Tensoren

Peter Hochs

Voorjaar 2022

Inhoudsopgave

Inleiding

Het tensorprodukt

Er zijn in de lineaire algebra verschillende constructies om nieuwe vectorruimtes te construeren uit gegeven vectorruimtes. Als V en W vectorruimtes zijn, dan is de verzameling $\mathrm{Lin}(V, W)$ van lineaire afbeeldingen van V naar W bijvoorbeeld op een natuurlijke manier zelf weer een vectorruimte. Dit dictaat gaat over een constructie van nieuwe vectorruimtes die op veel plekken gebruikt wordt: het tensorprodukt. Een element van zo'n tensorprodukt heet een tensor.

Het tensorprodukt generaliseert sommige andere constructies, zoals de vectorruimte $\mathrm{Lin}(V, W)$ die we net noemden. En tensoren worden op veel plaatsen gebruikt binnen en buiten de wiskunde. Bijvoorbeeld:

- elke vector is een tensor;
- elke lineaire afbeelding is een tensor;
- elk inprodukt is een tensor;
- de determinant nemen van vierkante matrices is een tensor;
- de stress-tensor wordt gebruikt in de mechanica;
- de Riemann krommingstensor wordt gebruikt om gekromde ruimtes te beschrijven in de differentiaalmeetkunde;
- in de algemene relativiteitstheorie is Einstein's veldvergelijking een relatie tussen krommingstensoren die afgeleid zijn van de Riemann krommingstensor;
- in de groepentheorie worden o.a. representaties bestudeerd: symmetrieën in vectorruimtes. Door het tensorprodukt van zulke vectorruimtes te nemen kunnen we nieuwe representaties construeren.

Net zoals we vectoren kunnen ontbinden t.a.v. een basis, en lineaire afbeeldingen kunnen beschrijven door hun matrices t.a.v. bases, kunnen we tensoren ook beschrijven met hun coëfficiënten in gegeven bases. Dat werkt goed voor berekeningen, zoals we bijvoorbeeld de samenstelling van twee lineaire afbeeldingen kunnen berekenen via het matrixprodukt.

In dit dictaat richten we ons vooral op de onderliggende wiskundige objecten: we werken uit wat het tensorprodukt van vectorruimtes is, en wat tensoren precies zijn, en merken hier en daar op hoe we met tensoren kunnen rekenen in gegeven bases.

De theorie in dit dictaat is wat abstracter, en misschien moeilijker te verteren, dan de andere eerstejaarsstof bij lineaire algebra. Een mogelijke oorzaak van verwarring is dat we veel werken met vectorruimtes waarvan de elementen zelf afbeeldingen zijn, zoals in het voorbeeld $\mathrm{Lin}(V, W)$. Als we vervolgens afbeeldingen tussen zulke ruimtes bekijken, dan hebben we het over afbeeldingen tussen verzamelingen van afbeeldingen. Dan kan het moeite kosten om het overzicht te houden van wat alles betekent. De beste oplossing is meestal: gewoon stap voor stap uitschrijven wat alle definities precies zijn, en tussen welke ruimtes de afbeeldingen gaan waarmee je werkt. Opgaven doen is de beste manier om aan tensorprodukten (of welk wiskundig begrip dan ook) te wennen, en daarom staan er opgaven aan het eind van elke sectie.

Vanwege het wat hogere abstractieniveau komen tensoren niet altijd aan bod bij eerstejaars lineaire algebra. Dan is er later iets in te halen als je ze tegenkomt bij een vak over differentiaalmeetkunde of bij een natuurkundevak. Hopelijk helpt dit dictaat om wat gevoel te kweken voor tensoren, zodat ze makkelijker te verwerken zijn als je ze later tegenkomt.

We zullen in dit dictaat veel lineaire isomorfismes tussen vectorruimtes tegenkomen. Bij resultaten over lineaire isomorfismes geven we altijd aan wat het lineaire isomorfisme is, of ook vaak dat er een uniek lineair isomorfisme is met een bepaalde eigenschap. Zulke uitspraken zijn sterker dan uitspraken van de vorm "deze vectorruimtes zijn isomorf", wat hetzelfde betekent als "er is een lineair isomorfisme tussen deze vectorruimtes". Die laatste twee uitspraken betekenen niet meer dan dat twee vectorruimtes dezelfde dimensie hebben. Een specifiek lineair isomorfisme geven, of een eigenschap ervan geven die het isomorfisme uniek bepaalt, laat ook zien hoe de vectoren in de twee ruimtes op elkaar worden afgebeeld. Dat geeft meer informatie.

We hebben het soms over een *natuurlijk* isomorfisme. Hier heeft het woord "natuurlijk" geen concrete wiskundige betekenis; het betekent alleen dat het isomorfisme op een min of meer voor de hand liggende manier gedefinieerd is, en eigenschappen heeft die je zou kunnen verwachten.

Het idee

We geven een paar intuïtieve beschrijvingen van het tensorprodukt in speciale gevallen, om een idee over te brengen van wat je je erbij kunt voorstellen. We werken nu voor het gemak over het grondlichaam $\mathbb{R}$.

We bekijken eerst de vectorruimtes $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, voor $m, n \in \mathbb{R}$. We geven het verschil aan tussen het Cartesisch produkt

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &= \{(v, w); v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\big((v^1, \dots, v^m), (w^1, \dots, w^n)\big); v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned} \tag{0.0.1}$$

en het tensorprodukt $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$. Het Cartesisch produkt (0.0.1) kunnen we op een natuurlijke manier identificeren met $\mathbb{R}^{m+n}$, en het wordt zo een vectorruimte van dimensie $m + n$. (Deze wordt ook wel geschreven als een directe som $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$.)

Het tensorprodukt $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ van $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ wordt op een andere manier geconstrueerd. Een element van het tensorprodukt $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ kunnen we opvatten als een "vector" met m componenten, die zelf weer vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn:

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n = \big\{\big(w_1, \dots, w_m\big); w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n\big\} \\ &= \big\{\big((w_1^1, \dots, w_1^n), \dots, (w_m^1, \dots, w_m^n)\big); w_j^k \in \mathbb{R} \text{ voor } j = 1, \dots, m \text{ en } k = 1, \dots n\big\}.\end{aligned}$$

Deze ruimte is te identificeren met $\mathbb{R}^{mn}$ of met de ruimte $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ van $m \times n$ matrices, en heeft dimensie mn. (Zie Lemma 1.3.8.)

Andere manieren om tensorprodukten intuïtief te beschrijven in speciale gevallen zijn:

- als V de vectorruimte is van $\mathbb{R}$-waardige functies op een eindige verzameling A, en W de ruimte van $\mathbb{R}$-waardige functies op een eindige verzameling B, dan is $V \otimes W$ de vectorruimte van $\mathbb{R}$-waardige functies op de verzameling $A \times B$ (zie Voorbeeld 2.3.6);

- als V een vectorruimte is van functies met waarden in $\mathbb{R}$, dan is $V \otimes W$ meestal de vectorruimte van 'dezelfde soort' functies met waarden in W (voor lineaire functies geldt bijvoorbeeld $\mathrm{Lin}(V, F) \otimes W = \mathrm{Lin}(V, W)$ vanwege Propositie 2.2.2 en Lemma 2.2.5; zie Opgave 2.1.3 voor het geval van polynoomfuncties).

Als deze intïtieve beschrijvingen helpen om alvast wat gevoel te kweken, dan is dat mooi. Zo niet, dan is het geen enkel probleem om ze te vergeten en te beginnen met de preciezere beschrijvingen van tensorprodukten in de rest van dit dictaat.

Overzicht

In Sectie 1 geven we de definitie van het tensorprodukt van twee eindigdimensionale vectorruimtes, zie Definitie 1.3.1. Die definitie is gebaseerd op twee andere constructies: die van de duale van een vectorruimte, en die van de ruimte van bilineaire vormen op twee vectorruimtes. Aan het eind van Sectie 1 laten we ook zien hoe lineaire afbeeldingen tussen vectorruimtes aanleiding geven tot lineaire afbeeldingen tussen tensorprodukten.

Er zijn nog twee veel gebruikte constructies van het tensorprodukt, die geven we in Sectie 2. De eerste, in Gevolg 2.1.3, is gebaseerd op de universele eigenschap van het tensorprodukt, Stelling 2.1.1. Die universele eigenschap wordt ook in de rest van dit dictaat vaak gebruikt. In de tweede alternatieve constructie van het tensorprodukt, in Propositie 2.5.1, gebruiken we vectorruimtes voorgebracht door verzamelingen, en quotiënten van vectorruimtes door lineaire deelruimtes. Alle drie de constructies van het tensorprodukt geven hetzelfde resultaat, en hebben hun eigen voor- en nadelen.

In Sectie 3 behandelen we het tensorprodukt van meer dan twee vectorruimtes. Het is logisch gezien niet nodig om eerst het speciale geval van twee vectorruimtes te behandelen, hoewel we zullen zien dat het tensorprodukt van meer vectorruimtes ook kan worden opgebouwd uit herhaalde tensprodukten van twee vectorruimtes. Maar in de definities, resultaten en bewijzen in het geval van een willekeurig aantal vectorruimtes is de notatie een stuk ondoorzichtiger dan voor twee vectorruimtes. Daarom hebben we ervoor gekozen om eerst de details uit te werken voor tensorprodukten van twee vectorruimtes, en later aan te geven hoe alles gegeneraliseerd kan worden tot meer vectorruimtes.

Als een toepassing van het tensorprodukt van meer dan twee (om precies te zijn, vier) vectorruimtes, geven we kort aan hoe kromming beschreven wordt in de differentiaalmeetkunde, en hoe dat gebruikt kan worden om de wetten van de algemene relativiteitstheorie te formuleren. Zie Voorbeelden 3.4.8 en 3.5.9.

Notatie

We werken met vectorruimtes over het grondlichaam $F = \mathbb{R}$ of $F = \mathbb{C}$.

Opmerking 0.0.1. Het algemene begrip *lichaam* wordt behandeld bij een later algebravak, en de constructies in dit dictaat werken ook over andere lichamen F dan $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, zoals het lichaam $F = \mathbb{Q}$ van de rationale getallen, of het lichaam F_2 met twee elementen. Het is zelfs zo dat de meeste constructies werken als F een *ring* is, zoals $\mathbb{Z}$, in plaats van een lichaam. Dan hebben we het over *modulen* in plaats van vectorruimtes, maar die algemeenheid gaat te ver voor dit dictaat.

We schrijven elementen van de vectorruimte F^n als kolomvectoren, maar om plaats te besparen gebruiken we ook de notatie

$$(x_1, \ldots, x_n) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n.$$

Met andere woorden: met de komma's staat $(x_1, \ldots, x_n)$ voor een kolomvector, de versie $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ zonder komma's is een rijvector.

Als $m, n \in \mathbb{N}$, dan schrijven we $M_{m\times n}(F)$ voor de vectorruimte van $m \times n$ matrices over F.

We schrijven I_V voor de identiteisafbeelding op een vectorruimte V.

Als $T\colon V \to W$ een lineaire afbeelding is, dat schrijven we $\ker(T)$ voor zijn kern, en $\operatorname{im}(T)$ voor zijn beeld. (Zie de definities op blz. 67 van [1]. Daar wordt $\ker(T)$ aangegeven met $N(T)$, en $\operatorname{im}(T)$ met $R(T)$.) Als $v \in V$, dan schrijven we $Tv \in W$ voor het beeld van v onder T.

Als V en W twee vectorruimtes zijn, dan schrijven we $\operatorname{Lin}(V, W)$ voor de vectorruimte van alle lineaire afbeeldingen van V naar W. (Zie Theorem 2.7 en de definities op blz. 82 van [1]. Daar wordt $\operatorname{Lin}(V, W)$ aangegeven met $\mathcal{L}(V, W)$.)

Als $j, k \in \mathbb{N}$, dan schrijven we

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1 & \text{als } j = k; \\ 0 & \text{als } j \neq k. \end{cases}$$

Dit is het *Kronecker* δ symbool.

1 Het tensorprodukt van twee vectorruimtes

1.1 De duale van een vectorruimte

Zij V een vectorruimte.

Definitie 1.1.1. De *duale* van V is de verzameling V^* van alle lineaire afbeeldingen van V naar F. Voor $\xi, \xi' \in V^*$ en $\lambda \in F$ definiëren we

$$\begin{aligned} \xi + \xi' \colon V &\to F; \quad \text{en} \\ \lambda\xi \colon V &\to F \end{aligned}$$

door

$$\begin{aligned} (\xi + \xi')(v) &:= \xi(v) + \xi'(v); \quad \text{en} \\ (\lambda\xi)(v) &:= \lambda\xi(v), \end{aligned}$$

voor $v \in V$.

Lemma 1.1.2. *(a) Voor alle $\xi, \xi' \in V^*$ en $\lambda \in F$ zijn $\xi + \xi'$ en $\lambda\xi$ weer elementen van V^*.*

(b) De optelling en scalaire vermenigvuldiging die zo gedefinieerd zijn maken van V^* een vectorruimte. Het nul-element van die vectorruimte is de afbeelding $V \to F$ die elke vector op nul afbeeldt.

Bewijs. Dit is Opgave 1.1.3. □

Opmerking 1.1.3. Een element van V^* wordt soms een *covector* genoemd.

Opmerking 1.1.4. Er geldt dat $V^* = \mathrm{Lin}(V, F)$. Dus Lemma 1.1.2 volgt ook uit Theorem 2.7 in [1].

Voorbeeld 1.1.5. Neem $V = F^n$, en schrijf elementen van F^n als kolomvectoren. Elke lineaire afbeelding van F^n naar F wordt gegeven door een $1 \times n$ matrix, dus als een rijvector met n componenten. Zo krijgen we een lineair isomorfisme van $(F^n)^*$ naar de vectorruimte van rijvectoren met n componenten.

Neem bijvoorbeeld de rijvector $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Het corresponderende element van $(F^3)^*$ beeldt de kolomvector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ af op

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x - 2y + z.$$

Lemma 1.1.6. *Stel dat* V *eindig-dimensionaal is, en zij* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *een basis van* V.

(a) *Er zijn unieke elementen* $e^1, \ldots, e^n \in V^*$ *zo dat voor alle* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$e^j(e_k) = \delta^j_k. \tag{1.1.1}$$

(b) *Deze elementen* $e^1, \ldots, e^n \in V^*$ *vormen samen een basis van* V^*. *In het bijzonder is* $\dim(V^*) = \dim(V)$.

