

Radboud Universiteit



BACHELORSCRIPTIE WISKUNDE

Planaire representaties van grafen op gesloten oppervlakken

Vincent Roovers

s4234065

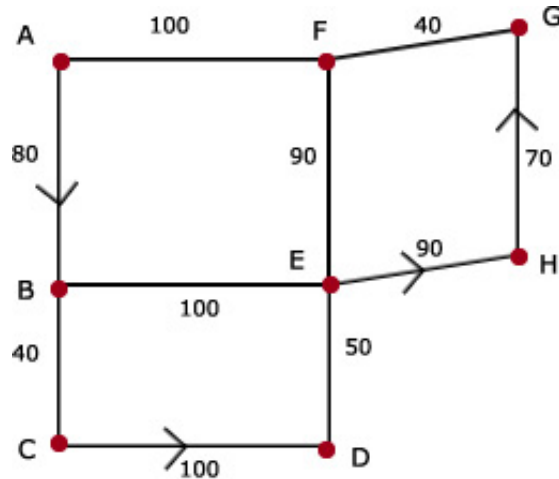
Begeleider:
W. Bosma
Tweede lezer:
H. Don

30 november 2018

Inhoudsopgave

1	Introductie	2
2	Planaire grafen	3
2.1	Basisdefinities	3
2.2	Planariteit	3
2.3	Kuratowski & Wagner	6
3	Representaties van gesloten oppervlakken	8
3.1	Het Crossing number	8
3.2	Representaties in het platte vlak	9
3.3	Het projectieve vlak en de fles van Klein	12
4	Representatie van grafen	15
4.1	Kleuring van een graaf	15
4.2	Planaire grafen	18
4.3	Geslacht van een graaf	20
4.4	Geslacht groter dan 1	21
5	Algoritme	24
5.1	Algoritme voor volledige grafen	24
5.1.1	Algoritme voor k_5	24
5.1.2	Circuits van k_5 :	25
5.1.3	Algoritme voor k_8	26
5.1.4	Circuits van k_8	28
5.2	Algoritme voor volledig bipartiete grafen	29
5.2.1	Algoritme voor $k_{4,4}$	29
5.2.2	Circuits van $k_{4,4}$	29
5.3	Resultaat	30

1 Introductie



Een verzameling van punten A t/m F, met daartussen lijnen, waarbij je naast de lijnen ook nog een getal kan toevoegen om een hedendaagse kwestie gestructureerd voor je te zien. Dat is wat we zien in het plaatje hierboven. Als we de letter ‘E’ nou Utrecht noemen, en ‘A’ Amsterdam, en de getallen naast de lijnen betekenen afstanden in kilometers, wat is dan de kortste route van A naar E? De conclusie is natuurlijk dat we via stad B moeten reizen gebaseerd op afstand.

Een verzameling punten, ook wel knopen genoemd, met daartussen een verzameling lijnen wordt een graaf genoemd. De mogelijkheden en interpretaties van grafen zijn enorm! We kunnen bijvoorbeeld een graaf maken van landen op de wereldkaart, waarbij de knopen de landen voorstellen en lijnen de aangrenzende landen, of het wegennetwerk binnen Nederland reconstrueren waarbij knopen de steden voorstellen en lijnen de verbindende snelwegen.

In deze scriptie ga ik mij vooral bezighouden met abstracte grafen. Ik wil kijken naar het idee van planariteit (definitie 2.3) van enkelvoudige grafen (definitie 2.2) en waar enkelvoudige grafen aan moeten voldoen om planair te zijn. Beginnend in het tweedimensionale vlak, ga ik me vervolgens oriënteren op de driedimensionale ruimte en ben ik benieuwd hoe planariteit van grafen zich gedraagt op driedimensionale oppervlakken. (zoals bijvoorbeeld een bol, donut of een voorwerp met 10 gaten).

2 Planaire grafen

2.1 Basisdefinities

Voor we het hebben over planaire grafen, zal ik de volgende definities van een graaf aanhouden.

Definitie 2.1. Een graaf $G=(V,E)$ is een geordend paar waarin V een willekeurige eindige verzameling knopen, weergegeven door v_i , is en waarin E een verzameling is bestaande uit verbindende zijden, weergegeven door $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$: de eindpunten van een zijde.

De elementen uit ‘ V ’ heten de knopen (vertices) van de graaf en de elementen uit ‘ E ’ heten zijden (edges).

Tussen elke twee knopen kan er een zijde bestaan, maar ook meerdere. Een zijde van een willekeurige knoop naar zichzelf, ook wel een lus genoemd, is ook een correcte zijde in een graaf.

Definitie 2.2. Een graaf $G = (V, E)$ heet **enkelvoudig** als de graaf geen lussen bevat en er tussen elke twee knopen hoogstens één zijde bestaat.

Definitie 2.3. Een enkelvoudige graaf $G = (V, E)$ heet **compleet** als elke knoop verbonden is met alle andere knopen. Zo’n graaf wordt vaak genoteerd als K_n , waarbij n het totaal aantal knopen is van de graaf

Definitie 2.4. Een graaf $G = (V, E)$ heet **samenhangend** als je vanaf elke willekeurige knoop naar alle andere knopen kan lopen via zijden in E :
 $\forall v, w \in V, \exists v=v_1, v_2, \dots, v_n = w$ zodanig dat $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

In deze scriptie zal er voornamelijk naar samenhangende enkelvoudige grafen worden gekeken, tenzij anders vermeld wordt.

2.2 Planariteit



Een bekende puzzel in deze wereld is het *Utility problem*. Stel je hebt drie huizen die elk de standaard benodigde gas/water/elektriciteit nodig hebben.

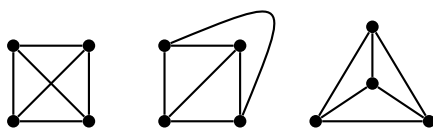
Kun je de drie huizen verbinden met gas, water en elektriciteit zonder dat de lijnen elkaar snijden?

Proberende zul je erachter komen dat dit net niet gaat lukken, maar waarom? Hier kunnen we een nuttige uitspraak over doen zodra we weten wat planariteit is en hoe het zich gedraagt.

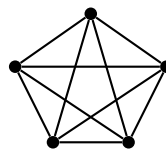
Definitie 2.5. Een **plainaire graaf** is een graaf die je in het vlak zodanig kan tekenen dat zijden elkaar niet snijden.

Als we een graaf planair tekenen, ontstaan er ingesloten gebieden. Dit worden **facetten** (faces) genoemd. Hierbij tellen we het buitengebied als een extra facet.

Voorbeeld 2.6. De complete graaf k_4 is planair omdat deze te tekenen is als een graaf zonder snijdende zijden. Het aantal facetten is gelijk aan 4 (Stelling 2.7). De complete graaf k_5 is niet planair. Hiervoor is geen tekening te maken zonder snijdende zijden (voor het bewijs, zie stelling 2.8). Over het aantal facetten kunnen we nog geen uitspraak doen.



Figuur 1: k_4 in verschillende vormen



Figuur 2: k_5

Zoals te zien is in figuur 1, is de graaf k_4 planair. Dat een graaf in eerste instantie twee snijdende zijden bevat, is dus geen conclusie voor het niet planair zijn van grafen. We kunnen k_4 uiteindelijk zonder snijdende zijden tekenen, dus is k_4 planair.

Hoe groter de graaf wordt, hoe moeilijker en complexer de tekeningen worden. We zouden niet makkelijk van een graaf kunnen zeggen of hij planair is of niet. Euler heeft echter laten zien dat er een verband bestaat tussen de knopen, zijden en facetten van een planaire graaf.

Stelling 2.7. (Euler Karakteristiek I) Voor samenhangende planaire grafen $G = (V, E)$ geldt de formule $\#V - \#E + \#F = 2$, waarbij F het aantal facetten is van de planaire graaf.

Bewijs. We bewijzen de Euler Karakteristiek met behulp van natuurlijke inductie naar het aantal zijden.

$P(1)$:

Stel een graaf $G = (V, E)$ heeft één zijde. Dan heeft deze ook precies twee knopen. Omdat deze graaf planair is, en maar één zijde heeft, is er geen facet, op het triviale omliggende facet na. Kortom, $\#V = 2$, $\#E = 1$ en $\#F = 1$. Hieruit volgt dat $\#V - \#E + \#F = 2 - 1 + 1 = 2$. Dus $P(1)$ geldt.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

Stel een samenhangende graaf $G = (V, E)$ is planair op n zijden. Dan geldt dat $\#V - \#E + \#F = 2$. We voegen nu één zijde e_{ij} toe aan onze bestaande graaf, waarbij deze zijde geen andere zijden kruist, omdat dit een tegenspraak zou kunnen geven met de planariteit van de graaf. Nu zijn er twee opties:

Optie 1: e_{ij} wordt verbonden aan v_j waarbij v_j een nieuwe knoop is die in eerste instantie niet in V zat. Op deze manier ontstaat er geen nieuw facet en geldt: $\Delta\#F = 0, \Delta\#V = 1$ en $\Delta\#E = 1$, wat opnieuw resulteert in $\#V - \#E + \#F = 2$.

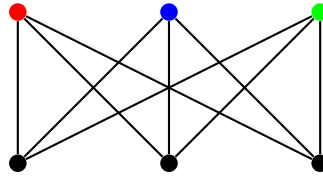
Optie 2: Onze nieuw zijde wordt verbonden aan een willekeurige bestaande knoop. Omdat de graaf samenhangend is, ontstaat er een nieuw facet. Het resultaat is: $\Delta\#F = 1, \Delta\#V = 0$ en $\Delta\#E = 1$. Ook dit betekent dat nog steeds $\#V - \#E + \#F = 2$.

