Cantor e l'infinito

Riccardo Cristoferi

Georg Cantor è il fondatore della teoria degli insiemi. Studia l'infinito e gli insiemi ordinati, dimostrando che i numeri reali sono più numerosi dei numeri naturali. Dimostra così l'esistenza di un'infinità di infiniti. Le sue teorie hanno suscitato a suo tempo molte critiche, anche aspre. Approfondire il concetto di infinito permette di aprire scorci su mondi che affascinano anche gli irriducibili della matematica.

Collegamenti intra e interdisciplinari

Gli insiemi

Il metodo di esaustione

Cosa vuol dire contare

Parole chiave: infinito, cardinalità, numerabilità, Cantor, procedimento diagonale, metodo di esaustione

Nessuno riuscirà a cacciarci dal Paradiso
che Cantor ha creato per noi.
David Hilbert

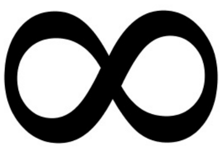

Figura 1. Il simbolo matematico dell'infinito venne utilizzato per la prioma volta da John Wallis nel 1655

Che cos'è l'infinito? Per i primi pensatori greci, come ad esempio **Pitagora**, l'infinito non era un problema, perché accettavano il concetto (senza specificarlo troppo bene), e lo consideravano solamente come un attributo negativo per indicare ciò che non si poteva dire dell'essere, un qualcosa di caratteristico dell'irrazionale.

Come conseguenza, in aritmetica e geometria erano vietati concetti e dimostrazioni che non potevano essere descritti in termini finiti e precisi. Una retta, per esempio, era descritta tramite la sua direzione e un punto di passaggio, quindi in maniera finita.

Ma già in **Archimede** con il metodo di esaustione troviamo una prima applicazione matematica del concetto di infinito, in particolare legata al concetto di limite.

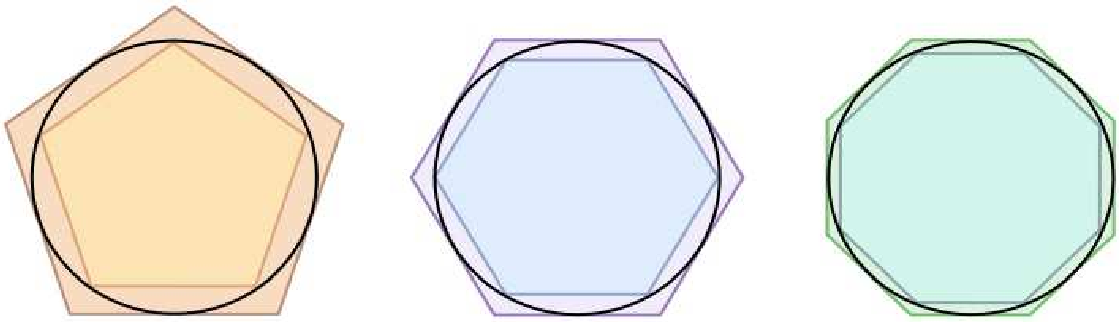

Figura 2. Un esempio del metodo di esaustione per il calcolo dell'area del cerchio

Il concetto di infinito si inizia a utilizzare in maniera fondamentale solo molto dopo, nel Settecento, con con gli studi di fondazione del calcolo differenziale e integrale di **Gottfried Wilhelm Leibniz** e **Isaac Newton**.

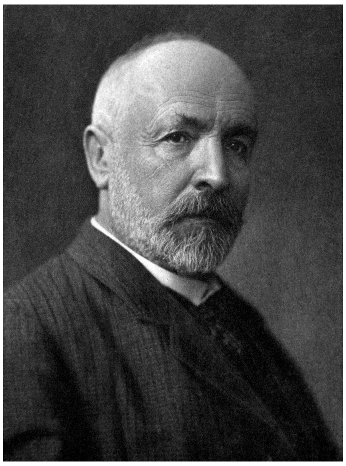

Figura 3. Georg Cantor

Ma è solo con il lavoro di **George Cantor** (1845-1918), matematico tedesco, che l'infinito entra a pieno titolo e in maniera rigorosa nel mondo matematico.