Bewijs. (a) We laten eerst zien dat $e^1, \ldots, e^n$ uniek zijn, als ze bestaan. Stel dat $e^1, \ldots, e^n \in V^*$ de eigenschap (1.1.1) hebben. Zij $v \in V$, en schrijf $v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n$, voor $v^1, \ldots, v^n \in F$. Dan geldt vanwege lineariteit van e^j dat

$$e^j(v) = v^1 e^j(e_1) + \cdots + v^n e^j(e_n) = v^j. \tag{1.1.2}$$

Dit legt e^j vast, dus $e^1, \ldots, e^n$ zijn uniek.

De uitdrukking (1.1.2) definieert een afbeelding $e^j : V \to F$. We moeten nog laten zien dat die lineair is, en dat voldaan is aan (1.1.1). Dat is Opgave 1.1.4. Dus de elementen e^j liggen inderdaad in V^*, hebben de gevraagde eigenschap (1.1.1), en zijn de unieke elementen met die eigenschap.

(b) We laten zien dat $\{e^1, \ldots, e^n\}$ lineair onafhankelijk is en V^* opspant. Voor lineaire onafhankelijkheid nemen we aan dat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ zo zijn dat

$$\lambda_1 e^1 + \cdots + \lambda_n e^n = 0.$$

Dat betekent dat dit element van V^* elke vector in V op nul afbeeldt. In het bijzonder is voor alle k,

$$0 = (\lambda_1 e^1 + \cdots + \lambda_n e^n)(e_k) = \lambda_k.$$

Dus $\lambda_k = 0$ voor alle k. Dus de verzameling $\{e^1, \ldots, e^n\}$ is lineair onafhankelijk.

Tenslotte laten we zien dat $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de ruimte V^* opspant. Zij $\xi \in V^*$. Definieer

$$\xi_j := \xi(e_j).$$

Dan geldt voor alle j dat

$$(\xi_1 e^1 + \cdots + \xi_n e^n)(e_j) = \xi_j = \xi(e_j).$$

De twee lineaire afbeeldingen $(\xi_1 e^1 + \cdots + \xi_n e^n)$ en ξ van V naar F nemen dus dezelfde waarden aan op een basis, en dus zijn ze gelijk. We concluderen dat

$$\xi = \xi_1 e^1 + \cdots + \xi_n e^n \in \operatorname{span}(\{e^1, \ldots, e^n\}).$$

Dus het opspansel van $\{e^1, \ldots, e^n\}$ is de hele ruimte V^*.

□

Definitie 1.1.7. Als V eindig-dimensionaal is, en $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis is van V, dan is de basis $\{e^1, \ldots, e^n\}$ van V^* in Lemma 1.1.6 de *duale basis* van $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

We zullen een paar keer een gevolg van de rangstelling gebruiken.

Lemma 1.1.8. *Stel dat W nog een vectorruimte is, en dat V en W dezelfde, eindige dimensie hebben. Dan is een lineaire afbeelding $T\colon V \to W$ injectief dan en slechts dan als hij surjectief is.*

Bewijs. Vanwege de rangstelling is

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(V) = \dim(W). \tag{1.1.3}$$

Stel eerst dat T injectief is. Dan is $\dim(\ker(T)) = 0$, dus $\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(W)$. Dus het beeld van T is een lineaire deelruimte van W van dimensie $\dim(W)$, en dus is dit beeld de hele ruimte W. Dus T is surjectief.

Stel nu dat T surjectief is. Dan is $\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(W)$. Vanwege (1.1.3) is daarom $\dim(\ker(T)) = 0$, dus $\ker(T) = \{0\}$. Dus T is injectief. □

De duale V^* van V is zelf een vectorruimte, en heeft dus weer een duale: $V^{**} = (V^*)^*$. Dat is de vectorruimte van alle lineaire afbeeldingen van V^* naar F. Als V eindig-dimensionaal is, dan is er een lineair isomorfisme

$$\varphi\colon V \to V^{**} \tag{1.1.4}$$

dat we vaak zullen gebruiken. Dat is als volgt gedefinieerd. Als $v \in V$, dan is $\varphi(v)\colon V^* \to F$ gegeven door

$$\big(\varphi(v)\big)(\xi) = \xi(v) \tag{1.1.5}$$

voor $\xi \in V^*$.

Lemma 1.1.9. *Als* V *eindig-dimensionaal is, dan definieert* (1.1.5) *een lineair isomorfisme* $\varphi\colon V \to V^{**}$.

Bewijs. Opgave 1.1.6 is om te laten zien dat φ een lineaire afbeelding van V naar V^{**} is.

We gaan laten zien dat de $\ker(\varphi) = \{0\}$, zodat φ injectief is. Stel dat $v \in \ker(\varphi)$. Dan is $\xi(v) = 0$ voor alle $\xi \in V^*$. Zij $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis van V, en $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de duale basis van V^*. Schrijf $v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n$, voor $v^1, \ldots, v^n \in F$. Dan is voor alle j,

$$v^j = e^j(v) = \big(\varphi(v)\big)(e^j) = 0.$$

Dus $v = 0$.

Vanwege Lemma 1.1.6 is

$$\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V).$$

Uit deze gelijkheid en injectiviteit van φ volgt via Lemma 1.1.8 dat φ ook surjectief is. $\square$

Opmerking 1.1.10. Als V oneindig-dimensionaal is, dan definieert (1.1.5) een injectieve lineaire afbeelding $\varphi\colon V \to V^{**}$. Deze is dan in het algemeen niet surjectief.

We schrijven soms ook φ_V in plaats van φ, om aan te geven voor welke vectorruimte deze afbeelding gedefinieerd is.

In het bewijs van Lemma 1.2.7 gebruiken we de volgende omkering van Lemma 1.1.6.

Lemma 1.1.11. *Stel dat* V *eindig-dimensionaal is, en zij* $\{e^1, \ldots, e^n\}$ *een basis van* V^*. *Dan is er een unieke basis* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *van* V *zo dat voor alle* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$e^j(e_k) = \delta^j_k.$$

Bewijs. Zij $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\} \subset V^{**}$ de duale basis van $\{e^1, \ldots, e^n\}$. Voor $j = 1, \ldots, n$ definiëren we $e_j := \varphi^{-1}(\tilde{e}_j) \in V$. Dan is $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis van V, omdat φ^{-1} een lineair isomorfisme is. En deze basis heeft de gewenste eigenschap, zie Opgave 1.1.7. Uniciteit van zo'n basis gaat analoog aan het bewijs van onderdeel (a) van Lemma 1.1.6. $\square$

Opgaven

Opgave 1.1.1. Beantwoord steeds de vraag: is $\xi \in V^*$?

(a) $V = \{(x, y, z) \in F^3; x + y + z = 0\}$ en $\xi(x, y, z) = x + 2y + 3z$;

(b) $V = F^2$ en $\xi(x, y) = (x, 2y)$;

(c) $V = \{(x, y, z) \in F^3; x + y = 0\}$ en $\xi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$.

Opgave 1.1.2. We nemen $F = \mathbb{R}$, en de vectorruimte $V = C([0, 1])$ van alle continue functies van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$. De optelling en scalaire vermenigvuldiging zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x);\\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x),\end{aligned}$$

voor $f, g \in C([0, 1])$, $x \in [0, 1]$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Je mag gebruiken dat $C([0, 1])$ zo een vectorruimte wordt, zonder dat te bewijzen.

Laat zien dat de afbeeldingen $\xi, \xi' \colon V \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

(a) $\xi(f) = f(0)$;

(b) $\xi'(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$,

voor $f \in V$, elementen zijn van V^*.

Opgave 1.1.3. Bewijs Lemma 1.1.2.

Opgave 1.1.4 (bij het bewijs van Lemma 1.1.6)**.** Stel dat V eindig-dimensionaal is, en zij $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis van V. Definieer $e^j \colon V \to F$, voor $j = 1, \ldots, n$, door

$$e^j(v) = v^j,$$

als $v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n \in V$, voor $v^1, \ldots, v^n \in F$.

(a) Bewijs dat e^j lineair is.

(b) Bewijs dat $e^j(e_k) = \delta^j_k$.

Opgave 1.1.5. Beschouw de vectoren $e_1 = (1, 1)$ en $e_2 = (1, -1)$ in F^2. Je mag gebruiken dat deze samen een basis van F^2 vormen zonder dat te bewijzen. Zij $\{e^1, e^2\}$ de duale basis van $(F^2)^*$. Met welke rijvectoren corresponderen e^1 en e^2 via het isomorfisme in Voorbeeld 1.1.5?

Opgave 1.1.6 (bij het bewijs van Lemma 1.1.9)**.** Zij $\varphi(v)\colon V^* \to F$ als in (1.1.5), voor $v \in V$.

(a) Bewijs dat $\varphi(v) \in V^{**}$ voor alle $v \in V$.

(b) Bewijs dat φ een lineaire afbeelding is van V naar V^{**}.

Opgave 1.1.7. Stel dat V eindig-dimensionaal is, zij $\{e_1, \dots, e_n\}$ een basis van V, en $\{e^1, \dots, e^n\}$ de duale basis van V^*. We kunnen vervolgens de duale basis van $\{e^1, \dots, e^n\}$ nemen, dat is een basis van V^{**}. Bewijs dat die laatste duale basis $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ is.

1.2 Bilineaire afbeeldingen

In deze sectie zijn V, W en X drie vectorruimtes. Het Cartesisch produkt van V en W is

$$V \times W := \{(v, w); v \in V, w \in W\}.$$

Definitie 1.2.1. Een *bilineaire afbeelding* van $V \times W$ naar X is een afbeelding $B\colon V \times W \to X$ zo dat voor alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ en $\lambda \in F$ geldt dat

$$\begin{aligned} B(\lambda v + v', w) &= \lambda B(v, w) + B(v', w); \text{ en} \\ B(v, \lambda w + w') &= \lambda B(v, w) + B(v, w'). \end{aligned}$$

De verzameling van alle bilineaire afbeeldingen van $V \times W$ naar X geven we aan met $\mathrm{Bilin}(V, W; X)$. Als $B, B' \in \mathrm{Bilin}(V, W; X)$ en $\lambda \in F$, dan definiëren we de afbeeldingen

$$\begin{aligned} B + B'\colon V \times W &\to X; \quad \text{en} \\ \lambda B\colon V \times W &\to X \end{aligned}$$

door

$$\begin{aligned} (B + B')(v, w) &= B(v, w) + B'(v, w); \\ (\lambda B)(v, w) &= \lambda B(v, w), \end{aligned}$$

voor $v \in V$ en $w \in W$.

Lemma 1.2.2. *(a) Voor alle* $B, B' \in \mathrm{Bilin}(V, W; X)$ *en* $\lambda \in F$ *zijn* $B + B'$ *en* λB *weer elementen van* $\mathrm{Bilin}(V, W; X)$.

(b) *De optelling en scalaire vermenigvuldiging die zo gedefinieerd zijn maken van* $\text{Bilin}(V, W; X)$ *een vectorruimte. Het nul-element van die vectorruimte is de afbeelding* $V \times W \to X$ *die elk paar vectoren op de nulvector in* X *afbeeldt.*

Bewijs. Dit is Opgave 1.2.2. □

Voorlopig bekijken we het geval $X = F$. Dan gebruiken we iets andere terminologie en notatie.

Definitie 1.2.3. Een bilineaire afbeelding van $V \times W$ naar F heet een *bilineaire vorm* op $V \times W$. We schrijven $\text{Bilin}(V, W) := \text{Bilin}(V, W; F)$.

Voorbeeld 1.2.4. Neem $V = F^3$ en $W = F^2$. Voor $v = (v^1, v^2, v^3) \in V$ en $w = (w^1, w^2) \in W$ definiëren we

$$B(v, w) = v^1 w^1 - v^2 w^2 + 7 v^3 w^1.$$

Dit is een bilineaire vorm op $V \times W$, zie Opgave 1.2.3.

Voorbeeld 1.2.5. Als $F = \mathbb{R}$, dan is een inprodukt op V een bilineaire vorm op V. Als $F = \mathbb{C}$, dan is dat niet zo! (Dit is Opgave 1.2.4.)

Voorbeeld 1.2.6. In Einstein's speciale relativiteitstheorie worden ruimte en tijd samengevoegd tot de ruimte $\mathbb{R}^4$. Hierin staat de eerste component voor de tijd, en de laatste drie voor de ruimte. Op deze ruimte wordt het *Minkowski-inprodukt* $(-,-)_M$ gebruikt. Als $v = (t, x, y, z)$ en $v' = (t', x', y', z')$, dan is

$$(v, v')_M := -c^2 t t' + x x' + y y' + z z',$$

waarin c de lichtsnelheid is. (Er worden vaak eenheden gebruikt waarin $c = 1$.) Opgave 1.2.5 is om te laten zien dat dit een bilineaire vorm op $\mathbb{R}^4$ is, maar (ondanks zijn naam!) geen inprodukt.

Een manier waarop het Minkowski-inprodukt wordt gebruikt is voor de definitie van de *lichtkegel*

$$L := \{v \in \mathbb{R}^4, (v, v)_M = 0\}.$$

Lichtstralen liggen op deze kegel.

Lemma 1.2.7. *Stel dat* V *en* W *eindig-dimensionaal zijn. Zij* $\{e^1, \dots, e^m\}$ *een basis van* V^**, en* $\{f^1, \dots, f^n\}$ *een basis van* W^**. Voor* $j = 1, \dots, m$ *en* $k = 1, \dots, n$ *definiëren we* $B^{j,k} \colon V \times W \to F$ *door*

$$B^{j,k}(v, w) := e^j(v) f^k(w),$$

voor $v \in V$ *en* $w \in W$*. Deze afbeeldingen* $B^{j,k}$ *liggen in* $\mathrm{Bilin}(V, W)$*, en vormen een basis van deze ruimte. Er geldt*

$$\dim(\mathrm{Bilin}(V, W)) = \dim(V) \dim(W). \tag{1.2.1}$$

Bewijs. Het is onderdeel (a) van Opgave 1.2.7 om te laten zien dat inderdaad $B^{j,k} \in \mathrm{Bilin}(V, W)$.

We laten zien dat de elementen $B^{j,k} \in \mathrm{Bilin}(V, W)$ lineair onafhankelijk zijn. Stel namelijk dat $\lambda_{j,k} \in F$ zo zijn dat

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} B^{j,k} = 0.$$

Neem bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ van V en $\{f_1, \dots, f_n\}$ van W zo dat voor alle $j, j' = 1, \dots, m$ en $k, k' = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} e^j(e_{j'}) &= \delta^j_{j'}; \text{ en} \\ f^k(f_{k'}) &= \delta^k_{k'}. \end{aligned}$$

Zulke bases bestaan (en zijn uniek) vanwege Lemma 1.1.11. We vinden dan voor alle $j' = 1, \dots, m$ en $k' = 1, \dots, n$ dat

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} B^{j,k} \right) (e_{j'}, f_{k'}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} \delta^j_{j'} \delta^k_{k'} = \lambda_{j',k'}.$$

Dus alle coëfficiënten $\lambda_{j,k}$ zijn nul, dus de elementen $B^{j,k} \in \mathrm{Bilin}(V, W)$ zijn lineair onafhankelijk.

