

RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN



FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN, WISKUNDE EN INFORMATICA

Wang-tegels

APERIODIEKE BETEGELINGEN

BACHELORSRIPTIE WISKUNDE

Auteur:
Simone WANING
s4773292

Begeleider:
dr. W. BOSMA

Tweede lezer:
dr. S. A. TERWIJN

Juli 2019

Inhoudsopgave

1	Introductie	2
2	Een aperiodieke verzameling van 13 Wang-tegels	3
2.1	Beatty rijen	7
2.2	Mealy machines	8
2.3	Een toepassing	9
3	Het Dominoprobleem	12
3.1	Turingmachines	12
3.2	Affiene afbeeldingen	12
3.3	Het Dominoprobleem	13
4	Minimale verzamelingen tegels	18
4.1	Twee en drie kleuren	18
4.2	11 tegels en 4 kleuren	21
5	Andere soorten tegels	22
5.1	Tegels met gekleurde hoeken	23

Hoofdstuk 1

Introductie

In 1961 introduceerde de wiskundige Hao Wang vierkante tegeltjes waarvan de zijdes gekleurd zijn. Deze tegels, vernoemd naar hem, worden Wang-tegels genoemd. De vraag die bij deze tegels gesteld wordt is de volgende: Als je een eindige verzameling Wang-tegels hebt, kan je dan het oneindige vlak bedekken met tegels uit deze verzameling? Hierbij mogen tegels niet geroteerd of gespiegeld worden en mogen tegels naast elkaar liggen als naast elkaar liggende zijdes dezelfde kleur hebben. Hierbij mogen dezelfde tegels natuurlijk vaker voorkomen in de betegeling. Een volgende vraag is of het mogelijk is het vlak alleen aperiodiek te bedekken met een verzameling Wang-tegels. Op deze vraag gaan we vooral in in deze scriptie.

Hao Wang had het volgende vermoeden over Wang-tegels: als het vlak met een verzameling Wang-tegels te bedekken is, kan dit ook altijd op een periodieke manier. Dit staat bekend als het vermoeden van Wang. In 1966 was Robert Berger, een student van Hao Wang, de eerste die aantoonde dat het vermoeden van Wang niet klopte [2]. Zo'n vijf jaar daarna bewees Raphael Robinson hetzelfde op een andere manier [14]. Weer jaren later, in 2007, bewees Jarkko Kari, hetzelfde op nog een andere manier [11]. In deze scriptie gaan we in Hoofdstuk 3 in op het bewijs van Jarkko Kari.

Er blijken verzamelingen Wang-tegels te bestaan waarmee het vlak alleen aperiodiek betegeld kan worden. Er zijn meerdere wiskundigen die hebben gezocht naar zulke verzamelingen en probeerden zo'n klein mogelijke verzamelingen te vinden. Robert Berger begon als eerste met een verzameling van meer dan 20.000 Wang-tegels. Hij vond zelf ook al snel een kleinere verzameling van maar 104 tegels. Dit aantal werd in de jaren daarna nog verder naar beneden gebracht. In 1995 vond Jarkko Kari een verzameling van 14 Wang-tegels waarmee je het vlak alleen aperiodiek kan bedekken [10]. Gebruikmakend van het idee van Jarkko Kari vond Karel Culik een kleinere verzameling van 13 Wang-tegels [4]. Op dit idee gaan we verder in in Hoofdstuk 2.

Het blijkt dat de kleinste verzameling Wang-tegels waarmee je het vlak alleen aperiodiek kan bedekken bestaat uit 11 tegels met 4 kleuren. Het vermoeden van Wang met het gebruik van drie of minder kleuren is wel waar. Deze resultaten worden besproken in Hoofdstuk 4.

In het laatste hoofdstuk worden een aantal tegels beschreven die erg lijken op Wang-tegels. Dit zijn tegels met bijvoorbeeld inkepingen en uitstulpingen of tegels met gekleurde hoeken in plaats van zijdes.

Hoofdstuk 2

Een aperiodieke verzameling van 13 Wang-tegels

In 1995 vond Jarkko Kari een verzameling van 14 Wang-tegels die het vlak alleen aperiodiek kunnen bedekken [10]. Hij liet zien dat er met zijn verzameling tegels betegelingen te maken zijn, maar dat er geen periodieke betegeling mee bestaat. Daarna vond Karel Culik een verzameling van dertien tegels en vijf kleuren, die het vlak ook alleen aperiodiek kan bedekken [4]. Hij vond deze verzameling door dezelfde techniek als Kari te gebruiken en bewees ook op dezelfde manier dat de verzameling aperiodiek is.

Om te beginnen is het goed om precies te weten wat een Wang-tegel is en hoe je hiermee het vlak kan bedekken.

Figuur 2.1: Een Wang-tegel



Definitie 2.1. Een *teg*el is een eenheidsvierkant. Van de rand horen alleen de linker-rand, onderrand en het hoekpunt linksonder bij de tegel.

Definitie 2.2. Een *Wang-tegel* is een tegel waarbij elke zijde gekleurd is.

Vaak worden deze kleuren weergegeven met rationale getallen. Laat T een eindige verzameling tegels en $\mathcal{B}$ een eindige verzameling Wang-tegels zijn.

Definitie 2.3. Een functie $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ is een *betegeling*. De onderste linkerhoek van een tegel in een betegeling ligt op een punt van de vorm $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Een betegeling van het vlak kan je ook zien als een verzameling tegels die het vlak helemaal opvullen zonder dat tegels elkaar overlappen.

Definitie 2.4. Een *Wang-betegeling* van het vlak met tegels uit $\mathcal{B}$ is een betegeling f waarbij aangrenzende zijdes van tegels dezelfde kleur hebben.

Dit betekent dat Wang-tegels niet geroteerd of gespiegeld mogen worden in een Wang-betegeling.

Definitie 2.5. Een betegeling f is *periodiek* met periode $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dan en slechts dan als $f(x, y) = f(x + a, y + b)$ voor elke $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Definitie 2.6. Een betegeling f is *dubbel periodiek* als er een $a > 0$ en $b > 0$ bestaan zodat $f(x, y) = f(x + a, y) = f(x, y + b)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

Propositie 2.7. *Als er een periodieke betegeling bestaat met tegels van T , dan bestaat er ook een dubbele periodieke betegeling met tegels van T .*

Bewijs. Stel dat er een periodieke betegeling bestaat met tegels van T en periode $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ zodat $f(x, y) = f(x + a, y + b)$ voor elke $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Er zijn 3 verschillende gevallen:

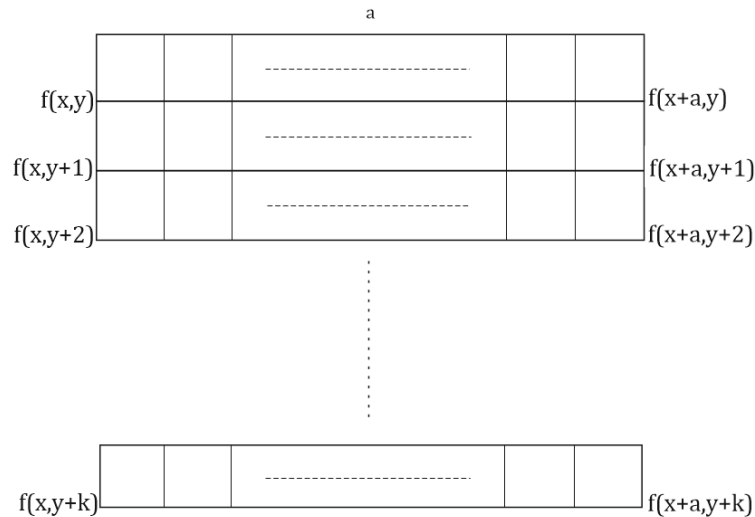
1. $a > 0$ en $b = 0$
2. $a = 0$ en $b > 0$
3. $a > 0$ en $b > 0$

We bekijken eerst geval 1. Het aantal tegels in de verzameling T is eindig, dus er bestaan maar eindig veel verschillende stukken in de betegeling met hoogte 1 en lengte a . Dat betekent dat er ergens in de betegeling twee dezelfde rijen van lengte a onder elkaar liggen. Stel dat deze rij na k rijen herhaald wordt. Dan volgt dat

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, y + k) \\ f(x + 1, y) &= f(x + 1, y + k) \\ &\vdots \\ f(x + a - 1, y) &= f(x + a - 1, y + k) \end{aligned}$$

Nu hebben we een rechthoek van breedte a en lengte k dat we periodiek kunnen herhalen en waarvoor geldt dat $f(x, y) = f(x + a, y) = f(x, y + k)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Dus we hebben een dubbel periodieke betegeling met tegels uit T .

Figuur 2.2: Geval 1 van Propositie 2.7

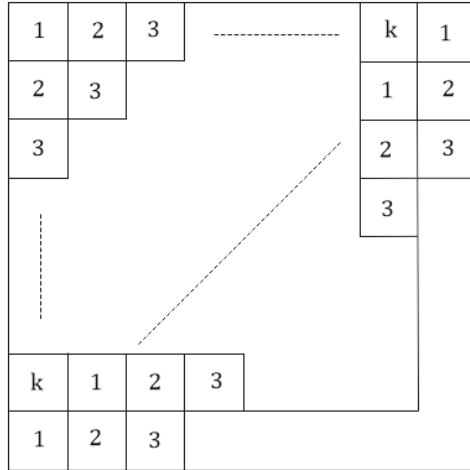


Geval 2 gaat op dezelfde manier alleen nu hebben we een rechthoek van breedte k en lengte b .