Quando pensiamo all'infinito ci viene in mente un qualcosa che non ha fine. Per per renderci conto di cosa questo voglia dire, pensiamo a un esempio che Cantor è solito fare ai suoi allievi: un uomo possiede un albergo con un numero di stanze infinito, e l'albergo è al completo. Arriva un altro ospite. L'albergatore sposta allora l'ospite della stanza 1 nella stanza 2, quello della 2 nella 3, quello della 3 nella 4, e via di seguito. Così la stanza 1 rimane libera per il nuovo ospite. E così via per ogni nuovo ospite che arriva.

Ma che cosa capiterebbe se arrivassero infiniti nuovi ospiti? Come farebbe l'albergatore a sistemarli tutti? Ci sarebbe ancora abbastanza posto per tutti? La risposta è la seguente. L'albergatore sposterebbe l'ospite della stanza 1 nella 2, quello della 2 nella 4, quello della 3 nella 6, e così via.

In questo modo, anche nel caso di un numero infinito di ospiti in arrivo, l'albergatore riuscirebbe a sistemarli tutti, nonostante l'albergo fosse inizialmente pieno.

Figura 4. Il metodo di Georg Cantor per accogliere infiniti nuovi ospiti nell'albergo dalla infinite stanze.

Si capisce quindi come sia facile arrivare a situazioni paradossali quando si maneggia con l'infinito.

Ma Cantor non si fa spaventare da tutto ciò, e riesce addirittura a trovare una proprietà, prima considerata paradossale, che hanno solo gli insiemi infiniti: un insieme infinito può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Per capire meglio cosa questo vuol dire consideriamo due hotel: uno è l'hotel con infinite stanze visto sopra e l'altro è un hotel che però ha solo 100 stanze. Se in quest'ultimo hotel arrivassero 100 ospiti, tutte le stanze sarebbero piene e non ci sarebbe modo di sistemare ulteriori ospiti. Ma nell'hotel con infinite stanze questo non è un problema: anche se tutte le stanze sono piene, l'albergatore troverebbe facilmente il modo di sistemare qualsiasi gruppo di opti arrivi, finito o infinito che sia.

Questa proprietà è quella che per i matematici di oggi contraddistingue un insieme finito da uno infinito. Cantor non si ferma qui e va ben oltre, dimostrando che ci sono infiniti tipi di infinito. Parte osservando che i numeri interi sono tanti quanti i (o hanno la stessa cardinalità dei) numeri naturali (fig. 5).

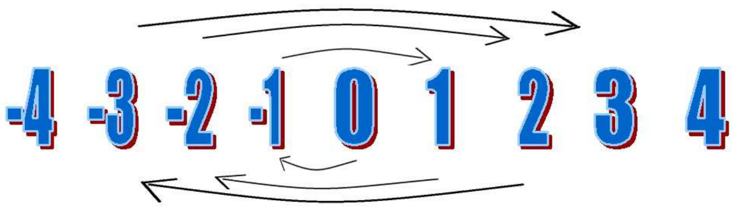

Figura 5

E lo stesso vale anche per i numeri razionali (fig. 6).