Op deze manier kunnen we willekeurig veel zijden toevoegen aan onze graaf, en zo elke planaire graaf opbouwen met elementaire zijden, waarbij de graaf nog voldoet aan $\#V - \#E + \#F = 2$. Dus voor alle samenhangende planaire grafen geldt: $\#V - \#E + \#F = 2$. $\square$

Stelling 2.8. k_5 is niet planair

Bewijs. Stel k_5 is wel planair, dan voldoet deze aan de Euler karakteristiek $\#V - \#E + \#F = 2$. k_5 heeft 5 knopen, en 10 zijden. Dit zou betekenen dat $F = 7$, oftewel, k_5 heeft 7 facetten. Een facet wordt ingesloten door minimaal drie zijden. Dit zou betekenen dat er minimaal $F \cdot 3 (= 21)$ grenszijden zijn. Elke zijde is de grens van twee aansluitende facetten, wat betekent dat k_5 minstens $21/2 = 10,5$ zijden bevat. Dit zou betekenen dat k_5 minstens 11 zijden heeft. Dit is een tegenspraak met het feit dat k_5 10 zijden heeft. Dus $F \neq 7$, dus k_5 voldoet niet aan Euler's karakteristiek, dus k_5 is niet planair. $\square$

Als we nu weer terugkijken naar het utility probleem, dan kunnen we daar nu wel een betere uitspraak over doen. Als we het utility probleem als een graaf zouden afbeelden, dan krijgen we graaf als in figuur 3.



Figuur 3: $k_{3,3}$

We kunnen dus de huizen als één groep zien, en de utilities als één groep. Dit is een voorbeeld van een bipartitie graaf.

Definitie 2.9. We noemen een graaf **bipartiet** als je de knopen in twee verzamelingen U en W kan opdelen zodanig dat elke zijde e_{ij} een verbinding is van verzameling U naar W . Een volledig bipartiete graaf wordt genoteerd als $K_{u,w}$ met $u = |U|$ en $w = |W|$.

Het utility probleem kunnen we dus opvatten als een $k_{3,3}$ graaf, waarbij we drie huizen in U hebben (die onderling niet verbonden zijn), en de utilities in W . Dan is nu de vraag, is $k_{3,3}$ planair?

Stelling 2.10. $k_{3,3}$ is niet planair.

Bewijs. Stel $k_{3,3}$ is wel planair, dan voldoet $k_{3,3}$ aan de Euler karakteristiek $\#V - \#E + \#F = 2$. $V = 6$, $E = 9$, en dus geldt dat $F = 5$. In het geval van een bipartiete graaf wordt elk facet begrensd door minimaal 4 zijden. Elke zijde is de grens van twee verschillende facetten. Kortom, $k_{3,3}$ bevat $20/2 = 10$ grenszijden. Dit zou betekenen dat $k_{3,3}$ minstens 10 zijden heeft. Dit is in tegenspraak met het feit dat $k_{3,3}$ 9 zijden heeft. Dus $k_{3,3}$ voldoet niet aan de Euler formule, dus $k_{3,3}$ is niet planair. $\square$

Het is dus niet mogelijk om $k_{3,3}$ te tekenen in het platte vlak zonder twee snijdende zijden, en dus kunnen we het utility probleem niet oplossen in het platte vlak.

2.3 Kuratowski & Wagner

In 1930 kwam Kazimierz Kuratowski met een interessante stelling over planaire grafen. Deze stelling maakte gebruik van de termen deelgraaf en onderverdeling.

Definitie 2.11. Zij G, H twee grafen, Dan is H een **deelgraaf** van G als H bestaat uit een deelverzameling van de knopen en van de zijden van G . Hierbij moet de deelverzameling van de knopen alle eindpunten bevatten van de zijden die in de deelverzameling van zijden zitten.

Definitie 2.12. Zij G een graaf en e_{ab} een willekeurige zijde van de graaf. Dan is een **onderverdeling van een zijde** een toevoeging van een knoop v_c op de zijde e_{ab} en krijgen we de zijden e_{ac} en e_{cb} . Hierbij voegen we de knoop v_c toe aan V , en de twee zijden aan E .

We noemen een graaf H een **onderverdeling** van G als uit G , door middel van onderverdelingen, de graaf H gemaakt kan worden.

Stelling 2.13. (Kuratowski's Theorem)

Zij $G = (V, E)$ een graaf. Dan is G planair $\Leftrightarrow G$ bevat geen onderverdeling van $k_{3,3}$ of k_5 als deelgraaf.

Bewijs. $\Rightarrow$ Stel G bevat wel een onderverdeling van $k_{3,3}$ of k_5 als deelgraaf en noem deze deelgraaf H . Met stelling 2.8 en 2.10 zien we dat $k_{3,3}$ en k_5 niet planair zijn. Een onderverdeling van een planaire graaf is wederom planair. H is dus een deelgraaf van een planaire graaf die $k_{3,3}$ of k_5 bevat. Deze is dus niet planair, en dus is G ook niet planair.

$\Leftarrow$ De omgekeerde stelling is een stuk lastiger, en zal ook niet hier worden bewezen. Voor het bewijs verwijs ik naar Tamar-Mattis[6]. $\square$

Naast Kuratowski was ook Klaus Wagner bezig met planariteit van grafen. Wagner kwam ook met een soortgelijke stelling als Kuratowski, maar deze maakte gebruik van minoren.

Definitie 2.14. Zij G, H twee grafen. Dan is H een minor van G als we H kunnen verkrijgen uit G door herhaaldelijk toepassen van:

- 1) Een zijde elimineren;
- 2) Een zijde elimineren en de twee knopen aan het uiteinde samenvoegen;
- 3) Een knoop elimineren, en daarbij ook de bijbehorende zijden.

Opmerking 2.15. Een minor en deelgraaf zijn bijna hetzelfde, behalve dat we bij een minor ook nog twee knopen kunnen samentrekken (bewerking 2).

Stelling 2.16. Zij $G = (V, E)$ een graaf. dan is G planair $\Leftrightarrow k_{3,3}$ en k_5 niet tot de minoren van G behoren.

Je zou kunnen zeggen dat Kuratowski's theorem sterker is dan die van Wagner omdat een onderverdeling nog in een minor kan worden veranderd, maar een minor niet altijd in een onderverdeling. In de gevallen van de twee grafen $k_{3,3}$ en k_5 is het erg makkelijk aan te tonen dat als een graaf één van de twee grafen als minor heeft, dat deze ook de graaf als onderverdeling heeft. Hiermee zijn stelling 2.13 en 2.16 equivalent.

3 Representaties van gesloten oppervlakken

3.1 Het Crossing number

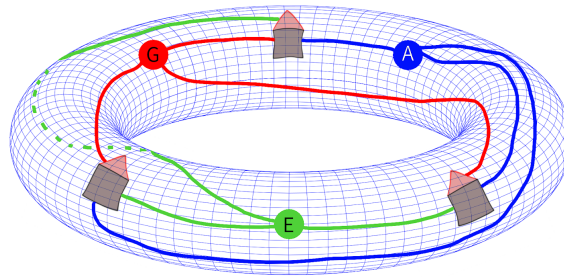
We kijken even terug naar het Utility probleem. We hebben bewezen dat deze niet planair te tekenen is in het platte vlak, maar kunnen we deze wel planair teken op gesloten oppervlakken? Als we dit proberen op een bol, dan komen we al snel tot de conclusie dat een bol topologisch hetzelfde is als het platte vlak. Hierop zou het utility probleem nog steeds niet op te lossen zijn.

Het wordt interessant om het utility probleem op een bol te bekijken met een gat in het midden, oftewel, een donut. Het gat van de donut zorgt ervoor dat we minstens één zijde door het midden kunnen sturen, die vervolgens aan een andere kant er weer uit komt.

Stelling 3.1. $k_{3,3}$ is planair op een donut

Bewijs. Zie figuur 4.

□



Figuur 4: $k_{3,3}$ getekend op de donut.

We hebben nu bewezen dat $k_{3,3}$ planair is door het te laten zien middels een tekening. In hoofdstuk 3 zullen we dit ook bewijzen zonder een tekening te maken.

Waar $k_{3,3}$ niet planair was op een bol, is deze wel planair op een donut. Hieruit volgt dat eigenschappen van een graaf kunnen veranderen zodra je een gat toevoegt aan het gesloten oppervlak waarop je de graaf tekent, omdat zijden zich nu door het gat naar de andere kant kunnen bewegen zonder een andere zijde te snijden.

Als wij ons dus niet meer beperken tot het platte vlak, maar tot gesloten oppervlakken in het algemeen, zijn er meer grafen planair. Maar welke grafen zijn nu planair op bijvoorbeeld de donut? Voordat we hier naar gaan kijken, willen we eerst wat weten over het crossing number.

Definitie 3.2. *Het crossing number van een graaf G , genoteerd als $Cr[G]$, is het minimale aantal benodigde snijpunten die G heeft in zijn meest simpele vorm bij een tekening in het platte vlak.*

Merk op: Een graaf G is planair $\Leftrightarrow Cr[G] = 0$

Voorbeeld 3.3. *Als we terug kijken naar onze grafen k_4 , k_5 en $k_{3,3}$ dan geldt voor deze grafen dat $Cr[k_4] = 0$, $Cr[k_5] = 1$ en $Cr[k_{3,3}] = 1$.*

Het crossing number zegt dus iets over het aantal snijpunten dat nodig is om een graaf te tekenen in zijn meest simpele vorm. Dit geeft ons meer informatie over de vorm van een graaf. Als $Cr[G] = 1$, dan weten we dat er twee zijden snijden. Om deze graaf vervolgens planair te maken, zouden we deze weer kunnen projecteren op de donut om te kijken of hij hier wel planair op te tekenen is. Dit brengt ons ook bij de volgende stelling:

Stelling 3.4. *Zij G een graaf met $Cr[G] = 1$, dan geldt dat G planair is op de donut.*

Het volgende bewijs is een intuïtief bewijs, waarop ik niet al te diep in zal gaan.

