G_2 om te verkrijgen $P_{G_0}/uv(t) \geq (5/8)P_{G_2}(t)$. Dit invullen in gelijkheid (7) en gebruik makend dat $t \leq \frac{32}{27}$ geeft

$$0 \geq P_{G_0}(t) + \frac{19}{27}P_{G_0}/uv(t) \geq P_{G_0}(t) + \frac{5}{9}P_{G_0}/uv(t),$$

En dus geldt (b) voor G_0.

(c). Omdat G_0 een gegeneraliseerde uv-kant is met tenminste vier knopen, bestaan er deelgrafen G_1,G_2,G_3,G_4 en knopen $v_1 = u$,v_2,$v_3 = v$,v_4 van G_0 zodat $G_0 = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, $G_i \cap G_{i+1} = v_{i+1}$ $G_i \cap G_{i+2} = \emptyset$ en G_i is een gegeneraliseerde v_iv_{i+1}-kant voor alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, waarbij de subscripts modulo vier gelezen moeten worden. Zij $H_0 = G_0 + uv$, $H_1 = G_1 \cup G_2 + uv, H_2 = G_3 \cup G_4 + uv$, en $s = P_{H_0}(t) - (5/8)P_{G_0}(t)$. Gebruikmakend van de productregel en de reductiestelling geeft dit

$$\begin{aligned} s &= \frac{3}{8}P_{H_0}(t) - \frac{5}{8}P_{H_0/uv}(t) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{t(t-1)}P_{H_1}(t)P_{H_2}(t) - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{t}P_{H_1/uv}(t)P_{H_2/uv}(t). \quad (8) \end{aligned}$$

Omdat $f(H_i) < f(G)$, mogen we de stelling toepassen op H_i/uv om af te leiden dat $P_{H_i/uv}(t) > 0$ voor $i \in \{1, 2\}$. Vanwege bovenstaande vergelijking (8), de inductie hypothese van (b) op H_i, en het feit dat $1 \leq t \leq 32/27$ geeft dit tezamen

$$t(t-1)s \geq P_{H_1/uv}(t)P_{H_2/uv}(t)(\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} - \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{27}) = 0.$$

Dus, $s \geq 0$, en (c) geldt voor G_0. □

We hebben nu genoeg werk verricht om het bewijs van de stelling te geven. Omdat G een gegeneraliseerde driehoek is, bestaan er deelgrafen G_1, G_2, G_3 en knopen v_1, v_2, v_3 van G zodat $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, $G_i \cap G_{i+1} = v_{i+1}$, en G_i is een gegeneraliseerde v_iv_{i+1}-kant voor alle $i \in \{1, 2, 3\}$, waarbij subscripts modulo drie gelezen moeten worden. Als $n_i = 2$ voor zekere i, dan mogen we 3.3.6 toepassen op G om af te leiden dat $P_G(t) \leq -(5/9)P_G/v_iv_{i+1}(t)$. Omdat $f(G/v_iv_{i+1}) < f(G)$, kunnen we de stelling toepassen op G/v_iv_{i+1} om af te leiden dat $P_{G/v_iv_{i+1}}(t) > 0$. Dus $P_G(t) < 0$, in tegenspraak met de keuze voor G en t. Dus we mogen aannemen dat $n_i \geq 4$ voor alle $i \in \{1, 2, 3\}$.

Stel $n_i \geq 4$ voor alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Zij $H = G_2 \cup G_3$. Toepassen van Lemma 3.3.2 (b) op $G = G_1 \cup H$ geeft

$$\begin{aligned} t(t-1)P_G(t) &= tP_{G_1'}(t)P_{H'}(t) + \\ (t-1)[P_{G_1}(t)P_H(t) &- P_{G_1'}(t)P_H(t) - P_{G_1}(t)P_{H'}(t)] \quad (9) \end{aligned}$$

Sinds $f(H') < f(G)$, kunnen we de stelling 3.3.4 op H' en H toepassen om af te leiden dat $P_H'(t) < 0$ en $P_H(t) > 0$ (Omdat H' 2-samenhangend is en H precies twee blokken heeft). Dus we kunnen bewering 3.3.6(c) gebruiken om in de laatste vergelijking (9) $P_{G_1'}(t)$ te 'vervangen' door $P_{G_1'}(t)$, wat oplevert dat

$$t(t-1)P_G(t) \leq P_{G_1}(t)[(1 - \frac{3}{8}t)P_{H'}(t) + \frac{3}{8}(t-1)P_H(t)]. \quad (10)$$

Het toepassen van bewering 3.3.6(b) op H' geeft
$P_{H'}(t) \leq -(5/9)P_{H'/v_1v_2}(t)$. Toepassen van bewering 3.3.6 (a) op $H'/v_1v_2 = G_2 \cup G_3$ levert op dat

$$P_{H'}(t) \leq -\frac{5}{9}(\frac{9}{4}t^{-1}P_{G_2}(t)P_{G_3}(t)) = -\frac{5}{4}t^{-1}P_{G_2}(t)P_{G_3}(t). \ (11)$$

Toepassen van de productregel 2.2.5 op H geeft

$$P_H(t) = t^{-1}P_{G_2}(t)P_{G_3}(t). \ (12)$$

Omdat $f(G_i) < f(G)$, mogen we de stelling op G_1 toepassen om af te leiden dat $P_{G_1}(t) > 0$, en omdat $t \leq \frac{32}{27}$ hebben we dat $1 - (3/8)t > 0$. Dus kunnen we (11) en (12) invullen in (10):

$$\begin{aligned} t^2(t-1)P_G(t) &\leq P_{G_1}(t)P_{G_2}(t)P_{G_3}(t)(-\frac{5}{4}(1-\frac{3}{8}t)+\frac{3}{8}(t-1)) \\ &\leq -\frac{1}{32}P_{G_1}(t)P_{G_2}(t)P_{G_3}(t)(52-27t). \end{aligned}$$

Omdat $f(G_i) < f(G)$ voor $i \in \{1,2,3\}$, kunnen we de stelling toepassen op G_i om af te leiden dat $P_{G_i}(t) > 0$ voor alle $i \in \{1,2,3\}$. Omdat $52 - 27t > 0$, volgt dat $P_G(t) < 0$. Dit is in tegenspraak met $P_G(t) \geq 0$ voor een tegenvoorbeeld G en t. Dus kan er geen tegenvoorbeeld van de stelling bestaan en is deze bewezen. □

Stelling 3.3.7. (Sokal) *[11] Zij $G = (V, E)$ een graaf die de eigenschap heeft dat iedere knoop een graad van maximaal r heeft. Dan geldt voor alle complexe nulpunten q van $P_G(k)$ dat $|q| < 7,963906r$*

3.4 Substituties in het chromatische polynoom

Stelling 3.4.1. *Zij G een samenhangende graaf. Dan geldt $P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}$ voor alle gehele getallen $k \geq 1$.*

Bewijs. Zij T een opspannende boom van G. De knopen van T kunnen op $k(k-1)^{n-1}$ manieren gekleurd worden. Iedere kleuring van G is een kleuring van T, maar een kleuring van T hoeft geen kleuring van G te zijn. Dus geldt:

$$P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}$$

□

Stelling 3.4.2. (Seymour 1997) *[10] Zij G een graaf met n knopen. Dan geldt:*

$$\frac{P_G(n)}{P_G(n-1)} \geq \frac{685}{252}(= 2.7182539).$$

Bewijs. Voor grafen op minder dan 4 knopen is de stelling eenvoudig na te gaan. Neem dus aan dat $n \geq 4$.

