

RADBOD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

Ontwikkelingen in de Ramsey theorie

BACHELORSCHRIJFTE WISKUNDE

Auteur:
Ricky VAN HEES

Begeleider:
dr. Sep THIJSEN

Tweede lezer:
dr. Wieb BOSMA

19 juni 2024

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
2	Voorkennis	5
3	Ramsey-getallen	8
4	Aanscherpingen van bovengrenzen	13
5	Aanscherpingen van ondergrenzen	20
6	Generalisatie Ramsey theorie	24
7	Discussie en open problemen	30
	Referenties	32

Dankwoord

Ik wil graag mijn scriptiebegeleider Sep Thijssen bedanken voor zijn begeleiding het afgelopen half jaar. Hij heeft me geholpen met bewijzen en verwoordingen wanneer ik er alleen niet uit kwam. Ik heb onze gesprekken, die soms uren konden duren, en de begeleiding als fijn en prettig ervaren.

Daarnaast wil ik Anne Fey bedanken voor het samen met mij sparren over een aantal bewijzen. En wil ik mijn moeder bedanken voor het geven van feedback en steun.

Samenvatting

Ramsey theorie houdt zich bezig met het zoeken van orde in chaos. Het wordt in de wiskunde dan ook vaak beschreven als de studie van orde dat ontstaat in een groot genoeg structuur. Dit kunnen structuren zijn die beschreven worden door een rij gehele getallen of grafen. Deze scriptie is een literatuur onderzoek naar een aantal resultaten en ontwikkelingen in de Ramsey-getallen die zich bevinden in de structuur van grafen. In het bijzonder focust deze scriptie zich op de asymptotische boven- en ondergrenzen van deze getallen. Verder gaan we nog in op de uitbreiding van de Ramsey-getallen als we meerdere kleuren en hypergrafen toestaan.

1 Inleiding

Bedenk dat je op een heldere nacht naar de hemel staart en de structuren tussen de sterren observeert. Stel nou dat we zijn geïnteresseerd in een sterrenstelsel van 10 sterren die de vorm van een cup hebben. Kunnen we deze vinden als we 100 sterren beschouwen, of moeten het er 1000 zijn of oneindig veel sterren zijn?

Ramsey theorie houdt zich bezig met het zoeken van orde in chaos, zoals in de sterrenhemel. Het wordt in de wiskunde dan ook vaak beschreven als de studie van orde dat ontstaat in een groot genoeg structuur. Dit kunnen structuren zijn die beschreven worden door een rij gehele getallen of grafen. In deze scriptie focussen we ons vooral op de structuur van grafen. Paul Erdős was de eerste die deze Ramsey-getallen koppelde aan grafen. Erdős introduceerde dit onderwerp vaak met een mooi voorbeeld. Het voorbeeld dat Erdős gebruikte heet het zogenoemde “Party problem”. Bedenk dat je een feest wil geven, zodat drie mensen kan vinden die elkaar allemaal niet kennen, of een groep van drie mensen kan vinden die elkaar allemaal wel kennen. Hoe groot moet de groep uitgenodigde minimaal zijn, zodat je de net genoemde eigenschap kan garanderen? Het antwoord hierop is zes. Dit is meteen een goed voorbeeld hoe het Ramsey-getal omschreven kan worden. Er geldt namelijk dat $R(3, 3) = 6$.

De exacte waarde van deze Ramsey-getallen bepalen is enorm lastig. Er zijn maar weinig niet triviale waardes bekend. Erdős benadrukt dit met de volgende uitspraak: “Bedenk even dat de aarde aangevallen wordt door een alien invasie. Deze aliens dreigen de aarde te vernietigen als we niet een binnen een jaar het Ramsey-getal van rood vijf of blauw vijf weten te vinden. Dan moeten we de meest geniale wetenschappers en de meest snelle computers ter wereld op dit probleem zetten en dan kunnen we waarschijnlijk de exacte waarde berekenen. Maar als deze aliens ons vragen om het Ramsey-getal van rood zes of blauw zes te berekenen, dan kunnen we ons beter voorbereiden om de aanval in te gaan.”

Hoewel Erdős veel invloed heeft gehad in de Ramsey theorie is het vernoemd naar een stelling die Frank P. Ramsey in 1930 publiceerde. Sindsdien is de studie naar deze Ramsey-getallen in ontwikkeling, waarbij er in 2023 een nieuwe doorbraak kwam. Het artikel dat toen gepubliceerd werd, is de aanleiding van mijn scriptie geweest. Deze scriptie is een literatuur onderzoek naar een aantal resultaten en ontwikkelingen in de Ramsey-getallen. In het bijzonder focust deze scriptie zich op de asymptotische boven- en ondergrenzen van deze getallen. In deze scriptie lees je in Hoofdstuk 3 een introductie in deze getallen. Verder beschrijven en bewijzen we verschillende boven- en ondergrenzen van deze getallen in respectievelijk Hoofdstuk 4 en 5. Vervolgens kijken we in Hoofdstuk 6 naar de uitbreiding van de Ramsey-getallen als we meerdere kleuren en hypergrafen ook toe staan. We sluiten af met een discussie, zie Hoofdstuk 7, waarin we kort ingaan op open problemen en Ramsey-theoretische resultaten.

2 Voorkennis

Voordat we Ramsey-getallen kunnen gaan definiëren hebben we wat voorkennis nodig over grafentheorie. Daarnaast beschrijft dit hoofdstuk een aantal definities en resultaten die we later gaan gebruiken. Deze definities en resultaten komen onder andere uit het boek “Combinatorics: A guided tour” [12].

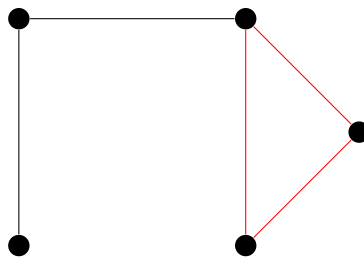
Notatie 2.1. Zij $G = (V, E)$ een graaf. Dan noemen we een $v \in V$ een *punt* en $e \in E$ een *lijn*.

Als we spreken over grafen hebben we het over enkelvoudige, ongerichte grafen. Dat betekent dat er geen dubbele lijnen tussen twee punten zitten en punten niet met zichzelf verbonden zijn. Verder houdt dit in dat paren punten ongeordend zijn en de lijnen daarmee dus geen richting hebben.

Definitie 2.2. Zij $G = (V, E)$ een graaf. Dan heet G *volledig* als elk paar punten uit V verbonden is met een lijn.

Notatie 2.3. Een volledige graaf op n punten noteren we met K_n .

Definitie 2.4. Zij $G = (V, E)$ een graaf. Een *kliek* is een deelverzameling punten $U \subseteq V$ zodat elke punt uit U verbonden is met alle andere punten in U . Merk op dat de deelgraaf geïnduceerd door U een volledige graaf is.



Figuur 1: In het rood zie je een kliek op 3 punten; een rode K_3 .

In een gegeven graaf kunnen meerdere klieken van verschillende groottes gevonden worden. We zijn vaak geïnteresseerd in klieken van een bepaalde grootte, bijvoorbeeld in een kliek op 3 punten, zoals in Figuur 1. We zeggen dan, in het geval van ons voorbeeld, dat de originele graaf een K_3 bevat. Merk op dat een verzameling met één punt en de lege verzameling ook al een kliek is. Deze zullen we echter niet vaak bekijken, omdat deze niet veel interessante eigenschappen hebben in de context tot Ramsey theorie.

Definitie 2.5. Zij $G = (V, E)$ een graaf en bekijk een punt $v \in V$. Dan noemen we een punt $w \in V$ een *buur* van v als w en v met elkaar verbonden zijn, dus als $\{v, w\} \in E$.

Definitie 2.6. Zij $G = (V, E)$ een graaf en bekijk een punt $v \in V$. Dan is *de graad* van punt v het aantal buren dat v heeft.

Notatie 2.7. We noteren de graad van een punt v als $\deg(v)$, dus $\deg(v) = |\{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}|$

Definitie 2.8. Neem $G = (V, E)$ een graaf. Dan noemen we $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ het *complement* van G als geldt dat $\bar{V} = V(G)$ en $\bar{E} = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \neq v_2 \in V(G)\} \setminus E(G)$.

Stelling 2.9. *Neem G een graaf op n punten. Als n oneven is, is er minimaal één punt v met een even graad.*

Bewijs. Merk op dat geldt dat $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$. Neem aan dat het niet waar is. Dus alle punten hebben een oneven graad. Dan is de $\sum_{v \in V} \deg(v)$ ook oneven omdat we een oneven aantal punten hebben. Maar $2|E|$ is altijd even. Dus hebben we een tegenspraak en dus moet er een punt zijn met een even graad. $\square$

Later gaan we kijken naar asymptotische grenzen van Ramsey-getallen. Daarvoor zijn de volgende definities handig. Deze komen uit het boek “A course in mathematic analysis, volume 1” [9].

Definitie 2.10. Neem $f(x)$ en $g(x)$ positieve reële functies. Dan zeggen we dat $f(x)$ is *grote O van $g(x)$* , schrijf $f(x) = O(g(x))$, als er een $N \in \mathbb{R}$ en $M \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zodat $f(x) \leq Mg(x)$ voor alle $x \geq N$.

Definitie 2.11. Neem $f(x)$ en $g(x)$ positieve reële functies. Dan zeggen we dat $f(x)$ is *kleine o van $g(x)$* , schrijf $f(x) = o(g(x))$, als $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Merk op: als geldt dat $f(x) = o(g(x))$, dan geldt ook dat $f(x) = O(g(x))$. Echter, andersom geldt dit in het algemeen niet. Hiermee zeggen we dus dat kleine o een sterkere eigenschap is dan grote O .

Definitie 2.12. Neem $f(x)$ en $g(x)$ positieve reële functies. Dan zeggen we dat $f(x)$ is *asymptotische equivalent aan $g(x)$* , schrijf $f(x) \sim g(x)$, als $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Merk op: Als geldt dat $f(x) \sim g(x)$, dan geldt dat $f(x) = O(g(x))$ en dat $g(x) = O(f(x))$.