Bewijs. Zij e_1 en e_2 de zijden die elkaar snijden. Omdat $Cr[G] = 1$, zijn er geen andere zijden die een probleem opleveren. Z.v.v.a. laat e_1 nu over de breedte van de donut lopen en e_2 over de lengte. Op deze manier komen zowel e_1 als e_2 bij precies de overige knopen van de graaf aan, zonder een zijde te snijden, en kun je deze zijden verbinden aan de bijbehorende knopen. Dit heft het snijpunt op van e_1 en e_2 . Dit heeft als gevolg dat G planair is op de donut. $\square$

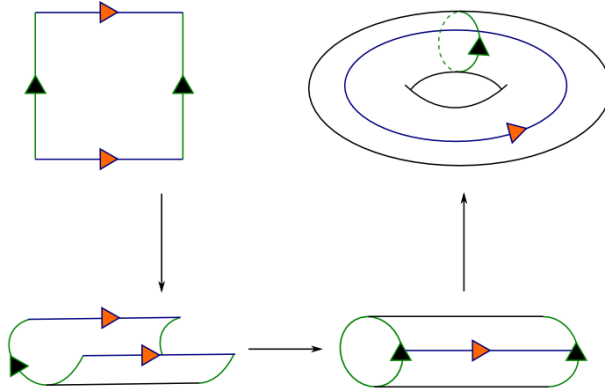
Definitie 3.5. *Een graaf G die snijpuntloos is op de donut wordt ook wel een **Toroïdale** graaf genoemd.*

Gevolg 3.6. *Alle grafen G met $Cr[G] = 0$ en $Cr[G] = 1$ zijn Toroïdale grafen.*

Toroïdale grafen hebben een kleurring van hoogstens 7. Dit wil zeggen dat als je de knopen van de graaf kan kleuren zonder dat twee verbonden knopen dezelfde kleur hebben, dat deze planair is op de donut, waarbij we hoogstens 7 verschillende kleuren gebruiken. k_7 is een voorbeeld van een graaf met een kleuring van precies 7.

3.2 Representaties in het platte vlak

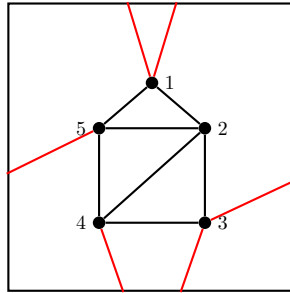
Het bestuderen van grafen op een gesloten oppervlak blijkt vaak een lastig concept te zijn. Naast dat objecten soms abstracte vormen zijn, zijn de meeste definities we kennen beter toepasbaar in het platte vlak. Het zou dus goed uitkomen als we onze donut kunnen representeren als het platte vlak en hier vervolgens onze definities en stellingen op kunnen toepassen, en dat is mogelijk.



Figuur 5: De representatie van een donut.

In figuur 5 zien we hoe een vlak wordt omgevouwen naar een donut. Allereerst vouwen we de twee oranje pijlen (blauwe zijden) naar elkaar toe totdat deze elkaar raken. Daarna vouwen we de zwarte pijlen (groene zijden) naar elkaar toe. Zodra de groene zijden elkaar raken, ontstaat er dus een cirkel met een gat in het midden, oftewel, een donut.

Het unieke van deze manier van representeren in het tweedimensionale vlak is dat als je een zijde helemaal naar boven trekt en ‘over’ de blauwe zijde heen gaat, dan kom je er onderaan weer uit! De donut is immers rond, dus als je helemaal rond gaat, kom je weer bij het begin uit. Dit is beter te zien aan de rode zijden in figuur 6.

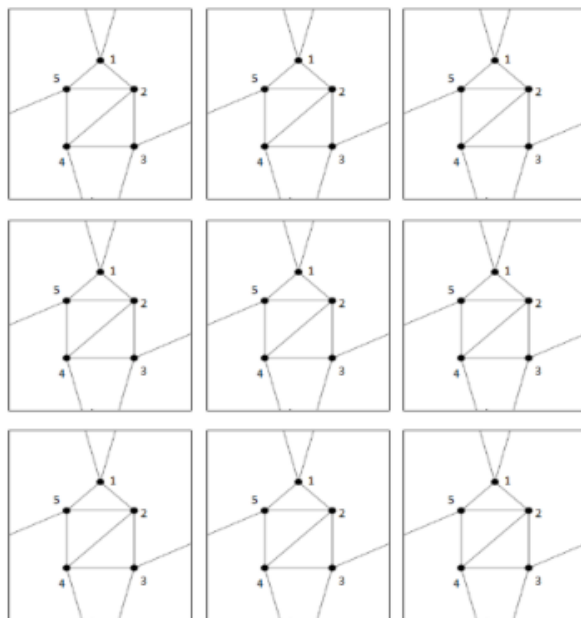


Figuur 6: k_5 op de donut zonder snijpunten

Voorbeeld 3.7. (*K_5 planair op de donut*) In figuur 6 zien we dat k_5 op de donut kan worden getekend zonder snijpunten. Als we nu de randen naar elkaar toe vouwen zoals in figuur 5, krijgen we een donut met daarop de graaf k_5 getekend zonder snijpunten.

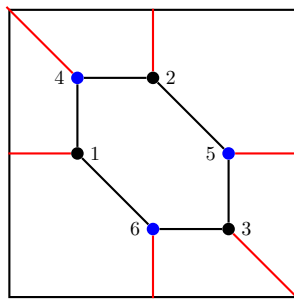
In figuur 6 zien we dus dat de zijden $\{1,3\}$, $\{1,4\}$ en $\{3,5\}$ via de kader verspringen naar de andere kant. In feite kunnen we onze graaf aan beide

kanten opnieuw tekenen, en zullen de zijden aan elkaar aansluiten. Uitgaande van onze initiële graaf in het midden, laten we op deze manier zien dat elke willekeurige knoop wordt verbonden met elke andere knoop. Dit wordt ook wel een **behang representatie** genoemd.

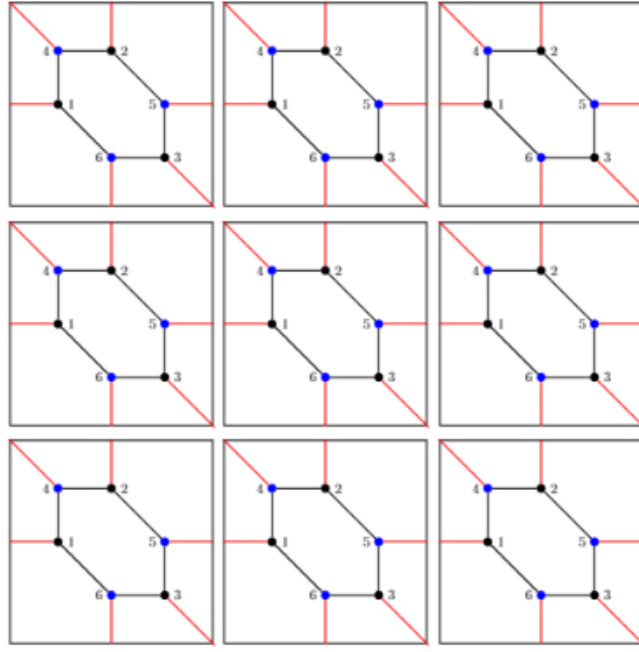


Figuur 7: k_5 als behang representatie

De behang representatie geeft een mooi idee hoe de graaf zich planair gedraagt op een donut. We kunnen nu het aantal facetten tellen en hiermee Euler's formule gebruiken. Dit zullen we beter bekijken in Hoofdstuk 3 en 4. In figuur 8 zien we hoe $k_{3,3}$ er op de donut uitziet, en in figuur 9 zien we de behang representatie van $k_{3,3}$



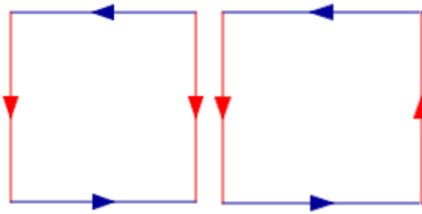
Figuur 8: $k_{3,3}$ zonder snijpunten op de donut.



Figuur 9: $k_{3,3}$ als behang representatie

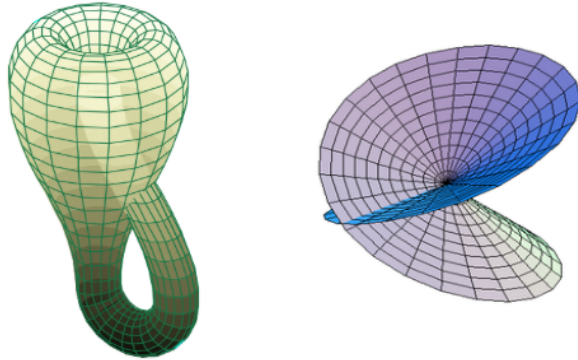
3.3 Het projectieve vlak en de fles van Klein

De donut wordt gerepresenteerd in het tweedimensionale vlak door middel van de overstaande randen naar elkaar toe te ‘vouwen’. Maar we kunnen natuurlijk ook randen op andere manieren vouwen om weer andere vormen te krijgen. We kijken naar figuur 10.