Tot slot bekijken we geval 3. We hebben nu een periode $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ met a en b beiden niet nul. Dus $f(x, y) = f(x + a, y + b)$ voor elke $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Aangezien er maar eindig veel tegels in de verzameling T zitten, zijn er maar eindig veel manieren om een a bij b vlak te bedekken. Er zijn dus ergens in de betegeling twee dezelfde a bij b vlakken die onder elkaar liggen. Stel dat het vlak na k rijen weer herhaald wordt. Dan volgt dat

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x, y + bk) \\
f(x + 1, y) &= f(x + 1, y + bk) \\
&\vdots \\
f(x + a - 1, y) &= f(x + a - 1, y + bk) \\
\\
f(x, y + 1) &= f(x, y + 1 + bk) \\
f(x + 1, y + 1) &= f(x + 1, y + 1 + bk) \\
&\vdots \\
f(x + a - 1, y + 1) &= f(x + a - 1, y + 1 + bk) \\
f(x, y + 2) &= f(x, y + 2 + bk) \\
&\vdots \\
f(x + a - 1, y + b - 1) &= f(x + a - 1, y + b - 1 + bk)
\end{aligned}$$

Figuur 2.3: Geval 3 van Propositie 2.7, elk getal stelt een a bij b vlak voor.



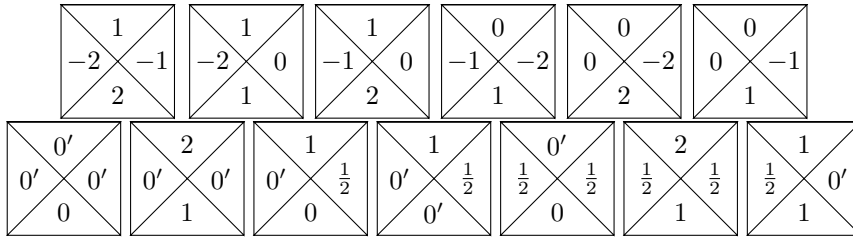
Wegens $f(x, y) = f(x + a, y + b)$ geldt dat het a bij b vlak gelijk is aan het a bij b vlak rechtsboven daarvan. We kunnen nu een vlak maken wat we periodiek kunnen herhalen en waarvoor geldt dat $f(x, y) = f(x + c, y) = f(x, y + d)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ met $c = ak$ en $d = bk$. De eerste kolom van a bij b vlakken bestaat uit de k vlakken van de periodieke betegeling die we al hadden. Dan kunnen we de linkerbovenhelft al helemaal invullen, want vlakken zijn hetzelfde als het vlak rechtsboven ervan. We kunnen de eerste kolom van a bij b vlakken nogmaals herhalen, want de eerste a bij b vlak past onder het laatste a bij b vlak van de kolom. Vanuit daar kunnen we de diagonalen vullen en krijgen we ook de rechteronderhelft. Nu hebben we een ak bij bk

vlak wat we kunnen herhalen waarvoor geldt dat $f(x, y) = f(x + ak, y) = f(x, y + bk)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Er bestaat dus een dubbel periodieke betegeling met tegels uit T . $\square$

Definitie 2.8. Een betegeling f is *aperiodiek* als die niet periodiek is.

Definitie 2.9. Een verzameling tegels is *periodiek* als er een periodieke betegeling mee te maken is.

Figuur 2.4: De verzameling T_{13} van dertien tegels



Definitie 2.10. Een verzameling tegels is *aperiodiek* als er minstens een aperiodieke betegeling mee te maken is.

We zeggen dat een Wang-tegel te vermenigvuldigen is met q als $aq + b = c + d$ met a, b, c en d zoals in Figuur 2.1. Het kan gebeuren dat een tegel met meerdere getallen te vermenigvuldigen is. De verzameling Wang-tegels T_{13} van Karel Culik, die uit dertien tegels met in totaal vijf kleuren bestaat, is in twee delen op te splitsen. De eerste zes tegels zijn (onder andere) te vermenigvuldigen met 3 en noemen we T_3 en de overige zeven tegels zijn allemaal met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen en noemen we $T_{\frac{1}{2}}$. Met $0'$ wordt op dezelfde manier gerekend als met 0.

Propositie 2.11. Met de verzameling tegels T_{13} (Figuur 2.4) is geen periodieke betegeling te maken.

Bewijs. Neem aan dat er een periodieke betegeling bestaat. Dan bestaat er ook een dubbele periodieke betegeling $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ met horizontale periode a en verticale periode b . Er zijn geen betegelingen mogelijk met als verticale periode 1 of 2, zoals eenvoudig na te gaan is. We kunnen dus aannemen dat $b \geq 3$. Aangezien er met tegels uit $T_{\frac{1}{2}}$ niet meer dan twee opeenvolgende rijen betegeld kunnen worden, wat ook eenvoudig te zien is, kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat de nulde rij betegeld wordt met tegels uit T_3 .

De som van de kleuren van de bovenzijdes van de tegels $f(1, i), f(2, i), \dots, f(a, i)$ noemen we met n_i voor $i \in \mathbb{Z}$. De betegeling heeft horizontale periode a , dus de a tegels links van $f(1, i)$ zijn hetzelfde als de a tegels rechts van $f(a, i)$. Een rij kan alleen bestaan uit tegels van T_3 of alleen uit tegels van $T_{\frac{1}{2}}$. Dit komt doordat tegels uit de T_3 en $T_{\frac{1}{2}}$ andere getallen op de verticale zijdes hebben staan. Er geldt dat

$$n_{i+1} = \begin{cases} 3n_i, & \text{als de tegels in de } i^{\text{de}} \text{ rij uit } T_3 \text{ komen,} \\ \frac{1}{2}n_i, & \text{als de tegels in de } i^{\text{de}} \text{ rij uit } T_{\frac{1}{2}} \text{ komen.} \end{cases}$$

Dit is zo, omdat tegels uit T_3 te vermenigvuldigen met 3 en zijn de tegels uit $T_{\frac{1}{2}}$ te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Als je een rij van lengte a hebt van tegels uit T_3 dan staat er

op de linkerkant van de rij hetzelfde getal als aan de rechterkant van de rij, want de rij heeft periode a . Omdat alle tegels uit de rij te vermenigvuldigen zijn met 3 geldt voor de rij dat $3a + b = c + d$ met $b = d$. Er volgt dan dat c , de onderkanten van de tegels uit de rij, 3 keer zo groot is als a , de bovenkanten van de tegels uit de rij. Als je een rij van tegels uit $T_{\frac{1}{2}}$ neemt gaat het op dezelfde manier.

De verticale periode van de betegeling is b en daarom geldt dat $n_1 = n_{b+1} = q_1 q_2 q_3 \cdots q_b \cdot n_1$, met q_i gelijk aan 3 of $\frac{1}{2}$. Aangezien er geen tegel is in T_3 die aan de onderkant het getal 0 heeft staan en in de nulde rij alleen tegels uit T_3 staan, kan de eerste rij geen nullen aan de bovenzijde hebben staan. Daaruit volgt dat $n_1 \neq 0$ en uit de vergelijking volgt dan dat $q_1 q_2 q_3 \cdots q_b = 1$. Alle termen daarvan zijn of 3 of $\frac{1}{2}$ en het product daarvan kan nooit gelijk zijn aan 1. Dit geeft een tegenspraak en er bestaat dus geen periodieke betegeling met tegels uit T_{13} . $\square$

2.1 Beatty rijen

We willen nu nog laten zien dat er betegelingen te maken zijn met de verzameling T_{13} . Om dit te bewijzen maken we gebruik van Beatty rijen.

Definitie 2.12. Een *bi-oneindige rij* x van een verzameling S is een functie $x : \mathbb{Z} \rightarrow S$. De waarde $x(i)$ noteren we als x_i met $i \in \mathbb{Z}$.

Definitie 2.13. Een *bi-oneindige Beatty rij* is een rij $A(\alpha)$ van gehele getallen, die bestaan uit het gehele deel van de veelvouden van α met $\alpha \in \mathbb{R}$. Oftewel, voor alle $i \in \mathbb{Z}$, $A(\alpha)_i = \lfloor i \cdot \alpha \rfloor$.

Voorbeeld 2.14. De bi-oneindige Beatty rij van 5,31 is als volgt:
..., -11, -6, 0, 5, 10, 15, 21, 26, 31, ...

Het volgende probleem werd in 1926 geïntroduceerd door Samuel Beatty [1] en werd door A. Ostrowski bewezen.

Stelling 2.15. *Voor alle positieve irrationale getallen α en β die voldoen aan de vergelijking $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$, komt elk geheel getal, behalve -1 en 0, precies één keer voor in de Beatty rij $A(\alpha)$ of in de Beatty rij $A(\beta)$.*

Bewijs. Neem N een positief geheel getal. Dan is $\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor$ het aantal positieve getallen in de Beatty rij van α dat kleiner is dan N en $\lfloor \frac{N}{\beta} \rfloor$ het aantal positieve getallen in de Beatty rij van β dat kleiner is dan N . Er geldt ook dat

$$\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N\alpha^{-1} + N\beta^{-1} = N(\alpha^{-1} + \beta^{-1}) = N.$$

Aangezien α en β irrationaal zijn, hebben $\frac{N}{\alpha}$ en $\frac{N}{\beta}$ een fractioneel deel ongelijk aan nul. Daaruit volgt dat

$$\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor = N - 1.$$

Dit is gelijk aan het aantal positieve getallen in de rijen kleiner dan N . Op dezelfde manier zijn er N getallen in de rijen kleiner dan $N + 1$. Er ligt dus precies 1 getal in een van de rijen tussen N en $N + 1$ als N een positief geheel getal is.