Wanneer we kijken naar asymptotisch gedrag van de boven- en ondergrens, kunnen we spreken over bepaalde aanscherpingen. Deze vinden we door te kijken naar de complexiteit van bepaalde functies. Een goede tabel voor de orde van deze verbeteringen vind je op de Wikipediapagina van Big O notation onder het kopje “Orders of common functions” [21]. Ik benoem hieronder de benamingen die we later zullen gaan gebruiken.

Definitie 2.13. Neem f en g functies. We spreken van *polynomiale* orde als $\frac{f}{g} \sim x^c$ voor $c > 0$.

Definitie 2.14. Neem f en g functies. We spreken van *superpolynomiale* orde als $\frac{f}{g} \sim h$ waarbij h een functie is die harder groeit dan elke polynomiale functie, maar langzamer dan elke exponentiële functie.

Definitie 2.15. Neem f en g functies. We spreken van *exponentiële* orde als $\frac{f}{g} \sim c^x$ voor $c > 1$.

Voor het bepalen van de asymptotische grenzen in Hoofdstuk 4 en 5 gaan we de Formule van Stirling nodig hebben.

Stelling 2.16 (Formule van Stirling). *Er geldt dat $k! \sim \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$.*

De Formule van Stirling zullen wij hier niet bewijzen. Een bewijs wordt onder andere gegeven door William Feller [8].

3 Ramsey-getallen

Nu we de voorkennis gehad hebben, kunnen we gaan kijken naar de definitie en een aantal basisresultaten van het Ramsey-getal. Ook bekijken we in dit hoofdstuk naar een aantal voorbeelden van het Ramsey-getal. De meeste definities en resultaten in dit hoofdstuk staan beschreven in het boek “Combinatorics: A guided tour” [12].

Definitie 3.1. Neem $k, l > 0$ geheel. Dan is het *Ramsey-getal* de kleinste $n \in \mathbb{N}$ zodat elke willekeurige 2-kleuring, zeg met rood en blauw, op de lijnen van K_n een rode klik op k punten of een blauwe klik op l punten bevat.

Notatie 3.2. Neem $k, l > 0$ geheel. Dan noteren we het Ramsey-getal als $R(k, l)$.

Merk op dat het niet meteen duidelijk is dat deze n , en dus het Ramsey-getal, ook bestaat. Om dit te garanderen volstaat het om te laten zien dat $R(k, l)$ van boven begrensd is. Later geven we een aantal bovengrenzen van de Ramsey-getallen waarvan de eerste een resultaat is van Paul Erdős en George Szekeres, zie Stelling 4.1, die daarmee ook het bestaan van de Ramsey-getallen garandeert.

Definitie 3.3. Neem $k > 0$ geheel. Dan noemen we $R(k, k)$ een *diagonaal Ramsey-getal*.

Notatie 3.4. Neem $k > 0$ geheel. Dan noteren we het diagonaal Ramsey-getal als $R(k)$.

Merk op dat vanwege de definitie van het Ramsey-getal geldt dat $R(k, l) = R(l, k)$. Daarnaast geldt dat $R(k, 1) = 1$. Dit geldt omdat een klik van grootte één bestaat uit een enkel punt en geen lijnen. Deze kan je dus altijd vinden als je graaf bestaat uit dit enkele punt.

Stelling 3.5. *Neem $k > 0$ geheel. Er geldt dat $R(2, k) = R(k, 2) = k$.*

Bewijs. Merk eerst op dat een rode K_2 een enkele lijn in een graaf is. De graaf K_{k-1} bestaande uit alleen blauwe lijnen bevat geen rode K_2 of blauwe K_k . Dus geldt er dat $k - 1 < R(2, k)$. Verder geldt er dat $R(2, k) \leq k$ omdat een willekeurige kleuring van K_k of alleen uit blauwe lijnen bestaat of minstens één rode lijn bevat. $\square$

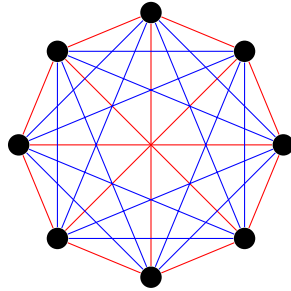
Van veel Ramsey-getallen is de exacte waarden onbekend. Wel is er vaak een boven- en ondergrens bekend. In Tabel 1 vind je alle bekende Ramsey-getallen en een aantal paar boven- en ondergrenzen waarvan de waarde niet exact bekend is [22].

$k \backslash l$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3		6	9	14	18	23	28	36
4			18	25	36 - 40	49 - 58	59 - 79	73 - 106
5				43 - 48	59 - 85	80 - 133	101 - 194	133 - 282

Tabel 1: Bekende Ramsey-getallen[12].

De meeste Ramsey-getallen zijn niet makkelijk handmatig te bepalen. We gaan nu een voorbeeld bekijken waarbij dit wel het geval is.

Stelling 3.6. *Er geldt dat $R(3, 4) = 9$.*



Figuur 2: Voorbeeld van een K_8 die geen rode K_3 of blauwe K_4 bevat.

Bewijs. We gaan dit bewijzen door het geven van een onder- en bovengrens die aan elkaar gelijk zijn.

Ondergrens: Hiervoor geven we een kleuring van K_8 die geen rode K_3 of blauwe K_4 bevat, zie Figuur 2. Het is snel zichtbaar dat er in dit voorbeeld geen rode K_3 of blauwe K_4 te vinden is. Er geldt dan per definitie dat $8 < R(3, 4)$.

Bovengrens: We bekijken een willekeurige kleuring van K_9 en noemen deze graaf G . Beschouw alleen de deelgraaf, G' , bestaande uit alle punten, maar enkel alle rode lijnen. Omdat deze rode deelgraaf uit 9 punten bestaat moet er vanwege Stelling 2.9 een punt zijn met een even graad, noem dit punt v_1 . Beschouw weer onze oorspronkelijke graaf G . We maken een onderscheid in twee gevallen.

Geval 1: Er zijn minimaal drie rode lijnen verbonden aan punt v_1 . Omdat we weten dat punt v_1 een even graad heeft in G' , zijn dit minimaal vier rode lijnen. Deze vier rode lijnen zijn verbonden aan vier punten die wij punt v_2 tot en met v_5 noemen. Deze punten v_2 tot en met v_5 vormen samen een K_4 . Merk verder op dat geldt: $R(2, 4) = 4$. Stel onze K_4 bevat een blauwe K_4 dan bevat onze graaf G deze ook. Stel onze K_4 bevat een rode K_2 , dan vormt deze samen met ons punt v_1 een rode K_3 in de graaf G . Dus is dit geval geldt $R(3, 4) \leq 9$.

Geval 2: Er zijn maximaal 2 rode lijnen verbonden aan punt v_1 . Dit betekent dus dat er minimaal zes blauwe lijnen verbonden zijn met punt v_1 . Deze zes blauwe lijnen zijn verbonden aan zes punten die wij punt v_2 tot en met v_7 noemen. Deze punten vormen samen een K_6 . Merk verder op dat geldt: $R(3, 3) = 6$. (Deze mag je als bekend veronderstellen en halen uit tabel 1). Stel onze K_6 bevat een rode K_3 , dan bevat onze graaf G deze ook. Stel onze K_6 bevat een blauwe K_3 , dan vormt deze samen met ons punt v_1 een blauwe K_4 in de graaf G . Dus is dit geval geldt ook $R(3, 4) \leq 9$.

Dit geeft ons het volgende: $8 < R(3, 4) \leq 9$. En dus geldt dat $R(3, 4) = 9$. $\square$

We gaan nu een constructieve bovengrens geven voor de Ramsey-getallen.

Stelling 3.7. *Neem $k, l \geq 2$ geheel. Er geldt dat $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$.*

Bewijs. Neem $k, l \geq 2$, en schrijf $n = R(k-1, l) + R(k, l-1)$. Beschouw een willekeurige 2-kleuring van K_n en beschouw een punt v uit deze graaf. Neem nu n_r het aantal punten waarmee punt v verbonden is door een rode lijn en neem V_r de verzameling bestaande uit deze punten. Merk op dat $v \notin V_r$. Neem zo ook n_b het aantal punten waarmee punt v verbonden is door een blauwe lijn en neem V_b de set bestaande uit deze punten. Merk op dat geldt dat $n = n_r + n_b + 1$. We gaan nu een gevalonderscheid maken in twee gevallen.

Geval 1: Stel $n_r \geq R(k-1, l)$. Bekijk nu de deelgraaf geïnduceerd door alle punten uit V_r . Deze deelgraaf vormt een K_{n_r} . Vanwege onze aanname geldt een van de volgende dingen: Ofwel K_{n_r} heeft een blauwe K_l en dan heeft onze K_n deze ook. Ofwel hij heeft een rode K_{k-1} en dan vormt deze samen met ons punt v een rode K_k in de K_n . En geldt er dus $R(k, l) \leq n$.

Geval 2: Stel $n_r < R(k-1, l)$. Er moet nu dus gelden dat $n_b \geq R(k, l-1)$. Merk op dat dit geval vanaf hier analoog gaat aan geval 1. Bekijk nu de deelgraaf geïnduceerd door alle punten uit V_b . Deze deelgraaf vormt een K_{n_b} . Vanwege onze aanname geldt een van de volgende dingen: Ofwel K_{n_b} heeft een rode K_k en dan heeft onze K_n deze ook. Ofwel hij heeft een blauwe K_{l-1} en dan vormt deze samen met ons punt v een blauwe K_l in de K_n . En dus geldt ook in dit geval $R(l, k) \leq n$. $\square$

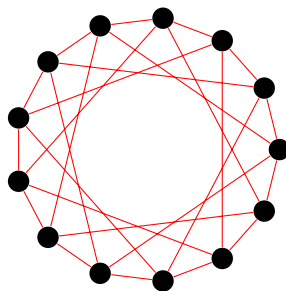
We kunnen de bovenstaande stelling aanscherpen als geldt dat $R(k-1, l)$ en $R(k, l-1)$ allebei even zijn. Dit zie je bijvoorbeeld terugkomen in het bewijs van Stelling 3.6.