Nu bewijzen we dat de elementen $B^{j,k} \in \mathrm{Bilin}(V, W)$ de ruimte $\mathrm{Bilin}(V, W)$ opspannen. Zij $B \in \mathrm{Bilin}(V, W)$. Schrijf

$$a_{j,k} := B(e_j, f_k)$$

voor $j = 1, \dots, m$ en $k = 1, \dots, n$. Hier gebruiken we weer de basiselementen e_j van V en f_k van W die we eerder hebben gedefinieerd. Er geldt dan voor alle $j' = 1, \dots, m$ en $k' = 1, \dots, n$ dat

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} B^{j,k} \right) (e_{j'}, f_{k'}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \delta^{j}_{j'} \delta^{k}_{k'} = a_{j',k'} = B(e_{j'}, f_{k'}).$$

Dus de twee bilineaire vormen $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} B^{j,k}$ en B nemen dezelfde waarden aan op de gegeven basiselementen van V en W. Vanwege onderdeel (b) van Opgave 1.2.7 impliceert dit dat

$$B = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} B^{j,k} \in \operatorname{span}(\{B^{j,k}; j = 1, \dots m; k = 1, \dots, n\}).$$

Dus het opspansel van de elementen $B^{j,k} \in \operatorname{Bilin}(V, W)$ is de hele ruimte $\operatorname{Bilin}(V, W)$.

Onderdeel (c) van Opgave 1.2.7 is om de gelijkheid (1.2.1) te bewijzen. □

Lemma 1.2.8. *Stel dat* $B \in \operatorname{Bilin}(V, W)$*. Voor* $v \in V$ *definiëren we* $B^\flat(v) \colon W \to F$ *door*

$$\big(B^\flat(v)\big)(w) := B(v, w),$$

voor $w \in W$*. Dan is* $B^\flat(v) \in W^*$*, en we krijgen zo een lineaire afbeelding* $B^\flat \colon V \to W^*$*.*

Bewijs. Dit is Opgave 1.2.9. □

Definitie 1.2.9. Een bilineaire vorm $B \in \operatorname{Bilin}(V, W)$ heet *niet-gedegenereerd* als de afbeelding $B^\flat \colon V \to W^*$ in Lemma 1.2.8 injectief is.

Voorbeeld 1.2.10. Als $F = \mathbb{R}$ en $B \in \operatorname{Bilin}(V, V)$ is een inprodukt, dan is B niet-gedegenereerd. Zie Opgave 1.2.11.

Lemma 1.2.11. *Als* V *eindig-dimensionaal is, en* $B \in \operatorname{Bilin}(V, V)$ *is niet-gedegenereerd, dan is de afbeelding* $B^\flat \colon V \to V^*$ *in Lemma 1.2.8 een lineair isomorfisme.*

Bewijs. De afbeelding $B^\flat$ is injectief per aanname. Vanwege Lemma's 1.1.6 en 1.1.8 is $B^\flat$ daarom ook surjectief, en dus een lineair isomorfisme. □

Opmerking 1.2.12. Op elke eindig-dimensionale reële vectorruimte bestaat een inprodukt. Vanwege Voorbeeld 1.2.10 en Lemma 1.2.11 geeft dit een lineair isomorfisme $V \to V^*$. Dit isomorfisme hang af van de keuze van een inprodukt, en wordt daarom *niet-kanoniek* genoemd. Op dezelfde manier kunnen we een basis van V en Lemma 1.1.6 gebruiken om een lineair isomorfisme $V \to V^*$ te definiëren. Dat isomorfisme hangt af van de keuze van zo'n basis, en is daarom ook niet-kanoniek.

Het isomorfisme $\varphi\colon V \to V^{**}$ in Lemma 1.1.9 hangt niet af van een keuze, en wordt daarom *kanoniek* genoemd.

Lemma 1.2.13. *Stel dat V eindig-dimensionaal is. Zij $B \in \mathrm{Bilin}(V, V)$ niet-gedegenereerd. Zij $\{e_1, \dots, e_n\}$ een basis van V, en $\{e^1, \dots, e^n\}$ de duale basis van V^*. Zij $v \in V$, en schrijf $v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n$, voor $v^1, \dots, v^n \in F$. Dan is $B^\flat(v) = \sum_{j=1}^n v_j e^j$, met*

$$v_j = \sum_{k=1}^n v^k B(e_k, e_j).$$

Bewijs. Dit is Opgave 1.2.10. □

Opmerking 1.2.14. Vanwege Lemma 1.2.13 en de notatie-conventie over boven- en onder-indices die we gebruiken, wordt de afbeelding $B^\flat$, voor $V = W$, ook wel omschreven als *indices omlaag halen* met behulp van een niet-gedegenereerde bilineaire vorm B op een eindig-dimensionale vectorruimte. De inverse van $B^\flat$, ook wel genoteerd met $B^\sharp$, heet dan *indices omhoog halen* met B.

Opgaven

Opgave 1.2.1. Definieer de afbeelding $S\colon V \times V \to V$ door $S(v, v') := v + v'$. Bewijs dat S *niet* bilineair is als V niet de nulruimte is.

Opgave 1.2.2. Bewijs Lemma 1.2.2.

Opgave 1.2.3. Bewijs dat de afbeelding B in Voorbeeld 1.2.4 een bilineaire vorm op $F^3 \times F^2$ is.

Opgave 1.2.4 (bij Voorbeeld 1.2.5)**.**

(a) Bewijs dat een inprodukt op een vectorruimte V over $\mathbb{R}$ een bilineaire vorm op $V \times V$ is.

(b) Bewijs dat een inprodukt op een vectorruimte $V \neq \{0\}$ over $\mathbb{C}$ *geen* bilineaire vorm op $V \times V$ is.

(c) Bewijs dat de verzameling van inprodukten op een vectorruimte $V \neq \{0\}$ over $\mathbb{R}$ *geen* lineaire deelruimte is van $\mathrm{Bilin}(V, V)$.

Opgave 1.2.5. (a) Bewijs dat het Minkowski-inprodukt van Voorbeeld 1.2.6 een bilineaire vorm op $\mathbb{R}^4$ is, maar geen inprodukt.

(b) Bewijs dat als $v = (t, x, y, z)$ op de lichtkegel L ligt, dan

$$\|(x, y, z)\| = c|t|,$$

waarin $\|(x, y, z)\|$ de standaard norm van $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ is. Met andere woorden: de afstand van het ruimtelijke punt (x, y, z) tot de oorsprong is de tijd $|t|$ maal de lichtsnelheid.

Opgave 1.2.6. Zij $B \in \mathrm{Bilin}(V, V)$. Definieer $Q\colon V \to F$ door $Q(v) := B(v, v)$ voor alle $v \in V$.

(a) Bewijs dat voor alle $v \in V$ en $\lambda \in F$,

$$Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v).$$

(b) Stel dat $B(v, v') = B(v', v)$ voor alle $v, v' \in V$. Bewijs dat dan voor alle $v, v' \in V$,

$$B(v, v') = \frac{1}{2}\big(Q(v + v', v + v') - Q(v, v) - Q(v', v')\big). \tag{1.2.2}$$

Vanwege onderdeel (a) heet Q de *kwadratische vorm* gedefinieerd door B. Als B de eigenschap heeft in onderdeel (b), dan kunnen we B reconstrueren uit Q door middel van (1.2.2).

Opgave 1.2.7 (bij het bewijs van Lemma 1.2.7)**.** (a) Bewijs dat de afbeeldingen $B^{j,k}$ in Lemma 1.2.7 in $\mathrm{Bilin}(V, W)$ liggen.

(b) Stel dat $B, B' \in \mathrm{Bilin}(V, W)$, voor eindig-dimensionale vectorruimtes V en W. Zij $\{e_1, \dots, e_m\}$ een basis van V, en $\{f_1, \dots, f_n\}$ een basis van W. Neem aan dat voor alle $j = 1, \dots, m$ en $k = 1, \dots, n$ geldt dat

$$B(e_j, f_k) = B'(e_j, f_k).$$

Bewijs dat $B = B'$.

(c) Bewijs de gelijkheid (1.2.1).

Opgave 1.2.8. Zij $\mathsf{B} \in \operatorname{Bilin}(V, W)$. Stel dat V en W eindig-dimensionaal zijn. Zij $\{e_1, \ldots, e_m\}$ een basis van V, en $\{f_1, \ldots, f_n\}$ een basis van W. We zagen in het bewijs van Lemma 1.2.7 dat B wordt vastgelegd door de getallen $\mathsf{B}(e_j, f_k)$, voor $j = 1, \ldots, m$ en $k = 1, \ldots, n$. Maak dit explicieter door te bewijzen dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$,

$$\mathsf{B}(v, w) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v^j w^k \mathsf{B}(e_j, f_k),$$

als $v = v^1 e_1 + \cdots v^m e_m$ voor $v^1, \ldots, v^m \in F$ en $w = w^1 f_1 + \cdots w^n f_n$ voor $w^1, \ldots, w^n \in F$.

Opgave 1.2.9. Bewijs Lemma 1.2.8.

Opgave 1.2.10. Bewijs Lemma 1.2.13.

Opgave 1.2.11 (bij Voorbeeld 1.2.10)**.** Stel dat $F = \mathbb{R}$. Dan is een inprodukt op Veen bilineaire vorm vanwege Opgave 1.2.4. Bewijs dat een inprodukt niet-gedegenereerd is.

Opgave 1.2.12. Stel dat $F = \mathbb{R}$. Zij $\mathsf{B} \in \operatorname{Bilin}(V, V)$ een inprodukt op V, en $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis van V.

(a) Bewijs dat $\{\mathsf{B}^\flat(e_1), \ldots, \mathsf{B}^\flat(e_n)\}$ een basis is van V^*.

(b) Bewijs dat de basis van V^* uit onderdeel (a) de duale basis van $\{e_1, \ldots, e_n\}$ is dan en slechts dan als de basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ orthonormaal is m.b.t. B.

1.3 Het tensorprodukt

In deze sectie zijn V en W twee eindig-dimensionale vectorruimtes. We nemen aan dat V en W eindig-dimensionaal zijn, omdat de definitie van hun tensorprodukt die we gaan geven dan natuurlijke eigenschappen heeft. Dat heeft vooral te maken met Lemma 1.1.9, dat bijvoorbeeld op een aantal plekken gebruikt wordt Sectie 2.2.

Na de voorbereiding in Secties 1.1 en 1.2 zijn we nu klaar voor de belangrijkste definitie in dit dictaat.

Definitie 1.3.1. Het *tensorprodukt* van V en W is

$$V \otimes W := \mathrm{Bilin}(V^*, W^*).$$

Elementen van $V \otimes W$ heten *tensoren*.

Vanwege Lemma's 1.1.2 en 1.2.2 is $V \otimes W$ een vectorruimte.

Laten we een beschrijving geven van de elementen van $V \otimes W$, inclusief een basis van deze vectorruimte.

Definitie 1.3.2. Als $v \in V$ en $w \in W$, dan definiëren we de afbeelding

$$v \otimes w \colon V^* \times W^* \to F$$

door

$$(v \otimes w)(\xi, \eta) := \xi(v)\eta(w)$$

voor $\xi \in V^*$ en $\eta \in W^*$.

Voorbeeld 1.3.3. Neem $v = (1, 2, 3) \in F^3$ en $w = (-2, 1) \in F^2$. We identificeren $(F^3)^*$ en $(F^2)^*$ met ruimtes van rijvectoren, zoals in Voorbeeld 1.1.5. Dan is $v \otimes w$ de bilineaire afbeelding $(F^3)^* \times (F^2)^* \to F$ gegeven door

$$(v \otimes w)\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+2y+3z)(-2a+b),$$

voor $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in (F^3)^*$ en $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in (F^2)^*$.

Lemma 1.3.4. *Als $v \in V$ en $w \in W$, dan is $v \otimes w \in V \otimes W$.*

Bewijs. Dit is Opgave 1.3.1. □

Definitie 1.3.5. Een element van $V \otimes W$ van de vorm $v \otimes w$, voor $v \in V$ en $w \in W$, is een *simpele tensor*.

We zullen zien dat niet elk element van $V \otimes W$ een simpele tensor is, maar wel een eindige som van simpele tensoren. Zie Lemma 1.3.10.

Opmerking 1.3.6. Voor getallen x en y is het produkt $x \times y$ weer een getal. Let op dat voor vectoren $v \in V$ en $w \in W$, de simpele tensor $v \otimes w$ niet weer een vector in V of W is (tenzij een van de ruimtes F is, zie Voorbeeld 1.3.11), maar een ander soort object, in een andere ruimte $V \otimes W$. Dat betekent dat we in het algemeen het "produkt" $v \otimes w$ niet kunnen "uitrekenen" zoals we $3 \times 7 = 21$ kunnen uitrekenen. In concrete voorbeelden kunnen we wel berekeningen doen, zoals in Voorbeeld 1.3.3.

Lemma 1.3.7 (Rekenregels voor tensoren)**.** *Voor alle* $v, v' \in V$*,* $w, w' \in W$ *en* $\lambda \in F$ *geldt*

$$\begin{aligned}(v+v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w;\\ v \otimes (w+w') &= v \otimes w + v \otimes w';\\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w).\end{aligned}$$

Bewijs. Dit is Opgave 1.3.6. □

Vanwege Lemma's 1.3.4 en 1.3.7 is de afbeelding

$$\tau \colon V \times W \to V \otimes W, \tag{1.3.1}$$

gegeven door $\tau(v, w) = v \otimes w$, voor $v \in V$ en $w \in W$, bilineair.

Lemma 1.3.8. *Zij* $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *een basis van* V *en* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *een basis van* W*. Dan is*

$$\{e_j \otimes f_k; j = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots n\}$$

een basis van $V \otimes W$*. In het bijzonder is*

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W). \tag{1.3.2}$$

Bewijs. We schrijven φ_V en φ_W voor de afbeeldingen (1.1.4) voor de ruimtes V en W. Vanwege Lemma 1.1.9 is $\{\varphi_V(e_1), \ldots, \varphi_V(e_m)\}$ een basis van V^{**}, en $\{\varphi_W(f_1), \ldots, \varphi_W(f_n)\}$ een basis van W^{**}. Voor $j = 1, \ldots, m$ en $k = 1, \ldots, n$ definiëren we $B_{j,k} \colon V^* \times W^* \to F$ door

$$B_{j,k}(\xi, \eta) := \big(\varphi_V(e_j)\big)(\xi)\big(\varphi_W(f_k)\big)(\eta),$$

voor $\xi \in V^*$ en $\eta \in W^*$. Vanwege Lemma 1.2.7 vormen deze afbeeldingen $B_{j,k}$ een basis van $V \otimes W$.