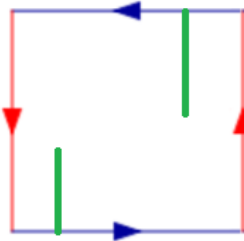
Figuur 10: Fles van Klein(links) en het projectieve vlak(rechts)

Merk op dat we links één van de twee randen draaien ten opzichte van elkaar en rechts alle randen draaien ten opzichte van elkaar. Dit resulteert in de fles van Klein (links) en het projectieve vlak (rechts).



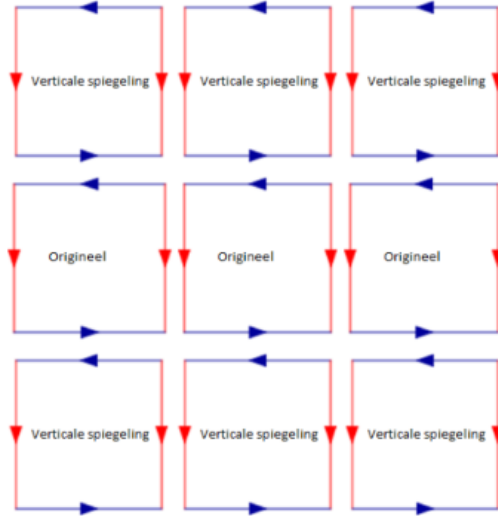
Figuur 11: Fles van Klein(links) en het projectieve vlak(rechts)

Hoewel deze vormen al erg abstract zijn, en minder goed voor te stellen dan een donut (want de driedimensionale oppervlakken doorsnijden zichzelf), zouden we onze theorie van planaire grafen ook hierop kunnen voortzetten. Ook deze vormen zijn als een tweedimensionaal vlak te beschouwen en dus kunnen we ook hier grafen op representeren. Bij een donut gingen de zijden van een graaf onder erin en kwamen ze op dezelfde hoogte er boven weer uit, maar bij getwiste randen zullen de zijden er gespiegeld uitkomen: Gaat een zijde aan de onderkant van de rand er af, en zit deze iets meer links van het midden, zal deze rechts van het midden er uitkomen aan de bovenkant. Dit wordt geïllustreerd in figuur 12, waarbij de zijde groen gekleurd is.



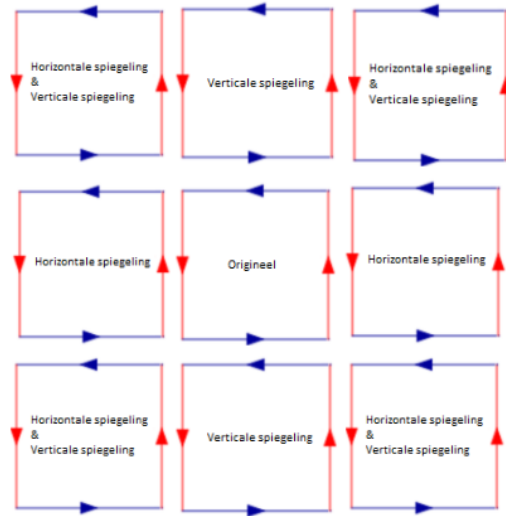
Figuur 12: De groene zijde komt er gespiegeld uit

Als we de fles van Klein en het projectieve vlak als een behang representatie willen aanschouwen, dan moeten we onze graaf spiegelen aan de hand van de draaiingen van de randen. De representatie van de fles van Klein zal er dan zo uitzien:



Figuur 13: Behang representatie van fles van Klein. Alle bewerkingen zijn gegeven t.o.v. het origineel.

De representatie van het projectieve vlak zal op analoge wijze gemaakt worden, rekening houdend met zowel verticale als horizontale spiegelingen omdat er twee draaiingen zijn:



Figuur 14: Behang representatie van het projectieve vlak. Alle bewerkingen zijn gegeven t.o.v. het origineel.

Wat precies de eigenschappen zijn van grafen op deze abstracte oppervlakken, zou een mogelijkheid voor een vervolgonderzoek kunnen zijn.

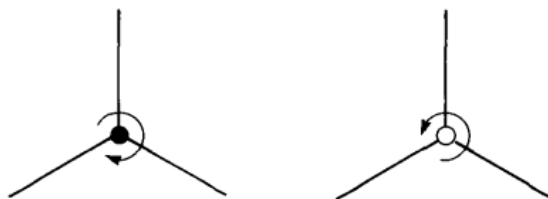
4 Representatie van grafen

Het volgende hoofdstuk is vooral afgeleid van het boek van Nora Hartsfield en Gerhard Ringel, *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*, J Academic Press, Boston, 1994

4.1 Kleuring van een graaf

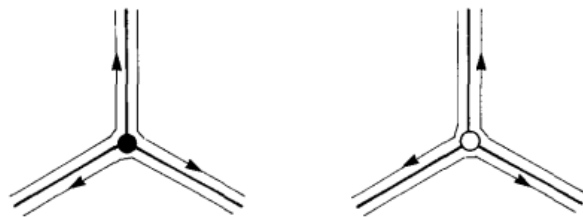
We zullen nu een nieuwe manier introduceren om grafen te representeren, zonder ze te hoeven tekenen. Op deze manier kun je veelal eigenschappen van de graaf bekijken zonder dat je deze daadwerkelijk voor je hoeft te zien. In dit hoofdstuk bekijken we weer grafen in het algemeen, zonder dat ze per definitie planair zijn.

Stel dat we een willekeurige knoop hebben van een graaf $G = (V, E)$. We kleuren deze knoop zwart of wit: Een zwarte knoop heeft een negatieve draairichting en een witte knoop een positieve draairichting t.o.v. een tekening in het vlak, zoals we zien in figuur 15.



Figuur 15: Een zwarte en een witte knoop met bijbehorende draairichting.

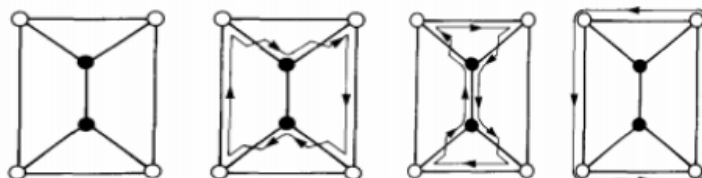
Stel dat we beginnen op een willekeurige knoop, dan gaan we over de zijden 'lopen'. Als we dan weer bij een zwarte knoop komen, pakken we de eerstvolgende zijde in negatieve draairichting. Bij een witte knoop, het omgekeerde. Op deze manier loop je een pad. In figuur 16 wordt dit afgebeeld.



Figuur 16: Verloop van een pad.

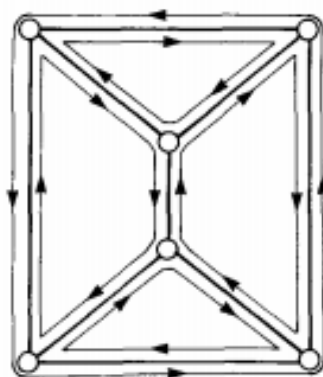
Van een willekeurige graaf kunnen we elke knoop zowel zwart als wit maken. Een kleuring van alle knopen van graaf wordt ook wel een rotatie genoemd.

Definitie 4.1. Een *rotatie* van een graaf G is een kleuring van de graaf waarin elke knoop zwart of wit wordt gemaakt. Hierbij wordt met zwart de negatieve draairichting aangegeven en met wit de positieve draairichting. Een rotatie van de graaf wordt ook wel genoteerd met de griekse letter ρ .



Figuur 17: Een rotatie van een graaf die drie circuits induceert.

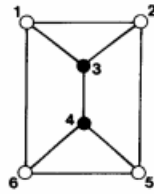
Links in figuur 17 zien we een voorbeeld van een rotatie van een graaf. Er zijn twee knopen zwart gemaakt, en de rest is wit. Als we beginnen in een willekeurige knoop en dan over een zijde lopen, lopen we bij een zwarte knoop vervolgens naar de eerste zijde in negatieve draairichting, en bij wit omgekeerd. Uiteindelijk komen we terug bij de initiële zijde. Vanuit hier wordt dit pad steeds opnieuw herhaald en noemen we deze ronde een circuit. Het aantal circuits dat onze rotatie ρ oplevert noteren we als $r(\rho)$. In figuur 17 zien we dus dat $r(\rho)=3$.



Figuur 18: Andere rotatie van dezelfde graaf: alle knopen zijn wit

In figuur 18 zien we dezelfde graaf, maar nu zijn alle knopen wit. Hiervoor geldt dat $r(\rho)=5$, zoals te zien is op de afbeelding. Het aantal circuits kan dus verschillen bij elke rotatie. In het geval van deze graaf zullen dat er altijd 1, 3 of 5 zijn. Waarom dat zo is, zullen we later bekijken.

Als we de knopen van de graaf in figuur 17 zouden nummeren, dan kunnen we een schema maken waarin we voor elke knoop kunnen aangeven aan welke knopen ze verbonden zijn. Voorbeeld 4.2 geeft ons wat meer inzicht in zo'n schema.



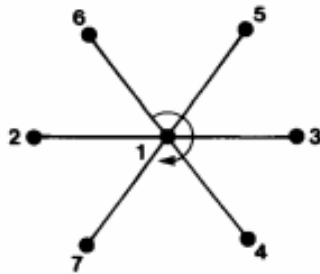
Figuur 19: Een nummering van de graaf.

Voorbeeld 4.2. *Stel G is een genummerde graaf zoals in figuur 19. Een schema voor G kan dan worden gegeven door:*

1. 632
2. 135
3. 124
4. 356
5. 246
6. 541

M.a.w.: de eerste rij vertelt ons dat knoop 6, knoop 3 en knoop 2 grenzen aan knoop 1, waarbij deze op volgorde staan afhankelijk van de kleuring van de knoop. In dit geval is dat eerst 6, dan 3 en dan 2. (Let op dat dit cyclisch is, en dus $632 = 263 = 326$) De tweede rij vertelt ons dat de knopen 1, 3 en 5 grenzen aan knoop 2, in die volgorde. Op deze manier krijgen we dus een schema van de graaf.