Gevolg 3.8. *Neem $k, l > 2$ geheel. Als $R(k-1, l)$ en $R(k, l-1)$ allebei even zijn, dan geldt $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$.*

Bewijs. Stel $p = R(k-1, l)$ en $q = R(k, l-1)$ zijn even. Neem $n = p + q - 1$ en beschouw een willekeurige 2-kleuring van K_n . Bekijk nu de deelgraaf $G = (V, E)$ geïnduceerd door alle rode lijnen van K_n . Omdat n oneven is, weten we vanwege Stelling 2.9 dat er in onze graaf G een punt v is zodat deze een even graad d_i heeft. Bekijk weer onze willekeurige kleuring van K_n . Neem nu n_r het aantal punten verbonden met v door een rode lijn en neem V_r de verzameling van deze punten zonder v . Neem op dezelfde manier n_b het aantal punten verbonden aan v met een blauwe lijn en V_b de verzameling van deze punten zonder v . Merk op dat geldt $n_r = d_i$ en $n_b = n - 1 - d_i$ en dat deze allebei even zijn. We gaan twee gevallen bekijken: $n_r < p - 1$ en $n_r \geq p - 1$. Omdat $p - 1$ oneven is, kunnen we dit laatste geval aanscherpen naar $n_r \geq p$. Nu gaat dit bewijs analoog aan dat van Stelling 3.7. $\square$

De bovengenoemde stelling en gevolg zorgen ervoor dat het bewijs van bepaalde Ramsey-getallen vereenvoudigd wordt. We laten dit zien door middel van het bewijs van de volgende stelling.

Stelling 3.9. *Er geldt dat $R(3, 5) = 14$.*



Figuur 3: Voorbeeld van een K_{13} die geen rode K_3 of blauwe K_5 bevat. Merk op dat hier alleen de rode lijnen getekend zijn. De blauwe lijnen zijn de lijnen in het complement van deze graaf.

Bewijs. We gaan dit bewijzen door het geven van een onder- en bovengrens die aan elkaar gelijk zijn.

Ondergrens: Hiervoor geven we een tegenvoorbeeld, zie Figuur 3. Merk op dat in het voorbeeld alleen de rode lijnen getekend zijn. De blauwe lijnen zijn de lijnen in het complement van deze graaf. Het is aan de lezer om na te gaan dat er in dit voorbeeld inderdaad geen rode K_3 of blauwe K_5 te vinden is. Er geldt nu per definitie dat $13 < R(3, 5)$.

Bovengrens: Vanwege Stelling 3.7 geldt nu dat:

$$R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) = 5 + 9 = 14$$

Dus geldt er dat $R(3, 5) = 14$. □

Door gebruik te maken van Stelling 3.7 en het bijbehorende gevolg kunnen we ook makkelijk een bovengrens berekenen voor de Ramsey-getallen. Deze kan je terugvinden in Tabel 2. Hier zie je in het rood de getallen waarvoor een betere bovengrens bekend is. Je zit hier dat de kleine getallen op deze manier goed berekend kunnen worden, maar dat zodra je naar een grotere k en l gaat deze veel afwijken. Zo vinden we dat $R(4, 7) \leq 75$, maar volgt uit Tabel 1 dat $R(4, 7) \leq 58$. Dit betekent dat er betere methodes zijn om de bovengrens te bepalen.

$k \backslash l$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3		6	9	14	19	26	33	42
4			18	31	50	75	108	149
5				62	111	186	293	441

Tabel 2: Bovengrens Ramsey-getallen via Stelling 3.7 en zijn gevolg. In het rood de getallen waarvoor een betere grens bekend is.

In het volgende hoofdstuk gaan we kijken naar een aantal van deze bovengrenzen, waarbij de focus ligt op de diagonale Ramsey-getallen.

4 Aanscherpingen van bovengrenzen

Door de jaren heen is de bovengrens van de diagonale Ramsey-getallen steeds verder aangescherpt. Hierdoor kunnen we de bovengrens dus steeds accurater bepalen. In dit hoofdstuk geven we een overzicht van de belangrijkste aanscherpingen van deze bovengrens. Let erop dat de meeste bovengrenzen die we in dit hoofdstuk gaan beschrijven alleen iets over het asymptotische gedrag zeggen.

De Ramsey-getallen begonnen met Frank P. Ramsey, die in 1930 het eerste artikel over de Ramsey-getallen publiceerde [14]. Hierin bewijst hij dat $R(k)$ eindig is voor elke $k \in \mathbb{N}$. Daarmee wordt ook gelijk het bestaan van de diagonale Ramsey-getallen bewezen. Verder benoemt Ramsey in zijn artikel dat geldt dat $R(k) \leq k!$ en geeft hij hiermee de eerste bovengrens. Echter wordt hier verder niet op ingegaan.

Dit eerste artikel van Ramsey gaat over een special geval van een probleem in de logica. Tegenwoordig wordt het Ramsey-getal meestal geassocieerd met grafen. In 1935 werden door P. Erdős en G. Szekeres de Ramsey-getallen voor het eerst gekoppeld aan grafen. In hun publicatie [7] geven zij ook een nieuwe bovengrens voor de Ramsey-getallen, zie Stelling 4.1.

Stelling 4.1 (P. Erdős en G. Szekeres). *Neem $k, l \geq 2$ geheel. Er geldt dat:*

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Merk op dat deze stelling een bijna direct gevolg is van Stelling 3.7.

Bewijs. We gaan dit bewijzen met inductie op k en l .

Neem $k = l = 2$. Dan weten we $R(2, 2) = 2$ en $\binom{2+2-2}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$. Dus voor dit geval geldt onze ongelijkheid.

Neem nu aan dat de ongelijkheid geldt voor $R(k, l-1)$ en $R(k-1, l)$. Dan geldt het volgende:

$$\begin{aligned} R(k, l) &\leq R(k-1, l) + R(k, l-1) \\ &\leq \binom{k-1+l-2}{k-1-1} + \binom{k+l-1-2}{k-1} \\ &= \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} \\ &= \binom{k+l-2}{k-1} \end{aligned}$$

Hierbij geldt de eerste ongelijkheid vanwege Stelling 3.7 en volgt de laatste gelijkheid uit Pascals identiteit. $\square$

Deze stelling gaan we nu asymptotisch beschrijven, zie Gevolg 4.2. Hiervoor maken we gebruik van de Formule van Stirling zoals beschreven in Stelling 2.16.

Gevolg 4.2. *Neem $k > 0$ geheel. Er geldt dat $R(k) = O(\frac{4^k}{\sqrt{k}})$.*

Bewijs. Er geldt dat:

$$\begin{aligned}
R(k) &\leq \binom{2k}{k} \\
&= \frac{2k!}{k!k!} \\
&\sim \frac{\sqrt{4\pi k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k)^2} \\
&= \frac{\sqrt{4\pi k} 4^k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}}{(2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k})} \\
&\leq M \frac{4^k}{\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

Voor een constante $M \in \mathbb{R}_{>0}$.

Waarbij de eerste gelijkheid geldt vanwege Stelling 4.1 en gebruik wordt gemaakt van de formule van Stirling. Merk verder op dat geldt als $f(x) \sim g(x)$, dan ook $f(x) = O(g(x))$. Dus er geldt nu dat $R(k) = O(\frac{4^k}{\sqrt{k}})$. $\square$

Ruim 50 jaar na de eerste bovengrens van Erdős en Szekeres kwamen Ronald Graham en Vojtěch Rödl in 1987 [10] met een sterker resultaat, namelijk dat $R(k) = o(\frac{4^k}{\sqrt{k}})$. Een jaar later, in 1988, kwam Andrew Thomason [18] met de eerste polynomiale verbetering van de bovengrens.

Stelling 4.3 (A. Thomason). *Er geldt dat $R(k) = O(\frac{4^k}{k})$.*

Het is duidelijk dat het om een polynomiale verbetering gaat. Er geldt namelijk:

$$\frac{O(\frac{4^k}{\sqrt{k}})}{O(\frac{4^k}{k})} = \sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}.$$

Thomason bewijst Stelling 4.3 door gebruik te maken van Stelling 4.4, dat een resultaat is van K. Walker bewezen in 1968 [20]. We zullen vanwege de complexiteit van het bewijs de verbetering van Thomason hier niet bewijzen.

Stelling 4.4 (K. Walker). *Er geldt dat $R(k) \leq 4R(k, k-2) + 2$.*

Voor het bewijs van deze Stelling 4.4 maken we gebruik van de volgende definitie:

Definitie 4.5. Een r -kleuring op de lijnen van een graaf G is een $(G_1, \dots, G_r)$ -goede kleuring als voor elke $1 \leq i \leq r$ er geen subgraaf isomorf aan G_i gevonden kan worden in kleur i .

Verder definiëren we Δ als het aantal monochromatische driehoeken dat gevonden kan worden in een 2-kleuring van K_n . Zeg verder dat een punt v_i precies r_i rode lijnen heeft en $(n - r_i - 1)$ blauwe lijnen. Merk op dat dan geldt dat:

$$\Delta = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i(n - r_i - 1).$$

Er zijn namelijk $\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ driehoeken in een K_n te vinden. Vervolgens moeten we hier nog het aantal niet-monochromatische driehoeken vanaf halen. Het aantal paren van lijnen verbonden met punt v_i die niet dezelfde kleur hebben zijn er $r_i(n - r_i - 1)$. Merk verder op dat iedere niet-monochromatische driehoek twee punten heeft die zowel een blauwe als een rode lijn heeft. Dus het aantal niet-monochromatische driehoeken is $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i(n - r_i - 1)$.