Als N een negatief geheel getal is, gaat het op dezelfde manier. $-\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor$ is dan het

aantal negatieve getallen in de Beatty rij van α groter dan N en $-\left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$ het aantal in de Beatty rij van β . Er geldt dat

$$-\frac{N}{\alpha} - \frac{N}{\beta} = -N.$$

en dat

$$-\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor = -N - 1.$$

Dit is gelijk aan het aantal negatieve getallen in de rijen groter dan N . Op dezelfde manier zijn er N getallen in de rijen groter dan $N + 1$. Er ligt dus ook precies 1 getal in een van de rijen tussen N en $N + 1$ als N negatief is. $\square$

Voorbeeld 2.16. Neem $\alpha = \pi$ en $\beta = \frac{\pi}{\pi-1}$.

Dan $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = \frac{1}{\pi} + \frac{\pi-1}{\pi} = 1$.

De Beatty rij van π is: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 25, 28, ...

De Beatty rij van $\frac{\pi}{\pi-1}$ is: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, ...

Er is te zien dat alle positieve getallen vanaf 1 precies een keer in een van beide rijen voorkomt. Hetzelfde geldt voor de negatieve kant van beide rijen.

Definitie 2.17. De bi-oneindige rij $B(\alpha)_i = A(\alpha)_i - A(\alpha)_{i-1}$ heet de *gebalanceerde representatie* van α voor alle $i \in \mathbb{Z}$. Dit zijn de verschillen van twee opeenvolgende elementen uit de Beatty sequence α .

Stelling 2.18. De gebalanceerde representatie van α bestaat uit maximaal twee verschillende getallen, namelijk $\lfloor \alpha \rfloor$ en $\lceil \alpha \rceil$.

Bewijs. $A(\alpha)_i$ is altijd minstens $\lfloor \alpha \rfloor$ groter dan $A(\alpha)_{i-1}$, want $A(\alpha)_i = \lfloor (i-1)\alpha + \alpha \rfloor$. Daaruit volgt dat $B(\alpha)_i = A(\alpha)_i - A(\alpha)_{i-1} \geq \lfloor \alpha \rfloor$. Net zo is $A(\alpha)_i$ is altijd maximaal $\lceil \alpha \rceil$ groter dan $A(\alpha)_{i-1}$. Daaruit volgt dat $B(\alpha)_i = A(\alpha)_i - A(\alpha)_{i-1} \leq \lceil \alpha \rceil$. $A(\alpha)_i$ en $A(\alpha)_{i-1}$ zijn beide gehele getallen, dus $B(\alpha)_i$ is ook een geheel getal. Daaruit volgt dat $B(\alpha)_i$ alleen $\lfloor \alpha \rfloor$ of $\lceil \alpha \rceil$ kan zijn. $\square$

Voorbeeld 2.19. We kunnen de gebalanceerde representatie van 5,31 uitrekenen.

$$B(5,31)_{-1} = A(5,31)_{-1} - A(5,31)_{-2} = -6 - -11 = 5$$

$$B(5,31)_0 = A(5,31)_0 - A(5,31)_{-1} = 0 - -6 = 6$$

De gebalanceerde representatie van 5,31 wordt:

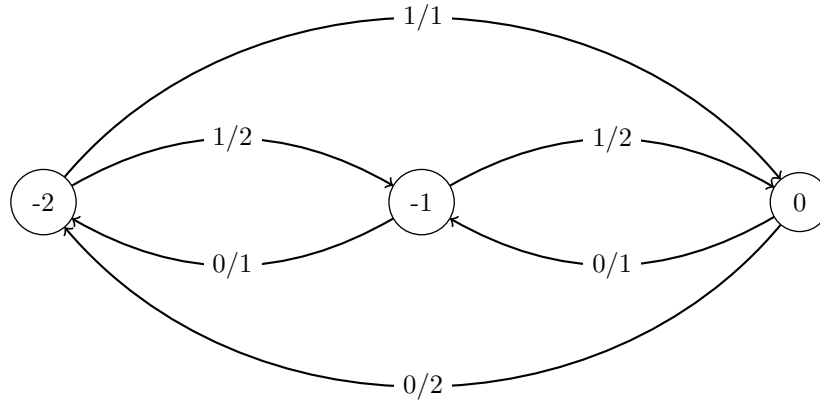
..., 5, 6, 5, 5, 5, 6, ...

2.2 Mealy machines

Een eindigetoestandsautomaat is een abstract wiskundig model dat bestaat uit een eindig aantal toestanden en een aantal transities. Als een eindigetoestandsautomaat twee tapes heeft wordt de machine een eindigetoestandstransducer genoemd. Hierbij wordt de ene tape voor de input gebruikt en de andere tape voor de output. Nu is een Mealy machine een eindigetoestandstransducer waarvan de output wordt bepaald door de toestand waarin de machine zich bevindt en door de huidige input. Als een eindigetoestandstransducer deterministisch is houdt dat in dat er voor elke toestand met bepaalde input maximaal één transitie mogelijk is. Als die niet-deterministisch is, kan het zijn dat er voor een toestand met bepaalde input meerdere transities mogelijk zijn.

Een Mealy machine kan weergegeven worden als een gelabelde gerichte graaf waar-

Figuur 2.5: De Mealy machine M_3 .



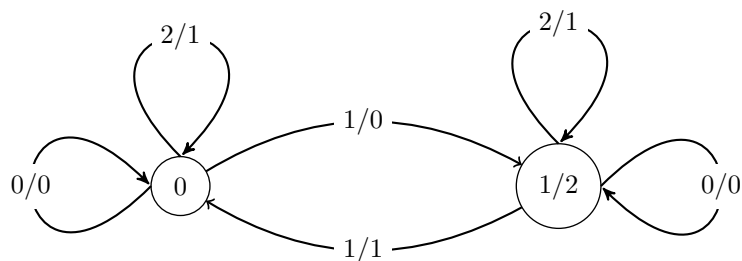
van de knopen toestanden zijn en de pijlen transitie. De transitie wordt gelabeld door een paar a/b van symbolen. Het eerste symbool is het input symbool en komt van de eerste tape en het tweede symbool is het output symbool en komt van de tweede tape.

Een eindige verzameling Wang-tegels is te interpreteren als een Mealy machine. Hierbij geven de boven- en onderkant van de tegel respectievelijk de input en de output van de transitie aan. De toestand waarin de transitie begint is de linkerzijde van de tegel en de toestand waarin die eindigt is de rechterzijde.

Als M een Mealy machine is, voldoen de bi-oneindige rijen x en y aan een relatie $\rho(M)$ dan en slechts dan als er een rij tegels bestaat, met overeenkomende verticale zijdes, waarvan de zijdes aan de bovenkant de rij x vormen en de zijdes aan de onderkant de rij y . Dit betekent dat er een overeenkomst is tussen het bestaan van een betegeling van het vlak en het bestaan van bi-oneindige iteraties van de Mealy machine op bi-oneindige rijen.

2.3 Een toepassing

Figuur 2.6: De Mealy machine $M_{\frac{1}{2}}$.



We gaan nu niet-deterministische Mealy machines M_q construeren om te laten zien dat er met de verzameling tegels T_{13} betegelingen bestaan, op dezelfde manier als Karel Culik heeft gedaan [4]. Dit doen we voor een gegeven positief, rationaal getal $q = \frac{n}{m}$. Deze machine vermenigvuldigt een gebalanceerde representatie $B(\alpha)$ van reële getallen met q . De toestanden van M_q representeren alle mogelijke waarden van $q[r] - \lfloor qr \rfloor$ voor $r \in \mathbb{R}$. Het is makkelijk in te zien dat alle mogelijke waarden van $q[r] - \lfloor qr \rfloor$ veelvouden zijn van $\frac{1}{m}$. Uit

$$q[r] - 1 \leq qr - 1 < \lfloor qr \rfloor \leq qr < q(\lfloor r \rfloor + 1),$$

volgt dat

$$-q < q[r] - \lfloor qr \rfloor < 1.$$

Daardoor zijn er nog $n + m - 1$ elementen die toestanden van M_q kunnen worden. Dit zijn de elementen van de verzameling toestanden

$$S = \left\{ -\frac{n-1}{m}, -\frac{n-2}{m}, \dots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m} \right\}$$

Verder moeten we nog weten wanneer er een transitie is van de ene toestand naar de andere in M_q . Er is een transitie van toestand s met input symbool a en output symbool b naar toestand $s + qa - b$ als die toestand bestaat. Als die niet bestaat is er geen transitie met label a/b vanaf toestand s . De eerste transitie komt van toestand $s_0 = 0$ en heeft als input $B(\alpha)_1$ en als output $B(q\alpha)_1$. De toestand waar de transitie heen gaat is dan

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 + qB(\alpha)_1 - B(q\alpha)_1 \\ &= q(A(\alpha)_1 - A(\alpha)_0) - A(q\alpha)_1 + A(q\alpha)_0 \\ &= q(A(\alpha)_1 - 0) - A(q\alpha)_1 + 0 \\ &= qA(\alpha)_1 - A(q\alpha)_1. \end{aligned}$$

De volgende toestand wordt dan

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + qB(\alpha)_2 - B(q\alpha)_2 \\ &= qA(\alpha)_2 - A(q\alpha)_2. \end{aligned}$$

Na het lezen van de input tot en met $B(\alpha)_{i-1}$ en het geven van output tot en met $B(q\alpha)_{i-1}$ gaat de machine naar toestand