Zij nu $\xi \in V^*$ en $\eta \in W^*$. Dan is voor alle $j = 1, \ldots, m$ en $k = 1, \ldots, n$,

$$B_{j,k}(\xi, \eta) = \xi(e_j)\eta(f_k) = (e_j \otimes f_k)(\xi, \eta).$$

Dus $B_{j,k} = e_j \otimes f_k$. □

Opmerking 1.3.9. De gelijkheid (1.3.2) motiveert waarom het tensorprodukt een produkt heet, en waarom hiervoor het symbool $\otimes$ wordt gebruikt, dat eruit ziet als een vermenigvuldiging. Vergelijk dit met de gelijkheid

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

voor directe sommen. (Zie Exercise 1.6.33(a) in [1].)

Vanwege Lemma 1.3.8 kunnen we elke tensor in $V \otimes W$ schrijven als een som van simpele tensoren. (We gebruiken dan ook de derde rekenregel in Lemma 1.3.7.) We kunnen iets preciezer zijn over hoe zo'n algemene tensor te schrijven is als som van simpele tensoren.

Lemma 1.3.10. *Zij* d *de kleinste van de dimensies van* V *en* W. *Dan is elk element van* $V \otimes W$ *de som van hoogstens* d *simpele tensoren.*

Bewijs. Stel dat $\dim(V) \leq \dim(W)$, dus $d = \dim(V)$. Het andere geval gaat net zo.

Zij $\{e_1, \ldots, e_m\}$ een basis van V en $\{f_1, \ldots, f_n\}$ een basis van W. Vanwege Lemma 1.3.8 is elk element van $V \otimes W$ te schrijven als

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a^{j,k} e_j \otimes f_k. \tag{1.3.3}$$

Schrijven we

$$w_j := \sum_{k=1}^{n} a^{j,k} f_k \in W,$$

dan is (1.3.3) vanwege Lemma 1.3.7 gelijk aan

$$\sum_{j=1}^{d} e_j \otimes w_j.$$

$\square$

Vanwege Lemma 1.3.10 is

$$V \otimes W = \{v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_d \otimes w_d; v_1, \ldots, v_d \in V, w_1, \ldots, w_d \in W\}.$$

(Sommige van de termen $v_j \otimes w_j$ kunnen nul zijn.) Deze beschrijving geeft een wat concreter beeld van de elementen van $V \otimes W$ in termen van vectoren in V en W.

Voorbeeld 1.3.11. Als $W = F$, dan is er een lineair isomorfisme $T \colon V \to V \otimes F$, zie Opgave 1.3.7. Zo kunnen we elke tensor in $V \otimes F$ opvatten als een vector, en omgekeerd elke vector in V als een tensor in $V \otimes F$.

Als $V = F$, dan is er net zo'n lineair isomorfisme $F \otimes W \to W$.

In berekeningen is het vaak handig om een tensor uit te schrijven t.a.v. een basis zoals in Lemma 1.3.8. Een algemene tensor in $V \otimes W$ kan dan worden beschreven met de coëfficienten $a^{j,k}$ in (1.3.3). Veel berekeningen kunnen dan worden uitgevoerd met alleen die coëfficienten, als duidelijk is welke bases we gebruiken. Dit maakt berekeningen vaak efficiënt, en is bijvoorbeeld gebruikelijk in de natuurkunde. Voor bewijzen over tensorprodukten werkt het vaak beter om met tensoren op zich te werken, in plaats van met hun coëfficienten in een basis.

In Sectie 2.2 werken we een paar speciale gevallen van tensorprodukten uit. We zullen dan zien dat tensoren generalisaties zijn van een aantal bekende begrippen in de lineaire algebra. We stellen deze speciale gevallen nog even uit tot Sectie 2.2, omdat we bij het behandelen ervan de theorie uit Secties 1.4 en 2.1 gebruiken.

Opgaven

Opgave 1.3.1. Bewijs Lemma 1.3.4.

Opgave 1.3.2. Neem $V = W = \mathbb{F}^2$, en identificeer V^* met de ruimte van rijvectoren met twee componenten zoals in Voorbeeld 1.1.5. Bereken

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

Opgave 1.3.3. Stel dat $v, v' \in V$ en $w, w' \in W$. Schrijf de volgende uitdrukkingen zo kort mogelijk.

(a) $v \otimes 0$;

(b) $7v \otimes w - v \otimes 7w$;

(c) $v \otimes w + v' \otimes 7w$;

(d) $7v \otimes w + v' \otimes 8w'$;

(e) $(v + 7v') \otimes (w + 8w') - v \otimes w - 56(v' \otimes w')$.

Opgave 1.3.4. Geef een voorbeeld van een vectorruimte V en $v, v' \in V$ waarvoor

$$v \otimes v' \neq v' \otimes v$$

in $V \otimes V$.

Opgave 1.3.5. Neem aan dat V en W beide niet de nulruimte zijn. Bewijs dat er *geen* afbeelding $T\colon V \otimes W \to V$ is zo dat

$$T(v \otimes w) = v$$

voor alle $v \in V$ en $w \in W$.

Opgave 1.3.6. Bewijs Lemma 1.3.7.

Opgave 1.3.7. Beschouw de afbeelding $T\colon V \to V \otimes F$ gedefinieerd door $Tv = v \otimes 1$, voor $v \in V$.

(a) Bewijs dat de afbeelding T lineair is.

(b) Bewijs dat $V \otimes F = \{v \otimes \lambda; v \in V, \lambda \in F\}$.

(c) Bewijs dat T een lineair isomorfisme is.

Opgave 1.3.8. Neem $V = F^2$ en $W = F^3$. Beschouw de tensor

$$(1, 2, 3) \otimes (2, 4) + (1, 0, -1) \otimes (1, 1) + (0, 3, 5) \otimes (1, 3) \in F^2 \otimes F^3.$$

Vanwege Lemma 1.3.10 kan deze tensor geschreven worden als de som van hoogstens twee simpele tensoren. Geef zo'n uitdrukking voor deze tensor.

1.4 Lineaire afbeeldingen tussen tensorprodukten

Stel eerst dat V en W vectorruimtes zijn, en $T\colon V \to W$ een lineaire afbeelding.

Definitie 1.4.1. Als $\eta \in W^*$, dan definiëren we de afbeelding $T^*\eta\colon V \to F$ door

$$(T^*\eta)(v) = \eta(Tv),$$

voor $v \in V$.

Lemma 1.4.2. *(a) Als $\eta \in W^*$, dan is $T^*\eta \in V^*$.*

(b) De zo gedefinieerde afbeelding $T^*\colon W^* \to V^*$ is lineair.

Bewijs. Dit is Opgave 1.4.1. $\square$

Opmerking 1.4.3. De notatie T^* voor de lineaire afbeelding in Lemma 1.4.2 is dezelfde als die voor de geadjungeerde van een lineaire afbeelding m.b.t. een inprodukt. Dat kan verwarrend zijn, maar het is standaardnotatie. (De geadjungeerde van T wordt soms ook met $T^\dagger$ wordt aangegeven.) Er is wel een verband tussen T^* als in Lemma 1.4.2 en de geadjungeerde, zie Opgave 1.4.2.

Lemma 1.4.4. *(a) Als X nog een vectorruimte is, en $S\colon W \to X$ een lineaire afbeelding, dan is*

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^* \colon X^* \to V^*.$$

(b) Als T een lineair isomorfisme is, dan is T^* dat ook.

Bewijs. (a) Stel dat $\xi \in X^*$ en $v \in V$. Dan is

$$\big((S\circ T)^*\xi\big)(v) = \xi((S(Tv)) = (S^*\xi)(Tv) = \big(T^*(S^*\xi)\big)(v) = \big((T^*\circ S^*)\xi\big)(v).$$

(b) De afbeelding T is een lineair isomorfisme dan en slechts dan als hij een inverse T^{-1} heeft. Vanwege onderdeel (a) is dan

$$I_{V^*} = I_V^* = (T^{-1} \circ T)^* = T^* \circ (T^{-1})^*.$$

En net zo $I_{W^*} = (T^{-1})^* \circ T^*$. Dus $(T^{-1})^*$ is de inverse van T^*, oftewel $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Dus T^* is inverteerbaar, en daarom een lineair isomorfisme.

□

We beschouwen vervolgens vectorruimtes V_1, V_2, W_1 en W_2, en lineaire afbeeldingen $S\colon V_1 \to V_2$ en $T\colon W_1 \to W_2$.

Definitie 1.4.5. Als $B \in \mathrm{Bilin}(V_2, W_2)$, dan definiëren we $(S \times T)^*B\colon V_1 \times W_1 \to F$ door

$$\big((S \times T)^*B\big)(v_1, w_1) := B(Sv_1, Tw_1),$$

voor $v_1 \in V_1$ en $w_1 \in W_1$.

Lemma 1.4.6. *(a) Als $B \in \mathrm{Bilin}(V_2, W_2)$, dan is $(S \times T)^*B \in \mathrm{Bilin}(V_1, W_1)$.*

(b) De zo gedefinieerde afbeelding $(S \times T)^*\colon \mathrm{Bilin}(V_2, W_2) \to \mathrm{Bilin}(V_1, W_1)$ is lineair.

Bewijs. Dit is Opgave 1.4.4. □

Voorbeeld 1.4.7. Stel dat $B \in \mathrm{Bilin}(V, V)$ niet-gedegenereerd is, bijvoorbeeld een inprodukt als $F = \mathbb{R}$. Dan bepaalt B een bilineaire vorm

$$B^* := \big((B^\flat)^{-1} \times (B^\flat)^{-1}\big)^* B \in \mathrm{Bilin}(V^*, V^*)$$

op V^*, met $B^\flat \colon V \to V^*$ het lineaire isomorfisme in Lemma 1.2.11.

Lemma 1.4.8. *(a) Als V_3 en W_3 nog twee vectorruimtes zijn, en $Q \colon V_2 \to V_3$ en $R \colon W_2 \to W_3$ zijn lineaire afbeeldingen, dan is*

$$((Q \circ S) \times (R \circ T))^* = (S \times T)^* \circ (Q \times R)^* \colon \mathrm{Bilin}(V_3, W_3) \to \mathrm{Bilin}(V_1, W_1).$$

(b) Als S en T lineaire isomorfismes zijn, dan is $(S \times T)^*$ dat ook.

Bewijs. Dit is Opgave 1.4.7. □

Stel nu dat de ruimtes V_1, V_2, W_1 en W_2 eindig-dimensionaal zijn. Vanwege Lemma 1.4.2 krijgen we lineaire afbeeldingen

$$S^* \colon V_2^* \to V_1^*;$$
$$T^* \colon W_2^* \to W_1^*.$$

Vanwege Lemma 1.4.6 geven deze twee afbeeldingen samen een lineaire afbeelding

$$(S^* \times T^*)^* \colon V_1 \otimes W_1 = \mathrm{Bilin}(V_1^*, W_1^*) \to \mathrm{Bilin}(V_2^*, W_2^*) = V_2 \otimes W_2. \quad (1.4.1)$$

Definitie 1.4.9. De lineaire afbeelding

$$S \otimes T \colon V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$$

is de afbeelding (1.4.1).

Lemma 1.4.10. *Voor alle $v_1 \in V_1$ en $w_1 \in W_1$ geldt*

$$(S \otimes T)(v_1 \otimes w_1) = Sv_1 \otimes Tw_1.$$

Bewijs. Dit is Opgave 1.4.8. □

Lemma 1.4.11. *(a) Als* V_3 *en* W_3 *nog twee vectorruimtes zijn, en* $Q\colon V_2 \to V_3$ *en* $R\colon W_2 \to W_3$ *lineaire afbeeldingen, dan is*

$$(Q \circ S) \otimes (R \circ T) = (Q \otimes R) \circ (S \otimes T)\colon V_1 \otimes W_1 \to V_3 \otimes W_3.$$

(b) Als S *en* T *lineaire isomorfismes zijn, dan is* $S \otimes T$ *dat ook.*

Bewijs. (a) Vanwege onderdelen (a) van Lemma's 1.4.4 en 1.4.8 is

$$\begin{aligned}(Q \circ S) \otimes (R \circ T) &= \big((Q \circ S)^* \times (R \circ T)^*\big)^* \\ &= \big((S^* \circ Q^*) \times (T^* \circ R^*)\big)^* \\ &= (Q^* \times R^*)^* \circ (S^* \times T^*)^* \\ &= (Q \otimes R) \circ (S \otimes T).\end{aligned}$$

(b) Als S en T lineaire isomorfismes zijn, dan zijn S^* en T^* dat ook vanwege onderdeel (b) van Lemma 1.4.4. Vanwege onderdeel (b) van Lemma 1.4.8 is daarom $S \otimes T = (S^* \times T^*)^*$ ook een lineair isomorfisme.

□

Opmerking 1.4.12. Onderdelen (a) van Lemma's 1.4.4, 1.4.8 en 1.4.11 worden *functorialiteit* van respectievelijk de duale, bilineaire vormen, en het tensorprodukt genoemd. In het algemeen betekent functorialiteit van een constructie op het niveau van ruimtes dat er een bijbehorende constructie is op het niveau van afbeeldingen tussen ruimtes, die zich goed gedraagt met betrekking tot het samenstellen van afbeeldingen.

In onderdelen (a) van Lemma's 1.4.4 en 1.4.8 zien we dat de volgorde van zo'n samenstelling wordt omgekeerd voor duale ruimtes en bilineaire vormen; dat heet *contravariante* functorialiteit. In onderdeel (a) van Lemma 1.4.11 zien we dat de volgorde van zo'n samenstelling hetzelfde blijft voor het tensorprodukt; dat heet *covariante* functorialiteit.

We kunnen de matrix van $S \otimes T$ uitdrukken in de matrices van S en T. De notatie met indices wordt daarbij wel wat ingewikkeld.