Bewijs van Stelling 4.4. Definieer $M(n, k, l)$ als het maximale aantal rode lijnen die voor kunnen komen in een (K_k, K_l) -goede kleuring van K_n . Definieer zo ook $B(n, k, l)$ voor het maximale aantal blauwe lijnen.

Neem aan dat voor $n < R(k-1, l) + R(k, l-1)$ een (K_k, K_l) -goede kleuring van K_n bestaat waarin p_j punten j rode lijnen en $(n - j - 1)$ blauwe lijnen heeft. Merk op dat $p_j = 0$ tenzij $n - R(k, l-1) \leq j < R(k-1, l)$. Dit geldt omdat $(n - j - 1)$ kleiner moet zijn dan $R(k, l-1)$ om een blauwe K_l te voorkomen en j kleiner moet zijn dan $R(k-1, l)$ om een rode K_k te voorkomen.

Neem een punt v met j rode lijnen en kijk naar V_r de verzameling punten waarmee v verbonden is door een rode lijn. Merk op dat de deelgraaf geïnduceerd door V_r een (K_{k-1}, K_l) -goede kleuring heeft. Beschouw deze deelgraaf. Dan vormt elke rode lijn in deze deelgraaf samen met punt v een rode driehoek, dus punt v is in maximaal $M(j, k-1, l)$ rode driehoeken. Op dezelfde manier is punt v in $B(n - j - 1, k, l-1)$ blauwe driehoeken. Omdat elke driehoek drie punten heeft, volgt nu het volgende:

$$\Delta \leq \frac{1}{3} \sum_{j=n-R(k,l-1)}^{R(k-1,l)} (M(j, k-1, l) + B(n-j-1, k, l-1))p_j.$$

Verder wisten we al dat geldt dat $\Delta = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i(n - r_i - 1)$. Als we deze twee combineren krijgen we uiteindelijk het volgende:

$$n(n-1)(n-2) \leq \sum_{j=n-R(k,l-1)}^{R(k-1,l)} (2M(j, k-1, l) + 2B(n-j-1, k, l-1) + 3j(n-j-1))p_j.$$

In een (K_k, K_l) -goede kleuring heeft elk punt maximaal $R(k-1, l) - 1$ rode lijnen. Dus geldt dat $M(n, k, l) \leq \frac{n}{2}(R(k-1, l) - 1)$ en in het bijzonder $M(j, k-1, k) \leq \frac{j}{2}(R(k-2, k) - 1)$. Op dezelfde manier geldt $B(n, k, l) \leq \frac{n}{2}(R(k, l-1) - 1)$ en in het bijzonder $B(n-j-1, k, k-1) \leq \frac{n-j-1}{2}(R(k, k-2) - 1)$.

Neem nu aan dat $n \geq 4R(k, k-2) + 2$ en stel dat K_n een (K_k, K_k) -goede kleuring heeft. Dan geldt voor elke j dat:

$$\begin{aligned} & 2M(j, k-1, k) + 2B(n-j-1, k, k-1) + 3j(n-j-1) \\ & \leq 2\frac{j}{2}(R(k-2, k) - 1) + 2\frac{n-j-1}{2}(R(k, k-2) - 1) + 3j(n-j-1) \\ & = (n-1)(R(k-2, k) - 1) + 3j(n-j-1) \\ & \leq (n-1)(R(k-2, k) - 1) + 3\left(\frac{n-1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Waarbij de laatste ongelijkheid geldt, omdat $j = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ ervoor zorgt dat $3j(n-j-1)$ gemaximaliseerd wordt. Uit onze keuze voor n volgt nu dat $\frac{1}{4}(n-6) \geq R(k, k-1) - 1$. Dus krijgen we:

$$\begin{aligned} (n-1)(R(k-2, k) - 1) + 3\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 & \leq (n-1)\frac{1}{4}(n-6) + 3\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \\ & \leq (n-1)\frac{1}{4}(n-6) + 3\frac{1}{4}(n-1) \\ & = (n-1)\left(n - \frac{4}{9}\right) < (n-1)(n-2). \end{aligned}$$

Verder geldt nog dat $\sum_{j=n-R(k, l-1)}^{R(k-1, l)} p_j = n$. Dus krijgen we:

$$\sum_{j=n-R(k, l-1)}^{R(k-1, l)} (2M(j, k-1, l) + 2B(n-j-1, k, l-1) + 3j(n-j-1))p_j < n(n-1)(n-2).$$

Maar we hadden al dat als $n \leq R(k, k-1) + R(k-1, k)$ dan $n(n-1)(n-2) \leq \sum_{j=n-R(k, l-1)}^{R(k-1, l)} (2M(j, k-1, l) + 2B(n-j-1, k, l-1) + 3j(n-j-1))p_j$. Verder geldt $R(k) \leq R(k, k-1) + R(k-1, k)$ vanwege Stelling 3.7. Dus volgt nu dat $R(k) \leq 4R(k, k-2) + 2$. $\square$

Gevolg 4.6. *Er geldt dat $R(4) = 18$.*

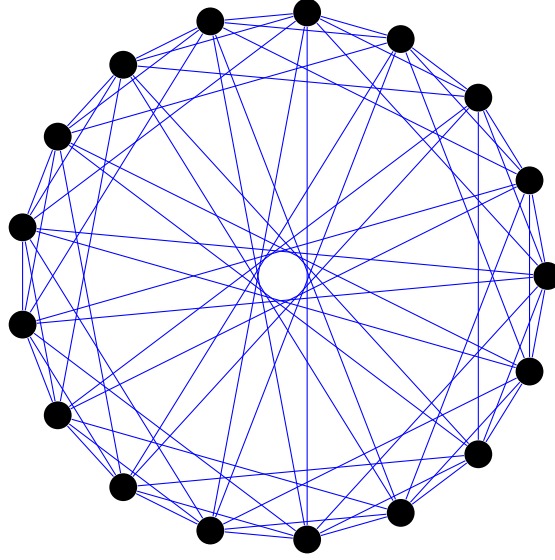
Bewijs. We gaan dit weer bewijzen door het geven van een boven- en ondergrens die aan elkaar gelijk zijn.

Ondergrens: Hiervoor geven we een tegenvoorbeeld, zie Figuur 4. Merk op dat in het voorbeeld alleen de blauwe lijnen getekend zijn, de rode lijnen zijn de lijnen in het complement van deze graaf. Het is aan de lezer om na te gaan dat er in dit voorbeeld inderdaad geen rode K_4 of blauwe K_4 te vinden is. Er geldt nu per definitie dat $17 < R(4)$.

Bovengrens: Uit Stelling 4.4 volgt direct dat:

$$R(4) \leq 4R(4, 2) + 2 = 18.$$

Dus geldt dat $R(4) = 18$. $\square$



Figuur 4: Voorbeeld van een K_{17} dat geen rode K_4 of blauwe K_4 bevat. Merk op dat hier alleen de blauwe lijnen getekend zijn, de rode lijnen zijn de lijnen in het complement van deze graaf.

David Conlon gaf in 2009 [2] de eerste super-polynomiale verbetering ten opzichte van de bovengrens die Szekeres en Erdős gaven.

Stelling 4.7 (D. Conlon). *Neem $k > 0$ geheel. Er bestaat een positieve constante c zodat geldt: $R(k) \leq k^{-\frac{c \log k}{\log \log k}} 4^k$.*

We gaan eerst controleren of het daadwerkelijk om een super-polynomiale verbetering gaat. Hiervoor laten we eerst zien dat voor elke k geldt dat $k^{\frac{c \log(k)}{\log \log(k)}} > k^n$ met $c, n > 0$ constanten.

$$\begin{aligned}
k^{\frac{c \log(k)}{\log \log(k)}} &> k^n \\
e^{\frac{c \log(k)^2}{\log \log(k)}} &> e^{n \log(k)} \\
\frac{c \log(k)^2}{\log \log(k)} &> n \log(k) \\
\log(k)^2 &> \frac{n}{c} \log(k) \log \log(k) \\
\log(k) &> \frac{n}{c} \log \log(k) \\
e^{\log(k)} &> e^{\log(\log(k) \frac{n}{c})} \\
k &> \log(k)^{\frac{n}{c}} \\
\sqrt[n]{k^c} &> \log(k)
\end{aligned}$$

Vervolgens moeten we ook laten zien dat geldt dat $g^k > k^{\frac{c \log(k)}{\log \log(k)}}$ voor $g > 1$ en $c > 0$ constanten.

$$\begin{aligned} k^{\frac{c \log(k)}{\log \log(k)}} &< g^k \\ e^{\frac{c \log(k)^2}{\log \log(k)}} &< e^{k \log(g)} \\ \frac{c \log(k)^2}{\log \log(k)} &< k \log(g) \\ k &> \frac{c}{\log(g)} \frac{\log(k)^2}{\log \log(k)} \end{aligned}$$

Schets van het bewijs van Stelling 4.7. Neem voor het gemak $n = k^{-\frac{c \log k}{\log \log k}} 4^k$. Als we het argument dat wordt gebruikt in het bewijs van Stelling 3.7 generaliseren kunnen we tot de volgende, later bewezen als incorrecte, bewering komen.

Bewering 4.8. In elke graaf die geen rode K_s of blauwe K_t bevat, geldt dat elke rode K_p in minder dan $R(s-p, t)$ rode kopieën van K_{p+1} zit en dat blauwe K_p in minder dan $R(s, t-p)$ blauwe kopieën van K_{p+1} zit.

Door gebruik te maken van deze bewering kunnen we bewijzen dat elke 2-kleuring, zeg met rood en blauw, van de lijnen van K_n welke geen monochromatische K_k bevat quasirandom is. Dus in deze kleuring hebben we het verwachte aantal van elke kleine graaf in beide kleuren. Vervolgens wordt er door een precies en ingewikkeld tel-argument een contradictie van de Bewering 4.8 met $p \sim \frac{\log k}{\log \log k}$ gegeven. Deze contradictie bewijst vervolgens de stelling. $\square$

Door middel van het bovengenoemde quasirandomness en gebruik makende van dezelfde techniek als Conlon gaf Ashwin Sah [15] in zijn in 2023 gepubliceerde artikel het volgende resultaat: $R(k) \leq 4^{k-c \log(k)^2}$ voor een constante $c > 0$. Dit is een aanscherping van het vorige resultaat.