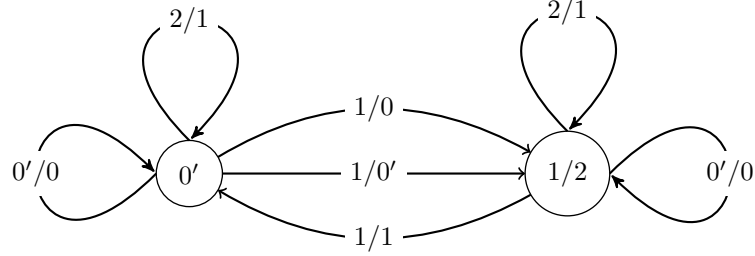
$$s_{i-1} = qA(\alpha)_{i-1} - A(q\alpha)_{i-1}.$$

De manier waarop de Mealy machine is geconstrueerd, zijn de input letters $B(\alpha)$ en output letters $B(q\alpha)$ in relatie met $\rho(M_q)$. De Mealy machine M_3 is op de manier die net is beschreven geconstrueerd met $q = 3$ en de Mealy machine $M_{\frac{1}{2}}$ met $q = \frac{1}{2}$. De input symbolen van M_3 zijn $\{0, 1\}$ en de output symbolen zijn $\{1, 2\}$. $B(\alpha)$ en $B(3\alpha)$ hebben de relatie $\rho(M_3)$ voor alle reële getallen α die voldoen aan $0 \leq \alpha \leq 1$ en $1 \leq 3\alpha \leq 2$, oftewel voor alle $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

Van $M_{\frac{1}{2}}$ zijn de input symbolen $\{0, 1, 2\}$ en de output symbolen $\{0, 1, 2\}$. $B(\alpha)$ en $B(\frac{1}{2}\alpha)$ hebben de relatie $\rho(M_{\frac{1}{2}})$ voor alle $\alpha \in [0, 2]$.

We willen de Mealy machines M_3 en $M_{\frac{1}{2}}$ herhalen zonder dat $M_{\frac{1}{2}}$ vaker dan twee keer in een rij voorkomt. Om dit te voorkomen veranderen we $M_{\frac{1}{2}}$ in een nieuwe Mealy machine $M'_{\frac{1}{2}}$ door een nieuw input/output symbool $0'$ te introduceren. De toestand 0 wordt ook veranderd in toestand $0'$, zodat de verzameling toestanden van M_3 en $M'_{\frac{1}{2}}$ disjunct zijn. De vereniging van de M_3 en $M'_{\frac{1}{2}}$ is nu de Mealy machine M .

Figuur 2.7: De Mealy machine $M'_{\frac{1}{2}}$.



Propositie 2.20. *De verzameling T_{13} heeft overaftelbaar veel betegelingen van het vlak.*

Bewijs. Als we als input $B(\alpha)$ nemen voor een $\alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$ dan geeft de Mealy machine M als output $B(3\alpha)$ als $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ en $B(\frac{1}{2}\alpha)$ als $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2]$. In het tweede geval, als $\alpha \in [1, 2]$ kan de output $B(\frac{1}{2}\alpha) \in [\frac{1}{2}, 1]$ gecodeerd worden in het alfabet $\{0', 1\}$ en als $B(\frac{1}{2}\alpha) \geq \frac{2}{3}$ berekent de tweede toepassing van M weer $B(\frac{1}{4}\alpha) \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ gerepresenteerd in het alfabet $\{0, 1\}$.

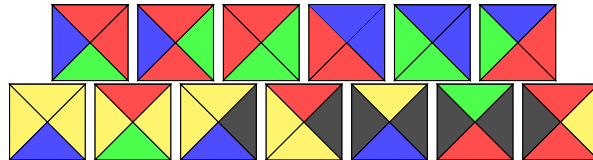
De machine kan nu nog een keer toegepast worden waarbij de vorige output de nieuwe input wordt, want de waarde komt altijd uit tussen de $\frac{1}{3}$ en 2. Dit kan willekeurig vaak herhaald worden.

Net zo, als $\alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$, dan is er input $B(\frac{1}{3}\alpha)$ of $B(2\alpha)$ die in relatie $\rho(M)$ is met $B(\alpha)$. $B(\frac{1}{3}\alpha)$ wordt gebruikt als $\alpha \geq 1$ en $B(2\alpha)$ als $\alpha \leq 1$. Dit kan ook willekeurig vaak herhaald worden, dus M kan ook de andere kant op itereren. Dit laat zien dat er bi-oneindige iteraties van M zijn op bi-oneindige rijen $B(\alpha), \alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$. Daardoor zijn er oneindig veel betegelingen van het vlak. $\square$

Samen met Propositie 2.11 bewijst dit dat je met de verzameling T_{13} alleen aperiodieke betegelingen kan maken.

Als we het vlak bedekken met Wang-tegels, mogen tegels niet gedraaid of gespiegeld worden. Daarom kunnen we kleuren van de horizontale zijden ook op de verticale zijden gebruiken, zelfs al worden ze aangegeven met een ander getal. In de verzameling tegels T zijn er vijf verschillende kleuren nodig op de verticale zijden, namelijk $-2, -1, 0, 0'$ en $\frac{1}{2}$. Op de horizontale zijden zijn de vier kleuren $1, 2, 0$ en $0'$ nodig. We kunnen de tegels dus kleuren met vijf verschillende kleuren. Dit kan bijvoorbeeld op de volgende manier.

Figuur 2.8: De verzameling T van dertien tegels met vijf kleuren



Hoofdstuk 3

Het Dominoprobleem

Voor we aan dit hoofdstuk kunnen beginnen moeten we weten wat Turingmachines en affiene afbeeldingen zijn.

3.1 Turingmachines

Een Turingmachine is een abstracte machine die operaties uitvoert op een oneindige tape. Een Turingmachine heeft een eindig aantal toestanden Q en leest met een kop over de tape. Op deze tape staan symbolen die uit een eindig alfabet Σ komen. Afhankelijk van wat de kop leest en in welke toestand de machine is kunnen er verschillende operaties uitgevoerd worden:

- Vervang het symbool dat door de kop gelezen wordt door een nieuw symbool.
- Verschuif de kop naar links of rechts.
- De machine gaat naar een andere toestand.

De mogelijke transities van een Turingmachine worden weergegeven in een vijftupel van de vorm $[q_i, s_j, s_k, D, q_l]$. De toestand $q_i \in Q$ geeft aan waar de machine zich nu bevindt, $s_j \in \Sigma$ is het symbool dat de kop leest, $s_k \in \Sigma$ is het symbool dat de kop schrijft, bij de D kan een L, R of N staan die respectievelijk aangeeft of de tape naar links of rechts gaat of niet verandert en $q_l \in Q$ is de toestand waar de machine heen gaat.

Een Turingmachine kan in een eindtoestand komen, dit zijn bepaalde toestanden die aangeven dat de machine stopt als die in zo'n toestand komt. Een andere manier waarop een Turingmachine stopt is als de kop een symbool leest, terwijl die in een toestand is waarvoor geen vijftupel bestaat bij dat symbool. Een Turingmachine is deterministisch als er voor elke toestand q_i samen met een symbool s_j maar één vijftupel bestaat.

3.2 Affiene afbeeldingen

Een affiene ruimte is een meetkundige structuur die een aantal eigenschappen van een Euclidische ruimte generaliseert. Zo is er in een affiene ruimte geen punt dat als oorsprong dient en is de ruimte onafhankelijk van het concept van afstand en de grootte van hoeken. Wel houdt de ruimte de eigenschappen dat lijnen parallel moeten blijven en de verhouding tussen lijnstukken moet ook gelijk blijven.

Alle Euclidische ruimtes zijn op te vatten als en affiene ruimtes. $\mathbb{R}^2$ is dus een affiene ruimte, die we aangeven met $\mathcal{A}^2$. In deze scriptie maken we alleen gebruik van affiene afbeeldingen van $\mathcal{A}^2$ naar $\mathcal{A}^2$.

Definitie 3.1. Een *affiene afbeelding* $f : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}^2$ is een afbeelding van affiene ruimtes waarbij punten, rechte lijnen en het platte vlak behouden blijven.

Bij een affiene afbeelding blijven ook parallelle lijnen parallel en verhoudingen behouden. De oorsprong hoeft niet per se naar de oorsprong afgebeeld te worden. Enkele affiene operaties die uitgevoerd kunnen worden op de affiene ruimte $\mathcal{A}^2$ zijn rotaties, translaties en spiegelingen.

3.3 Het Dominoprobleem

Vermoeden 3.2 (Het vermoeden van Wang). *Als een eindige verzameling Wang-tegels het vlak kan bedekken, kan dit periodiek.*

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat er een betegeling bestaat waarmee je het vlak alleen aperiodiek kan bedekken. In dit hoofdstuk laten we op een andere manier zien dat Wangs vermoeden niet waar is. Dit doen we met behulp van het Dominoprobleem.

Probleem 3.3 (Het Dominoprobleem). Beslis, gegeven een eindige verzameling Wang-tegels, of de tegels het vlak bedekken.

Het Dominoprobleem is beslisbaar als er een algoritme bestaat dat voor een willekeurige verzameling Wang-tegels bepaalt of het vlak ermee bedekt kan worden. Als er geen aperiodieke verzamelingen zouden bestaan, zou het Dominoprobleem beslisbaar zijn. Dit is zo omdat er dan een betegeling gemaakt kan worden van steeds grotere vierhoeken totdat er of totdat er een vierhoek gevonden is die periodiek herhaald kan worden of totdat alle vierhoeken van een bepaalde grootte niet verder uit te breiden zijn. Dus als het Dominoprobleem onbeslisbaar is, is Wangs vermoeden niet waar.