Zij $\mathcal{A}$ de collectie van alle verzamelingen $\{A_{1,} \ldots, A_k\}$ zodat iedere A_i een onafhankelijke deelverzameling van $V(G)$ is en de verzamelingen $\{A_{1,} \ldots, A_k\}$ paarsgewijs disjunct zijn en $V(G)$ als vereniging hebben.

De *score* van $\{A_1, \ldots, A_k\}$ is de $(n+1)$-tupel $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$, waarbij $s_0 = n - k$ en, voor $1 \leq i \leq n$, is s_i het aantal van $A_1, \ldots, A_k$ dat kardinaliteit i heeft. Zij $\mathcal{P}$ de verzameling van alle $(n+1)$ tupels $(s_0, \ldots, s_n)$ van getallen die voldoen aan

$$\sum_{0 \leq i \leq n} s_i = \sum_{1 \leq i \leq n} i s_i = n$$

Dan behoort de *score* van ieder element uit $\mathcal{A}$ tot $\mathcal{P}$. We gebruiken 'vector notatie' voor elementen uit $\mathcal{P}$. $(\mathbf{s} + \mathbf{t})$ betekent $(s_0 + t_o, \ldots s_n + t_n)$. Voor $\mathbf{s} \in \mathcal{P}$, zij $\mathcal{A}(\mathbf{s})$ de verzameling van alle elementen van $\mathcal{A}$ die score s hebben. Uit de factoriale vorm (2.2.2) volgt dat

$$P_G(k) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}} k(k-1) \ldots (k - n + s_0 + 1) |\mathcal{A}(\mathbf{s})|$$

Voor $\mathbf{s} \in \mathcal{P}$, zij

$$M(\mathbf{s}) = (n-1)(n-2) \ldots s_0 |\mathcal{A}(\mathbf{s})|$$
$$N(\mathbf{s}) = n(n-1) \ldots (s_0 + 1) |\mathcal{A}(\mathbf{s})|$$

Dus geldt $P_G(n-1) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}} M(\mathbf{s})$, en $P_G(n) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}} N(\mathbf{s})$.
We willen daarom laten zien dat

$$\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}} (\frac{252}{685} N(\mathbf{s}) - M(\mathbf{s})) \geq 0.$$

Lemma 3.4.3. *Zij* $\mathbf{s} \in \mathcal{P}$ *en* $\delta_i = (d_{0,} d_1, \ldots, d_n) = (-1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ *waarbij* $d_1, \ldots, d_n = 0$ *behalve dat* $d_i = 1$ *en* $d_0 = -1$. *Dan*

1. $nM(\mathbf{s}) = s_0 N(\mathbf{s})$.
2. *Voor* $1 \leq i, j \leq n$, *met* $i \neq j$ *en* $i + j \leq n$,

$$n \binom{i+j}{i} s_{i+j} M(\mathbf{s}) \leq (s_i + 1)(s_j + 1) N(\mathbf{s} + \delta_\mathbf{i} + \delta_\mathbf{j} - \delta_\mathbf{i+j}).$$

3. *Voor* $1 \leq i \leq \frac{1}{2} n$,

$$n \binom{2i}{i} s_{2i} M(\mathbf{s}) \leq (s_i + 1)(s_i + 2) N(\mathbf{s} + \mathbf{2}\delta_\mathbf{i} - \delta_\mathbf{2i}).$$

Bewijs. 1. Duidelijk.

2. Zij $i, j \geq 1$ met $i \neq j$ en $i + j \leq n$. We mogen aannemen dat $s_{i+j} \neq 0$, anders zijn we klaar. Zij $\mathbf{s'} = \mathbf{s} + \delta_\mathbf{i} + \delta_\mathbf{j} - \delta_\mathbf{i+j}$. Dan $\mathbf{s'} \in \mathcal{P}$, immers geldt er nog steeds dat de elementen van $\mathbf{s'}$ optellen tot aan n. Zij $\{A_1, \ldots, A_k\} \in \mathcal{A}(s)$ en $\{A'_1, \ldots A'_{k'}\} \in \mathcal{A}(s')$. (dus $k = n - s_0 = n - s'_0 = n - s'_0 - 1 = k' - 1$). Deze twee verzamelingen noemen we *gerelateerd* als er verschillende p, q bestaan zodat $1 \leq p, q \leq k'$, en r waarbij $1 \leq r \leq k$, zodat $A'_p \cup A'_q = A_r$, $|A'_p| = i$ en $|A'_q| = j$.

Ieder element uit $\mathcal{A}(\mathbf{s'})$ is met ten hoogste $s'_i s'_j$ elementen van $\mathcal{A}(\mathbf{s})$ gerelateerd, omdat $A'_p \cup A'_q$ niet noodzakelijk een onafhankelijke verzameling hoeft te zijn, en ieder element van $\mathcal{A}(\mathbf{s})$ is precies met $\binom{i+j}{i} s_{i+j}$ elementen van $\mathcal{A}(\mathbf{s'})$ gerelateerd.

Hieruit volgt

$$\binom{i+j}{i} s_{i+j} |\mathcal{A}(\mathbf{s})| \leq s'_i s'_j |\mathcal{A}(\mathbf{s'})|.$$

En dus

$$\begin{aligned} n\binom{i+j}{i} s_{i+j} M(\mathbf{s}) &= n\binom{i+j}{i} s_{i+j}(n-1)(n-2)\ldots s_0|\mathcal{A}(\mathbf{s})| \\ &\leq s'_i s'_j n(n-1)\ldots s_0|\mathcal{A}(\mathbf{s'})| \\ &= s'_i s'_j n(n-1)\ldots (s'_0+1)|\mathcal{A}(\mathbf{s'})| \\ &= s'_i s'_j N(\mathbf{s'}). \end{aligned}$$

3. Zij $\mathbf{s''} = \mathbf{s} + \mathbf{2}\delta_\mathbf{i} - \delta_\mathbf{2i}$. Dan geldt $\mathbf{s''} \in \mathcal{P}$. Zij $\{A_1, \ldots, A_k\} \in \mathcal{A}(\mathbf{s})$ en $\{A''_1, \ldots, A''_{k''}\} \in A(\mathbf{s''})$. Er zijn $\binom{2i}{i} s_{2i}$ elementen uit $\mathcal{A}(\mathbf{s''})$ uit een enkel element uit $\mathcal{A}(\mathbf{s})$ te maken door een onafhankelijke verzameling van $2i$ elementen op te delen in twee onafhankelijke verzamelingen van ieder i elementen.