De eerste exponentiële verbetering voor de diagonale Ramsey-getallen is een resultaat van M. Campos, S. Griffiths, R. Morris en J. Sahasrabudhe [1].

Stelling 4.9 (M. Campos, S. Griffiths, R. Morris en J. Sahasrabudhe). *Neem $k > 0$ geheel. Er geldt dat $R(k) \leq (4 - \epsilon)^k$ voor een $\epsilon > 0$.*

In hun artikel bewijzen ze dit voor $\epsilon = 2^{-10}$ en $\epsilon = 2^{-7}$, maar vermelden er wel bij dat deze door middel van het door hun gegeven algoritme geoptimaliseerd kan worden. Tot nu toe bouwde de verbetering van de bovengrens voort op de voorgaande methode met quasirandomness. Campos en co begonnen aan een ander algoritme. Campos en co gingen kijken naar een algoritme dat gebruik maakt van het kijken naar een bepaald soort graaf, genaamd een boek.

Definitie 4.10. Een *boek* (S, T) is een graaf op de punten verzameling $S \cup T$ onderling disjunct waarbij S de basis vormt en onderling verbonden is met elkaar en T de paginas doordat elk punt uit T verbonden is met de punten uit S . Dit maakt dus de graaf $G = (V, E)$ met $V = S \cup T$ en $E = \{\{s_1, s_2\} | s_1, s_2 \in S, s_1 \neq s_2\} \cup \{\{s, t\} | s \in S, t \in T\}$.

Ze maken vervolgens gebruik van de volgende observatie.

Observatie 4.11. Als elke 2-kleuring op de lijnen van K_n een monochromatisch boek (S, T) bevat met $|T| \geq R(k, k - |S|)$, dan $R(k) \leq n$.

We gaan verder niet in op deze observatie. Campos en co bewijzen hun resultaat door het geven van een algoritme dat een groot monochromatisch boek vormt dat geen monochromatische kopieën van K_k bevat. Verdere toelichting van het algoritme en de observatie kan je lezen in hun artikel.

Sindsdien zijn er geen verdere ontwikkelingen geweest in het verbeteren van de bovengrens of het vinden van een betere ϵ . Wel is de bovengrens van specifieke gevallen verbeterd. In het volgende hoofdstuk gaan we kijken naar de aanscherpingen van de ondergrenzen.

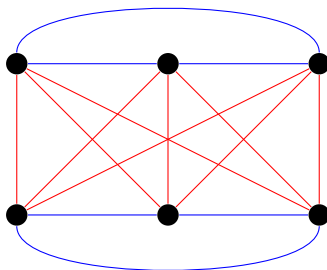
5 Aanscherpingen van ondergrenzen

Terwijl de bovengrens van de diagonale Ramsey-getallen langzaam maar zeker verbeterd wordt, blijkt dit bij de ondergrens minder voorspoedige te verlopen. In dit hoofdstuk gaan we kijken naar de ondergrens die Erdős in 1947 beschreef, zie hiervoor Stelling 5.2 [3]. Verder bekijken we de enige verbetering die er de afgelopen 75 jaar is gedaan. Ook deze ondergrenzen beschrijven, net als bij de bovengrenzen, meestal het asymptotische gedrag en geven verder zelf geen goede ondergrens voor individuele gevallen.

We beginnen met het beschrijven van een zwakke, maar constructieve ondergrens.

Stelling 5.1. *Neem $k, l > 0$ geheel. Er geldt dat $R(k, l) > (k - 1)(l - 1)$.*

Bewijs. Neem $n = (k - 1)(l - 1)$. Dan zoeken we een kleuring op de lijnen van K_n zodat deze geen rode K_k of blauwe K_l bevat. Hiervoor geven we een constructie van deze kleuring. Rangschik de n punten in $k - 1$ rijen en $l - 1$ kolommen en laat dit een volledige graaf vormen. Kleur vervolgens de lijn tussen elke twee punten in dezelfde rij blauw. Kleur alle andere lijnen rood, zie het voorbeeld in Figuur 5. Vervolgens moeten we nog laten zien dat dit geen rode K_k of blauwe K_l bevat. Voor een rode K_k hebben we k punten nodig. Omdat we maar $k - 1$ rijen hebben weten we dat er twee punten in dezelfde rij moeten zitten. Maar deze zijn verbonden door een blauwe lijn en dus kunnen k punten geen rode K_k vormen. Een zelfde argument kan gemaakt worden voor het niet bevatten van een blauwe K_l . Hiervoor heb je namelijk l punten nodig, maar we hebben maar $l - 1$ kolommen, dus er moet twee punten in dezelfde kolom zitten. Deze zijn onderling rood en dus kunnen l punten nooit een blauwe K_l vormen. $\square$



Figuur 5: Voorbeeld van de constructie voor de constructieve ondergrens waarbij $k = 3$ en $l = 4$.

Stelling 5.2 (P. Erdős). *Er geldt dat $R(k) \geq (1 + o(1)) \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{k}{2}}$.*

Lemma 5.3. *Laat A_i , $1 \leq i \leq m$, gebeurtenissen in een kansruimte met $P(A_i) \leq p$. Als $mp < 1$, dan geldt dat $P(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) > 0$.*

Bewijs.

$$\begin{aligned}
P(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) &= 1 - P(A_1 \vee \dots \vee A_m) \\
&\geq 1 - \sum_{i \in [1, m]} P(A_i) \\
&\geq 1 - mp > 0.
\end{aligned}
\quad \square$$

Lemma 5.4. *Als $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, dan geldt $R(k) \geq n$.*

Bewijs. Neem k, n vast zodat deze voldoen aan $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Beschouw vervolgens een willekeurige 2-kleuring op de lijnen van K_n . Neem S een verzameling op k punten en laat A_S de gebeurtenis zijn dat alle lijnen van onze door S geïnduceerde deelgraaf K_k dezelfde kleur hebben. Dan geldt dat $P(A_S) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$. Merk op dat er $\binom{n}{k}$ manieren zijn om onze verzameling S te kiezen. Dus dan volgt nu uit Lemma 5.3 dat $P(\bigwedge \bar{A}_S) > 0$.

Dit houdt in dat er een kleuring van K_n bestaat zodat alle gebeurtenissen A_S niet gebeuren. Dus onze K_n bevat geen rode of blauwe K_k en daarmee geldt dat $R(k) \geq n$. $\square$

Het bewijs van Lemma 5.4 is het canonieke voorbeeld van de “probabilistische methode”. De probabilistische methode werkt als volgt: Als elk object in een verzameling objecten een bepaalde eigenschap niet heeft, dan is de kans dat een willekeurig object uit de verzameling die eigenschap heeft nul. Op dezelfde manier kan het aantonen dat de kans (strikt) kleiner is dan 1 worden gebruikt om het bestaan van een object te bewijzen dat niet aan de gewenste eigenschappen voldoet. Dankzij deze methode heeft de Ramsey theorie een enorme invloed gehad op vele wiskundige gebieden, waaronder combinatoriek, getaltheorie en reële analyse en heeft daarnaast ook invloed gehad op computer science.

Dankzij Lemma 5.4 kunnen we de asymptotische ondergrens in Stelling 5.2 bepalen.

Bewijs van Stelling 5.2. Neem n_0 de maximale n die voldoet aan $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. We weten dat geldt dat $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$. Dus als geldt dat $\frac{n^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, dan geldt ook dat $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Daarmee weten we nu dat geldt dat $n^k = (1 + o(1))k!2^{\binom{k}{2}-1}$. Als we nu de k -de machtswortel nemen, krijgen we het volgende: $n = (1 + o(1))(k!)^{\frac{1}{k}} 2^{\frac{k-1}{2}}$. Merk op dat vanwege de formule van Stirling geldt dat $(k!)^{\frac{1}{k}} \sim \frac{k}{e}$. Dit invullen geeft $n_0 = (1 + o(1))\frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{k}{2}}$. En dus geldt nu dat $R(k) \geq n_0 = (1 + o(1))\frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{k}{2}}$. $\square$

In 1975 publiceerde Joel Spencer een artikel [16] waarin hij de ondergrens, zoals Erdős deze vond, verbetert met een factor twee. De preciezere uitwerking van zijn bewijs kan je lezen in zijn boek “Asymptopia” [17]. Dit geeft ons de volgende stelling:

Stelling 5.5 (J. Spencer). *Er geldt dat $R(k) \geq (1 + o(1))\frac{k\sqrt{2}}{e} 2^{\frac{k}{2}}$.*

Het verbeterde resultaat van J. Spencer is gebaseerd op de onafhankelijkheid van de verzamelingen A_S en A_T . Hiervoor maken we gebruik van het volgende resultaat van L. Lovász [5].