Stelling 3.4. *Het Dominoprobleem is onbeslisbaar.*

Voor we dit gaan bewijzen gaan we eerst een aantal problemen en lemma's introduceren die we in het bewijs kunnen gebruiken.

Een tape met aangegeven gescand symbool en de toestand van de Turingmachine vormen samen een configuratie van de Turingmachine.

Definitie 3.5. Een configuratie heet *onsterfelijk* als die niet in een eindtoestand komt.

Probleem 3.6 (Het sterfelijkheidsprobleem van Turingmachines). Beslis, gegeven een Turingmachine, of er een onsterfelijke configuratie bestaat.

Lemma 3.7. *Het sterfelijkheidsprobleem van Turingmachines is onbeslisbaar.*

Dit werd in 1966 bewezen door P.K. Hooper [6].

Voor we verdergaan moeten we eerst weten hoe Turingmachines getransformeerd kunnen worden in twee-dimensionale stuksgewijze affiene afbeeldingen. Dit kan door configuraties van Turingmachines te coderen als twee reële getallen $(l, r) \in \mathbb{R}^2$. Het linker getal geeft het linker gedeelte van de tape aan en het rechter getal het rechter deel van de tape.

Voorbeeld 3.8. Stel dat er positieve gehele getallen $\dots, a, b, c, d, e, f, g, h, i, \dots$ op de tape staat en de kop e leest, terwijl de machine in toestand q is, waarbij q ook een positief geheel getal is. Dan wordt het linker deel als $l = qd.cba\dots$ en het rechter deel van de tape gecodeerd als $r = ef.ghi\dots$. Het gehele deel van l en r bepaalt waar de machine daarna heengaat, afhankelijk van in welk eenheidsvierkant (l, r) ligt.

Elke transitie van de Turingmachine associëren we met een rationale affine afbeelding van $\mathbb{R}^2$ die de transitie simuleert. Aangezien een Turingmachine altijd maar eindig veel transities heeft wordt een deterministische Turingmachine omgezet in een systeem van eindig veel rationale affine transformaties $f_1, f_2, \dots, f_n$ van $\mathbb{R}^2$. De eenheidsvierkanten $U_1, U_2, \dots, U_n$ zijn het domein van de affine afbeeldingen. De afbeelding f_i wordt gebruikt als (r, l) in het eenheidsvierkant U_i ligt. Samen vormen de afbeeldingen een partiële functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met als domein $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ en als operatie $x \mapsto f_i(x)$ voor $x \in U_i$.

Definitie 3.9. Een punt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ is onsterfelijk als voor elke $i = 0, 1, 2, \dots$ de waarde $f^i(\mathbf{x})$ in het domein U ligt.

Dus als een punt onsterfelijk is kunnen we de gegeven affine afbeelding continu blijven toepassen en zal het punt altijd in een eenheidsvierkant U_i blijven. Nu kunnen we het volgende probleem introduceren en bewijzen dat het probleem onbeslisbaar is met behulp van Lemma 3.7

Probleem 3.10 (Het sterfelijkheidsprobleem van stuksgewijze affine afbeeldingen). Beslis, gegeven een systeem van rationale affine transformaties $f_1, f_2, \dots, f_n$ van het vlak en disjuncte eenheidsvierkanten $U_1, U_2, \dots, U_n$ die als hoekpunten een geheel getal hebben, of er een onsterfelijk beginpunt is.

Lemma 3.11. *Het sterfelijkheidsprobleem van stuksgewijze affine afbeeldingen is onbeslisbaar.*

Bewijs. Een Turingmachine heeft een onsterfelijke configuratie dan en slechts dan als het corresponderende systeem van affine afbeeldingen een onsterfelijk startpunt heeft. Nu kunnen we het sterfelijkheidsprobleem van stuksgewijze affine afbeeldingen reduceren tot het sterfelijkheidsprobleem van Turingmachines. Stel dat we een oplossing voor het sterfelijkheidsprobleem van stuksgewijze affine afbeeldingen hebben, dan hebben we ook een oplossing voor het sterfelijkheidsprobleem van Turingmachines. Dit geeft een tegenspraak, omdat we uit Lemma 3.7 weten dat het sterfelijkheidsprobleem van Turingmachines onbeslisbaar is. Daaruit volgt dat Het sterfelijkheidsprobleem van stuksgewijze affine afbeeldingen ook onbeslisbaar is. $\square$

Het volgende dat we willen laten zien is dat het Dominoprobleem onbeslisbaar is. Dit doen we door het sterfelijkheidsprobleem van stuksgewijze affine afbeeldingen te reduceren tot het Dominoprobleem. Hiervoor gaan we laten zien dat we een betegeling kunnen maken als we een onsterfelijk punt hebben. We gebruiken hiervoor hetzelfde idee als bij de betegeling van het vorige hoofdstuk. Daar was een verzameling tegels zo gegeven dat elke betegeling geforceerd wordt een oneindige baan te simuleren volgens de één-dimensionale stuksgewijze lineaire functie. We doen nu hetzelfde alleen dan met een andere functie, namelijk de een-dimensionale stuksgewijze lineaire functie $f : [\frac{1}{2}, 2] \rightarrow [\frac{1}{2}, 2]$ met

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{als } x \leq 1, \\ \frac{2}{3}x, & \text{als } x > 1. \end{cases}$$

Deze functie heeft geen periodieke banen, dus de verzameling tegels die erbij hoort is aperiodiek. Om ervoor te zorgen dat deze constructie gaat werken, gaan we hem wat generaliseren. Als eerste veranderen we de lineaire afbeeldingen in affiene afbeeldingen en als tweede moeten de afbeeldingen nu over $\mathbb{R}^2$ worden. De kleuren van de Wang-tegels worden weergegeven met elementen uit $\mathbb{R}^2$.

Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ een affiene afbeelding zijn. We zeggen dat de tegel



de functie f berekent als $f(n) + w = z + o$.

Stel dat we een rij gaan bedekken van lengte m waarin alle tegels dezelfde f berekenen. Dan volgt dat

$$f(n) + \frac{1}{m}w = s + \frac{1}{m}e,$$

met n en s het gemiddelde van de boven- en onderkant van de tegels, respectievelijk. Als we de rij, oftewel m steeds langer maken, wordt het effect van w en e steeds kleiner, totdat deze helemaal wegvallen. Als we een oneindige rij hebben, wordt het gemiddelde van de input door f gestuurd naar het gemiddelde van de output. Dit is zo doordat $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m}w \rightarrow 0$ en $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m}e \rightarrow 0$.

We bekijken nu een gegeven systeem van affiene afbeeldingen f_i en eenheidsvierkanten U_i . Voor elke i construeren we een verzameling T_i van Wang-tegels die de functie f_i berekenen en waarvan de bovenkanten in U_i liggen. We zeggen dat

$$T = \bigcup_i T_i.$$

In elke rij is er een andere verzameling T_i , wat ervoor zorgt dat ze niet gemengd worden in een horizontale rij tegels.

We gaan laten zien dat als er met T een betegeling te maken is, het systeem van affiene afbeeldingen een onsterfelijk punt heeft. Bekijk een willekeurige horizontale rij in de betegeling. Alle bovenkanten van de tegels in die rij horen bij een compacte en convexe verzameling U_i . Daarom bestaat er een $\mathbf{x} \in U_i$ dat het limiet is van het gemiddelde van de bovenkanten van een rij van toenemende lengte. Het limiet van het gemiddelde van de onderkanten van de rij is dan $f_i(\mathbf{x})$. Deze $f_i(\mathbf{x})$ is weer de bovenkant van de volgende rij en daarop kan de functie f weer toegepast worden. Dit kan herhaald worden voor alle rijen die daarna komen en we zien dat x een oneindige baan van affiene afbeeldingen is begonnen en dus een onsterfelijk punt is.

Nu moeten we nog laten zien hoe we de tegels zo kunnen kiezen dat er een onsterfelijke baan van affiene afbeeldingen is die correspondeert met de betegeling. We bekijken het eenheidsvierkant

$$U = [n, n+1] \times [m, m+1]$$

met $n, m \in \mathbb{Z}$. Elementen van

$$\text{Cor}(U) = \{(n, m), (n, m+1), (n+1, m), (n+1, m+1)\}$$

zijn de hoekpunten van U . Voor elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ en $k \in \mathbb{Z}$ noteren we

$$A_k(\mathbf{x}) = \lfloor k \cdot \mathbf{x} \rfloor$$

waarbij elk coördinaat afzonderlijk afgerond wordt, oftewel

$$\lfloor (x, y) \rfloor = (\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor).$$

We gaan nu net als bij de Beatty rijen de gebalanceerde representatie van $\mathbf{x}$ introduceren. We zeggen dat

$$\begin{aligned} B_k(\mathbf{x}) &= A_k(\mathbf{x}) - A_{k-1}(\mathbf{x}) \\ &= \lfloor k \cdot \mathbf{x} \rfloor - \lfloor (k-1) \cdot \mathbf{x} \rfloor. \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat als $\mathbf{x} \in U$, dan

$$B_k(\mathbf{x}) \in \text{Cor}(U).$$

Voorbeeld 3.12. Neem het punt $(3.2, 4.6) \in [3, 4] \times [4, 5] = U$. Dan geldt dat $\text{Cor}(U) = \{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5)\}$ en

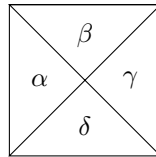
$$\begin{aligned} B_3((3.2, 4.6)) &= A_3((3.2, 4.6)) - A_2((3.2, 4.6)) \\ &= \lfloor 3 \cdot (3.2, 4.6) \rfloor - \lfloor 2 \cdot (3.2, 4.6) \rfloor \\ &= \lfloor (9.6, 13.8) \rfloor - \lfloor (6.4, 9.2) \rfloor \\ &= (9, 13) - (6, 9) \\ &= (3, 4) \in U \end{aligned}$$

De vector $\mathbf{x}$ wordt gerepresenteerd door de bi-oneindige rij

$$\dots, B_{-2}(\mathbf{x}), B_{-1}(\mathbf{x}), B_0(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{x}), B_2(\mathbf{x}), \dots$$

van hoekpunten. Dit is de gebalanceerde representatie van $\mathbf{x}$.