Er zijn maximaal $(s_i + 1)(s_i + 2)$ elementen uit $\mathcal{A}(\mathbf{s})$ te maken vanuit een enkel element uit $\mathcal{A}(\mathbf{s''})$. Echter hoeft een vereninging van onafhankelijke verzamelingen niet noodzakelijk onafhankelijk te zijn, dus het aantal $(s_i + 1)(s_i + 2)$ geldt als 'hoogstens'.
Dus $\binom{2i}{i} s_{2i}\mathcal{A}(\mathbf{s}) \leq (s_i + 1)(s_i + 2)\mathcal{A}(\mathbf{s''})$.
Hieruit volgt

$$\begin{aligned} n\binom{2i}{i} s_{2i} M(\mathbf{s}) &= \binom{2i}{i} s_{2i} n(n-1)\ldots s_0|\mathcal{A}(\mathbf{s})| \\ &\leq (s_i+1)(s_i+2)n(n-1)\ldots s_0|\mathcal{A}(\mathbf{s''})| \\ &= (s_i+1)(s_i+2)n(n-1)\ldots (s''_0+1)|\mathcal{A}(\mathbf{s''})| \\ &= (s_i+1)(s_i+2)N(\mathbf{s} + \mathbf{2}\delta_\mathbf{i} - \delta_\mathbf{2i}) \end{aligned}$$

$\square$

Zij $\mathcal{T}$ de verzameling van alle drietallen (x_0, x_1, x_2) van niet-negatieve getallen zodat $x_0 + x_1 + x_2 \leq n$ en zodat $3x_0 + 2x_1 + x_2 \geq 2n$.

Lemma 3.4.4. *Als* $\mathbf{s} \in \mathcal{P}$, *en* $s_0, s_1, \dots s_n \geq 0$, *dan* $(s_0, s_1, s_2) \in \mathcal{T}$.

Bewijs. $s_0 + s_1 + s_2 \leq \sum_{0 \leq i \leq n} s_i = n$, en

$3s_0 + 2s_1 + s_2 \geq \sum_{0 \leq i \leq n} (3-i)s_i = 3n - n = 2n.$

$\square$

Voor ieder drietal van niet negatieve getallen (x_0, x_1, x_2), zij:

$\mathcal{P}(x_0, x_1, x_2) = \{\mathbf{s} \in \mathcal{P} : s_0 = x_0, s_1 = x_1, s_2 = x_2\}$

$M(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)} M(\mathbf{s})$

$N(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)} N(\mathbf{s})$.

Lemma 3.4.5. *Zij* $(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{T}$. *Dan gelden de volgende uitspraken:*

(i) $2nx_2M(x_0, x_1, x_2) \leq (x_1 + 1)(x_1 + 2)N(x_0 - 1, x_1 + 2, x_2 - 1)$.

(ii) $n(n - x_1 - 2x_2)M(x_0, x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} &\leq (x_1 + 1)(x_2 + 1)N(x_0 - 1, x_1 + 1, x_2 + 1) \\ &\quad +(x_1 + 1)(n - x_0 - x_1 - x_2)N(x_0 - 1, x_1 + 1, x_2) \end{aligned}$$

(iii) $5n(3x_0 + 2x_1 + x_2 - 2n)M(x_0, x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{5}{6}(x_2 + 1)(x_2 + 2)N(x_0 - 1, x_1, x_2 + 2) \\ &\quad +(x_2 + 1)(n - x_0 - x_1 - x_2)N(x_0 - 1, x_1, x_2 + 1) \end{aligned}$$

(iv) $nM(x_0, x_1, x_2) = x_0N(x_0, x_1, x_2)$.

Bewijs. *(i)* Zij $\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0, x_1, x_2)$. Gebruik 3.4.3(3) en neem $i = 1$, dan krijgen we

$$2nx_2M(\mathbf{s}) \leq (x_1 + 1)(x_2 + 1)N(\mathbf{s} + \mathbf{2\delta_1} - \delta_\mathbf{2})$$

Sommerend over alle $\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0, x_1, x_2)$ verkrijgen we

$$\begin{aligned} 2nx_2M(x_0, x_1, x_2) &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)} 2nx_2M(\mathbf{s}) \\ &\leq \sum_{\mathbf{t} \in \mathcal{P}(x_0-1,x_1+2,x_2-1)} (x_1 + 1)(x_1 + 2)N(\mathbf{t}) \\ &= (x_1 + 1)(x_1 + 2)N(x_0 - 1, x_1 + 2, x_2 - 1) \end{aligned}$$

(ii) Vanwege 3.4.3(2) geldt er dat $\forall \mathbf{s} \in \mathcal{P} \in (x_0, x_1, x_2)$ en $j \geq 2$ dat

$$n(j+1)s_{j+1}M(\mathbf{s}) \leq (x_1+1)(s_j+1)N(\mathbf{s}+\delta_\mathbf{1}+\delta_\mathbf{j}-\delta_\mathbf{j+1}).$$

Sommerend over alle j met $2 \leq j < n$ en alle $\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0, x_1, x_2)$ en gebruikmakend van

$$\sum_{2 \leq j < n} (j+1)s_{j+1} = n - s_1 - 2s_2 = n - x_1 - 2x_2,$$

verkrijgen we

$$n(n-x_1-2x_2)M(x_0,x_1,x_2) \leq \sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)} \sum_{2\leq j\leq n} (x_1+1)(s_j+1)N(\mathbf{s}+\delta_1+\delta_j-\delta_{j+1}).$$

Noem $\mathbf{t} = \mathbf{s} + \delta_1 + \delta_j - \delta_{j+1}$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)} \sum_{2\leq j\leq n} (x_1+1)(s_j+1)N(s+\delta_1+\delta_j-\delta_{j+1}) \\
= &\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}(x_0-1,x_1+1,x_2+1)} (x_1+1)(x_2+1)N(\mathbf{t}) \\
&+ \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}(x_0-1,x_1+1,x_2)} \sum_{3\leq j\leq n} (x_1+1)t_jN(\mathbf{t}) \\
= &(x_1+1)(x_2+1)N(x_0-1,x_1+1,x_2+1) \\
&+(x_1+1)(n-x_0-x_1-x_2)N(x_0-1,x_1+1,x_2).
\end{aligned}$$

Omdat $t_1 > 0$ en daarom $t_n = 0$ en
$\sum_{3\leq j\leq n} t_j = n - x_0 - x_1 - x_2 \forall \mathbf{t} \in \mathcal{P}(x_0-1, x_1+1, x_2)$.