Voorbeeld 4.3. *Stel we hebben de rij 1. 265347, dan kunnen we er het volgende beeld bij maken waarin de knopen in goede volgorde na elkaar komen:*



Figuur 20: De burens van knoop 1 op de goede volgorde.

We kijken nu terug naar k_5 . Een rotatie van k_5 wordt gegeven door het volgende schema:

1. 3524
2. 1453
3. 2415
4. 1532
5. 1324

Aan de hand van alleen het schema, is het mogelijk om het aantal circuits te bepalen van deze graaf. Dit gaat op de volgende manier: We beginnen in knoop 1. We kunnen hier elke mogelijke kant op, dus laten we zeggen dat we naar knoop 2 lopen. Ons pad is dan 12. Vervolgens zijn we in knoop 2 gearriveerd, komende van knoop 1. Als we dan in de tweede rij kijken, de rij van knoop 2, zien we dat er na 1 een 4 staat. We vervolgen onze weg en komen aan in knoop 4. Ons pad is dus 124. In knoop 4 zien we dat er na de 2 een 1 komt. Ons pad wordt dan 1241 en we gaan zo door tot het einde. We resulteren uiteindelijk in het volgende circuit: 12413523425431532145. Als we nu door zouden gaan, dan krijgen we uiteindelijk repeterende cijfers. Kortom, ons circuit is compleet. Dit circuit heeft lengte 20, dus we kunnen hieruit bepalen dat dit het enige circuit is omdat elke zijde maximaal tweemaal wordt doorlopen (de ene kant op, en de andere kant) en k_5 maar 10 zijden heeft. We hebben dus een rotatie opgeschreven waarbij we eigenschappen weten van zowel de rotaties als de burens van de knopen, zonder dat we hierbij een tekening hebben hoeven maken.

4.2 Planaire grafen

Het zou fijn zijn dat als wij de eigenschappen van planaire grafen in pure theoretische termen kunnen bestuderen, zonder dat we daar tekeningen voor hoeven te maken. We zullen dan ook een nieuwe definitie van planariteit geven, die analoog is aan de definities in hoofdstuk 1, maar dan toepasbaar is op het idee van rotaties van grafen.

Stelling 4.4. *Zij $G = (V, E)$ een samenhangende graaf met v knopen, e zijden en een rotatie ρ die $r(\rho)$ circuits induceert. Dan geldt de ongelijkheid $v - e + r(\rho) \leq 2$, en $v - e + r(\rho)$ is even.*

Merk op dat deze stelling analoog is aan Euler's formule, maar nu toegepast op circuits in plaats van op facetten.

Bewijs. Het bewijs gaat door middel van natuurlijke inductie naar het aantal circuits.

$P(1)$:

Stel dat de graaf een boom is. Dan is er precies één circuit, want als je ergens in een punt begint, dan zul je elke zijde heen en terug belopen. In een boom geldt dat je v knopen hebt, en $v - 1$ zijden. Dus geldt: $v - (v - 1) + 1 = 2$ Omdat 2 een even getal is, en de ongelijkheid geldt, geldt onze inductiestap voor één circuit.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

Neem nu aan dat de stelling waar is voor een graaf met n of minder circuits. Laat G een graaf zijn met $n+1$ circuits en zij ρ een rotatie van G . We pakken één zijde e' die in een circuit voorkomt. Nu zijn er twee gevallen:

- (1): e' is deel van één circuit dat de zijde e' twee keer (heen en terug) gebruikt.
- (2): e' is deel van twee verschillende circuits

Bekijk nu de graaf $G' = G \setminus e'$ waarbij de zijde e' verwijderd wordt uit de graaf, en zij ρ' een rotatie van G' die hetzelfde is als ρ .

In geval (1) geldt dat als e' verwijderd wordt, deze ene circuit opgedeeld zal worden in twee aparte circuits en de overige circuits blijven ongewijzigd. Dan geldt dat $r(\rho') = r(\rho) + 1$.

In geval (2) geldt dat als e' verwijderd wordt, de twee verschillende circuits worden samengevoegd tot één circuit. In dat geval geldt $r(\rho') = r(\rho) - 1$.

Kortom, $r(\rho') = r(\rho) \pm 1$.

Stel G' heeft n of minder circuits. G heeft v knopen en e zijden dus G' heeft v knopen en $e-1$ zijden. Nu volgt met de inductiehypothese: $v - (e-1) + r(\rho') \leq 2$ en $v - (e-1) + r(\rho')$ is even. Dus $v - e + r(\rho) = v - (e-1) - 1 + r(\rho') \pm 1 \leq v - (e-1) + r(\rho') \leq 2$, wat de eerste ongelijkheid bewijst.

Omdat -1 ± 1 nul of min twee is, en omdat $v - (e-1) + r(\rho')$ even is, geldt dat $v - e + r(\rho)$ ook even is. Dit bewijst onze stelling. $\square$

Stelling 4.4 geeft dus weer het verband aan tussen zijden, knopen en circuits van een graaf. Maar dit zegt nog niet direct iets over planariteit van de grafen. Het bijzondere van stelling 3.4 is het volgende:

Opmerking 4.5. *Stel $G = (V, E)$ is samenhangend. Dan is G planair als er een rotatie ρ van G bestaat zodanig dat $v - e + r(\rho) = 2$, kortom, als de gelijkheid in stelling 3.4 geldt.*

Stelling 4.6. $k_{3,3}$ en k_5 zijn niet planair.

Bewijs. Er is al een keer bewezen dat $k_{3,3}$ en k_5 niet planair zijn, maar ditmaal zullen we dit bewijzen aan de hand van rotaties.

Stel dat $k_{3,3}$ wel planair is. Dan zegt opmerking 4.5 dat er een rotatie ρ van $k_{3,3}$ bestaat zodanig dat $v - e + r(\rho) = 2$. Voor $k_{3,3}$ geldt dat $v = 6$, $e = 9$ en dus $r(\rho) = 5$. De gemiddelde lengte van een circuit is vervolgens $\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$, omdat elke zijde twee keer gebruikt wordt en er 5 circuits zijn. Maar dit betekent dat minstens één van de circuits lengte drie heeft. Omdat het kortste circuit in $k_{3,3}$ lengte vier heeft, is dit dus niet mogelijk. Dus geen enkele rotatie induceert vijf circuits, en dus is $k_{3,3}$ niet planair.

Stel dat k_5 wel planair is. Dan geldt met opmerking 4.5 dat er een ρ is zodanig dat $r(\rho) = 7$, omdat $v = 5$ en $e = 10$. De gemiddelde lengte voor een circuit in k_5 is dan $\frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$. Dit betekent dat er een circuit is van lengte < 3 . Omdat het kortste circuit in k_5 een lengte van drie heeft, is dit dus ook niet mogelijk. Dus k_5 is niet planair. $\square$

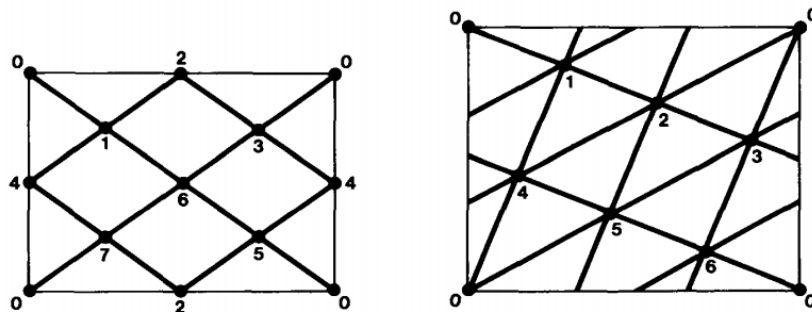
4.3 Geslacht van een graaf

Als een eindige graaf op een vlak kan worden getekend, dan kan deze ook op een bol worden getekend. Een bol is dan een oppervlak zonder randen. We kijken nu wat meer naar drie-dimensionale objecten, beginnend bij de bol. De bol is een representatie van het tweedimensionale vlak in het driedimensionale vlak. Naast de bol hebben we ook al de donut gezien. We kunnen de donut topologisch namaken door een ‘handvat’ te lijmen aan de bol. Hierdoor krijgt de bol ook een gat en is deze topologisch hetzelfde als de donut. Ook kunnen er meer handvatten aan de bol worden geplakt, waardoor deze nog meer gaten zal bevatten. We noteren de bol als S_0 : De bol heeft nul handvatten, ook wel nul gaten. De donut is S_1 : De donut heeft één gat, ook wel een bol met één handvat. In het algemeen is S_g het oppervlak verkregen door g handvatten aan een bol te plakken en dus een oppervlak met g gaten.

De vraag die nu opkomt is: gegeven een graaf G en een oppervlak S_g . Hoe groot moet g zijn om de graaf G snijpuntloos op dit oppervlak te kunnen tekenen? Het is duidelijk dat als G geen snijpunten heeft op S_g , dan heeft hij dit ook niet op S_{g+1} . Het vraagstuk dat dit interessant maakt is om g zo klein mogelijk te kiezen zodanig dat G snijpuntloos is op S_g . Deze minimale g wordt ook wel het geslacht van de graaf genoemd en noteren we als $\gamma(G)$: Het geslacht van de graaf G .