De verzameling tegels die correspondeert met een rationale affine afbeelding $f_i(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + b$ en zijn domein U_i bestaat uit alle tegels van de volgende vorm met $k \in \mathbb{Z}$ en $(x, y) \in U_i$:



$$\begin{aligned} \alpha &= f_i(A_{k-1}(\mathbf{x})) - A_{k-1}(f_i(\mathbf{x})) + (k-1)\mathbf{b} \\ \beta &= B_k(\mathbf{x}) \\ \gamma &= f_i(A_k(\mathbf{x})) - A_k(f_i(\mathbf{x})) + k\mathbf{b} \\ \delta &= B_k(f_i(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Als we nu een vaste $\mathbf{x} \in U_i$ hebben, dan passen de tegels voor opvolgende $k \in \mathbb{Z}$ aan elkaar met de verticale zijdes. Hierdoor wordt een horizontale rij gevormd waarvan de boven- en onderzijde respectievelijk de gebalanceerde representatie van $\mathbf{x}$ en $f_i(\mathbf{x})$ geven. Een berekening laat zien dat de tegels erboven de functie f_i berekenen, oftewel $f_i(\mathbf{n}) +$

$\mathbf{w} = \mathbf{z} + \mathbf{o}$.

f_i is rationaal en daarom kunnen er maar eindig veel tegels geconstrueerd worden, ook al zijn er oneindig veel $k \in \mathbb{Z}$ en $\mathbf{x} \in U_i$.

Nu kunnen we bewijzen dat het Dominoprobleem onbeslisbaar is.

Bewijs Stelling 3.4. Het is het duidelijk dat als een gegeven systeem van affine afbeeldingen een onsterfelijk punt $\mathbf{x}$ heeft, er een geldige betegeling bestaat waarvan de horizontale rijen de gebalanceerde representaties hebben van de opeenvolgende punten van de baan van $\mathbf{x}$. We concluderen dat er een verzameling tegels die het vlak bedekken bestaat dan en slechts dan als het gegeven systeem van affine afbeeldingen onsterfelijk is. We weten uit Lemma 3.10 dat het onsterfelijkheidsprobleem van affine afbeeldingen onbeslisbaar is, dus het Dominoprobleem is ook onbeslisbaar. $\square$

Het volgende probleem is een andere variant van het Dominoprobleem. Bij dit probleem wil je niet weten of er een betegeling bestaat, maar of er een periodieke betegeling bestaat.

Probleem 3.13 (Periodieke Dominoprobleem). Beslis, gegeven een eindige verzameling Wang-tegels, of er een periodieke betegeling bestaat met deze tegels.

Als er geen aperiodieke verzamelingen Wang-tegels zouden bestaan, zou dit probleem hetzelfde zijn als het Dominoprobleem. In Hoofdstuk 2 hebben we echter gezien dat zulke verzamelingen bestaan.

Stelling 3.14. *Het periodieke Dominoprobleem is onbeslisbaar.*

Dit bewijs werd gegeven door Emmanuel Jeandel in 2009 en is te vinden in [8].

Hoofdstuk 4

Minimale verzamelingen tegels

Als je gebruikt maakt van één kleur, is er precies één Wang-tegel te maken, namelijk met alle zijdes die kleur. Met deze tegel kan je het vlak bedekken en alleen op een periodieke manier, je herhaalt namelijk steeds dezelfde tegel. Nu gaan we kijken naar wat er gebeurt als je gebruikt maakt van twee of drie kleuren.

4.1 Twee en drie kleuren

Laat $\mathcal{B}$ een eindige verzameling Wang-tegels zijn en laat $\Sigma(\mathcal{B})$ de verzameling van alle betegelingen in $\mathbb{Z}^2$ zijn met tegels uit $\mathcal{B}$. Laat $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ de verzameling van alle periodieke betegelingen in $\mathbb{Z}^2$ zijn met tegels uit $\mathcal{B}$. Het is duidelijk dat $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \subseteq \Sigma(\mathcal{B})$.

Wangs vermoeden was dat als er je met een verzameling Wang-tegels het vlak kan bedekken, dit altijd periodiek kan. Dit is ook wel te schrijven als: Als $\Sigma(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ dan $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

In de vorige hoofdstukken hebben we al gezien dat Wangs vermoeden niet waar is, maar als je enkel gebruikt maakt van twee kleuren is de bewering wel waar.

Stelling 4.1. *Een verzameling Wang-tegels met twee kleuren kan het vlak alleen periodiek bedekken.*

Deze stelling is in 2010 bewezen door Wen-Guei Hu en Song-Sun Lin [7]. Zij maakten daarvoor gebruik van minimale cyclische voortbrengers en maximale non-cyclische voortbrengers.

Definitie 4.2. Een verzameling $\mathcal{B}$ is een *minimale cyclische voortbrenger* als $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ en $\mathcal{P}(\mathcal{B}') = \emptyset$ voor alle $\mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}$.

Dit zijn de verzamelingen $\mathcal{B}$ waarmee een periodieke betegeling te maken is, maar waar dit voor alle deelverzamelingen van $\mathcal{B}$ niet het geval is.

Definitie 4.3. De verzameling $\mathcal{B}$ is een *maximale non-cyclische voortbrenger* als $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \emptyset$ en $\mathcal{P}(\mathcal{B}'') \neq \emptyset$ voor alle $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}''$.

Dit zijn de verzamelingen $\mathcal{B}$ waarmee geen periodieke betegeling gemaakt kan worden, maar voor alle verzamelingen die groter zijn dan $\mathcal{B}$ wel.

We noteren de verzameling van alle minimale cyclische voortbrengers met $\mathcal{C}(p)$ en de verzameling maximale non-cyclische voortbrengers met $\mathcal{N}(p)$, waarbij $p \geq 2$ het aantal kleuren is. Het is duidelijk dat $\mathcal{C}(p) \cap \mathcal{N}(p) = \emptyset$, want met de verzamelingen die in $\mathcal{C}(p)$ zitten kun je wel een periodieke betegeling maken en met de verzamelingen uit $\mathcal{N}(p)$ niet.

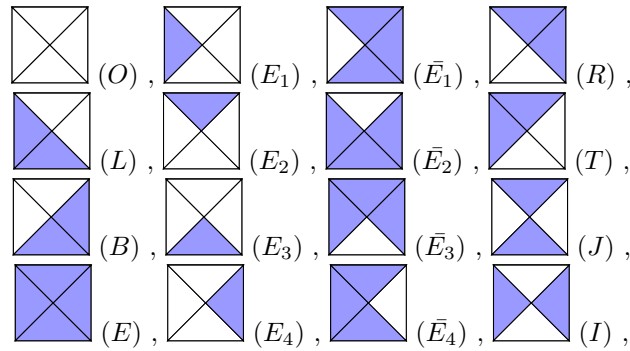
Wangs vermoeden voor twee kleuren is waar als de volgende uitspraak aangetoond kan worden:

$$\Sigma(\mathcal{B}) = \emptyset \text{ voor alle } \mathcal{B} \in \mathcal{N}(2).$$

Als $\mathcal{B} \in \mathcal{N}(2)$ bestaat er geen periodieke betegeling met tegels uit $\mathcal{B}$. Wangs vermoeden voor 2 kleuren is niet waar als er wel een aperiodieke betegeling bestaat met tegels uit $\mathcal{B}$. Als $\Sigma(\mathcal{B}) = \emptyset$ bestaat er geen betegeling met tegels uit $\mathcal{B}$, dus ook geen aperiodieke betegeling.

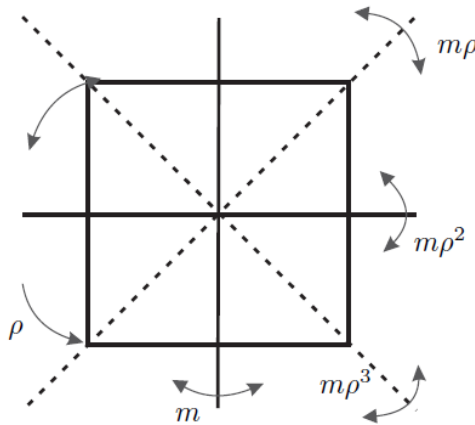
Met het gebruik van twee kleuren is het mogelijk zestien verschillende Wang-tegels te maken.

Figuur 4.1: De 16 Wang-tegels met 2 kleuren



We kunnen de elementen van $\mathcal{C}(p)$ en $\mathcal{N}(p)$ met $p = 2$ nog makkelijk uitrekenen. $\mathcal{C}(p)$ blijkt 38 elementen te hebben en $\mathcal{N}(p)$ heeft er 8. Deze elementen kunnen in verschillende klassen ingedeeld worden. Om de klassen te definiëren maken we gebruik van de symmetriegroep van een vierkant, namelijk de dihidrale groep met 8 elementen: $D_4 = \{I, \rho, \rho^2, \rho^3, m, m\rho, m\rho^2, m\rho^3\}$. Hierbij is ρ een rotatie van 90° en m de spiegeling om de verticale as. Verder bekijken we de permutatiegroep S_2 .