(iii)

Vanwege 3.4.3(3) waarbij $i = 2$, hebben we dat $\forall \mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0, x_1, x_2)$,

$$6ns_4M(s) \leq (x_2+1)(x_2+2)N(s+2\delta_2-\delta_4)$$

Vanwege 3.4.3(2) waarbij $i = 2$ en er gesommeerd wordt over alle j met $3 \leq j \leq n-2$, hebben we (omdat $\frac{1}{2}(j+1)(j+2) \geq 5(j-1)$ voor $j \geq 3$), dat voor alle $\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0, x_1, x_2)$,

$$\sum_{3\leq j\leq n-2} 5n(j-1)s_{j+2}M(\mathbf{s}) \leq \sum_{3\leq j\leq n-2} (x_2+1)(s_j+1)N(\mathbf{s}+\delta_2-\delta_j-\delta_{j+2}) \ (\mathbf{1})$$

Uit de laatste vergelijking en de voorlaatste vergelijking bij elkaar opgeteld, krijgen we

$$\begin{aligned}\sum_{2\le j\le n-2} 5n(j-1)s_{j+2}M(\mathbf{s}) \quad &\le \quad \frac{5}{6}(x_2+1)(x_2+2)N(s+2\delta_2-\delta_4)+ \\ &\sum_{3\le j\le n-2}(x_2+1)(s_j+1)N(\mathbf{s}+\delta_2+\delta_j-\delta_{j+2})\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\sum_{2\le j\le n-2}(j-1)s_{j+2} &= \sum_{4\le j\le n} js_j - \sum_{4\le j\le n} 3s_j \\ &= (n-s_1-2s_2-3s_3)-3(n-s_0-s_1-s_2-s_3) \\ &= 3x_0+2x_1+x_2-2n.\end{aligned}$$

Dus het sommeren van de ongelijkheid (1) over alle $\mathbf{s} \in \mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)$ geeft

$$\begin{aligned}5n(3x_0+2x_1+x_2-2n)M(x_0,x_1,x_2) \quad &\le \quad \frac{5}{6}(x_2+1)(x_2+2)\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}(x_0-1,x_1,x_2+2)} N(\mathbf{t}) \\ &+ \quad (x_2+1)\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{P}(x_0-1,x_1,x_2+1)}\sum_{3\le j\le n} t_jN(\mathbf{t}) \\ &= \quad \frac{5}{6}(x_2+1)(x_2+2)N(x_0-1,x_1,x_2+2) \\ &+ \quad (x_2+1)(n-x_0-x_1-x_2)N(x_0-1,x_1,x_2+1).\end{aligned}$$

Omdat $t_2 > 0$ en dus $t_n = t_{n-1} = 0$ en

$$\sum_{3\le j\le n-2} t_j = n-x_0-x_1-x_2 \quad \forall \mathbf{t}\in \mathcal{P}(x_0-1,x_1,x_2+1)$$

(iv).

$nM(x_0,x_1,x_2) = \sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)} nM(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{P}(x_0,x_1,x_2)} x_0N(s) = x_0N(x_0,x_1,x_2).$

□

In het restant van het bewijs, zij $\theta = \frac{685}{252}$, en voor alle gehele getallen x zij

$$\rho(x) = \theta^2\frac{x^2}{n^2} + \theta(12-\theta)\frac{x}{n} + 72 - 11\theta.$$

en voor alle drietallen van gehele getallen $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$, zij

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\mathbf{x}) &= 12\theta^2 - 110\theta + 424 \\
\alpha_2(\mathbf{x}) &= 12\theta^2 - 110\theta + 424 + \theta\rho(x_1) + 2\theta^2\frac{x_2}{n} \\
\alpha_3(\mathbf{x}) &= 24\theta \\
\alpha_4(\mathbf{x}) &= 360n + 24\theta x_2 + \theta x_1\rho(x_1) + 2\theta^2\frac{x_1x_2}{n} + (12\theta^2 - 110\theta + 424)x_1 \\
\beta(\mathbf{x}) &= 2nx_2\alpha_1(\mathbf{x}) + n(n - x_1 - 2x_2)\alpha_2(\mathbf{x}) + 5n(3x_0 + 2x_1 + x_2 - 2n)\alpha_3(\mathbf{x}) + n\alpha_4(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Als x_0, x_1 en x_2 allemaal niet negatief zijn dan volgt dat $\beta(\mathbf{x}) > 0$. Voor $1 \leq i \leq 4$ definieer

$$\gamma_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha_i(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})^{-1} & x_0, x_1, x_2 \geq 0 \\ 0 & elders \end{cases}$$

Om de stelling te bewijzen, hebben we nog de volgende ongelijkheden nodig(herhaal dat $n \geq 4$ en $x \in \mathcal{T}$):

Lemma 3.4.6.

$$\begin{array}{rc}
(i) & (x_1 - 1)\gamma_1(x_0 + 1, x_1 - 2, x_2 + 1) \leq x_1\gamma_1(\mathbf{x}) \\
(ii) & \gamma_2(x_0 + 1, x_1 - 1, x_2 - 1) \leq \gamma_2(\mathbf{x}) \\
(iii) & \gamma_2(x_0 + 1, x_1 - 1, x_2) \leq \gamma_2(\mathbf{x}) \\
(iv) & \gamma_3(x_0 + 1, x_1, x_2 - 2) \leq \gamma_3(\mathbf{x}) \\
(v) & \gamma_3(x_0 + 1, x_1, x_2 - 1) \leq \gamma_3(\mathbf{x}) \\
(vi) & x_1^2\gamma_1(\mathbf{x}) + x_1(n - x_0 - x_1)\gamma_2(\mathbf{x}) \\
& +x_2(n - x_0 - x_1 - \frac{1}{6}x_2)\gamma_3(\mathbf{x}) + x_0\gamma_4(\mathbf{x}) \leq \theta^{-1}.
\end{array}$$

Lemma 3.4.7. *Zij voor ieder paar gehele getallen* e_1 *en* e_2 *gedefinieerd:* $\delta(e_1, e_2) = \beta(x_0 + 1, x_1 - e_1, x_2 - e_2) - \beta(x)$. *Dan hebben we:*

$$\begin{aligned}
\delta(e_1, e_2) &= 24\theta n(15 - 10e_1 - 6e_2) + 2\theta n e_2\rho(x_1) + 4\theta^2 e_2 x_2 \\
&\quad -\theta^2(n + 2e_2 - 2x_2)(\frac{\theta}{n}(2x_1e_1 - e_1^2) + (12 - \theta)e_1 + 2e_2).
\end{aligned}$$

De motivering hiervoor is te vinden in de appendix. 4

Bewijs. (**i**) De bewering is equivalent aan $(x_1 - 1)\frac{\alpha_1(x_0+1,x_1-2,x_2+1)}{\beta(x_0+1,x_1-2,x_2+1)} \leq x_1\frac{\alpha_1(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})}$. $\alpha_1(x_0 + 1, x_1 - 2, x_2 + 1) = \alpha_1(\mathbf{x})$, dus we moeten laten zien dat $(x_1 - 1)\beta(\mathbf{x}) \leq x_1\beta(x_0 + 1, x_1 - 2, x_2 + 1)$, wat neerkomt op $x_1\delta(2, -1) + \beta(\mathbf{x}) \geq 0$.