Stelling 5.6 (Lovász Local Theorem). *Laat G een eindige graaf met maximale graad d en punten $1, \dots, m$. Laat A_i , $1 \leq i \leq m$, gebeurtenissen in een kansruimte zodat A_i onafhankelijk is van $\{A_j : (i, j) \in E(G)\}$. Neem aan dat $P(A_i) \leq p$ voor $1 \leq i \leq m$. Als $4dp \leq 1$, dan geldt dat $P(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) > 0$.*

Bewijs. Neem aan dat geldt dat $P(A_1 | \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) \leq \frac{1}{2d}$. Merk vervolgens op dat geldt dat:

$$P(A_1 | \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) = \frac{P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m)}{P(\bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m)} \geq \frac{P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m)}{1 - P(A_2 \vee \dots \vee A_m)}.$$

Hieruit volgt vervolgens dat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} &\geq P(A_1 | \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) \geq \frac{P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m)}{1 - P(A_2 \vee \dots \vee A_m)} \\ \frac{1}{2d}(1 - P(A_2 \vee \dots \vee A_m)) &\geq P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) \\ \frac{1}{2d} &\geq P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) + \frac{1}{2d}P(A_2 \vee \dots \vee A_m) \\ 1 &\geq 2dP(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) + P(A_2 \vee \dots \vee A_m) \\ 1 &> P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) + P(A_2 \vee \dots \vee A_m) \\ 1 &> 1 - P(\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) \\ P(\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) &> 0. \end{aligned}$$

Nu moeten we nog bewijzen dat geldt dat $P(A_1 | \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) \leq \frac{1}{2d}$. Dit doen door inductie naar m . Het geval $m = 1$ is triviaal. Neem nu aan dat het waar is voor $m - 1$ gebeurtenissen en noem deze gebeurtenissen A_2 tot en met A_m . Neem een punt v_1 , omdat de maximale graad van de graaf d is weten we dat punt v_1 met maximale d andere punten verbonden is. Noem deze punten v_2 tot en met v_{d+1} . Daardoor weten we dat A_1 onafhankelijk is van A_i , $i > d + 1$. Dan krijgen we:

$$P(A_1 | \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) = \frac{P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_{d+1} | \bar{A}_{d+2} \wedge \dots \wedge \bar{A}_m)}{P(\bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_{d+1} | \bar{A}_{d+2} \wedge \dots \wedge \bar{A}_m)}.$$

We gaan nu de teller en de noemer begrenzen. De teller geeft ons:

$$\begin{aligned} P(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_{d+1} | \bar{A}_{d+2} \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) &\leq \\ P(A_1 | \bar{A}_{d+2} \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) &= P(A_1) \leq \frac{1}{4d}. \end{aligned}$$

De noemer geeft ons:

$$P(\bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_{d+1} | \bar{A}_{d+2} \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) = 1 - P(A_2 \vee \dots \vee A_{d+1} | \bar{A}_{d+2} \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) \geq$$

$$1 - \sum_{i=2}^{d+1} P(A_i | A_{d+2}^- \wedge \dots \wedge A_m^-) \geq 1 - d \frac{1}{2d} \geq \frac{1}{2}.$$

Waarbij de tweede ongelijkheid geldt vanwege de inductiehypothese. Dus nu volgt dat $P(A_1 | \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_m) \leq \frac{1}{4d} / \frac{1}{2} = \frac{1}{2d}$. $\square$

Lemma 5.7. *Als $4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, dan geldt dat $R(k) \geq n$.*

Bewijs. Neem k, n vast zodat deze voldoet aan $4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Beschouw vervolgens een willekeurige kleuring op de lijnen van K_n . Neem S een verzameling op k punten en laat A_S de gebeurtenis zijn dat alle lijnen van onze door S geïnduceerde deelgraaf K_k dezelfde kleur hebben. Dan geldt dat A_S onafhankelijk is van $\{A_T : |S \cap T| \leq 1\}$, omdat S geen lijnen deelt met T . Neem vervolgens $d = |\{T : |T| = k, |S \cap T| > 1\}| \leq \binom{k}{2} \binom{n}{k-2}$. Het toepassen van Lovász Local Theorem maakt ons bewijs vervolgens af. $\square$

Het bewijs van Stelling 5.5 volgt nu uit Lemma 5.7.

Bewijs van Stelling 5.5. Neem $n_0 = (1 + o(1)) \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{k}{2}}$ zoals gevonden in het bewijs van Stelling 5.2 en neem $g(n) = 4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}}$. We nemen nu de volgende parametrisatie: $n = zn_0$ met $z \geq 1$. Merk op dat geldt dat:

$$4 \binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} \sim 4 \frac{k^2}{2!} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} \sim \frac{2k^4}{n^2} \binom{n}{k}.$$

Dus als $z = 1$ hebben we $g(n) = g(n_0) \sim 2k^4 n_0^{-2}$. De grove afchatting $n_0 = (\sqrt{2} + o(1))^k$ geeft ons dat $g(n_0) = (2 + o(1))^{-k}$. Merk op dat vanwege $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ geldt dat als we n_0 vervangen door zn_0 , dit ons een extra factor z^{k-2} geeft. Dus $g(zn_0) \sim g(n_0) z^{k-2}$. Dit geeft ons dat voor $z = 2 - \epsilon$ voor $\epsilon > 0$ vast gekozen er geldt dat $g(zn_0) \ll 1$. Dus hebben we een verbetering met een factor twee ten opzichte van de bovengrens gegeven in Stelling 5.2. Dus geldt dat $R(k) \geq (1 + o(1)) \frac{k\sqrt{2}}{e} 2^{\frac{k}{2}}$. $\square$

Sindsdien zijn er geen verbeteringen meer gedaan op de ondergrens van de diagonale Ramsey-getallen. Wel is de ondergrens van specifieke gevallen verbeterd.

6 Generalisatie Ramsey theorie

Zoals al eerder genoemd in Hoofdstuk 3, zijn de Ramsey-getallen begonnen met een artikel van F.P. Ramsey die een probleem in de formele logica wilde oplossen. Hij hield zich bezig met het zoeken van een reguliere procedure om de waarheid van een logische formule te bepalen. Ramsey formuleert zijn stelling dan ook als volgt:

Stelling 6.1. *Laat Γ een eindige klasse, en μ en r positief gehele getallen. Laat alle r -combinaties van elementen uit Γ willekeurig verdeeld worden over μ klassen C_i die elkaar onderling uitsluiten, zodat elke r -combinatie maar in één C_i zit. Neem verder het keuzeaxioma aan. Dan moet Γ een oneindige deelklasse δ bevatten zodat alle r -combinaties van Δ in dezelfde C_i zitten.*

Merk op dat deze stelling letterlijk vertaald is uit Ramseys artikel “On a problem of formal logic” [14].

Deze stelling geeft ons meer mogelijkheden dan wat we tot nu toe behandeld hebben ten opzichte van grafen. Zo mogen we namelijk meerdere kleuren gebruiken. Verder zijn we niet beperkt tot de standaard graaf, maar kunnen we ook kijken naar hypergrafen. Daarnaast zijn we zelfs niet beperkt tot complete grafen, maar kunnen we ook specifieke gevallen bekijken. In dit hoofdstuk gaan we kort in op deze verschillende extra mogelijkheden.

We beginnen met het bekijken van wat er gebeurt als we meerdere kleuren toestaan. In dit geval beschouwen we nog de standaard en complete grafen, zoals hiervoor. Dit brengt ons naar de volgende uitgebreide definitie.

Definitie 6.2. Neem $r \geq 2$ een geheel getal en neem $I_1, \dots, I_r \in \mathbb{N}$. Het *Ramsey-getal*, $R(I_1, \dots, I_r)$, is de kleinste $n \in \mathbb{N}$ zodat voor elke willekeurige r -kleuring op de lijnen van K_n een monochromatische K_{I_i} bevat voor minimaal één index $i \in [1, r]$.

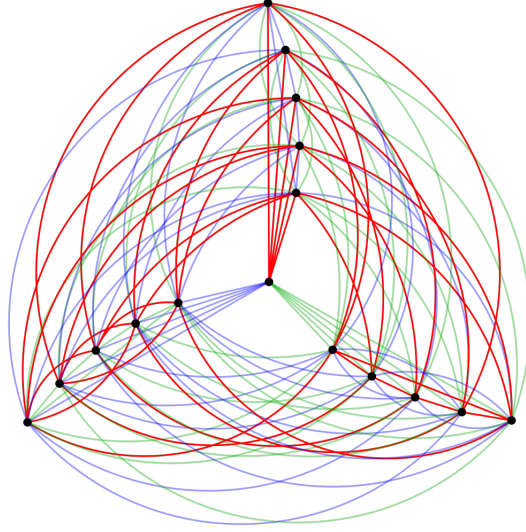
Notatie 6.3. Stel dat alle I_i voor $i = 1, \dots, r$ dezelfde waarde hebben, zeg I , dan noteren we het Ramsey-getal als $R(I; r)$.

Je kan je afvragen of deze n , en dus het Ramsey-getal, nog wel bestaat als we kijken naar de uitbreiding op meerdere kleuren. Gelukkig volgt dit inductief uit Stelling 6.4.

Stelling 6.4. *Neem $r \geq 2$ een geheel getal en neem $I_1, \dots, I_r \in \mathbb{N}$. Er geldt dat:*

$$R(I_1, \dots, I_r) \leq 2 + \sum_{i=1}^r (R(I_1, \dots, I_i - 1, \dots, I_r) - 1).$$

Bewijs. Neem $n \geq 2 + \sum_{i=1}^r (R(I_1, \dots, I_i - 1, \dots, I_r) - 1)$. Beschouw nu een willekeurige r -kleuring van K_n . Merk op dat elk punt v nu graad $1 + \sum_{i=1}^r (R(I_1, \dots, I_i - 1, \dots, I_r) - 1)$ heeft. Beschouw een willekeurige kleur j , en bekijk de deelgraaf geïnduceerd door alle



Figuur 6: Voorbeeld van een K_{16} die geen rode K_3 , blauwe K_3 of groene K_3 bevat. [22]

lijnen in kleur j , dan geldt vanwege het ladenprincipe van Dirichlet dat er een punt v bestaat met graad minstens $R(I_1, \dots, I_j - 1, \dots, I_r)$. Neem nu V_j de verzameling punten die met v verbonden zijn in kleur j . Beschouw nu de deelgraaf G geïnduceerd door de V_j . Dan geldt één van de volgende twee dingen: Ofwel G bevat een K_{I_i} voor $i \neq j$, en dan bevat onze oorspronkelijke K_n deze ook. Ofwel G bevat een K_{I_j-1} en dan vormt deze samen met het punt v een K_{I_j} in onze K_n . Dus geldt er $R(I_1, \dots, I_r) \leq n$. $\square$

Het bepalen van deze meerdere kleuren Ramsey-getallen is nog lastiger dan het geval met twee kleuren. Daardoor zijn er ook weinig exacte waarden van deze Ramsey-getallen bekend. Sterker nog, er zijn maar twee niet-triviale gevallen hiervan exact bekend, namelijk $R(3, 3, 3) = 17$ en $R(3, 3, 4) = 30$. Een van deze twee gevallen zullen we hieronder uitwerken en is een resultaat van R. Greenwood en A. Gleason [11].