Lemma 1.4.13. *Stel dat, voor* $l = 1, 2$*, we bases* $\{e_1^{(l)}, \dots, e_{m_l}^{(l)}\}$ *van* V_l *en* $\{f_1^{(l)}, \dots, f_{n_l}^{(l)}\}$ *van* W_l *hebben. Zij* $M = \mathrm{Mat}(S) \in M_{m_2 \times m_1}(F)$ *de matrix van* S *t.a.v. de bases* $\{e_1^{(l)}, \dots, e_{m_l}^{(l)}\}$*, en zij* $N = \mathrm{Mat}(T) \in M_{n_2 \times n_1}(F)$ *de matrix van*

T *t.a.v. de bases* $\{f_1^{(l)}, \ldots, f_{n_j}^{(l)}\}$*. Zij* $M \otimes N$ *de matrix van* $S \otimes T$ *t.a.v. de bases* $\{e_j^{(l)} \otimes f_k^{(l)}; j = 1, \ldots, m_l, k = 1, \ldots n_l\}$ *van* $V_l \otimes W_l$ *uit Lemma 1.3.8. Dan is de component van* $M \otimes N$ *die correspondeert met de basiselementen* $e_{j_1}^{(1)} \otimes f_{k_1}^{(1)}$ *van* $V_1 \otimes W_1$ *en* $e_{j_2}^{(2)} \otimes f_{k_2}^{(2)}$ *van* $V_2 \otimes W_2$ *gelijk aan*

$$(M \otimes N)_{(j_1,k_1)}^{(j_2,k_2)} = M_{j_1}^{j_2} N_{k_1}^{k_2}.$$

Bewijs. De bewering is dat voor alle $j_1 = 1, \ldots, m_1$ en $k_1 = 1, \ldots n_1$,

$$(S \otimes T)(e_{j_1}^{(1)} \otimes f_{k_1}^{(1)}) = \sum_{j_2=1}^{m_2} \sum_{k_2=1}^{n_2} (M_{j_1}^{j_2} N_{k_1}^{k_2}) e_{j_2}^{(2)} \otimes f_{k_2}^{(2)}. \tag{1.4.2}$$

Vanwege Lemma 1.4.10 is de linkerkant van (1.4.2) gelijk aan

$$Se_{j_1}^{(1)} \otimes Tf_{k_1}^{(1)} = \left(\sum_{j_2=1}^{m_2} M_{j_1}^{j_2} e_{j_2}^{(2)} \right) \otimes \left(\sum_{k_2=1}^{n_2} N_{k_1}^{k_2} f_{k_2}^{(2)} \right).$$

Vanwege de rekenregels in Lemma 1.3.7 is de uitdrukking aan de rechterkant gelijk aan de rechterkant van (1.4.2). □

Opgaven

Opgave 1.4.1. Bewijs Lemma 1.4.2.

Opgave 1.4.2. Stel dat $F = \mathbb{R}$, dat B een inprodukt op V is, en $T \colon V \to V$ een lineaire afbeelding. (We nemen nu $V = W$ omdat in die context de geadjungeerde van een lineaire afbeelding gedefinieerd is in Sectie 6.3 van [1].) Zij $T^* \colon V^* \to V^*$ als in Lemma 1.4.2, en zij $T^\dagger \colon V \to V$ de geadjungeerde van T m.b.t. het inprodukt B. (We gebruiken nu andere notatie dan in [1] om het verschil tussen T^* en $T^\dagger$ te benadrukken.) Bewijs dat

$$B^\flat \circ T^\dagger = T^* \circ B^\flat.$$

Opgave 1.4.3. Zij $T \colon V \to W$ een lineaire afbeelding, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ een basis van V en $\{f_1, \ldots, f_n\}$ een basis van W. Zij M de matrix van T t.a.v. deze bases, en zij N de matrix van $T^* \colon W^* \to V^*$ t.a.v. de duale bases $\{e^1, \ldots, e^m\}$ van V en $\{f^1, \ldots, f^n\}$ van W. Bewijs dat N de getransponeerde van M is.

Opgave 1.4.4. Bewijs Lemma 1.4.6.

Opgave 1.4.5. Stel dat B in Voorbeeld 1.4.7 een inprodukt is. Bewijs dat B^* een inprodukt is op V^*.

Opgave 1.4.6. Zij $B \in \mathrm{Bilin}(V, V)$ niet-gedegenereerd, en zij $B^* \in \mathrm{Bilin}(V^*, V^*)$ als in Voorbeeld 1.4.7. Zij $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis van V, en $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de duale basis van V. Beschouw de matrices $M, N \in M_{n\times n}(F)$ met componenten

$$\begin{aligned} M_{j,k} &:= B(e_j, e_k); \\ N^{j,k} &= B^*(e^j, e^k), \end{aligned}$$

voor $j, k = 1, \ldots, n$.

(a) Bewijs dat voor alle $j = 1, \ldots, n$,

$$B^\flat e_j = \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} e^k.$$

(b) Laat $A^{j,k} \in F$ zo zijn dat voor alle $j = 1, \ldots, n$,

$$(B^\flat)^{-1} e^j = \sum_{k=1}^{n} A^{j,k} e_k.$$

Bewijs dat voor alle $j = 1, \ldots, n$,

$$e^j = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A^{j,k} M_{k,l} \right) e^l.$$

Leid hieruit af dat

$$\sum_{k=1}^{n} A^{j,k} M_{k,l} = \delta^j_l.$$

(c) Bewijs dat voor alle $j, k = 1, \ldots, n$,

$$N^{j,k} = A^{j,k}.$$

(d) Bewijs dat $N = M^{-1}$ als $n \times n$ matrices.

Opgave 1.4.7. Bewijs Lemma 1.4.8. (Hint: je kunt het bewijs van Lemma 1.4.4 als inspiratie gebruiken.)

Opgave 1.4.8. Bewijs Lemma 1.4.10.

Opgave 1.4.9. Neem $V_1 = V_2 = W_1 = F^2$ en $W_2 = F$. Zij $S\colon F^2 \to F^2$ scalaire vermenigvuldiging met $\lambda \in F$. Zij $T\colon F^2 \to F$ gedefinieerd door $T(x, y) = x + y$. Zij $U\colon F^2 \otimes F \to F^2$ het isomorfisme uit Voorbeeld 1.3.11. Bereken

$$U\Big((S \otimes T)\big((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)\big)\Big) \in F^2,$$

voor $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F^2$.

2 Andere constructies van het tensorprodukt

2.1 De universele eigenschap

We werken nog steeds met twee eindig-dimensionale vectorruimtes V en W. De volgende eigenschap van het tensorprodukt is fundamenteel, en we zullen zien in Gevolg 2.1.3 dat deze het tensorprodukt zelfs in zekere zin uniek bepaalt.

Stelling 2.1.1 (Universele eigenschap van het tensorprodukt)**.** *Zij X een vectorruimte. Voor elke bilineaire afbeelding $B\colon V \times W \to X$ is er een unieke lineaire afbeelding $T\colon V \otimes W \to X$ zo dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$,*

$$T(v \otimes w) = B(v, w). \tag{2.1.1}$$

Bewijs. Zij $\{e_1, \dots, e_m\}$ een basis van V en $\{f_1, \dots, f_n\}$ een basis van W. Vanwege Lemma 1.3.8 is

$$\{e_j \otimes f_k; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots n\}$$

een basis van $V \otimes W$. Daarom is er een unieke lineaire afbeelding $T\colon V \otimes W \to X$ zo dat voor alle $j = 1, \dots, m$ en $k = 1, \dots n$,

$$T(e_j \otimes f_k) = B(e_j, f_k). \tag{2.1.2}$$

(Zie Theorem 2.6 in [1].) Als $v \in V$ en $w \in W$, dan schrijven we $v = v^1 e_1 + \cdots + v_m e_m$ en $w = w^1 f_1 + \cdots + w^n f_n$ voor $v^1, \dots, v^m \in F$ en $w^1, \dots, w^m \in F$. Vanwege Lemma 1.3.7 en lineariteit van T is dan

$$T(v \otimes w) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v^j f^k T(e_j \otimes f_k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v^j f^k B(e_j, f_k).$$

Vanwege bilineariteit van B is de uitdrukking aan de rechterkant gelijk aan $B(v, w)$. Dus (2.1.1) geldt.

(We kunnen (2.1.1) ook afleiden uit (2.1.2) door op te merken dat beide kanten van (2.1.1) bilineair zijn in v en w, en onderdeel (b) van Opgave 1.2.7 toe te passen.)

We zien ook dat T met de gevraagde eigenschappen uniek is. Stel namelijk dat $T' \colon V \otimes W \to X$ nog een lineaire afbeelding is zo dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$,

$$T'(v \otimes w) = B(v, w) = T(v, w).$$

In het bijzonder zijn T en T' dan gelijk op de basis $\{e_j \otimes f_k; j = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n\}$ van $V \otimes W$. Vanwege lineariteit zijn T en T' dus gelijk op de hele ruimte $V \otimes W$. $\square$

Opmerking 2.1.2. Vanwege Lemma 1.3.10 kunnen we de afbeelding T in Stelling 2.1.1 expliciet beschrijven. Een algemeen element van $V \otimes W$ is van de vorm

$$v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_d \otimes w_d \tag{2.1.3}$$

voor een $d \in \mathbb{N}$ en $v_1, \ldots, v_d \in V$ en $w_1, \ldots, w_d \in W$. Omdat T lineair is en voldoet aan (2.1.1) voor alle $v \in V$ en $w \in W$, beeldt T de tensor (2.1.3) af op

$$B(v_1, w_1) + \cdots + B(v_d, w_d) \in X.$$

Het kan misschien lijken dat Stelling 2.1.1 kort bewezen kan worden door T te definiëren op deze manier:

$$T(v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_d \otimes w_d) := B(v_1, w_1) + \cdots + B(v_d, w_d).$$

Maar dan moet wel worden bewezen dat T zo goed gedefinieerd is, want een element van $V \otimes W$ kan op verschillende manieren geschreven worden als een som van simpele tensoren, dus de rechterkant van deze uitdrukking moet voor al die manieren gelijk zijn. In zekere zin is dit wat gebeurt in het bewijs van Stelling 2.1.1.

We hebben gezien dat er een bilinaire afbeelding (1.3.1) is van $V \times W$ naar $V \otimes W$, en dat $V \otimes W$ de universele eigenschap in Stelling 2.1.1 heeft. Het blijkt dat deze twee eigenschappen het tensorprodukt vastleggen op een isomorfisme na dat de relevante structuur behoudt.

Gevolg 2.1.3. *Stel dat* Y *een eindig-dimensionale vectorruimte is, en zij* $\tau_Y \colon V \times W \to Y$ *een bilineaire afbeelding. Stel dat voor elke vectorruimte* X*, en elke bilineaire afbeelding* $B \colon V \times W \to X$*, er een unieke lineaire afbeelding* $T \colon Y \to X$ *is zo dat voor alle* $v \in V$ *en* $w \in W$*,*

$$T(\tau_Y(v,w)) = B(v,w).$$

Dan is er een unieke lineaire afbeelding $T \colon V \otimes W \to Y$ *zo dat voor alle* $v \in V$ *en* $w \in W$*,*

$$T(v \otimes w) = \tau_Y(v,w). \tag{2.1.4}$$

Deze afbeelding T *is een lineair isomorfisme.*

Bewijs. Vanwege Stelling 2.1.1, toegepast met $X = Y$ en $B = \tau_Y$, is er een unieke lineaire afbeelding $T \colon V \otimes W \to Y$ zo dat (2.1.4) geldt voor alle $v \in V$ en $w \in W$. We gaan laten zien dat T een inverse heeft, en dus een lineair isomorfisme is.

We passen de aanname op Y en τ_Y toe met $X = V \otimes W$ en $B = \tau$ als in (1.3.1). Dan vinden we een unieke lineaire afbeelding $S \colon Y \to V \otimes W$ zo dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$, er geldt dat

$$S(\tau_Y(v,w)) = \tau(v,w) = v \otimes w. \tag{2.1.5}$$

Combineren we dit met de eigenschap (2.1.4) van T, dan kriigen we

$$S(T(v \otimes w)) = v \otimes w,$$

voor alle $v \in V$ en $w \in W$. Omdat de simpele tensoren $V \otimes W$ opspannen vanwege Lemma 1.3.10 en S en T lineair zijn, is de samenstelling $S \circ T$ de identiteitsafbeelding $I_{V \otimes W}$ op $V \otimes W$.

De combinatie van (2.1.4) en (2.1.5) impliceert ook dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$,

$$T(S(\tau_Y(v,w))) = T(v \otimes w) = \tau_Y(v,w). \tag{2.1.6}$$

We passen de aanname op Y en τ_Y nog eens toe, nu met $X = Y$ en $B = \tau_Y$. Dan vinden dat er een unieke lineaire afbeelding $U \colon Y \to Y$ is zo dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$,

$$U(\tau_Y(v,w)) = \tau_Y(v,w). \tag{2.1.7}$$

Als we voor U de identiteitsafbeelding I_Y op Y nemen dan is hieraan voldaan. Maar uit (2.1.6) blijkt dat $U = T \circ S$ ook deze eigenschap (2.1.7) heeft. Omdat U uniek is, geldt dus $T \circ S = I_Y$.

We hebben nu gezien dat $S \circ T = I_{V \otimes W}$ en dat $T \circ S = I_Y$. Dus S is de inverse van T, en dus is T een lineair isomorfisme. □

Opmerking 2.1.4. Vanwege Gevolg 2.1.3 wordt een tensorprodukt van V en W soms ook *gedefinieerd* als een vectorruimte Y, samen met een afbeelding τ_Y, die samen de eigenschappen hebben in Gevolg 2.1.3. Stelling 2.1.1 laat dan zien dat een tensorprodukt inderdaad bestaat. En Gevolg 2.1.3 laat zien dat zo'n tensorprodukt uniek is, op isomorfismes na die de relevante structuur (de afbeelding τ_Y) behouden.

Opgaven

Opgave 2.1.1. Zij $S\colon V \times V \to V$ be afbeelding gedefinieerd door vectoren op te tellen, zoals in Opgave 1.2.1. Neem aan dat $V \neq \{0\}$. In Opgave 1.2.1 zagen we dat S dan niet bilineair is. Laat direct zien dat er ook *geen* lineaire afbeelding $T\colon V \otimes V \to V$ is zo dat $T(v \otimes v') = v + v'$ voor alle $v, v' \in V$.

Opgave 2.1.2. Geef een lineair isomorfisme $\mathrm{Bilin}(V, W) \to (V \otimes W)^*$, en bewijs dat dit inderdaad een lineair isomorfisme is.