Zoals we eerder hebben gezien zijn k_5 en $k_{3,3}$ snijpuntloos op de donut, maar niet op een bol. k_4 is wel snijpuntloos op een bol. Kortom, $\gamma(k_{3,3}) = 1$, $\gamma(k_5) = 1$ en $\gamma(k_4) = 0$.

We bekijken nu twee andere interessante grafen: De volledig bipartiete graaf $k_{4,4}$ en de volledige graaf k_7 . Deze worden mooi afgebeeld in figuur 21. In $k_{4,4}$ geldt dat de even en oneven getallen onze verschillende verzamelingen zijn. Merk hierbij op dat als we de randen naar elkaar toe vouwen zoals in voorbeeld 3.7, dat de punten op de randen dan samenvallen.



Figuur 21: $k_{4,4}$ (links) en k_7 (rechts) snijpuntloos op de donut .

In figuur 21 zien we dus dat $\gamma(k_{4,4}) = \gamma(k_7) = 1$: De grafen zijn snijpuntloos op een donut. De grafen voldoen niet aan stelling 2.7, omdat deze op een donut

snijpuntloos zijn maar niet in het platte vlak. We bekijken daarom opnieuw de Euler Karakteristiek, en ditmaal in zijn volledige vorm:

Definitie 4.7. (*Euler Karakteristiek II*) Zij G een samenhangende graaf en ρ een maximale rotatie. Dan geldt dat $\gamma(G) = g$, als $v - e + r(\rho) = 2 - 2g$.

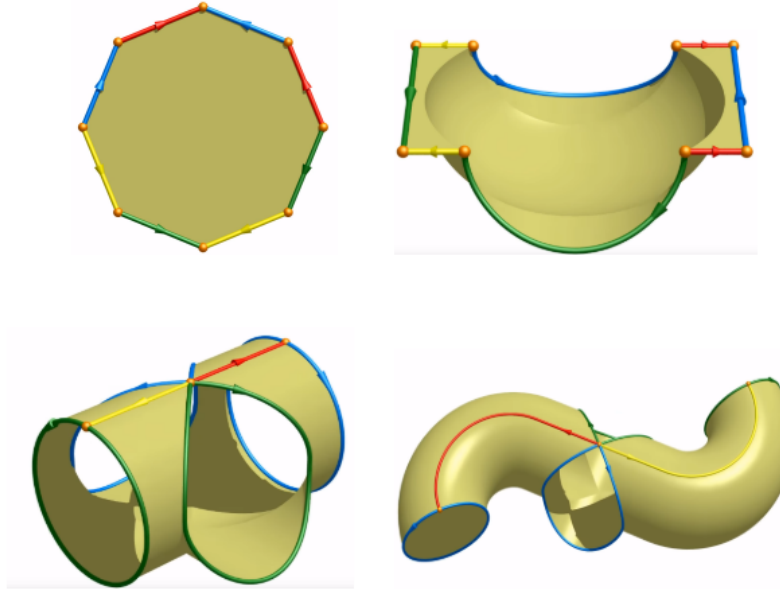
Met stelling 3.4 geldt dat $v - e + r(\rho) \leq 2$, en $p - q + r(\rho)$ is even, dus g is een positief geheel getal. Merk op dat als $g = 0$, we precies stelling 4.4 krijgen, wat waar is op S_0 .

Als we figuur 21 bekijken, dan verwachten we dat deze grafen voldoen aan de Euler Karakteristiek met $g = 1$. in het geval van k_7 geldt dat: $v = 7, e = 21$ en $g = 1$. We krijgen als resultaat dat er een rotatie moet bestaan zodanig dat $r(\rho) = 14$. Dit kan precies aangezien er 21 zijden zijn, elke zijde twee keer wordt gebruikt en een circuit minstens drie zijden nodig heeft. In het geval van $k_{4,4}$ geldt dat $v = 8, e = 16$ en $g = 1$. Hieruit volgt dat er een rotatie moet bestaan zodanig dat $r(\rho) = 8$. Dit komt weer precies uit met het feit dat elke zijde twee keer wordt gebruikt, maar hier een circuit minstens vier zijden nodig heeft.

Een andere mogelijkheid van definitie 4.7 is om te kijken wat precies het geslacht van een graaf is. Neem bijvoorbeeld $G = k_8$. We weten dat $v = 8$ en $e = 28$. In een volledige graaf heeft een kleinste mogelijke circuit een lengte van drie. Omdat $e = 28$ geldt dat we in het meest ideale geval $18\frac{2}{3}$ circuits kunnen maken, (In dit geval zijn er enkele circuits van lengte > 3). Het feit is dat er minstens 18 circuits gemaakt kunnen worden. We weten hierbij echter niet hoe de graaf eruit zal zien. Er geldt vervolgens dat $r(\rho) = 18$. Als we dit bekijken in definitie 4.7, volgt hieruit dat $g = 2$, dus deze graaf zou snijpuntloos kunnen worden getekend op S_2 .

4.4 Geslacht groter dan 1

Definitie 4.7 is een belangrijke stelling waaruit we veel informatie kunnen halen betreft snijpuntloze grafen. Zover weten we dat als de graaf snijpuntloos is op S_1 , dat we deze kunnen uitvouwen tot een tekening in het platte vlak. Maar wat als $g > 1$, kunnen we dan ook een representatie maken in het platte vlak? Het antwoord hierop is ja, en we kijken naar het volgende figuur voor een voorbeeld:



Figuur 22: Een 8-hoek omgevouwen naar een S_2 oppervlak

We zien hier dat we een S_2 oppervlak door een octagon kunnen representatere. Allereerst vervormen we de octagon iets, zodat de vervolgstappen duidelijk zijn, vervolgens worden de gele en rode randen naar elkaar toe gebracht en ten slot verbinden we de groene en blauwe randen met elkaar door middel van een grote boog. In de laatste stap vormen de gaten zich. We merken op dat in de initiële octagon de gelijke kleuren niet tegenover elkaar zitten, maar in de vorm ABAB-CDCD, in groepen van 4. Dit heeft als reden dat eerst twee randen naar elkaar toe worden gevouwen, waarna er ruimte is om een gat te vormen met de overige twee randen van een kleur. Omdat we twee groepen van vier zijden hebben, kunnen we twee gaten maken, kortom een S_2 oppervlak.

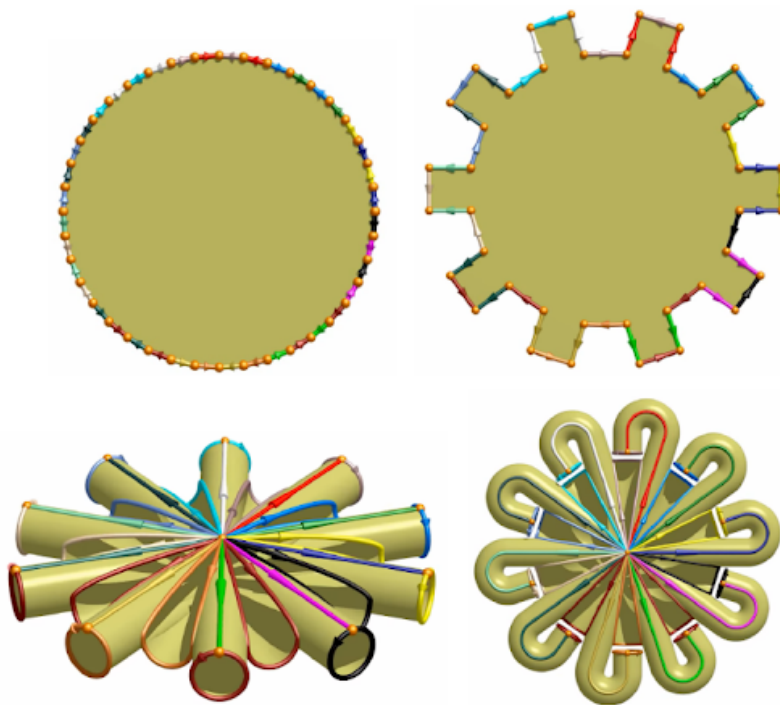
Als er een graaf zou worden getekend in de octagon van figuur 22, dan kunnen de zijden dus over de randen van de octagon heen gaan. Als ze bijvoorbeeld over de gele zijde heen gaan, komen ze uit op de andere gele zijde. Hoe precies de grafen er dan uit komen te zien is niet geheel duidelijk, maar als er een graaf snijpuntloos kan worden getekend op een octagon, dan weten we wel zeker dat deze ook planair is op een S_2 oppervlak.

Op deze manier kunnen we elke S_g representeren door een veelhoek in het tweedimensionale vlak:

Stelling 4.8. *Als S_g een oppervlak is van geslacht g , dan wordt deze gerepresenteerd in het platte vlak als een V -hoek, waarbij $V = 4 * g$.*

Bewijs. Zij g het geslacht van de graaf. Voor elk gat in het oppervlak heb je vier zijden nodig om een gat te vormen, dus je hebt $4 * g$ zijden nodig. $\square$

Voorbeeld 4.9. *(Een S_{10} oppervlak)*



Figuur 23: Een 40-hoek omgevouwen naar een S_{10} oppervlak

5 Algoritme

Nu we een globaal idee hebben hoe we met planariteit kunnen werken op S_g oppervlakken, zou het nuttig zijn om een schets van een dergelijke graaf te kunnen geven. Stel, we hebben een willekeurige graaf G . Het doel is om G snijpuntloos weer te geven op een oppervlak waarin het geslacht zo klein mogelijk is. Daarnaast willen we een schets geven van G om deze dan ook daadwerkelijk te construeren.