Stelling 6.5. *Er geldt dat $R(3, 3, 3) = 17$.*

Bewijs. We gaan dit bewijzen door het geven van een onder- en bovengrens die aan elkaar gelijk is.

Ondergrens: Hiervoor geven we een tegenvoorbeeld, zie Figuur 6. Er geldt nu per definitie dat $16 < R(3, 3, 3)$.

Bovengrens: Beschouw een willekeurige 3-kleuring op de lijnen van K_{17} . Neem een kleur, zeg groen, en beschouw de deelgraaf geïnduceerd door alle groene lijnen. Dan moet er een punt v zijn, zodat deze een graad minstens 6 heeft. Neem V_g de verzameling punten die verbonden zijn met v door een groene lijn. Bekijk nu de deelgraaf geïnduceerd

door V_g . Dan geldt een van de volgende dingen. Er is minimaal één lijn groen, en dan vormt deze samen met ons punt v een groene K_3 in onze oorspronkelijke K_{17} . Of alle lijnen zijn rood of blauw. Omdat er minimaal zes punten in V_g zitten en omdat geldt dat $R(3, 3) = 6$ weten we dat hier een rode of blauwe K_3 te vinden is, dus daarmee ook in onze K_{17} . $\square$

Het geval waarin we kijken naar monochromatische driehoeken kunnen we uitbreiden naar r kleuren. Dit brengt ons het volgende resultaat.

Stelling 6.6. *Er geldt dat $R(3; r) \leq 3r!$, voor $r \geq 2$ geheel.*

Bewijs. We bewijzen eerst dat geldt dat $R(3; r+1) \leq (r+1)(R(3; r) - 1) + 2$. Merk hiervoor op dat geldt dat $R(I_1, \dots, I_r, 2) = R(I_1, \dots, I_r)$. Dan volgt uit Stelling 6.4 dat

$$R(3; r+1) \leq 2 + \sum_{i=1}^{r+1} (R(3, \dots, 3, 2, 3, \dots, 3) - 1) = (r+1)(R(3; r) - 1) + 2.$$

Vervolgens gaan we onze stelling bewijzen met inductie op r . Neem aan $r = 2$. Dan $R(3; 2) = R(3, 3) = 6 = 3 \cdot 2!$. Neem nu aan dat het geldt voor r . Dan:

$$\begin{aligned} R(3; r+1) &\leq (r+1)(R(3; r) - 1) + 2 \\ &\leq (r+1)(3r! - 1) + 2 \\ &= 3(r+1)! - (r+1) + 2 \leq 3(r+1)!. \end{aligned} \quad \square$$

We gaan nu kijken naar de generalisatie door middel van hypergrafen.

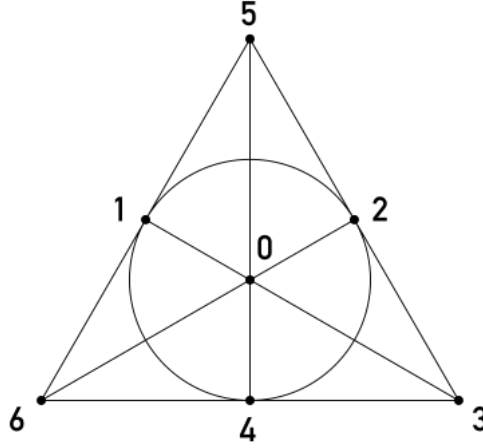
Definitie 6.7. Een *hypergraaf* $H = (V, E)$ heeft een puntenverzameling V net als bij de standaard graaf en een verzameling lijnen dat kan bestaan uit elke deelverzameling van V . We noemen zo'n lijn $e \in E$ ook wel een *hyperkant*.

Definitie 6.8. We noemen een hypergraaf *k-uniform* als elke hyperkant e precies k punten bevat.

Een voorbeeld van een 3-uniforme hypergraaf is het Fano-vlak, zie Figuur 7.

Definitie 6.9. Neem $I_1, \dots, I_r, k$ positieve gehele getallen. Dan is het *Ramsey-getal*, $R_k(I_1, \dots, I_r)$, de kleinste $n \in \mathbb{N}$ zodat er in de r -kleuring op de lijnen van de complete k -reguliere hypergraaf op n punten, $K_n^{(k)}$, een complete k -reguliere subhypergraaf op I_i punten bestaat dat monochromatisch is voor minimaal één index $i \in [1, r]$.

Het bepalen van de exacte waarde van deze Ramsey-getallen is nog lastiger dan waar we tot nu toe naar gekeken hebben. Sterker nog, als we aannemen dat $k > 2$ moet zijn, is er maar in één enkel niet-triviaal geval de exacte waarde bekend, namelijk $R_3(4, 4) = 13$. Dit is een resultaat van B. McKey en S. Radziszowski [13]. Ze maakten gebruik van verschillende computer algoritmes en de connectie tussen het kleuren van driehoeken op n punten en de zogenaamde Turán verzamelingen. Merk op dat als geldt dat $k = 2$ we



Figuur 7: Het Fano-vlak is 3-uniforme hypergraaf bestaande met $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en $E = \{\{5, 1, 6\}, \{5, 2, 3\}, \{6, 4, 3\}, \{1, 0, 3\}, \{2, 0, 6\}, \{5, 0, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$.

dan weer kijken naar de Ramsey-getallen zodat beschreven in Hoofdstuk 3.

We beperken deze generalisatie even tot twee kleuren. Dan kunnen we een bovengrens voor de k -reguliere hypergraaf vinden door te kijken naar $(k - 1)$ -reguliere hypergrafen.

Stelling 6.10 (P. Erdős en R. Roda). *Er geldt dat $R_k(s, t) \leq 2^{\binom{R_{k-1}(s-1, t-1)}{k-1}} + k - 2$.*

Dit is een resultaat gegeven door P. Erdős en R. Roda in 1952 en het bewijs kan je lezen in hun artikel[6]. Vanwege de complexiteit van dit bewijs gaan we er hier niet verder op in.

De volgende stelling geeft ook een bovengrens voor de k -reguliere hypergraaf door te kijken naar $(k - 1)$ -reguliere hypergrafen, maar is makkelijker te bewijzen.

Stelling 6.11. *Er geldt dat $R_t(k, l) \leq R_{t-1}(R_t(k - 1, l), R_t(k, l - 1)) + 1$.*

Bewijs. Neem $N = R_{k-1}(R_t(k - 1, l), R_t(k, l - 1)) + 1$ en beschouw een willekeurige 2-kleuring, zeg χ , op de hyperkanten van $K_N^{(t)}$. Neem nu een punt v . Dan is er een bijjectie tussen de hyperkanten die v bevatten en de $(t - 1)$ -tupels van punten van $V(K_N^{(t)}) \setminus v$. We bekijken nu $K_{N-1}^{(t-1)}$ en deze geven we een 2-kleuring, zeg ψ , door $\psi(v_1, \dots, v_{t-1}) := \chi(v_1, \dots, v_{t-1}, v)$. Vanwege hoe we N gedefinieerd hebben, weten we dat $K_{N-1}^{(t-1)}$ een rode klik van grootte $R_t(k - 1, l)$ heeft of een blauwe klik van grootte $R_t(k, l - 1)$. Bekijk het geval dat hij een rode klik van grootte $R_t(k - 1, l)$ bevat. Bekijk nu alle punten die samen de rode $R_t(k - 1, l)$ vormen. Dan weten we dat hierin dus een rode $K_{k-1}^{(t)}$ of een blauwe $K_l^{(t)}$, en dit zit dus ook in onze $K_N^{(t)}$. Dit betekent dat we in het laatste geval van de blauwe $K_l^{(t)}$ klaar zijn. Dus bekijk nu het geval dat we een rode $K_{k-1}^{(t)}$ hebben.

Dan zijn er dus $k - 1$ punten zodat elke t punten een rode hyperkant vormt. Verder weten we vanwege hoe onze kleuring is gedefinieerd dat elke rode $(t - 1)$ -tupel van punten gecombineerd met v een rode hyperkant vormt. Dus de eerste $k - 1$ punten die we al hadden samen met het punt v vormt een rode $K_k^{(t)}$ in de oorspronkelijke $K_N^{(t)}$. Het geval dat we onze $K_{N-1}^{(t-1)}$ een blauwe klik van grootte $R_t(k, l - 1)$ bevat gaat analoog aan dit geval. $\square$

Als laatste kunnen we kijken naar wat er gebeurt als we ook niet-volledige grafen toestaan. Dit kijkt naar de aanwezigheid van een specifieke graaf in een bepaalde kleur. Merk op dat deze graaf zich nog steeds moet bevinden in een willekeurige kleuring op de lijnen van een volledige graaf.

Definitie 6.12. Neem $r > 0$ geheel, en neem $G_1, \dots, G_r$ willekeurige grafen. Dan is $R(G_1, \dots, G_r)$ de kleinste $n \in \mathbb{N}$ zodat er geen $(G_1, \dots, G_r)$ -goede kleuring op de lijnen van K_n bestaat. In andere woorden is het Ramsey-getal de kleinste $n \in \mathbb{N}$ zodat er in een willekeurige kleuring op de lijnen van K_n voor elke $1 \leq i \leq r$ een subgraaf isomorf aan G_i gevonden kan worden in kleur i .

Er zijn studies die zich bezig houden met deze Ramsey-getallen met betrekking tot specifieke grafen. Een voorbeeld hiervan is de studie naar Ramsey-getallen en boeken, zoals we al benoemden in Hoofdstuk 4. Wij gaan een voorbeeld uitwerken waarbij we kijken naar bomen.