Opgave 2.1.3. Een functie $p\colon F \to F$ is een *polynoomfunctie van graad* n als er $a_0, \ldots, a_n \in F$ zijn zo dat voor alle $x \in F$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

De verzameling van alle polynoomfuncties $p\colon F \to F$ van graad n geven we aan met $\mathrm{Pol}_n(F)$. Algemener schrijven we $\mathrm{Pol}_n^m(F)$ voor de verzameling van alle functies $p\colon F \to F^m$ zo dat elke component p^j van $p = (p^1, \ldots, p^m)$ een polynoomfunctie $p^m\colon F \to F$ van graad n is.

(a) Bewijs dat $\mathrm{Pol}_n(F)$, en algemener $\mathrm{Pol}_n^m(F)$, een vectorruimte is met betrekking to puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

(b) Geef een basis van $\mathrm{Pol}_n^m(F)$ en bepaal de dimensie van deze ruimte.

(c) Bewijs dat de afbeelding $B\colon\ \mathrm{Pol}_n(F) \times F^m \to \mathrm{Pol}_n^m(F)$, gegeven door

$$\big(B(p, w)\big)(x) = p(x)w,$$

voor $p \in \mathrm{Pol}_n(F)$, $w \in W$ en $x \in F$, bilineair is.

(d) Bewijs dat de corresponderende lineaire afbeelding

$$T\colon\ \mathrm{Pol}_n(F) \otimes F^m \to \mathrm{Pol}_n^m(F) \tag{2.1.8}$$

zoals in Stelling 2.1.1, surjectief is.

(e) Bewijs dat de afbeelding (2.1.8) een lineair isomorfisme is. (Hint: gebruik Lemma 1.1.8.)

2.2 Voorbeelden en eigenschappen van tensorprodukten

Net als in Sectie 2.1 beschouwen we twee eindig-dimensionale vectorruimtes V en W.

We zagen in Voorbeeld 1.3.11 dat tensoren generalisaties zijn van vectoren. We gaan laten zien dat tensoren generalisaties zijn van nog een aantal belangrijke begrippen in de lineaire algebra:

- bilineaire vormen (die weer generalisaties zijn van inprodukten in het reële geval): Voorbeeld 2.2.1;
- lineaire afbeeldingen: Propositie 2.2.2.

Tot slot geven we een natuurlijk isomorfisme tussen $V \otimes W$ en $W \otimes V$ in Lemma 2.2.5.

Voorbeeld 2.2.1. Vanwege onderdeel (b) van Lemma 1.4.8 leiden de isomorfismes $\varphi_V \colon V \to V^{**}$ en $\varphi_W \colon W \to W^{**}$ tot een lineair isomorfisme

$$(\varphi_V \times \varphi_W)^* \colon V^* \otimes W^* = \mathrm{Bilin}(V^{**}, W^{**}) \to \mathrm{Bilin}(V, W).$$

Expliciet vinden we voor $\xi \in V^*$, $\eta \in W^*$, $v \in V$ en $w \in W$ door definities na te lopen dat

$$\begin{aligned}\big((\varphi_V \times \varphi_W)^*(\xi \otimes \eta)\big)(v, w) &= (\xi \otimes \eta)(\psi_V(v), \psi_W(w)) \\ &= \big(\psi_V(v)\big)(\xi)\big(\psi_W(w)\big)(\eta) \\ &= \xi(v)\eta(w).\end{aligned}$$

Samen met Opgave 2.1.2 vinden we zo ook een lineair isomorfisme $(V \otimes W)^* \to V^* \otimes W^*$.

Propositie 2.2.2. *Er is een uniek lineair isomorfisme* $T \colon W \otimes V^* \to \mathrm{Lin}(V, W)$ *zo dat voor alle* $w \in W$, $\xi \in V^*$ *en* $v \in V$,

$$T(w \otimes \xi)v = \xi(v)w. \tag{2.2.1}$$

Bewijs. We passen de universele eigenschap van het tensorprodukt toe. We nemen de afbeelding $B \colon W \times V^* \to \mathrm{Lin}(V, W)$ gegeven door

$$B(w, \xi)v = \xi(v)w,$$

voor $w \in W$, $\xi \in V^*$ en $v \in V$. Het is onderdeel (a) van Opgave 2.2.3 om te laten zien dat B bilineair is. Vanwege Stelling 2.1.1 is er dan een unieke lineaire afbeelding $T\colon W \otimes V^* \to \mathrm{Lin}(V, W)$ zo dat (2.2.1) geldt voor alle $w \in W$, $\xi \in V^*$ en $v \in V$.

We laten zien dat T injectief is. Vanwege Lemma 1.3.10 is een algemeen element van $W \otimes V^*$ van de vorm

$$w_1 \otimes \xi^1 + \cdots + w_d \otimes \xi^d \tag{2.2.2}$$

voor een $d \in \mathbb{N}$, $w_1, \ldots, w_d \in W$ en $\xi^1, \ldots, \xi^d \in V^*$. Als T het element (2.2.2) op 0 afbeeldt, dan is voor alle $v \in V$,

$$\xi^1(v)w_1 + \cdots + \xi^d(v)w_d = 0. \tag{2.2.3}$$

Vanwege Lemma 1.1.9 zijn alle elementen van V^{**} van de vorm $\varphi_V(v)$, voor een $v \in V$. Als we het element (2.2.2) in $W \otimes V^* = \mathrm{Bilin}(W^*, V^{**})$ toepassen op $(\eta, \varphi_V(v))$, voor $\eta \in W^*$ en $v \in V$, dan krijgen we

$$\begin{aligned}\big(\varphi_V(v)\big)(\xi^1)\eta(w_1) + \cdots + \big(\varphi_V(v)\big)(\xi^d)\eta(w_d) &= \eta\left(\varphi_V(v)(\xi^1)w_1 + \cdots + \varphi_V(v)(\xi^d)w_d\right)\\ &= \eta\left(\xi^1(v)w_1 + \cdots + \xi^d(v)w_d\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

vanwege (2.2.3). Dus het element (2.2.2) van $W \otimes V^*$ is nul. We vinden dat $\ker(T) = \{0\}$, dus T is injectief.

Om surjectiviteit van T te bewijzen gebruiken we Lemma 1.1.8. Er geldt

$$\dim(W \otimes V^*) = \dim(W)\dim(V) = \dim(\mathrm{Lin}(V, W)).$$

De eerste gelijkheid volgt uit Lemma's 1.3.8 en 1.1.6, de tweede uit het lineaire isomorfisme $\mathrm{Lin}(V, W) \to M_{\dim(W)\times\dim(V)}(F)$ gedefinieerd door bases van V en W. Omdat T injectief is en $W \otimes V^*$ en $\mathrm{Lin}(V, W)$ dezelfde dimensie hebben, impliceert Lemma 1.1.8 dat T ook surjectief is.

We hebben nu gezien dat T lineair en bijectief is, en dus een lineair isomorfisme. $\square$

Voorbeeld 2.2.3. Om Propositie 2.2.2 concreter te maken nemen we $V = F^m$ en $W = F^n$. We identificeren $(F^m)^*$ met de ruimte van rijvectoren met m componenten zoals in Voorbeeld 1.1.5. Als $w = (w^1, \ldots, w^n) \in F^n$ en $\xi = \begin{pmatrix}\xi_1 & \ldots & \xi_m\end{pmatrix} \in (F^m)^*$, zij $M(w, \xi)$ dan de $n \times m$ matrix met componenten

$$M(w, \xi)_{j,k} = w_j \xi_k.$$

Dan is voor alle $v \in F^m$,

$$M(w, \xi)v = \xi(v)w.$$

Dus nu is $T(w \otimes \xi) = M(w, \xi) \in M_{n\times m}(F) \cong \mathrm{Lin}(F^m, F^n)$.

Met behulp van Propositie 2.2.2 kunnen we de matrix van een lineaire afbeelding t.a.v. een basis schrijven als een tensor.

Lemma 2.2.4. *Zij* $\{e_1, \dots, e_m\}$ *een basis van van* V*, met duale basis* $\{e^1, \dots, e^m\}$ *van* V^**, en zij* $\{f_1, \dots, f_n\}$ *een basis van* W*. Zij* $S \in \mathrm{Lin}(V, W)$*, en zij*

$$\mathrm{Mat}(S) = (s_j^k)_{j=1,\dots,m;k=1,\dots,n}$$

de matrix van S *met betrekking tot de gegeven bases van* V *en* W*. Als* T *het isormofisme uit Propositie 2.2.2 is, dan is*

$$T\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} s_j^k f_k \otimes e^j\right) = S. \tag{2.2.4}$$

Bewijs. Voor alle $j' = 1, \dots, m$ impliceren lineariteit van T en (2.2.1) dat

$$T\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} s_j^k f_k \otimes e^j\right) e_{j'} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} s_j^k e^j(e_{j'}) f_k = \sum_{k=1}^{n} s_{j'}^k f_k = S e_{j'}.$$

Dus de twee kanten van (2.2.4) zijn gelijk op een basis, en dus gelijk op de hele ruimte V. $\square$

Lemma 2.2.5. *Er is een uniek lineair isomorfisme* $T\colon V \otimes W \to W \otimes V$ *zo dat voor alle* $v \in V$ *en* $w \in W$*,*

$$T(v \otimes w) = w \otimes v. \tag{2.2.5}$$

Bewijs. We gaan de universele eigenschap van het tensorprodukt toepassen, Stelling 2.1.1. Daarvoor hebben we een bilineaire afbeelding nodig. We nemen hiervoor de afbeelding $B\colon V \times W \to W \otimes V$ gedefinieerd door

$$B(v, w) = w \otimes v,$$

voor $v \in V$ en $w \in W$. Onderdeel (a) van Opgave 2.2.2 is om te laten zien dat deze afbeelding inderdaad bilineair is.

Vanwege Stelling 2.1.1 is er dan een unieke lineaire afbeelding $T\colon V \otimes W \to W \otimes V$ zo dat (2.2.5) geldt voor alle $v \in V$ en $w \in W$. Onderdelen (b) en (c) van Opgave 2.2.2 zijn om te laten zien dat dit een lineair isomorfisme is. Dan is het bewijs klaar.

Voor een ander bewijs kunnen we Lemma 1.3.8 gebruiken. Stel dat $\{e_1, \dots, e_m\}$ een basis van V is en $\{f_1, \dots, f_n\}$ een basis van W. Dan is

$$\{e_j \otimes f_k; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots n\}$$

een basis van $V \otimes W$, en

$$\{f_k \otimes e_j; , k = 1, \dots n, j = 1, \dots, m\}$$

een basis van $W \otimes V$. Er is precies één bijectie T tussen die bases zo dat (2.2.5) geldt, namelijk $T(e_j \otimes f_k) = f_k \otimes e_j$. Een bijectie tussen bases heeft een unieke uitbreiding tot een lineair isomorfisme. □

Opgaven

Opgave 2.2.1 (bij Voorbeeld 2.2.1)**.** Zij $\{e_1, \dots, e_n\}$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$, en $\{e^1, \dots, e^n\}$ de duale basis van $(\mathbb{R}^n)^*$. Beschouw het element

$$B := (\varphi_{\mathbb{R}^n} \times \varphi_{\mathbb{R}^n})^*\big(e^1 \otimes e^1 + \cdots + e^n \otimes e^n\big) \in \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Bereken $B(v, w)$ voor $v, w \in \mathbb{R}^n$. Herken je B als iets dat je eerder gezien hebt?

Opgave 2.2.2 (bij Lemma 2.2.5)**.** (a) Bewijs dat de afbeelding B in het bewijs van Lemma 2.2.5 bilineair is.

(b) Bewijs dat de afbeelding T in het bewijs van Lemma 2.2.5 injectief is.

(c) Bewijs dat T surjectief is, en dus een lineair isomorfisme. (Hint: gebruik de rangstelling of Lemma 1.1.8.)

Opgave 2.2.3 (bij Propositie 2.2.2)**.** (a) Bewijs dat de afbeelding B in het bewijs van Propositie 2.2.2 bilineair is.

(b) Bewijs dat de afbeelding T in het bewijs van Propositie 2.2.2 injectief is.

(d) Bewijs dat T surjectief is, en dus een lineair isomorfisme. (Hint: gebruik de rangstelling of Lemma 1.1.8.)

Opgave 2.2.4 (bij Propositie 2.2.2)**.** We geven een alternatief, en wat concreter, bewijs van Propositie 2.2.2, in termen van bases van de verschillende vectorruimtes. Dit is in dezelfde geest als het alternatieve bewijs van Lemma 2.2.5.

Stel dat $\{e_1, \dots, e_m\}$ een basis is van V, met de duale basis $\{e^1, \dots, e^m\}$ van V^*. Zij $\{f_1, \dots, f_n\}$ een basis van W.

(a) Voor $j = 1, \dots, m$ en $k = 1, \dots, n$ definiëren we $B^j_k := B(e^j, f_k) \in \mathrm{Lin}(V, W)$, met B als in het bewijs van Propositie 2.2.2. Zij

$$\mathrm{Mat}\colon \mathrm{Lin}(V, W) \to M_{n\times m}(F)$$

het lineaire isomorfisme gedefinieerd door de bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ en $\{f_1, \dots, f_n\}$. (Zie Theorem 2.21 in [1].) Bewijs dat $\mathrm{Mat}(B^j_k)$ de matrix is met een 1 op positie (k, j) en nullen op de andere posities.

(b) Bewijs dat $\{B^j_k; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n\}$ een basis is van $\mathrm{Lin}(V, W)$.

(c) Gebruik Lemma 1.3.8 om een bijectie te definiëren tussen een basis van $W \otimes V^*$ en de basis van $\mathrm{Lin}(V, W)$ uit onderdeel (b), op zo'n manier dat het lineaire isomorfisme $T\colon W \otimes V^* \to \mathrm{Lin}(V, W)$ dat met deze bijectie correspondeert de eigenschap (2.2.1) heeft voor alle $v \in V$ en $w \in W$.

2.3 De vectorruimte voortgebracht door een verzameling

We hebben het tensorprodukt van twee eindig-dimensionale vectorruimtes gedefinieerd in Definitie 1.3.1. Vanwege Gevolg 2.1.3 kan het tensorprodukt ook gekarakteriseerd worden met de universele eigenschap, zie Opmerking 2.1.4. In Sectie 2.5 geven we een derde karakterisatie van het tensorprodukt, zie Propositie 2.5.1. Die laatste karakterisatie is gebaseerd op de rekenregels voor tensoren in Lemma 1.3.7. In die karakterisatie gebruiken we twee begrippen die we in deze sectie en Sectie 2.4 invoeren: de vectorruimte voortgebracht door een verzameling, en quotiënten van vectorruimtes door lineaire deelruimtes.

We bekijken in deze sectie een verzameling A, die oneindig mag zijn.