Omdat $3x_0 + 2x_1 + x_2 - 2n \geq 0$, is het voldoende om te laten zien dat $F(x_1, x_2) \geq 0$, waarbij

$$F(x_1, x_2) = x_1\delta(2, -1) + \beta(x_0, x_1, x_2) + 120\theta n(2n - 3x_0 - 2x_1 - x_2).$$

Omdat $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$, volgt dat
$x_1 + 2x_2 = 3(x_0 + x_1 + x_2) - (3x_0 + 2x_1 + x_2) \leq 3n - 2n = n.$

Het is daarom voldoende om na te gaan dat $F(x_1, x_2) \geq 0 \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $0 \leq x_1 \leq n$ en $0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}(n - x_1)$. Voor vaste x_1 is $F(x_1, x_2)$ kwadratisch in x_2, waarbij de coëfficiënt van x_2^2 negatief is. Dus om te laten zien dat $F(x_1, x_2) \geq 0$ voor alle x_2 met $0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}(n - x_1)$ is het voldoende om het te laten zien voor $x_2 = 0$ en wanneer $x_2 = \frac{1}{2}(n - x_1)$. Maar $F(x_1, 0)$ en $F(x_1, \frac{1}{2}(n - x_1))$ zijn beiden kwadratisch in x_1, waarbij alle coëfficiënten negatief zijn op de constante term na, en zijn dus minimaal als $x_1 = n$ en dat is wanneer ze gelijk aan elkaar zijn. Omdat $F(n, 0) \geq 0$(Dit bewijzen we echter niet), volgt bewering **(i)**.

(ii)
$\delta(1, 1) = -24\theta n + 2\theta n\rho(x_1) + 4\theta^2 x_2 - \theta^2(n + 2 - 2x_2)(\frac{\theta}{n}(2x_1 - 1) + 14 - \theta).$
Omdat $x_2 \geq 0$, $\rho(x_1) \geq 72 - 11\theta + \theta(12 - \theta)(\frac{x_1}{n})$ en $n + 2 - 2x_2 \leq \frac{3}{2}n$ (immers, $n \geq 4$), volgt dat

$$\begin{aligned}\delta(1, 1) &\geq -24\theta n + 2\theta n(72 - 11\theta + \theta(12 - \theta)\frac{x_1}{n}) - \frac{3}{2}\theta^2 n(2\theta\frac{x_1}{n} + 14 - \theta) \\ &= \theta n(120 - 43\theta + \frac{3}{2}\theta^2) + \theta^2 x_1(24 - 5\theta) \geq 0.\end{aligned}$$

Dus $\beta(x_0 + 1, x_1 - 1, x_2 - 1) \geq \beta(\mathbf{x}) > 0$.
$\rho(x)$ heeft een strikt positieve afgeleide en is dus een monotoom strikt stijgende functie.
Dus geldt $\alpha_2(x_0 + 1, x_1 - 1, x_2 - 1) \leq \alpha_2(\mathbf{x})$, dit bewijst **(ii)**.

Beweringen $(iii) - (v)$ worden op eenzelfde manier bewezen en zullen we niet bewijzen.

(vi). De ongelijkheid van (vi) is gelijk aan

$$\frac{\theta^3}{n^2}x_1^4 - (2\theta^3 - 12\theta^2)\frac{x_1^3}{n} + (\theta^3 - 22\theta^2 + 72\theta)x_1^2 - (2\theta^2 - 50\theta + 184)nx_1 - (\theta - 278 + \frac{784}{\theta})n^2 \geq 0.$$

Deze uitdrukking is gelijk aan

$$\theta(x_1 - \frac{n}{2})^2(\frac{\theta^2}{n^2}x_1^2 + (14 - 2\theta)\theta\frac{x_1}{n} + \theta^2 - 26\theta + 99),$$

en deze is niet-negetief voor alle $x_1 \geq 0$.

$\square$

Bewijs van de stelling (3.4.2)
Door de vier ongelijkheden uit 3.4.5 te vermenigvuldigen met $\gamma_1(\mathbf{x}), \ldots, \gamma_4(\mathbf{x})$ respectievelijk en bij elkaar op te tellen, leiden we af dat voor alle $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned}
& (2nx_2\gamma_1(\mathbf{x}) + n(n - x_1 - 2x_2)\gamma_2(\mathbf{x}) \\
& +5n(3x_0 + 2x_1 + x_2 - 2n)\gamma_3(\mathbf{x}) + n\gamma_4(\mathbf{x}))M(\mathbf{x}) \\
\leq \; & (x_1 + 1)(x_1 + 2)\gamma_1(\mathbf{x})N(x_0 - 1, x_1 + 2, x_2 - 1) \\
+ \; & (x_1 + 1)(x_2 + 1)\gamma_2(\mathbf{x})N(x_0 - 1, x_1 + 1, x_2 + 1) \\
+ \; & (x_1 + 1)(n - x_0 - x_1 - x_2)\gamma_2(\mathbf{x})N(x_0 - 1, x_1 + 1, x_2) \\
+ \; & \frac{5}{6}(x_2 + 1)(x_2 + 2)\gamma_3(\mathbf{x})N(x_0 - 1, x_1, x_2 + 2) \\
+ \; & (x_2 + 1)(n - x_0 - x_1 - x_2)\gamma_3(\mathbf{x})N(x_0 - 1, x_1, x_2 + 1) \\
+ \; & x_0\gamma_4(\mathbf{x})N(x_0, x_1, x_2).
\end{aligned}$$

De uitdrukking aan de linkerkant van het $\leq$ teken is gelijk aan $M(\mathbf{x})$. Sommerend over $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$, geeft ons dat