Een schets van de graaf kunnen we geven op de manier beschreven in paragraaf 4.1, waarbij we aannemen dat alle knopen een positieve draairichting hebben. Dit heeft twee effecten:

- 1) Als we in een snijpuntloze graaf alle knopen dezelfde kleur geven, krijgen we het maximale aantal rotaties;
- 2) We weten van elke knoop wat de burens zijn en op welke volgorde ze verschijnen.

Omdat we willen dat het resultaat dat we krijgen een schema is van een snijpuntloze graaf op een geslacht g , is het dus verstandig om alle knopen dezelfde kleur te geven. 2) zegt vervolgens iets over hoe we deze graaf kunnen tekenen. Om te weten wat het geslacht van de graaf is, gebruiken we definitie 4.7. Gecombineerd kunnen we een mooie representatie krijgen van G . We geven een algoritme die werkt voor volledige en volledige bipartiete grafen.

5.1 Algoritme voor volledige grafen

Het algoritme berust op eerst informatie inwinnen over de graaf, en vervolgens circuits van lengte drie proberen te maken in de graaf. De circuits die we gemaakt hebben zullen gebruikt worden om weer nieuwe circuits van lengte drie te vinden, die geen tegenstrijdigheid opleveren met de al gevonden circuits. We zullen het algoritme laten zien voor de grafen k_5, k_8 en $k_{4,4}$.

5.1.1 Algoritme voor k_5 .

Stel $G = k_5$.

$v = 5, e = 10$ en $r(\rho) = \frac{2}{3} * 10 = \frac{20}{3}$. Er geldt dat $v - e + r(\rho) = 2 - 2g$. We weten dat er maximaal 6 circuits zijn, en dit betekent dat $g \neq 0$, dus $g = 1$, want $1 \geq 0$. Dus, met definitie 4.7 en stelling 4.4, is er een rotatie ρ , waarbij $r(\rho) = 5$, zodanig dat G planair is op S_1 .

We gaan nu op zoek naar die rotatie van G : We beginnen met de eerste willekeurige knoop 1. Deze is verbonden met alle andere knopen, dus de volgorde maakt nu nog niet uit. Z.v.v.a zeggen we dat 1 verbonden is in positieve draairichting met 5432. Zodoende weten we ook dat de knopen 5,4,3 en 2 met knoop 1 verbonden zijn. We krijgen het schema:

1. 5 4 3 2
2. 1 x x x
3. 1 x x x
4. 1 x x x
5. 1 x x x

Aangezien de knopen 3 en 2 na elkaar komen, kunnen we de zijde (2,3) construeren. Hierdoor hebben we ons eerste circuit van lengte drie gemaakt, namelijk: $c(123)$. Analoog, uitgaande van knoop 1, kunnen we ook de circuits $c(134)$, $c(145)$ en $c(152)$ maken.

Een manier om $c(\mathbf{xyz})$ te lezen gaat als volgt: In knoop $\mathbf{y}$ gaat $\mathbf{x}$ naar $\mathbf{z}$. Omdat het circuit een lengte van drie heeft, kun je dit circuit ook noteren als $c(\mathbf{zxy})$ of $c(\mathbf{yzx})$ en dus: in knoop $\mathbf{x}$ gaat $\mathbf{z}$ naar $\mathbf{y}$ of in knoop $\mathbf{z}$ gaat $\mathbf{y}$ naar $\mathbf{x}$. Uit een tekening wordt dit al snel duidelijk.

Uit $c(123)$ en $c(152)$ weten we meer over de burens van knoop 2, namelijk: 1 gaat, door 2, naar 3 en 5 gaat, door 2, naar 1. Hierdoor weten we dat de burens van 2 de knopen 3,5 en 1 zijn, op deze volgorde. Analoog kunnen we uit de circuits $c(123)$, $c(134)$, $c(145)$ en $c(152)$ informatie halen over de andere knopen. We eindigen met het volgende schema:

1. 5 4 3 2
2. 1 3 x 5
3. 1 4 x 2
4. 1 5 x 3
5. 1 2 x 4

We kunnen al snel de overige x invullen omdat er maar vijf knopen zijn. We eindigen met een schema waarin voor elke knoop zijn burens aangegeven zijn in positieve draairichting. Ook weten we dat deze snijpuntloos is in S_1 . Kortom, we hebben een snijpuntloze representatie gemaakt van de graaf op een S_1 oppervlak, namelijk:

1. 5 4 3 2
2. 1 3 4 5
3. 1 4 5 2
4. 1 5 2 3
5. 1 2 3 4

5.1.2 Circuits van k_5 :

Om de circuits te controleren, bekijken we elke zijde apart en bekijken we in welk circuit deze thuishoort.

We beginnen met (1,2), en bekijken vervolgens (1,3), (1,4) enz. Als we alle burens van knoop 1 hebben bekeken, beginnen we met (2,1), (2,2) etc. Dit gaat dus de hele graaf zo door.

We beginnen met zijde (1,2). Dit betekent dat we beginnen in knoop 1 en naar knoop 2 toe wandelen. We krijgen het pad: 1-2. In het schema bij knoop 2 zien we de getallen 1 3. Dit betekent dat uitgaande van knoop 2, 3 na 1 komt. Dus in termen van circuits, lopen we van 1 naar 2, en door naar knoop 3. We krijgen dus het pad: 1-2-3. In het schema bij knoop 3 zien we dat 2 op het einde staat, maar 1 weer in het begin, dus 1 komt na 2, dus we lopen weer naar 1. We krijgen het pad: 1-2-3-1. Dit herhaaldelijk toepassen levert ons 123123123x op. Dit is gelijk aan $c(123)$. Zodoende volgt ook snel:

$$(1,3) \rightarrow c(134)$$

$$(1,4) \rightarrow c(145)$$

$$(1,5) \rightarrow c(152)$$

We bekijken nu zijde (2,1). In 1 gaat 2 naar 5. We lopen dus door naar 5 met als pad: 215x. In 5 gaat 1 naar 2, dus we krijgen het pad 2152x. We zien uiteindelijk dat de zijde (2,1) al in $c(152)$ bevat was, en dus volgt uit (2,1) het circuit $c(152)$.

We zien vervolgens dat $(2,3) \rightarrow c(123)$.

We bekijken nu (2,4). In 4 gaat 2 naar 3. Dus we krijgen het pad 243x. In 3 gaat 4 naar 5, dus 2435x enz. We krijgen: 2435425324x. Aan het eind zien we 2 en 4 weer naast elkaar staan en gaat dit pad zich repeteren. We krijgen het circuit: $c(24354253)$.

We hebben nu dus 5 circuits gevonden met een gemiddelde lengte van 4. Dit gaat gepaard met het feit dat $e = 10$, elke zijde twee keer voorkomt in een circuit, en we dus 20 zijden in onze gevonden circuits doorlopen. Daarnaast hebben we een schema gemaakt die ons in positieve draairichting alle burens van elke knoop laat zien. We hebben dus een abstracte representatie gegeven van een snijpuntloze k_5 , zonder deze te tekenen.

5.1.3 Algoritme voor k_8

stel $G = k_8$.

$v = 8, e = 28$ en $r(\rho) = \frac{2}{3} * 28 = \frac{56}{3}$. Er geldt dat $v - e + r(\rho) = 2 - 2g$. We weten dat er maximaal 18 circuits zijn, en dit betekent dat $g \neq 0$ en $g \neq 1$, maar $g = 2$ voldoet wel, want $-2 \geq -2$. Dus, met definitie 4.7 en stelling 4.4, is er een rotatie ρ , waarbij $r(\rho) = 18$, zodanig dat G planair is op S_2 .

We proberen dus nu weer een representatie te maken van de graaf, uitgaande van circuits van lengte drie.

Z.v.v.a. beginnen we opnieuw met onze uitgangspositie:

1. 8 7 6 5 4 3 2
2. 1 3 x x x x 8
3. 1 4 x x x x 2
4. 1 5 x x x x 3
5. 1 6 x x x x 4
6. 1 7 x x x x 5
7. 1 8 x x x x 6

8. 1 2 x x x x 7

Dit is dus opnieuw verkregen door knoop 1 te verbinden met alle overige knopen en de circuits van lengte drie rond 1 te maken.

We hebben nu dus de circuits: $c(123)$, $c(134)$, $c(145)$, $c(156)$, $c(167)$, $c(178)$, $c(182)$.

We moeten er nog 11 vinden, waarbij onze gemiddelde lengte uitkomt op $\frac{56}{18}$.

Omdat we $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $\dots$; $(1,8)$ nu hebben bekeken, gaan we over op $(2,1)$.

$(2,1) \rightarrow c(182)$;

$(2,3) \rightarrow c(123)$;

We komen nu uit bij $(2,4)$. In 4 gaat 2 naar onbekend. Hier is dus nog mogelijkheid tot een circuit van lengte drie. De vraag is nu welk getal hier moet komen te staan. We gaan dus weer mogelijkheden af.

$c(241)$ is niet mogelijk vanwege $c(123)$.

$c(242)$ is triviaal niet mogelijk omdat we niet van 2 naar 2 mogen lopen.

$c(243)$ is niet mogelijk omdat dit zou betekenen dat in knoop 3, 4 naar 2 gaat. Maar met onze opbouw van knoop 3 in het schema, zou dit betekenen dat knoop 3 maar drie burens heeft.

$c(244)$ is triviaal niet mogelijk

$c(245)$ is niet mogelijk vanwege $c(145)$

$c(246)$ is wel mogelijk! Kortom, we krijgen het nieuwe circuit: $c(246)$. Dit vullen we vervolgens in in het schema:

1. 8 7 6 5 4 3 2

2. 1 3 - 6 4 - 8

3. 1 4 x x x x 2

4. 1 5 - 2 6 - 3

5. 1 6 x x x x 4

6. 1 7 - 4 2 - 5

7. 1 8 x x x x 6

8. 1 2 x x x x 7

We weten van $c(246)$ nog niet waar de getallen precies in het schema staan. We zouden ze dus nog kunnen opschuiven. We weten alleen zeker dat: in 2 gaat 6 naar 4,

in 4 gaat 2 naar 6,

in 6 gaat 4 naar 2.