Definitie 6.13. Een *cykel*, C_n is een enkelvoudige, samenhangende graaf op n zodat elk punt verbonden is met twee andere punten.

Definitie 6.14. Een *boom*, B_n , is een samenhangende graaf op n punten zonder cycli.

Merk op dat dit betekent dat een boom op n punten dus altijd $n - 1$ lijnen heeft.

We kunnen nu een bovengrens geven voor het Ramsey-getal met betrekking tot bomen. Deze bovengrens is gevonden door P. Erdős en R. Graham in 1973 [4].

Stelling 6.15 (P. Erdős en R. Graham). *Neem B_n een boom. Dan geldt dat $R(B_n) \leq 4n - 3$.*

Merk op dat $R(B_n)$ de kleinste $m \in \mathbb{N}$ is, zodat er in een willekeurige 2-kleuring, zeg rood en blauw, op de lijnen van K_m er of een rode of een blauwe kopie van B_n gevonden kan worden. Voor het bewijzen van deze bovengrens hebben we de volgende lemma's nodig.

Lemma 6.16. *Als G een graaf is met gemiddelde graad d , dan heeft hij een deelgraaf G' met minimale graad minstens $\frac{d}{2}$.*

Bewijs. Neem G een graaf op m punten met gemiddelde graad d . Dan heeft deze graaf $\frac{md}{2}$ lijnen. Verwijder nu een punt met graad strikt kleiner dan $\frac{d}{2}$. Doe dit herhaaldelijk zolang deze punten met deze eigenschap nog bestaan. Merk op dat we per keer minder

dan $\frac{d}{2}$ lijnen verwijderen. We kunnen dit maximaal m keer doen, dus we verwijderen in totaal minder dan $\frac{md}{2}$ lijnen. Dat betekent dat er minimaal één lijn, en daarmee dus ook minimaal één punt, over blijft. Het is nu duidelijk dat dit algoritme de gevraagde deelgraaf G' vormt. $\square$

Lemma 6.17. *Neem B_n een boom. Als G een graaf is met minimale graad $n - 1$, dan geldt dat $B_n \subseteq G$.*

Bewijs. We gaan dit bewijzen met inductie op n . Het geval $n = 1$ is triviaal. Neem nu aan dat het waar is voor B_{n-1} . Neem v een blad, dit is een punt in een boom met graad één, en neem u zijn unieke buur. Dan maak de graaf H door uit B_n het punt v te verwijderen. Dan geldt vanwege onze inductiehypothese dat $H \subseteq G$. Neem dus nu zo'n kopie H in G . Beschouw hierin het punt w , dat dezelfde rol heeft als u . Omdat G minimale graad $n - 1$ heeft, heeft w minstens $n - 1$ buren. Van deze buren kunnen er maximaal $n - 2$ andere punten uit H zijn. Dus w heeft een buur x dat niet in H zit. Creëer nu een kopie van B_n in G door H uit te breiden door dit punt x te verbinden met punt w . $\square$

Bewijs van Stelling 6.15. Neem $N = 4n - 3$ en neem een willekeurige kleuring op de lijnen van K_N . Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat minstens de helft van de lijnen rood gekleurd zijn. Laat nu $G \subseteq K_N$ de graaf geïnduceerd door alle rode lijnen. Omdat G minstens de helft van alle lijnen van K_N bevat, heeft G een gemiddelde graad van $2n - 2$. Vervolgens geldt volgens Lemma 6.16 dat er een deelgraaf G' van G bestaat met een minimum graad minstens $n - 1$. Daarmee geldt volgens Lemma 6.17 dat $B_n \subseteq G'$. Dus onze K_N heeft een monochromatische B_n . $\square$

7 Discussie en open problemen

We hebben inmiddels verschillende ontwikkelingen en generalisaties van Ramsey theorie behandeld. Er zijn over dit onderwerp nog veel meer interessante aspecten. Zo is er van de generalisatie met betrekking tot hypergrafen weinig bekend en zijn er veel studies over Ramsey theorie die zich focussen op specifieke grafen zoals cykels en bipartite grafen. Daarnaast zijn er een aantal Ramsey-theoretische resultaten in andere vakgebieden binnen de wiskunde. De ontwikkeling van de Ramsey theorie is nog in volle gang en daarmee bestaan er ook een aantal open problemen.

Erdős presenteerde een aantal van de open problemen en gaf daar een geldbedrag aan voor als iemand ze oplost. Een van deze problemen van Erdős is het volgende vermoeden.

Vermoeden 7.1. De limiet $\lim_{k \rightarrow \infty} R(k)^{\frac{1}{k}}$ bestaat.

Probleem 7.2. Bepaal de waarde $c := \lim_{k \rightarrow \infty} R(k)^{\frac{1}{k}}$ als deze bestaat.

Voor deze problemen bood Erdős respectievelijk \$100 en \$250, wat toendertijd een mooi bedrag was. Natuurlijk is de prestige en de eer dat je het probleem oplost veel meer waard. Merk op dat uit Hoofdstuk 4 en Hoofdstuk 5 volgt dat als deze waarde c bestaat hij ergens tussen $\sqrt{2}$ en 4 ligt.

Ramsey-theoretische resultaten hebben allemaal een gemeenschappelijk aspect dat ze beweren, namelijk als we te maken hebben met een groot genoeg verzameling of aantal nummers, dan kan je een fragment vinden dat zich op een bepaalde manier goed gedraagt. In andere woorden: Complete chaos is onmogelijk. Verschillende van deze resultaten zijn geformuleerd voordat Ramsey zijn theorie formuleerde. Deze zijn later gecategoriseerd als Ramsey-theoretische resultaten. De bekendste hiervan is de Stelling van Van der Weerden die in 1927 geformuleerd is door L. van der Weerden [19]. Deze kijkt naar een bepaalde structuur in een verzameling gehele getallen.

Stelling 7.3 (Stelling van Van der Weerden). *Neem $r, k > 0$ gehele getallen. Dan bestaat er een N zodanig dat als je alle getallen 1 tot en met N verdeelt in r klassen, er minstens één klasse is die een aritmetische progressie van lengte k bevat.*

Een ander belangrijk Ramsey-theoretisch resultaat is het “Happy ending” probleem. Dit probleem bevindt zich in de meetkunde en is geformuleerd door Esther Klein, maar verschijnt voor het eerst in een artikel van Erdős en Szekeres [7].

Stelling 7.4 (Happy ending problem). *Voor elke $N > 0$ geheel heeft elke voldoende grote eindige verzameling punten in de algemene positie in een vlak een deelverzameling op N punten die de hoekpunten van een convexe veelhoek vormen.*

Deze stelling heeft gezorgd voor de ontwikkeling van de eerst bovengrens van de Ramsey-getallen, zie Stelling 4.1, omdat Erdős en Szekeres Ramsey theorie slim wilde gebruiken voor het bewijs van hun meetkundige probleem.

Zoals te merken is, is er nog genoeg interessants te lezen over de Ramsey theorie, dat zeker ook nog de moeite waard is om je in te verdiepen. Verder heeft de recente ontwikkeling van de bovengrens, zie Stelling 4.9, een nieuwe techniek geboden die studie naar Ramsey theorie weer verder open heeft gezet. Ik verwacht hierdoor dat we in de toekomst nog veel meer over dit onderwerp kunnen lezen.

Referenties

- [1] Marcelo Campos, Simon Griffiths, Robert Morris, and Julian Sahasrabudhe. An exponential improvement for diagonal ramsey. *arXiv preprint arXiv:2303.09521*, 2023.
- [2] David Conlon. A new upper bound for diagonal ramsey numbers. *Annals of Mathematics*, pages 941–960, 2009.
- [3] Paul Erdős. Some remarks on the theory of graphs. 1947.
- [4] Paul Erdos and Ronald Graham. *on partition theorems for finite graphs*, volume 3. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [5] Paul Erdos and László Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Infinite and finite sets*, 10(2):609–627, 1975.
- [6] Paul Erdos and Richard Rado. Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. *Proceedings of the London mathematical Society*, 3(1):417–439, 1952.
- [7] Paul Erdős and George Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio mathematica*, 2:463–470, 1935.
- [8] William Feller. A direct proof of stirling’s formula. *The American Mathematical Monthly*, 74(10):1223–1225, 1967.
- [9] David JH Garling. *A course in mathematical analysis*, volume 1. Cambridge University Press, 2013.
- [10] Ronald L Graham and Vojtech Rödl. Numbers in ramsey theory. *Surveys in combinatorics*, 123:111–153, 1987.
- [11] Robert E Greenwood and Andrew Mattei Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 7:1–7, 1955.
- [12] David R Mazur. *Combinatorics: a guided tour*, volume 55. American Mathematical Soc., 2020.
- [13] Brendan D McKay and Stanislaw P Radziszowski. The first classical ramsey number for hypergraphs is computed. In *Proceedings of the second annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms*, pages 304–308, 1991.
- [14] FP Ramsey. Proc. london math. soc. *On a problem of formal logic*, 29:264–286, 1930.
- [15] Ashwin Sah. Diagonal ramsey via effective quasirandomness. *Duke Mathematical Journal*, 172(3):545–567, 2023.

- [16] Joel Spencer. Ramsey’s theorem—a new lower bound. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 18(1):108–115, 1975.
- [17] Joel Spencer. *Asymptopia*, volume 71. American Mathematical Soc., 2014.
- [18] Andrew Thomason. An upper bound for some ramsey numbers. *Journal of graph theory*, 12(4):509–517, 1988.
- [19] Bartel Leendert Van der Waerden. Beweis einer baudetschen vermutung. *Nieuw Arch. Wiskunde*, 15:212–216, 1927.
- [20] K. Walker. Dichromatic graphs and ramsey numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, 5(3):238–243, 1968.
- [21] Wikipedia contributors. Big o notation — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big_O_notation&oldid=1227006552, 2024. [Online; accessed 3-June-2024].
- [22] Wikipedia contributors. Ramsey’s theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ramsey%27s_theorem&oldid=1222970693, 2024. [Online; accessed 9-June-2024].