Figuur 4.2: De rotaties en spiegelingen van een rechthoek, [7]



In het geval met twee kleuren veranderen alle zijdes in de andere kleur. Bij het maken van een Wang-betegeling zijn de permutaties van de kleuren van de horizontale en verticale zijdes van de Wang-tegels onafhankelijk van elkaar. Daarom noteren we de

permutatie van horizontale zijden met $\alpha \in S_2$ en de permutatie van de verticale zijden met $\beta \in S_2$.

Nu definiëren we de equivalentieklasse van een verzameling $\mathcal{B}$ van Wang-tegels:

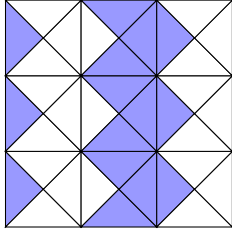
$$[\mathcal{B}] = \{\mathcal{B}' : \mathcal{B}' = (((\mathcal{B})_\tau)_\alpha)_\beta, \tau \in D_4 \text{ en } \alpha, \beta \in S_2\}.$$

De 38 elementen uit $\mathcal{C}(2)$ zijn in 6 klassen van minimale cyclische voortbrengers in te delen, namelijk:

1. $[\{O\}]$,
2. $[\{E_1, E_4\}]$,
3. $[\{E_1, \bar{E}_1\}]$,
4. $[\{B, T\}]$,
5. $[\{E_1, B, R\}]$,
6. $[\{E_1, E_2, B\}]$.

Het is eenvoudig na te gaan dat je met tegels uit een klasse een periodieke betegeling kunt maken en als je een tegel eruit haalt niet meer.

Voorbeeld 4.4. In de klasse $[\{E_1, \bar{E}_1\}]$ zitten 4 elementen, namelijk $\{E_1, \bar{E}_1\}, \{E_2, \bar{E}_2\}, \{E_3, \bar{E}_3\}$ en $\{E_4, \bar{E}_4\}$. Deze elementen zijn hetzelfde op rotatie na. Bij de periodieke betegeling van de Wang-tegels E_1 en $\bar{E}_1$ is er om en om een kolom tegels van E_1 en $\bar{E}_1$ en ziet er als volgt uit:



Als je een van de twee tegels weghaalt, is het niet meer mogelijk om een (periodieke) betegeling te maken. Dus alle elementen in de klasse $[\{E_1, \bar{E}_1\}]$ zijn minimale cyclische voortbrengers.

Er is precies één klasse van maximale non-cyclische voortbrengers in $\mathcal{N}(2)$. Deze wordt gegeven door $[\{E_1, E_2, \bar{E}_3, \bar{E}_4, T, R\}] = [N_w]$. De andere 7 verzamelingen zijn te verkrijgen door de volgende transformaties uit te voeren: $\rho, \rho^2, \rho^3, m, m\rho, m\rho^2, m\rho^3$. Deze verzamelingen kunnen ook gevonden worden door de maximale verzameling te nemen, die geen enkele minimale cyclische voortbrenger bevat.

Stelling 4.5. Als $\mathcal{B} \in \mathcal{N}(2)$, dan $\Sigma(\mathcal{B}) = \emptyset$.

Het bewijs van deze stelling is na te lezen in [7]. Nu kunnen we Wangs vermoeden voor 2 kleuren bewijzen.

Stelling 4.6. Als $\Sigma(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, dan geldt $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ voor $p = 2$.

Bewijs. Uit Stelling 4.5 volgt dat als $\mathcal{B} \in \mathcal{N}(2)$, als $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \emptyset$, dan ook $\Sigma(\mathcal{B}) = \emptyset$. Daaruit volgt dan dat als $\Sigma(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, dan ook $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ voor $p = 2$. $\square$

Nu we weten dat Wangs vermoeden voor 2 kleuren waar is, kunnen we ook naar 3 kleuren kijken. In [3] hebben Hung-Hsun Chen, Wen-Guei Hu, De-Jan Lai en Song-Sun Lin laten zien dat Wangs vermoeden voor 3 kleuren ook waar is.

Stelling 4.7. *Een verzameling Wang-tegels met drie kleuren kan het vlak alleen periodiek bedekken.*

Zij hebben deze stelling op dezelfde manier bewezen als die voor 2 kleuren. Het verschil tussen de bewijzen zit in de grote van de verzameling minimale cyclische voortbrengers en de verzameling maximale non-cyclische voortbrengers. De verzameling $\mathcal{C}(3)$ heeft namelijk 787.605 elementen die in 2.906 klassen ingedeeld kunnen worden, waar $\mathcal{C}(2)$ maar 38 elementen heeft. Met zoveel verschillende elementen is het niet meer te doen om het met de hand te berekenen en daarom worden er computerberekeningen gebruikt om de stelling te bewijzen.

4.2 11 tegels en 4 kleuren

We weten dat er door alleen tegels met twee of drie kleuren te gebruiken alleen periodieke betegelingen gemaakt kunnen worden, maar wat is nu de kleinste verzameling waarmee je het vlak alleen aperiodiek kan betegelen?

Stelling 4.8. *De minimale verzameling Wang-tegels waarmee je het vlak alleen aperiodiek kan bedekken bestaat uit 11 tegels en 4 kleuren.*

Deze stelling is bewezen door Emmanuel Jeandel and Michael Rao in 2015[9]. Het was al bekend dat een verzameling tegels met twee of drie kleuren nooit aperiodiek is, dus het minimale aantal kleuren wat nog zou kunnen was vier. Verder laten ze zien dat er geen aperiodieke verzameling bestaat met tien of minder tegels. Door veel verschillende verzamelingen van elf tegels te bekijken en te proberen hebben ze een aperiodieke verzameling van elf tegels met vier kleuren gevonden.

Hoofdstuk 5

Andere soorten tegels

Tot nu toe hebben we alleen gekeken naar Wang-tegels, waarbij tegels naast elkaar mogen komen te liggen in een betegeling als aangrenzende zijdes dezelfde kleur hebben. Er bestaan ook andere soorten tegels om het vlak mee te betegelen, zoals Robert Berger in [2] beschreef.

Een andere soort tegel is die met complementaire kleuren. Hierbij worden alle kleuren gepaard met een andere complementaire kleur. Een betegeling is nu valide als zijdes die naast elkaar liggen complementaire kleuren hebben. De vraag of je op deze manier het vlak kan bedekken is equivalent aan de vraag of het kan met Wang-tegels met gelijke kleuren. Van een betegeling met Wang-tegels met gelijke kleuren, kan je namelijk alle kleuren aan de rechter- en bovenzijde veranderen in de complementaire kleur om een betegeling te maken die voldoet aan het probleem met complementaire kleuren.

Als er ook rotatie wordt toegestaan bij beide problemen zijn ze niet meer equivalent. Het probleem met Wang-tegels waar zijdes met dezelfde kleur naast elkaar moeten liggen wordt triviaal als rotatie toegestaan is, want met één tegel kan je dan al het hele vlak bedekken.

Lemma 5.1. *Het probleem met complementaire kleuren blijft onbeslisbaar als translatie en rotatie is toegestaan.*

Bewijs. We gaan het Dominoprobleem reduceren tot het probleem met complementaire kleuren als translatie en rotatie is toegestaan. Stel we hebben een eindige verzameling gekleurde tegels waar we het vlak mee willen bedekken door alleen translatie te gebruiken. Tegels mogen hierbij naast elkaar komen te liggen als aangrenzende zijdes dezelfde kleur hebben. We nemen aan dat horizontale en verticale kleuren verschillend zijn. We veranderen nu de rechter- en bovenzijde in nieuwe complementaire kleuren. Een kleur van een zijde geeft nu aan of die links, rechts, boven of onder zit, dus rotatie is niet meer mogelijk met de tegels. Nu is de gewenste betegeling mogelijk dan en slechts dan als het vlak betegeld kan worden met de nieuwe tegels zodat complementaire tegels tegen elkaar liggen, door gebruik te maken van translatie en rotatie. Zoals we net hebben gezien is rotatie niet mogelijk en is het probleem gelijk aan het Dominoprobleem, waarvan we uit Hoofdstuk 3 weten dat het onbeslisbaar is. Dus het probleem met complementaire kleuren is onbeslisbaar als rotatie en translatie toegestaan is. $\square$

Nog een andere tegel is er een met inkepingen en uitstulpingen. Bij een betegeling met deze tegels mogen ze naast elkaar komen te liggen als een uitstulping in een inkeping past. Hierbij is het belangrijk dat het hele vlak bedekt wordt en er geen overlappingsen of gaten zijn. Als we aannemen dat er geen inkepingen of uitstulpingen in de hoeken zitten,

is het probleem of het vlak te bedekken is met zulke tegels equivalent aan het probleem met Wang-tegels. Ook is het probleem equivalent aan het probleem met complementaire kleuren als alleen translatie gebruikt wordt of het probleem met complementaire kleuren als translatie en rotatie gebruikt worden. Als het ook toegestaan is om tegels te spiegelen zijn de problemen met inkepingen en uitstulpingen en complementaire kleuren niet meer gelijk. Bij het probleem met inkepingen en uitstulpingen is het namelijk mogelijk dat er zijdes zijn die niet symmetrisch zijn.