Definitie 2.3.1. De verzameling $F[A]$ bestaat uit alle afbeeldingen $f\colon A \to F$ zo dat

$$\{a \in A; f(a) \neq 0\} \tag{2.3.1}$$

een eindige verzameling is.

Als $f, g \in F[A]$ en $\lambda \in F$, dan definiëren we de afbeeldingen $f + g$ en λf van A naar F door

$$\begin{aligned}(f+g)(a) &:= f(a) + g(a);\\ (\lambda f)(a) &:= \lambda f(a),\end{aligned}$$

voor $a \in A$.

Voorbeeld 2.3.2. Neem $A = \mathbb{Z}$. Dan is de afbeelding $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(a) = \begin{cases} -1 & \text{als } a = -7;\\ 10 & \text{als } a = 0;\\ 3 & \text{als } a = 2;\\ 0 & \text{anders}\end{cases}$$

een element van $\mathbb{R}[\mathbb{Z}]$. Want de verzameling (2.3.1) heeft nu drie elementen, en is dus eindig.

De afbeelding $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(a) = a^2$ is *geen* element van $\mathbb{R}[\mathbb{Z}]$, want de verzameling (2.3.1) bestaat nu uit alle $a \in \mathbb{Z}$ behalve nul, en is dus oneindig.

Lemma 2.3.3. *(a) Voor alle $f, g \in F[A]$ en $\lambda \in F$ zijn $f + g$ en λf weer elementen van $F[A]$.*

(b) De optelling en scalaire vermenigvuldiging die zo gedefinieerd zijn maken $F[A]$ een vectorruimte. Het nul-element van die vectorruimte is de afbeelding $A \to F$ die elke element op nul afbeeldt.

Bewijs. Dit is Opgave 2.3.1. □

Als $a \in A$, dan definiëren we $\delta_a \in F[A]$ door

$$\delta_a(a') := \begin{cases} 1 & \text{als } a' = a;\\ 0 & \text{als } a' \neq a,\end{cases}$$

voor $a' \in A$. (Voor $f = \delta_a$ is de verzameling (2.3.1) gelijk aan $\{a\}$, en dus eindig.)

Lemma 2.3.4. *De verzameling*

$$\{\delta_a; a \in A\} \tag{2.3.2}$$

is een basis van $F[A]$.

Bewijs. We laten eerst zien dat de verzameling (2.3.2) lineair onafhankelijk is. Hierbij moeten we goed letten op de definitie van lineaire onafhankelijkheid voor een verzameling die mogelijk oneindig is, zie de definities op bladzijden 32 en 33 van [1]. Stel dat $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ zo zijn dat

$$\lambda_1 \delta_{a_1} + \cdots + \lambda_n \delta_{a_n} = 0.$$

Dan geldt voor alle $j = 1, \ldots, n$,

$$\lambda_j = (\lambda_1 \delta_{a_1} + \cdots + \lambda_n \delta_{a_n})(a_j) = 0.$$

Dus de verzameling is inderdaad lineair onafhankelijk.

Nu bewijzen we dat de verzameling (2.3.2) de ruimte $F[A]$ opspant. Zij $f \in F[A]$. Dan neemt f maar in eindig veel elementen van A een waarde ongelijk aan nul aan. Noem deze elementen $a_1, \ldots, a_n$. Definieer $\tilde{f} \in F[A]$ als

$$\tilde{f} := f(a_1)\delta_{a_1} + \cdots + f(a_n)\delta_{a_n}.$$

Als $a \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, dan is

$$\tilde{f}(a) = 0 = f(a).$$

En voor alle $j = 1, \ldots, n$,

$$\tilde{f}(a_j) = f(a_j).$$

Dus $\tilde{f} = f$. Omdat $\tilde{f}$ in het opspansel van $\{\delta_a; a \in A\}$ ligt, ligt dus ook f in dat opspansel. Dus deze verzameling spant de hele ruimte $F[A]$ op. $\square$

Opmerking 2.3.5. Via de afbeelding $a \mapsto \delta_a$ kunnen we A opvatten als deelverzameling van $F[A]$. Dan is vanwege Lemma 2.3.4 de deelverzameling $A \subset F[A]$ een basis van $F[A]$. Dit is de motivatie voor Definitie 2.3.1: voor een gegeven verzameling A is $F[A]$ een natuurlijke vectorruimte waarvan A een basis is.

Voorbeeld 2.3.6. Stel dat A_1 en A_2 eindige verzamelingen zijn. Beschouw de afbeelding $B\colon F[A_1] \times F[A_2] \to F[A_1 \times A_2]$ gegeven door

$$B(f_1, f_2)(a_1, a_2) = f_1(a_1) f_2(a_2),$$

voor $f_1 \in F[A_1]$, $f_2 \in F[A_2]$, $a_1 \in A_1$ en $a_2 \in A_2$. Onderdeel (a) van Opgave 2.3.3 is om te laten zien dat deze afbeelding bilineair is. Vanwege Stelling 2.1.1 is er dus een unieke lineaire abeelding $T\colon F[A_1] \otimes F[A_2] \to F[A_1 \times A_2]$ zo dat voor alle $f_1 \in F[A_1]$, $f_2 \in F[A_2]$, $a_1 \in A_1$ en $a_2 \in A_2$,

$$T(f_1 \otimes f_2)(a_1, a_2) = f_1(a_1) f_2(a_2).$$

Vanwege Lemma 2.3.4 is $\left\{\delta_{a_1}^{A_1}; a_1 \in A_1\right\}$ een basis van $F[A_1]$, $\left\{\delta_{a_2}^{A_2}; a_2 \in A_2\right\}$ een basis van $F[A_2]$ en $\left\{\delta_{(a_1,a_2)}^{A_1 \times A_2}; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\right\}$ een basis van $F[A_1 \times A_2]$. We geven hierbij met superscripts aan met welke verzameling we werken. Vanwege Lemma 1.3.8 is $\left\{\delta_{a_1}^{A_1} \otimes \delta_{a_2}^{A_2}; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\right\}$ een basis van $F[A_1] \otimes F[A_2]$.

Onderdeel (b) van Opgave 2.3.3 is om te laten zien dat

$$T(\delta_{a_1}^{A_1} \otimes \delta_{a_2}^{A_2}) = \delta_{(a_1,a_2)}^{A_1 \times A_2}. \tag{2.3.3}$$

Dus T beeldt een basis van $F[A_1] \otimes F[A_2]$ bijectief af op een basis van $F[A_1 \times A_2]$, en is dus een lineair isomorfisme.

Opgaven

Opgave 2.3.1. Bewijs Lemma 2.3.3.

Opgave 2.3.2. Zij $n \in \mathbb{N}$, en neem $A = A_n := \{1, \ldots, n\}$. Geef een lineair isomorfisme $FA_n \to F^n$, en bewijs dat dit inderdaad een lineair isomorfisme is.

Opgave 2.3.3 (bij Voorbeeld 2.3.6)**.** (a) Bewijs dat de afbeelding B in Voorbeeld 2.3.6 bilineair is.

(b) Bewijs de gelijkheid (2.3.3) voor alle $a_1 \in A_1$ en $a_2 \in A_2$.

2.4 Quotiënten van vectorruimtes

In deze sectie is V een vectorruimte, en $W \subset V$ een lineaire deelruimte. Zowel V als W mogen oneindig-dimensionaal zijn.

Definitie 2.4.1. Als $v, v' \in V$, dan schrijven we $v \sim_W v'$ als $v - v' \in W$.

Lemma 2.4.2. *De relatie $\sim_W$ is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Dit is Opgave 2.4.1. □

Definitie 2.4.3. We schrijven $V/W := V/\sim_W$ voor de verzameling van equivalentieklassen van $\sim_W$. Als $v \in V$, dan schrijven we $v + W$ voor de equivalentieklasse van v in V/W. Als $v, v' \in V$ en $\lambda \in F$, dan definiëren we

$$\begin{aligned} (v + W) + (v' + W) &:= (v + v') + W; \text{ en} \\ \lambda(v + W) &:= (\lambda v) + W. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Opmerking 2.4.4. Als $v \in V$, dan is

$$v + W = \{v' \in V; v - v' \in W\} = \{v + w; w \in W\}.$$

Dit motiveert de notatie $v + W$ voor de equivalentieklasse van v.

Voor $v, v' \in V$ geldt $v + W = v' + W$ dan en slechts dan als $v - v' \in W$.

We laten eerst zien dat de definities (2.4.1) zinnig zijn.

Lemma 2.4.5. *(a) Stel dat $v, v', \tilde{v}, \tilde{v}' \in V$, en dat $v+W = \tilde{v}+W$ en $v'+W = \tilde{v}' + W$. Dan is $(v + v') + W = (\tilde{v} + \tilde{v}') + W$.*

(b) Stel dat $v, \tilde{v} \in V$, en dat $v + W = \tilde{v} + W$. Dan is $(\lambda v) + W = (\lambda \tilde{v}) + W$ voor alle $\lambda \in F$.

Bewijs. (a) Er geldt dat

$$\begin{aligned} v - \tilde{v} &\in W; \text{ en} \\ v' - \tilde{v}' &\in W. \end{aligned}$$

Omdat W een lineaire deelruimte is, is W gesloten onder optelling. Dus

$$v + v' - (\tilde{v} + \tilde{v}') = (v - \tilde{v}) + (v' - \tilde{v}') \in W.$$

Dit betekent dat $(v + v') + W = (\tilde{v} + \tilde{v}') + W$.

(b) Dit is Opgave 2.4.2.

$\square$

Lemma 2.4.6. *Met de optelling en scalaire vermenigvuldiging in* (2.4.1) *is* V/W *een vectorruimte. Het nulelement is* $0 + W$.

Bewijs. Dit is Opgave 2.4.3. $\square$

Lemma 2.4.7. *(a) Stel dat* $A \subset V$ *een deelverzameling is die* V *opspant. Dan spant de deelverzameling*

$$\{v + W; v \in A \setminus W\} \subset V/W$$

de ruimte V/W *op.*

(b) Stel nu dat V *eindige dimensie heeft. Zij* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *een basis van* V, *zo dat* $\{e_1, \dots, e_m\}$ *een basis is van* W. *Dan is* $\{e_{m+1} + W, \dots, e_n + W\}$ *een basis van* V/W. *In het bijzonder is*

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

Bewijs. Dit is Opgave 2.4.5. $\square$

Lemma 2.4.8. *Zij* X *een vectorruimte, en* $T \colon V \to X$ *een lineaire afbeelding. Stel dat* $Tw = 0$ *voor alle* $w \in W$. *Dan is er een unieke lineaire afbeelding* $\tilde{T} \colon V/W \to X$ *zo dat voor alle* $v \in V$,

$$\tilde{T}(v + W) = Tv. \tag{2.4.2}$$

Bewijs. Stel dat $v, v' \in V$ en $v + W = v' + W$. Dan is $T(v - v') = 0$, dus $Tv = Tv'$. Daarom legt (2.4.2) een goed gedefinieerde afbeelding $\tilde{T}$ van V/W naar X uniek vast. (Zie Stelling 4.14 in [2].)

Om lineariteit van $\tilde{T}$ te bewijzen, nemen we aan dat $v, v' \in V$ en $\lambda \in F$. Dan is

$$\begin{aligned}
\tilde{T}\big(\lambda(v + W) + (v' + W)\big) &= \tilde{T}\big((\lambda v + v') + W\big) \\
&= T(\lambda v + v') \\
&= \lambda Tv + Tv' \\
&= \lambda \tilde{T}(v + W) + \tilde{T}(v' + W).
\end{aligned}$$

Dus $\tilde{T}$ is inderdaad lineair. $\square$

Een belangrijke manier waarop quotientruimtes worden gebruikt is in de volgende isomorfiestelling.

Propositie 2.4.9. *Zij* X *een vectorruimte, en* $T\colon V \to X$ *een surjectieve lineaire afbeelding. Dan is er een uniek lineair isomorfisme* $\tilde{T}\colon V/\ker(T) \to X$ *zo dat voor alle* $v \in V$*,*

$$\tilde{T}(v + \ker(T)) = Tv. \tag{2.4.3}$$

Bewijs. Vanwege Lemma 2.4.8 is er een unieke lineaire afbeelding $\tilde{T}\colon V/\ker(T) \to X$ zo dat (2.4.3) geldt voor alle $v \in V$. We laten zien dat deze afbeelding injectief en surjectief is, en dus een lineair isomorfisme.

Voor injectiviteit laten we zien dat $\ker(\tilde{T}) = \{0 + W\}$. Stel dat $v \in V$ en dat $\tilde{T}(v + \ker(T)) = 0$. Dan is $Tv = 0$, dus $v \in \ker(T)$. Dus $v - 0 \in \ker(T)$, dus $v \sim_{\ker(T)} 0$. En dus

$$v + \ker(T) = 0 + \ker(T).$$

Dus inderdaad $\ker(\tilde{T}) = \{0 + W\}$.

Vervolgens laten we surjectiviteit van $\tilde{T}$ zien. Zij $x \in X$. Omdat T surjectief is, is er een $v \in V$ zo dat $Tv = x$. Dan is

$$\tilde{T}(v + \ker(T)) = Tv = x.$$

Dus $\tilde{T}$ is surjectief. □

Opgaven

Opgave 2.4.1. Bewijs Lemma 2.4.2.

Opgave 2.4.2. Bewijs onderdeel (b) van Lemma 2.4.5.

Opgave 2.4.3. Bewijs Lemma 2.4.6.

Opgave 2.4.4. Stel dat V een eindig-dimensionale vectorruimte is, met een gegeven inprodukt. Zij $W \subset V$ een lineaire deelruimte, en zij $W^\perp$ zijn orthogonaal complement. Zij $p\colon V \to W^\perp$ de orthogonale projectie. Bewijs dat er een uniek lineair isomorfisme $\tilde{p}\colon V/W \to W^\perp$ is zo dat voor alle $v \in V$ geldt dat $\tilde{p}(v + W) = pv$.

Opgave 2.4.5. (a) Bewijs onderdeel (a) van Lemma 2.4.7.

(b) We gebruiken nu de aannames en notatie van onderdeel (b) van Lemma 2.4.7. Stel dat $\lambda_{m+1}(e_{m+1}+W)+\cdots+\lambda_n(e_n+W)=0+W$ in V/W, voor $\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_n \in F$. Bewijs dat er dan $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in F$ zijn zo dat
$$\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n=0.$$
Concludeer dat de vectoren $e_{m+1}+W,\ldots,e_n+W \in V/W$ lineair onafhankelijk zijn.

(c) Bewijs dat $\{e_{m+1}+W,\ldots,e_n+W\}$ een basis van V/W is.

2.5 Het tensorprodukt als quotiëntruimte

In deze sectie zijn V en W twee eindig-dimensionale vectorruimtes.