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{T}} M(\mathbf{x}) \leq \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{T}} N(\mathbf{x})(Z_1(\mathbf{x}) + \ldots + Z_6(\mathbf{x})),$$

waarbij volgens 3.4.6:

$$\begin{aligned}
Z_1(\mathbf{x}) &= x_1(x_1 - 1)\gamma_1(x_0 + 1, x_1 - 2, x_2 + 1) \leq x_1^2\gamma_1(\mathbf{x}) \\
Z_2(\mathbf{x}) &= x_1x_2\gamma_2(x_0 + 1, x_1 - 1, x_2 - 1) \leq x_1x_2\gamma_2(\mathbf{x}) \\
Z_3(\mathbf{x}) &= x_1(n - x_0 - x_1 - x_2)\gamma_2(x_0 + 1, x_1 - 1, x_2) \\
&\leq x_1(n - x_0 - x_1 - x_2)\gamma_2(\mathbf{x}) \\
Z_4(\mathbf{x}) &= \frac{5}{6}x_2(x_2 - 1)\gamma_3(x_0 + 1, x_1, x_2 - 2) \leq \frac{5}{6}x_2^2\gamma_3(\mathbf{x}) \\
Z_5(\mathbf{x}) &= x_2(n - x_0 - x_1 - x_2)\gamma_3(x_0 + 1, x_1, x_2 - 1) \\
&\leq x_2(n - x_0 - x_1 - x_2)\gamma_3(\mathbf{x}) \\
Z_6(\mathbf{x}) &= x_0\gamma_4(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Vanwege 3.4.6 **(vi)** volgt dat $Z_1(x) + \ldots + Z_6(x) \leq \theta^{-1}$, en dus

$$\sum_{x\in\mathcal{T}} M(x) \leq \sum_{x\in\mathcal{T}} N(x)\theta^{-1},$$

waarmee de stelling bewezen is. □

Bovenstaande stelling heeft dus aangetoond dat $\frac{P(n)}{P(n-1)} \geq \frac{685}{252}(= 2.7182539)$. Je zou dan verwachten dat e ook een ondergrens is, en inderdaad:

Stelling 3.4.8. (Dong 2000) *[4] Zij G een graaf met n knopen. Dan geldt*

$$\frac{P_G(n)}{P_G(n-1)} > e.$$

Stelling 3.4.9. (Lazebnik 1990) *[6] Zij G een graaf van orde n en grootte m. Dan geldt:*

$$P_G(k) \leq \frac{(k-1)k^n}{k-1+m}.$$

Zij ψ een afbeelding op de verzameling van grafen waarvoor het volgende geldt:
$\psi(G) = \psi(G-e) - \psi(G/e)$
$\psi(G) \geq 0$ voor alle grafen G.
Als G en H isomorf zijn geldt $\psi(G) = \psi(H)$.
$\psi(L_0) \leq \psi(L_1)$.

Stelling 3.4.10. (Dohmen 1996) *[3] Zij G een graaf die tenminste één kant heeft. Dan geldt:*

$$\psi(G) \leq \min_{\substack{0 \leq q \leq g(G) \\ q \text{ even}}} \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{e(G)}{k} \psi(L_{v(G)-k}) - \binom{e(G)-1}{q} \psi(L_{v(G)-q-1})$$

$$\psi(G) \geq \min_{\substack{1 \leq q \leq g(G) \\ q \text{ oneven}}} \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{e(G)}{k} \psi(L_{v(G)-k}) + \binom{e(G)-1}{q} \psi(L_{v(G)-q-1}).$$

Bewijs. Als G maar een kant heeft, zeg e, dan is $G-e$ respectievelijk G/e isomorf aan $L_{e(G)}$ respectievelijk $L_{e(G)-1}$.

Merk op dat als de omtrek van een graaf G groter is dan 3 er geen driehoeken voorkomen in de graaf. Mede daarom beschouwen we vier verschillende gevallen: $q = 0, q = 1$, $q = 2$ en $q \geq 3$. In de eerste drie gevallen gebruiken we inductie naar het aantal kanten.

Stel $q = 0$. Stel G is een graaf met twee kanten en stel dat de inductiehypothese waar is voor grafen met minder kanten. Zij e een kant van G. Sinds ψ nergens negatief is, krijgen we $\psi(G) = \psi(G-e) - \psi(G/e) \leq \psi(G-e)$. De inductiehypothese toepassend op $G-e$ geeft ons dat $\psi(G-e) \leq \psi(L_{v(G)}) - \psi(L_{v(G)-1})$.

Stel $q = 1$. Zij G opnieuw een graaf met meer dan een kant en neem aan dat de inductiehypothese waar is voor grafen met minder kanten wanneer $q = 1$. De inductiehypothese toepassend op $G-e$ en G/e verkrijgen we dat

$$\psi(G-e) \geq \psi(L_{e(G)}) - (e(G)-1)\psi(L_{e(G)-1}) + (e(G)-2)\psi(L_{e(G)-2})$$

en $\psi(G/e) \leq \psi(L_{e(G)-1}) - \psi(L_{e(G)-2})$. Deze twee van elkaar aftrekkend geeft ons dat

$$\begin{aligned}
\psi(G) &= \psi(G-e) - \psi(G/e) \\
&= \psi(L_{e(G)}) - (e(G)-1+1)\psi(L_{e(G)-1}) + (e(G)-2+1)\psi(L_{e(G)-2}) \\
&= \psi(L_{e(G)}) - e(G)\psi(L_{e(G)-1}) + (e(G)-1)\psi(L_{e(G)-2}).
\end{aligned}$$

Stel $q = 2$. Stel G heeft tenminste twee kanten en laat de inductiehypothese waar zijn voor grafen met minder kanten.
Dan krijgen we

$$\psi(G-e) \leq \psi(L_{v(G)}) - (e(G)-1)\psi(L_{v(G)-1}) + \binom{e(G)-1}{2}\psi(L_{v(G)-2}) - \binom{e(G)-2}{2}\psi(L_{v(G)-3}). (1)$$

en

$$\psi(G/e) \geq \psi(L_{v(G)-1}) - (e(G)-1-\delta)\psi(L_{v(G)-2}) + (e(G)-2-\delta)\psi(L_{v(G)-3}).$$

waarbij δ het aantal driehoeken van G is waar e in voorkomt. Het is duidelijk dat $e(G) \geq 2$ inhoudt dat $v(G) \geq 3$.
Wanneer $v(G) = 3$, leiden we af dat $\psi(L_{v(G)-2}) \geq \psi(L_{v(G)-3})$ vanuit de aanname $\psi(L_1) \geq \psi(L_0)$. Als $v(G) > 3$ dan voegen we een nieuwe kant f toen aan $L_{v(G)-2}$ en concluderen we dat
$\psi(L_{v(G)-2}) \geq \psi((L_{v(G)-2} + f)/f) = \psi(L_{v(G)-3})$.
Samen met (2) krijgen we nu dat
$\psi(G/e) \geq \psi(L_{v(G)-1}) - (e(G)-1)\psi(L_{v(G)-2}) + (e(G)-2)\psi(L_{v(G)-3})$.
In combinatie met de inductiehypothese geeft dit de gewenste ongelijkheid:

$$\begin{aligned}
\psi(G) &= \psi(G-e) - \psi(G/e) \\
&\leq \psi(L_{v(G)}) - (e(G)-1)\psi(L_{v(G)-1}) + \binom{e(G)-1}{2}\psi(L_{v(G)-2}) \\
&- \binom{e(G)-2}{2}\psi(L_{v(G)-3})) \\
&- \psi(L_{v(G)-1}) + (e(G)-1)\psi(L_{v(G)-2}) - (e(G)-2)\psi(L_{v(G)-3}) \\
&\leq \psi(L_{v(G)}) - (e(G)\psi(L_{v(G)-1}) + \binom{e(G)}{2}\psi(L_{v(G)-2}) - \binom{e(G)-1}{2}\psi(L_{v(G)-3}).
\end{aligned}$$