We gaan nu verder met circuits van lengte drie zoeken, waarbij $c(246)$ nu ook een bestaand circuit is. We waren gebleven bij $(2,5)$.

$(2,5) \rightarrow c(253)$. We krijgen nu het schema:

1. 8 7 6 5 4 3 2

2. 1 3 5 - 6 4 - 8

3. 1 4 x x x 5 2

4. 1 5 - 2 6 - 3

5. 1 6 - 2 3 - 4
6. 1 7 - 4 2 - 5
7. 1 8 x x x x 6
8. 1 2 x x x x 7

Merk op dat we knoop 2 nog niet helemaal kunnen invullen omdat we niet weten waar precies onze laatste buur komt. Die kan zowel links als rechts van 64 komen. Vervolgens, $(2,6) \rightarrow c(265)$. We weten nu dat in 2, 5 naar 6 gaat. Hiermee zijn alle posities vastgesteld in knoop 2, en hebben we onze eerste volledige knoop. We krijgen nu het schema:

1. 8 7 6 5 4 3 2
2. 1 3 5 6 4 7 8
3. 1 4 x x x 5 2
4. 1 5 - 2 6 - 3
5. 1 6 2 3 x x 4
6. 1 7 x x 4 2 5
7. 1 8 x x x x 6
8. 1 2 x x x x 7

We blijven dit proces herhalen totdat we alle zijden hebben bezocht en resulteren uiteindelijk met het volgende schema:

1. 8 7 6 5 4 3 2
2. 1 3 5 6 4 7 8
3. 1 4 6 8 7 5 2
4. 1 5 8 7 2 6 3
5. 1 6 2 3 7 8 4
6. 1 7 8 3 4 2 5
7. 1 8 5 3 2 4 6
8. 1 2 3 6 4 5 7

5.1.4 Circuits van k_8

Aan de hand van ons schema, en aan de hand van onze opbouw van het algoritme, hebben we al meteen de circuits van lengte drie te pakken. Dit zijn namelijk de volgende circuits:

$c(123)$; $c(134)$; $c(145)$; $c(156)$; $c(167)$; $c(178)$; $c(182)$; $c(246)$; $c(253)$; $c(265)$; $c(274)$; $c(357)$; $c(364)$; $c(386)$; $c(485)$ en $c(587)$.

De lezer kan verifiëren dat dit alle circuits van lengte drie zijn. Als we opnieuw alle zijden gaan checken aan de hand van het schema, dan zien we dat zijde (2,8) een nieuw circuit oplevert. In 8 gaat 2 naar 3. In 3 gaat 8 naar 7. In 7 gaat 3 naar 2. In 2 gaat 7 naar 8. Hierna zijn we weer rond en hebben we een circuit van lengte vier te pakken, namelijk $c(2837)$. Zodoende vinden we ook het circuit $c(4768)$. We hebben nu dus 16 circuits van lengte drie, en 2 van lengte vier. Dit brengt ons op een totale lengte van 56 en dat klopt precies met het feit dat k_8 28 zijden heeft. We hebben nu dus een snijpuntloze representatie gemaakt van k_8 , waarvan we weten dat deze planair is op S_2 .

5.2 Algoritme voor volledig bipartiete grafen

Het algoritme voor volledige bipartiete grafen gaat anders in zijn werking, namelijk een stuk makkelijker. Omdat bij bipartiete grafen een circuit minstens lengte vier heeft, en je schommelt tussen twee deelverzamelingen, kunnen we alle bipartiete grafen op dezelfde manier indelen. dit gaat als volgt:

Zij G een bipartiete graaf waarbij we de gescheiden verzamelingen A en B noemen. Stel dat A uit de oneven getallen bestaat en B uit de even getallen.

- 1) We zetten alle knopen van A onder elkaar;
- 2) We geven knoop 1 een willekeurige burenlĳst, voor het gemak 2468...;
- 3) Knoop 3 krijgt diezelfde burenlĳst, maar dan gespiegeld: ...8642;
- 4) Knoop 5 krijgt weer dezelfde burenlĳst als knoop 1;
- 5) Dit herhaal je totdat we alle knopen hebben gehad;
- 6) Analooĳ voor B .

We zullen dit illustreren aan de hand van $k_{4,4}$.

5.2.1 Algoritme voor $k_{4,4}$

Stel $G = k_{4,4}$.

$v = 8, e = 16$ en $r(\rho) = \frac{2}{4} * 16 = 8$. Er geldt dat $v - e + r(\rho) = 2 - 2g$. We weten dat er maximaal 8 circuits zijn, en dit betekent dat $g \neq 0$, maar $g = 1$ voldoet wel, want $0 \geq 0$. Dus, met definitie 4.7 en stelling 4.4, is er een rotatie ρ , waarbij $r(\rho) = 8$, zodanig dat G planair is op S_1 .

We passen direct het algoritme toe om het volgende schema te krijgen:

1. 2 4 6 8
3. 8 6 4 2
5. 2 4 6 8
7. 8 6 4 2
2. 1 3 5 7
4. 7 5 3 1
6. 1 3 5 7
8. 7 5 3 1

5.2.2 Circuits van $k_{4,4}$

We krijgen de volgende circuits, die de lezer zelf zou kunnen checken:

c(1238); c(1472); c(1634); c(1876); c(3254); c(3658); c(5278); c(5674).

Dit zijn 8 circuits met een lengte van 4. Dit is precies wat we wouden hebben. Dit geeft ons dus een snijpuntloze representatie van de graaf $k_{4,4}$ op het oppervlak S_1 .

5.3 Resultaat

Naast dat dit algoritme hierboven voor k_5 , k_8 en $k_{4,4}$ is gedemonstreerd, is deze ook getest voor k_6 ; k_7 ; k_{10} ; $k_{3,3}$; $k_{4,5}$; $k_5 - e$ en $k_{3,3} - e$ met positieve resultaten. Hij werkt alleen nog niet willekeurige grafen.

Voorbeeld 5.1. *(Tegenvoorbeeld voor het algoritme op willekeurige grafen)*

We bekijken een graaf, waarbij we de volgorde van de knopen nog niet aan hebben gegeven. We beginnen met een lijst die alleen vertelt aan welke knopen elke knoop is verbonden:

- 1) 2 3 4 5 6 8 9
- 2) 1 3 5 8 9
- 3) 1 2 4 7 9
- 4) 1 3 7
- 5) 1 2 6 8 9
- 6) 1 5 7 8
- 7) 3 4 6
- 8) 1 2 5 6 9
- 9) 1 2 3 5 8

*In dit geval geldt dat $v = 9$ en $e = 21$. Je kan hier maximaal $\frac{2}{3} * 21 = 14$ circuits maken. Als je precies 14 circuits kan maken, dan geldt met stelling 4.4 en definitie 4.7 dat $g = 0$. Hierbij moet gelden dat elk circuit een lengte van drie heeft. Zodra er een circuit van lengte vier is, kunnen we geen 14 circuits krijgen, en dus geldt dat $g \neq 0$.*

Laten we de zijde (1,4) bekijken. Er is maar één knoop zowel met 1 als 4 verbonden en dat is knoop 3. De zijde (1,4) komt in twee circuits voor, namelijk $c(134)$ en nog een. Maar er is geen enkele andere knoop met zowel 1 als 4 verbonden, maar de zijde (4,1) komt wel in een circuit voor. Dus er is een circuit met lengte > 3 . Dit levert dus een tegenspraak op met het feit dat $g = 0$.

Waarom dit algoritme goed gaat in volledige en volledig bipartiete grafen is het feit dat elk circuit een lengte van drie resp. vier heeft. Elke knoop is nou eenmaal met alle andere knopen verbonden en in het geval van bipartiete grafen met de gehele andere verzameling knopen. Het huidige algoritme werkt (nog) niet voor willekeurige grafen, daar is nog iets meer onderzoek voor nodig hoewel ik een sterk vermoeden heb dat je in elke graaf de circuits zou kunnen vinden. Aan de hand van de gevonden circuits zou je vervolgens het geslacht van de graaf kunnen bepalen.

Uiteindelijk krijgen we dus een abstracte beschouwing van hoe een graaf zich snijpuntloos representeert op een gesloten oppervlak, waarbij we ook het geslacht van de graaf komen te weten. Al worden alle burens van alle knopen in positieve draairichting weergegeven, is het daadwerkelijk tekenen nog steeds een grote kunst. Met een kleine handleiding ernaast is het zeker geen onmogelijke opgave.

Referenties

- [1] Nora Hartsfield, Gerhard Ringel, *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*, J Academic Press, Boston, 1994
- [2] Jos Leys [Jos Leys] (2015, november 15). *From an octagon to a genus 2 surface - Mathlapse*, From Youtube, <https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw>
- [3] Jos Leys [Jos Leys] (2015, november 16). *From a 40-gon to a genus 10 surface.*, From Youtube, <https://www.youtube.com/watch?v=RBWwlfctYM>
- [4] Endo Toshiki (1997) *Thepagenumber of toroidal graphs is at most seven*, Discrete Mathematics, 175 (1–3): 87–96,
- [5] N. Robertson, P.D. Seymour, *Graph minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces*, J. Combin. Theory Ser. B 48 (1990), 255–288.
- [6] S. Tamar-Mattis (2016) *Planar graphs and Wagner’s and Kuratowski’s theorems*, <http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Tamar-Mattis.pdf>