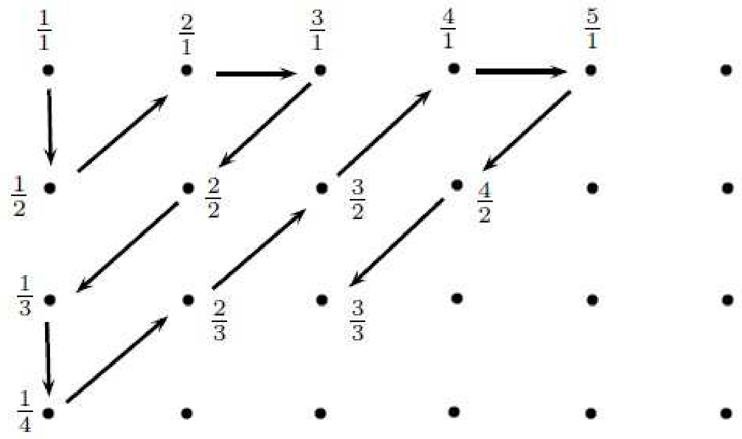

Figura 6

E i numeri reali? Sono anche loro tanti quanti i numeri naturali, ovvero sono anche loro numerabili? Cantor vuole provare che non è così, e ragiona come segue: di sicuro i numeri reali nell'intervallo (0,1) non possono essere di più di tutti i numeri reali. Consideriamo quindi i numeri reali nell'intervallo (0,1). Se per assurdo fossero numerabili, potrei elencarli in una tabella come quella in figura.

Allora è possibile costruire un numero N che non è nella lista con il cosidetto procedimento diagonale: la i-sima cifra decimale di N sarà 1 se la i-sima cifra decimale di a_i non è 1, e 0 altrimenti. In questo modo il numero N che abbiamo costruito non potrà essere un numero della lista, poiché differirà dall'i-simo elemento della lista proprio nella i-sima cifra decimale (fig. 7).

Quindi l'ipotesi che i numeri reali nell'intervallo (0,1) sono numerabili è falsa. Ne segue che i numeri reali devono essere di un'infinità più grande dell'infinità dei naturali.

Oggi chiamiamo una tale infinità un continuo.

a_1:	0,	$\boxed{1}$	6	9	4	4	2	0	9	9	7	...
a_2:	0,	9	$\boxed{4}$	2	0	0	3	9	7	0	1	...
a_3:	0,	1	0	$\boxed{1}$	6	7	8	8	8	1	0	...
a_4:	0,	3	3	1	$\boxed{0}$	8	5	2	1	8	7	...
a_5:	0,	2	2	2	9	$\boxed{4}$	1	7	3	3	1	...
a_6:	0,	4	5	1	5	4	$\boxed{6}$	3	5	6	6	...
a_7:	0,	4	1	6	1	2	2	$\boxed{1}$	0	1	3	...
a_8:	0,	1	6	1	8	9	4	2	$\boxed{7}$	7	1	...
⋮												

$$\longrightarrow \quad N = 0,01011101...$$

Figura 7. Il procedimento diagonale di Georg Cantor

E le cose strane non finiscono qui: Cantor prova addirittura che i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti di un suo lato (fig. 8). Lo stesso Cantor, in una lettera al suo collega **Richard Dedekind** a proposito di questa sua scoperta, scrive: "Lo vedo, ma non lo credo".

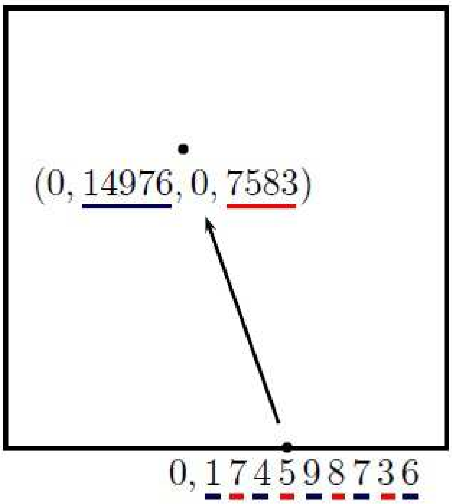

Figura 8

Approfondimenti

Metodo di esaustione:
http://digilander.libero.it/leo723/materiali/analisi/esaustione_indivisibili.pdf

Procedimento diagonale originale di Cantor:
http://www.webcitation.org/query.php?url=http://uk.geocities.com/frege@btinternet.com/cantor/diagarg.htm