Stel $q \geq 3$. In dit geval gebruiken we inductie naar $q + e(G)$. Bij de opmerking in het begin van het bewijs mogen we aannemen dat $e(G) \geq 2$.
Sinds $q \geq 3$, heeft G geen driehoeken. Dus geldt dat $e(G/e) = e(G) - 1$

voor iedere kant e van G. Voor gegeven q, is de inductiehypothese gelijk aan

$$\begin{aligned}
\psi(G-e) &\leq \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{e(G)-1}{k}\psi(L_{v(G)-k}) - \binom{e(G)-2}{q}\psi(L_{v(G)-q-1}) \\
\psi(G/e) &\geq -\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\binom{e(G)-1}{k-1}\psi(L_{v(G)-k}) + \binom{e(G)-2}{q-1}\psi(L_{v(G)-q-1})
\end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor oneven q. De laatste twee ongelijkheden combinerend verkrijgen we de stelling. □

Gevolg 3.4.11. *Stel dat G tenminste één kant heeft. Dan geldt*

$$P_G(k) \geq k^{v(G)} - e(G)k^{v(G)-1} + (e(G)-1)k^{(v(G)-2)}$$

en

$$P_G(k) \leq k^{v(G)} - e(G)k^{v(G)-1} + \binom{e(G)}{2}k^{v(G)-2} - \binom{e(G)-1}{2}k^{v(G)-3}$$

Hoofdstuk 4

Samenvatting

We hebben in deze scriptie een aantal eigenschappen van chromatische polynomen opgesomd. Deze eigenschappen kunnen gebruikt worden om uit te sluiten dat een gegeven polynoom chromatisch is.

Zij G een samenhangende graaf met n knopen en m kanten. Dan heeft het chromatische polynoom $P_G(k)$ van G de volgende eigenschappen.:

$$P_G(k) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} a_i(G) k^i,$$

waarbij

- Eenvoudige eigenschappen:
  - $a_1(G)$ het aantal kanten is. 2.2.21
  - $P_G(1) = 0$. 2.2.14
  - Het aantal componenten van G de kleinste i is zodat $a_i(G) \neq 0$. 2.2.25
- De $a_i(G)$ zijn zowel van boven als onder begrensd:
  - $a_j(G) \leq \binom{a_1(G)}{j}$, voor alle $0 \leq j \leq n$. 2.2.22
  - $a_j(G) \geq \binom{n-1}{j-1}$, voor alle $1 \leq j \leq n-1$. 2.2.23
  - De $a_i(G)$ worden aan de onderkant begrensd door de coëfficiënten van $(k)_q(k-1)^{n-q-1}(k-r)$, waarbij $2 \leq q \leq n-1$ en $1 \leq r \leq q-1$ zodat $m = \binom{q-1}{2} + n + r - 2$. 3.2
- En bovendien:
  - $a_i(G)$ deelbaar is door $\phi(\chi(G)-1, i)$, voor elke $i = 1, 2, \ldots, \chi(G) - 1$. 3.2.6
  - $a_{j-1}(G)a_{j+1}(G) < a_j(G)^2$ als $n < 12$. 3.2.2

- Wat betreft de nulpunten:
  - $P_G(k)$ heeft geen nulpunten in het interval $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. 2.2.32
  - $P_G(k)$ heeft geen nulpunten in het interval $(1, 32/27]$. 3.3.4
- En de waarden die $P_G(k)$ en $P'_G(k)$ aan kunnen nemen:
  - $P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}$ voor alle gehele getallen $k \geq 1$. 3.4.1
  - $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ dan en slechts dan als G een boom is. 2.2.26
  - $\frac{P_G(n)}{P_G(n-1)} > e$. 3.4.8
  - $P_G(k) \leq \frac{(k-1)k^n}{k-1+m}$. 3.4.9
  - $(-1)^n P'_G(1) \geq 0$. 3.3.1
  - $P_G(k) \geq k^{v(G)} - e(G)k^{v(G)-1} + (e(G)-1)k^{(v(G)-2)}$. 3.4.10
  - $P_G(k) \leq k^{v(G)} - e(G)k^{v(G)-1} + \binom{e(G)}{2}k^{v(G)-2} - \binom{e(G)-1}{2}k^{v(G)-3}$. 3.4.10

Appendices

Appendix1

Herinnner dat

$$\rho(x) = \theta^2 \frac{x^2}{n^2} + \theta(12-\theta)\frac{x}{n} + 72 - 11\theta.$$

en

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x) &= 12\theta^2 - 110\theta + 424 \\
\alpha_2(x) &= 12\theta^2 - 110\theta + 424 + \theta\rho(x_1) + 2\theta^2\frac{x_2}{n} \\
\alpha_3(x) &= 24\theta \\
\alpha_4(x) &= 360n + 24\theta x_2 + \theta x_1\rho(x_1) + 2\theta^2\frac{x_1x_2}{n} + (12\theta^2 - 110\theta + 424)x_1 \\
\beta(\mathbf{x}) &= 2nx_2\alpha_1(\mathbf{x}) + n(n - x_1 - 2x_2)\alpha_2(\mathbf{x}) + 5n(3x_0 + 2x_1 + x_2 - 2n)\alpha_3(\mathbf{x}) + n\alpha_4(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Lemma .0.12.

$$\begin{aligned}
\beta(x_0+1, x_1-e_1, x_2-e_2) - \beta(x) &= 24\theta n(15 - 10e_1 - 6e_2) + 2\theta ne_2\rho(x_1) + 4\theta^2 e_2x_2 \\
&\quad -\theta^2(n + 2e_2 - 2x_2)(\frac{\theta}{n}(2x_1e_1 - e_1^2) + (12-\theta)e_1 + 2e_2)\ (a).
\end{aligned}$$

Bewijs. Het aantonen van bovenstaande gelijkheid komt neer op goed boekhouden. Aan de linkerkant van de vergelijking kunnen termen tegen elkaar worden weggestreept, maar deze kunnen ook tegen termen aan de rechterkant worden weggestreept. Zo blijft er een steeds 'kleinere' gelijkheid over om te bewijzen. In onderstaand bewijs dat we geven wordt niet iedere stap bijgehouden, dat zou te veel werk vergen. Er is gekozen om aan te geven welke termen tegen elkaar weggestreept kunnen worden, zodat duidelijk wordt hoe je op de gelijkheid uit kan komen.