Lemma 5.2. *Het probleem om het vlak te betegelingen met tegels met uitstulpingen en inkepingen blijft onbeslisbaar als er gebruik mag worden gemaakt van translatie, rotatie en spiegelingen.*

Bewijs. Laat een verzameling tegels met inkepingen en uitstulpingen gegeven zijn en neem aan dat we het vlak willen betegelingen door alleen gebruikt te maken van translatie. Het is nu makkelijk om inkepingen te maken die het passen van tegels niet verandert, maar het wel onmogelijk maakt om rotatie of spiegelingen te gebruiken. Dus de onbeslisbaarheid van het probleem kan worden gereduceerd naar het Dominoprobleem uit Hoofdstuk 3. $\square$

5.1 Tegels met gekleurde hoeken

Wang-tegels worden vaak gebruikt in de discipline computergraphics uit de informatica. Deze discipline houdt zich bezig met het weergeven van beelden met behulp van computers. Ares Lagae en Philip Dutré hebben laten zien dat gekleurde hoektegels eigenlijk handiger zijn om te gebruiken in computergraphics dan Wang-tegels [12]. Daarom hebben ze samen met Jarkko Kari een aantal methodes bedacht om van een aperiodieke verzameling Wang-tegels een aperiodieke verzameling gekleurde hoektegels te maken [13].

Definitie 5.3. Een *gekleurde hoektegel* is een tegel, waarbij elke hoek gekleurd is.

Figuur 5.1: Een gekleurde hoektegel

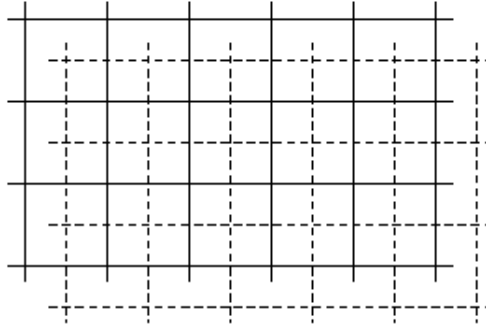
a	b
d	c

Als we het vlak gaan bedekken met een verzameling gekleurde hoektegels is het net als bij Wang-tegels niet toegestaan om de tegels te draaien of spiegelen en mogen tegels naast elkaar liggen als de aangrenzende hoeken dezelfde kleur hebben.

Het is mogelijk om aperiodieke verzamelingen hoektegels te vinden door een isomorfisme te maken tussen Wang-tegels en gekleurde hoektegels. Er bestaan een aantal constructie methodes om dit te doen, dit zijn diagonale translatie, horizontale translatie, verticale translatie, rotatie en subdivisie. De methodes diagonale translatie, rotatie en subdivisie werken voor alle aperiodieke verzamelingen Wang-tegels. Bij de constructiemethodes van horizontale en verticale translatie worden de verticale of horizontale zijdes genegeerd, respectievelijk. Dit geeft niet per definitie een bijectie tussen de Wang-tegels en gekleurde hoektegels en deze constructies werken dan ook niet voor veel aperiodieke verzamelingen Wang-tegels.

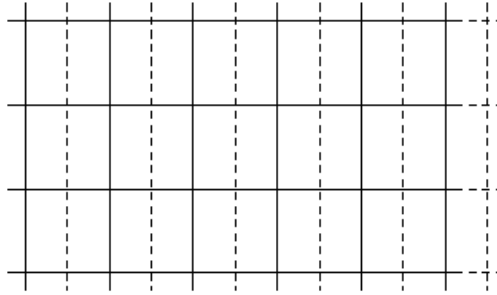
Bij diagonale translatie worden de gekleurde hoektegels (gestippelde lijnen Figuur 5.2) diagonaal geplaatst ten opzichte van de Wang-tegels (dichte lijnen Figuur 5.2). De hoeken van de gekleurde hoektegels komen in het midden van de Wang-tegels te liggen.

Figuur 5.2: Diagonale translatie, [13]



Elke Wang-tegel krijgt een verschillende kleur. De kleuren van de zijdes van de Wang zijdes zijn bij deze constructie niet belangrijk. De hoeken van de gekleurde hoektegels krijgen nu de kleur van de Wang-tegel waar ze in liggen. De verzameling gekleurde hoektegels die je hiermee krijgt bestaat uit een tegel voor elke vier Wang-tegels die een twee bij twee vierkant vormen. Het aantal kleuren van de tegels uit de verzameling is het aantal verschillende Wang-tegels, want elke Wang-tegel kreeg een andere kleur. Als de verzameling Wang-tegels aperiodiek is, dan is de verzameling gekleurde hoektegels die ermee correspondeert ook aperiodiek. Als deze methode wordt toegepast op de verzameling Wang-tegels van 13 tegels met 5 kleuren uit Hoofdstuk 2, krijgen we een aperiodieke verzameling van gekleurde hoektegels met 125 tegels bestaand uit 13 kleuren.

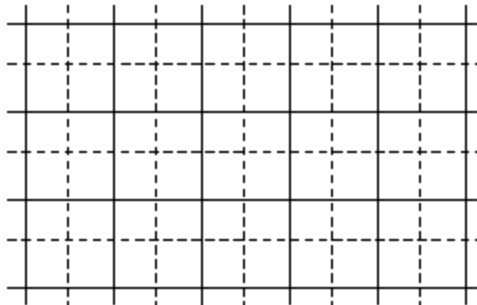
Figuur 5.3: Horizontale translatie, [13]



De kleinste aperiodieke verzameling van gekleurde hoektegels, die tot nu toe gevonden is, is een verzameling van 44 tegels met 6 kleuren. Deze is gevonden door de horizontale translatie methode te gebruiken op een aperiodieke verzameling van 16 Wang-tegels met 6 kleuren [5]. Deze methode lijkt erg op die van diagonale translatie. Het verschil is dat de tegels bij horizontale translatie horizontaal getransleerd worden (Figuur 5.3). Een hoek van een gekleurde hoektegel krijgt de kleur van de horizontale zijde van de Wang-tegels waar die tegenaan ligt. Het aantal kleuren wat een verzameling gekleurde hoektegels krijgt is gelijk aan het aantal kleuren van de verzameling Wang-tegels. Deze methode werkt niet om de verzameling van 13 Wang-tegels met 5 kleuren te veranderen in gekleurde hoektegels.

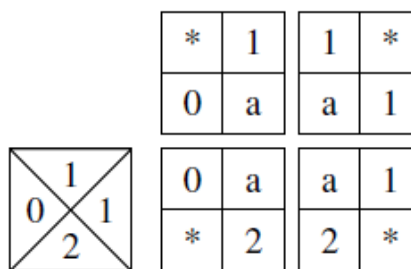
De laatste methode die we gaan bespreken is de subdivisiemethode. Bij deze methode

Figuur 5.4: Subdivisie, [13]



correspondeert elke Wang-tegel met vier gekleurde hoektegels. Deze vier gekleurde hoektegels liggen elk met een hoek in de desbetreffende Wang-tegel. De hoeken die in het midden van de Wang-tegel liggen krijgen de kleur die uniek gegeven is aan de Wang-tegel. De acht hoeken (twee van elke tegel) die aan de Wang-tegel grenzen krijgen de kleur van de zijde waaraan ze grenzen. De laatste hoeken van de gekleurde hoektegel krijgen een extra kleur. Een voorbeeld is te zien in Figuur 5.5. Het totaal aantal kleuren van de verzameling gekleurde hoektegels is nu het aantal Wang-tegels plus het aantal kleuren dat gebruikt wordt in de verzameling Wang-tegels plus één van de extra kleur. Het aantal tegels wat in de verzameling gekleurde hoektegels zit is vier keer het aantal tegels wat in de verzameling Wang-tegels zit. Als de verzameling Wang-tegels aperiodiek is, is de verzameling gekleurde hoektegels dat ook.

Figuur 5.5: De vier gekleurde hoektegels verkregen door een Wang-tegel, [13]



Bibliografie

- [1] S. Beatty, *Problem 3173*, Am. Math. Monthly 33 (1926) 159; solutions in 34 (1927) 159
- [2] R. Berger, *The undecidability of the domino problem*, Mem. Amer. Math. Soc. no. 66, (1966).
- [3] H.H. Chen, W.G. Hu, D.J. Lai, and S.S. Lin, *Nonemptiness problems of Wang tiles with three colors*, Theoretical Computer Science, 547:34–45, (2014)
- [4] K. Culik, *An aperiodic set of 13 Wang tiles*, Discrete Math 160 (1996) 245–251
- [5] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and Company, (1986)
- [6] P.K. Hooper: *The undecidability of the Turingmachine immortality problem*. The Journal of Symbolic Logic 31, 219–234 (1966)
- [7] W.G. Hu, S.S. Lin, *Nonemptiness problems of plane square tiling with two colors*, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2010) 1045–1059.
- [8] E. Jeandel *The periodic domino problem revisited*, Theoretical Computer Science, Volume 411, Issues 44–46, (2010)
- [9] E. Jeandel en M. Rao, *An aperiodic set of 11 Wang tiles*, arXiv:1506.06492, (2015)
- [10] J. Kari, *A small aperiodic set of Wang tiles*, Discrete Math 160 (1996) 259–264.
- [11] J. Kari, *The Tiling Problem Revisited*, in: Machines, Computations, and Universality, in: Lecture Notes in Computer Science, number 4664, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 72–79.
- [12] A. Lagae en P. Dutré, *An alternative for Wang tiles: Colored edges versus colored corners*, ACM Transactions on Graphics, Vol. 25, (2006) 1442–1459
- [13] A. Lagae, J. Kari en P. Dutré, *Aperiodic Sets of Square Tiles with Colored Corners*, Report CW460, (2006)
- [14] R.M. Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Inventiones Mathematicae 12, 177–209 (1971)