Zij $x = (x_0, x_1, x_2)$, $x' = (x_0+1, x_1-e_1, x_2-e_2)$.

Bekijk $\delta(e_1, e_2) = \beta(x_0+1, x_1-e_1, x_2-e_2) - \beta(x)$. Merk op dat de eerste term van $n\alpha_4(x)$ wegvalt omdat deze niet van x afhangt.

Merk op: $\alpha_1(x') = \alpha_1(x)$, en dus

$$2n(x_2-e_2)\alpha_1(x') - 2nx_2\alpha_1(x) = 2n(x_2-e_2)\alpha_1(x) - 2nx_2\alpha_1(x) = -2ne_2\alpha_1(x).$$

We zoeken eerst welke coëfficiënt er hoort bij $12t^2 - 110t + 424$ in $\delta(e_1, e_2)$. Vanuit $\alpha_1(x)$ komt er een term $-2ne_2$ bij. Vanuit $\alpha_2(x)$ komt er een term $n(e_1 + 2e_2)$ bij. Vanuit $\alpha_4(x)$ komt er een term $-ne_1$ bij. Dit levert $-2ne_2 + n(e_1 + 2e_2) - ne_1$ op. Dus $12t^2 - 110t + 424$ valt weg uit de $\delta(e_1, e_2)$.

Merk op dat

$$\begin{aligned}
& n(n-x_1+e_1-2x_2+2e_2)\theta\rho(x_1-e_1)-n(n-x_1-2x_1)\theta\rho(x_1) \\
& +n\theta(x_1-e_1)\rho(x_1-e_1)-n\theta x_1\rho(x_1) \\
= \; & n\theta(n-x_1-2x_2)(\rho(x_1-e_1)-\rho(x_1))+n\theta(e_1+2e_2)(\rho(x_1-e_1)) \\
& +nx_1\theta\{\rho(x_1-e_1)-\rho(x_1)\}-n\theta e_1\{\rho(x_1-e_1)\} \\
= \; & n\theta(n-2x_2+2e_2)\{\rho(x_1-e_1)-\rho(x_1)\}+2n\theta e_2\rho(x_1) \\
= \; & n\theta(n-2x_2+2e_2)\{\frac{\theta^2}{n^2}(-2xe_1+e_1^2)-\theta(12-\theta)\frac{e_1}{n}\}+n\theta 2e_2\rho(x_1) \\
= \; & -\theta^2(n-2x_2+2e_2)\{\frac{\theta}{n}(-e_1^2+2xe_1)+(12-\theta)e_1\}+n\theta 2e_2\rho(x_1).
\end{aligned}$$

Merk ook op $\alpha_3(x')=\alpha_3(x)$, en dus:

$$\begin{aligned}
5n(3x_0+3+2x_1-2e_1+x_2-e_2-2n)\alpha_3(x')-5n(3x_0+2x_1+x_2-2n)\alpha_3(x) &= \\
5n\{(3x_0+3+2x_1-2e_1+x_2-e_2-2n)-(3x_0+2x_1+x_2-2n)\}\alpha_3(x) &= \\
5n\{(3-2e_1-e_2)\alpha_3(x) &= \\
24\theta n\{(15-10e_1-5e_2)\}
\end{aligned}$$

Dit leidt ertoe dat we nog alleen moeten laten zien dat de linkerkant van vergelijking (a) na wegstrepen en samenvoegen

$$\begin{aligned}
2\theta^2\{\frac{(x_2-e_2)}{n}n(n-x_1-2x_2+e_1+2e_2)-\frac{x_2}{n}n(n-x_1-2x_2)\} \\
-24n\theta(e_2)+2\theta^2 n\{\frac{(x_1-e_1)(x_2-e_2)}{n}-\frac{x_1x_2}{n}\}(\mathbf{1})
\end{aligned}$$

gelijk is aan de rechterkant van vergelijking (a) na wegstrepen en samenvoegen

$$-24\theta ne_2+4\theta^2e_2x_2-\theta^2(n+2e_2-2x_2)(2e_2).(\mathbf{2})$$

$$\begin{aligned}
2\theta^2(e_1+2e_2)x_2-2\theta^2(e_2)(n-x_1-2x_2+e_1+2e_2)+2\theta^2[-x_2e_1-x_1e_2+e_1e_2]-24n\theta(e_2) &= \\
2\theta^2(2e_2)x_2-2\theta^2(e_2)(n-2x_2+2e_2)-24n\theta(e_2) &= \\
-24\theta ne_2+4\theta^2e_2x_2-\theta^2(n+2e_2-2x_2)(2e_2) &.
\end{aligned}$$

Waaruit de gelijkheid volgt.

$\square$

Bibliografie

[1] F.M. Dong K.M. Koh K.L. Teo *Chromatic Polynomials and the Chromaticity of Graphs* 37-41 World Scientific Publishing, 2005.

[2] George D. Birkhoff. A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *The Annals of Mathematics*, 14(1/4):pp. 42–46, 1912.

[3] K Dohmen. On graph invariants satisfying the deletion-contraction formula. *Journal of Graph Theory*, 21(3):311–316, 1996.

[4] F.M. Dong. Proof of a chromatic polynomial conjecture. *Journal of combinatorial theory*, 78(1):35–44, 1 2000.

[5] F.M. Dong. Divisibility of certain coefficients of the chromatic polynomial. *Discrete Mathematics*, (275):311–317, 2004.

[6] F.Lazbenik. New upper bounds for the greatest number of proper colorings of a (v,e)-graph. *J. Graph Theory*, 14:25–29, 1990.

[7] B. Jackson. A zero-free interval for chromatic polynomials of graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 2:325–336, 1993.

[8] R.C. Read. An introduction to chromatic polynomials. *Journal of combinatorial theory*, (4):1968, 52-71.

[9] S.C.Hoggar. Chromatic polynomials and logarithmic concavity. *Journal of combinatorial theory*, (16):248–254, 1974.

[10] Paul Seymour. Two chromatic polynomial conjectures. *Journal of combinatorial theory*, (70):184–196, 1997.

[11] D Sokal. Bounds on the complex zeros of (di) chromatic polynomials and potts-model partition functions. *Combinatorics,Probability and Computing*, (10):41–66, 2001.

[12] K. Thulasiraman and M. N. S. Swamy. *Graphs: Theory and Algorithms.* ohn Wiley & Sons, 1992.

[13] H. Whitney. A logical expansion in mathematics. *Bull.Amer.Math*, 38:572–579, 1932.

[14] H.S. Wilf. Which polynomials are chromatic. *Proc. Colloq. Combinatorial theory*, 1973.