We combineren nu de theorie uit Secties 2.3 en 2.4 om nog een constructie van het tensorprodukt van V en W te geven.

We beginnen met de vectorruimte $F[V\times W]$, gedefinieerd als in Definitie 2.3.1, met $A=V\times W$. Als V en W niet beide de nulruimte zijn, dan is de ruimte $F[V\times W]$ erg groot: vanwege Lemma 2.3.4 is een basis van die ruimte $\{\delta_{(v,w)}; v\in V, w\in W\}$. Dit is een overaftelbare verzameling, dus de dimensie van $F[V\times W]$ is overaftelbaar oneindig.

We gaan het quotient nemen van $F[V\times W]$ met een oneindig-dimensionale deelruimte, op zo'n manier dat dit quotient weer eindig-dimensionaal wordt, en isomorf met $V\otimes W$. Als deelruimte nemen we de de ruimte $X\subset F[V\times W]$ opgespannen door de vectoren van de vorm
$$\begin{aligned}&\delta_{(v,w)}+\delta_{(v',w)}-\delta_{(v+v',w)},\\ &\delta_{(v,w)}+\delta_{(v,w+w')}-\delta_{(v,w+w')},\\ &\delta_{\lambda v,w}-\lambda\delta_{v,w}\quad \text{en}\\ &\delta_{v,\lambda w}-\lambda\delta_{v,w},\end{aligned}\tag{2.5.1}$$
voor $v,v'\in V$, $w,w'\in W$ en $\lambda\in F$.

Propositie 2.5.1 (Constructie van het tensorprodukt als quotiënt)**.** *Er is een uniek lineair isomorfisme $T\colon F[V\times W]/X\to V\otimes W$ zo dat voor alle $v\in V$ en $w\in W$,*
$$T(\delta_{(v,w)}+X)=v\otimes w.\tag{2.5.2}$$

Bewijs. Zij $S\colon F[V \times W] \to V \otimes W$ de lineaire afbeelding die op basiselementen $\delta_{(v,w)} \in F[V \times W]$, voor $v \in V$ en $w \in W$, gegeven is door

$$S(\delta_{(v,w)}) = v \otimes w.$$

Dan is $Sf = 0$ voor alle $f \in X$, zie onderdeel (a) van Opgave 2.5.1. Vanwege Lemma 2.4.8 is er dus een unieke lineaire afbeelding $T = \tilde{S}\colon F[V \times W]/X \to V \otimes W$ zo dat voor alle $f \in F(V \times W)$,

$$T(f + X) = S(f).$$

Als we hierin $f = \delta_{(v,w)}$ nemen voor $v \in V$ en $w \in W$, dan zien we dat (2.5.2) geldt.

De afbeelding $B\colon V \times W \to F[V \times W]/X$, gegeven door

$$B(v, w) := \delta_{(v,w)} + X,$$

voor $v \in V$ en $w \in W$, is bilineair. (Zie onderdeel (b) van Opgave 2.5.1.) Vanwege Stelling 2.1.1 is er daarom een unieke lineaire afbeelding $U\colon V \otimes W \to F[V \times W]/X$ zo dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$,

$$U(v \otimes w) = \delta_{(v,w)} + X.$$

Het is onderdeel (c) van Opgave 2.5.1 om te laten zien dat $U \circ T = I_{F[V \times W]/X}$ en $T \circ U = I_{V \otimes W}$. Dus T is inverteerbaar, en dus een lineair isomorfisme.

□

We hebben nu drie mogelijke constructies van het tensorprodukt van V en W gezien:

1. Definitie 1.3.1;

2. een ruimte Y als in Gevolg 2.1.3; en

3. de ruimte $F[V \times W]/X$ in Propositie 2.5.1.

Deze constructies hebben verschillende voor- en nadelen.

- Definitie 1.3.1 is concreet, maar zegt in eerste instantie weinig over de fundamentele eigenschappen van tensoren.

- Een ruimte Y als in Gevolg 2.1.3 heeft per definitie de universele eigenschap van het tensorprodukt, en is daarom geschikt als we lineaire afbeeldingen van en naar tensorprodukten willen construeren. Een nadeel is dat dit geen expliciete constructie van een specifieke vectorruimte is.
- In de constructie van de ruimte $F[V \times W]/X$ zitten de fundamentele rekenregels in Lemma 1.3.7 automatisch ingebakken, dus deze constructie is nuttig als we willen rekenen met tensoren. We hebben wel oneindig-dimensionale vectorruimtes nodig voor de constructie van $F[V \times W]/X$.

Uit Gevolg 2.1.3 en Propositie 2.5.1 blijkt dat de drie constructies equivalent zijn, dus we kunnen in elke situatie degene gebruiken die het handigst werkt.

Opmerking 2.5.2. Nog een voordeel van de constructies van het tensorprodukt met Gevolg 2.1.3 en Propositie 2.5.1 is dat die ook een bruikbare definitie geven van het tensorprodukt van oneindig-dimensionale vectorruimtes, in tegenstelling to Definitie 1.3.1. (We gebruiken Lemma 1.1.9 om de equivalentie tussen de drie constructies te bewijzen, en dat lemma geldt voor eindig-dimensionale vectorruimtes.) We gaan in dit dictaat niet verder in op tensorproduken van oneindig-dimensionale vectorruimtes, hoewel die ook regelmatig worden gebruikt in de wiskunde.

Opgaven

Opgave 2.5.1 (bij het bewijs van Propositie 2.5.1)**.** (a) Zij $S\colon F[V \times W] \to V \otimes W$ de lineaire afbeelding in het bewijs van Propositie 2.5.1. Bewijs dat voor alle $f \in X$, $Tf = 0$.

(b) Bewijs dat de afbeelding $B\colon V \times W \to F[V \times W]/X$ in het bewijs van Propositie 2.5.1 bilineair is.

(c) Zij $U\colon V \otimes W \to F[V \times W]/X$ als in het bewijs van Propositie 2.5.1. Bewijs dat $U \circ T = I_{F[V \times W]/X}$ en $T \circ U = I_{V \otimes W}$. (Hint: bewijs deze gelijkheden op verzamelingen die de twee ruimtes opspannen. Gebruik hiervoor eerdere lemma's om te laten zien dat $\operatorname{span}(\{\delta_{(v,w)} + X; v \in V, w \in W\}) = F[V \times W]/X$.)

3 Het tensorprodukt van meer dan twee vectorruimtes

3.1 Multilineaire afbeeldingen

We hebben tot nu toe tensorprodukten bekeken van twee vectorruimtes. Maar er worden ook tensorprodukten van drie of meer vectorruimtes gebruikt. Bijvoorbeeld, in de differentiaalmeetkunde is de kromming van een meetkundige ruimte een tensor in een tensorprodukt van vier vectorruimtes, zie Voorbeeld 3.4.8. Om tensorprodukten van drie of meer vectorruimtes te definiëren vervangen we bilineaire vormen door *multilineaire vormen*.

Stel dat $n \in \mathbb{N}$, en dat $V_1, \ldots, V_n$ vectorruimtes zijn. Het Cartesisch produkt van $V_1, \ldots, V_n$ is

$$V_1 \times \cdots \times V_n := \{(v_1, \ldots, v_n); v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n\}.$$

Definitie 3.1.1. Zij X een vectorruimte. Een *multilineaire afbeelding* van $V_1 \times \cdots \times V_n$ naar X is een afbeelding $M \colon V_1 \times \cdots \times V_n \to X$ zo dat voor alle $j = 1, \ldots, n$ en alle $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$, $v_j' \in V_j$ en $\lambda \in F$ geldt dat

$$M(v_1, \ldots, v_{j-1}, \lambda v_j + v_j', v_{j+1}, \ldots, v_n) = \lambda M(v_1, \ldots, v_n) + M(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j', v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

De verzameling van alle multilineaire afbeeldingen van $V_1 \times \cdots \times V_n$ naar X geven we aan met $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; X)$. Als $M, M' \in \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; X))$ en $\lambda \in F$, dan definiëren we de afbeeldingen

$$\begin{aligned} M + M' \colon V_1 \times \cdots \times V_n &\to X; \quad \text{en} \\ \lambda M \colon V_1 \times \cdots \times V_n &\to X \end{aligned}$$

door

$$\begin{aligned} (M + M')(v_1, \ldots, v_n) &:= M(v_1, \ldots, v_n) + M'(v_1, \ldots, v_n); \\ (\lambda M)(v_1, \ldots, v_n) &:= \lambda M(v_1, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

voor $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$.

Lemma 3.1.2. *(a) Voor alle* $M, M' \in \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; X)$ *en* $\lambda \in F$ *zijn* $M + M'$ *en* λM *weer elementen van* $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; X)$.

(b) *De optelling en scalaire vermenigvuldiging die zo gedefinieerd zijn maken* $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; X)$ *een vectorruimte. Het nul-element van die vectorruimte is de nul-afbeelding* $V_1 \times \cdots \times V_n \to X$.

Bewijs. Dit is Opgave 3.1.2. $\square$

Net als in het geval van bilinaire afbeeldingen gebruiken we het geval $X = F$ het meest.

Definitie 3.1.3. Een multilineaire afbeelding van $V_1 \times \cdots \times V_n$ naar F heet een *multilineaire vorm* op $V_1 \times \cdots \times V_n$. We schrijven $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n) := \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; F)$.

Voorbeeld 3.1.4. Als $v_1, \ldots, v_n \in F^n$, dan schrijven we $\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$ voor de $n \times n$ matrix met kolommen $v_1, \ldots, v_n$. Definieer

$$\det\colon F^n \times \cdots \times F^n \to F$$

waarbij we het Cartesisch produkt van n kopieën van F^n nemen, door

$$\det(v_1, \ldots, v_n) := \det\left(\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix}\right).$$

Dit is een multilineaire vorm $\det \in \mathrm{Multilin}(F^n, \ldots, F^n)$ vanwege de eigenschappen van de determinant voor het optellen en scalair vermenigvuldigen van kolommen van matrices.

Stel dat $W_1, \ldots W_n$ vectorruimtes zijn, en voor $j = 1, \ldots, n$, $T_j\colon V_j \to W_j$ een lineaire afbeelding.

Definitie 3.1.5. Als $M \in \mathrm{Multilin}(W_1, \ldots, W_n)$, dan definiëren we $(T_1 \times \cdots \times T_n)^* M\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to F$ door

$$\big((T_1 \times \cdots \times T_n)^* M(v_1, \ldots, v_n) := M(T_1 v_1, \ldots, T_n v_n),$$

voor $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$.

Lemma 3.1.6. (a) *Als* $M \in \mathrm{Multilin}(W_1, \ldots, W_n)$, *dan is* $(T_1 \times \cdots \times T_n)^* M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n)$.

(b) *De zo gedefinieerde afbeelding* $(T_1 \times \cdots \times T_n)^*\colon \mathrm{Multilin}(W_1, \ldots, W_n) \to \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n)$ *is lineair.*

Bewijs. Dit is Opgave 3.1.3. □

Lemma 3.1.7. *(a) Stel dat* $W_1, \dots W_n$ *nog* n *vectorruimtes zijn, en voor* $j = 1, \dots, n$, $S_j \colon W_j \to X_j$ *een lineaire afbeelding. Dan is*

$$\big((S_1 \circ T_1) \times \cdots \times (S_n \circ T_n)\big)^* = (T_1 \times \cdots \times T_n)^* \circ (S_1 \times \cdots \times S_n)^* \colon \\ \mathrm{Multilin}(X_1, \dots, X_n) \to \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n).$$

(b) Als T_j *een lineair isomorfisme is voor alle* j*, dan is* $(T_1 \times \cdots \times T_n)^*$ *dat ook.*

Bewijs. Dit is Opgave 3.1.4. □

We voeren wat notatie in om een lemma te formuleren dat we later gebruiken. Als $M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n)$ en $v_n \in V_n$, dan definiëren we $M(-, v_n) \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1})$ door

$$\big(M(-, v_n)\big)(v_1, \dots, v_{n-1}) := M(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n), \tag{3.1.1}$$

voor $v_1 \in V_1, \dots, v_{n-1} \in V_{n-1}$. (Deze afbeelding is inderdaad multilineair, zie onderdeel (a) van Opgave 3.4.2.) En als $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$, dan definiëren we de evaluatie-afbeelding $\mathrm{ev}_{v_1, \dots, v_n} \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n)^*$ door

$$\big(\mathrm{ev}_{v_1, \dots, v_n}(M)\big) = M(v_1, \dots, v_n),$$

voor $M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n)$.

Lemma 3.1.8. *Voor* $M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n)$ *definiëren we* $T(M) \colon \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1})^* \times V_n \to F$ *door*

$$\big(T(M)\big)(\xi, v_n) := \xi\big(M(-, v_n)\big),$$

voor $\xi \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1})^*$ *en* $v_n \in V_n$*. Dan is* $T(M)$ *bilineair, en we krijgen zo een lineair isomorfisme*

$$T \colon \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n) \to \mathrm{Bilin}\big(\mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1})^*, V_n\big). \tag{3.1.2}$$

Bewijs. Het is onderdelen (a) en (b) van Opgave 3.1.5 om te bewijzen dat de constructie in het lemma inderdaad een lineaire afbeelding (3.1.2) definieert. We gaan laten zien dat deze afbeelding een inverse heeft, en dus een lineair isomorfisme is.

Voor $B \in \mathrm{Bilin}\big(\mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1})^*, V_n\big)$ definiëren we

$$S(B) \colon V_1 \times \cdots \times V_n \to F$$

door
$$\big(S(B)\big)(v_1, \dots, v_n) := B(\mathrm{ev}_{v_1,\dots,v_{n-1}}, v_n),$$
$v_1 \in V_1$, $\dots$, $v_n \in V_n$. Vanwege onderdelen (c) en (d) van Opgave 3.1.5 definieert dit een lineaire afbeelding
$$S\colon \mathrm{Bilin}\big(\mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1})^*, V_n\big) \to \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n). \tag{3.1.3}$$
Vanwege onderdeel (e) van Opgave 3.1.5 is S de inverse van T. Dus T is inverteerbaar, en dus een lineair isomorfisme. □

Opmerking 3.1.9. Als $n = 2$, dan is het lineaire isomorfisme T in Lemma 3.1.8 het isomorfisme
$$(\varphi_{V_1}^{-1} \times I_{V_2})^*\colon \mathrm{Bilin}(V_1, V_2) \to \mathrm{Bilin}(V_1^{**}, V_2)$$
als in onderdeel (b) van Lemma 1.4.8.

Opgaven

Opgave 3.1.1. Zij X een vectorruimte. Stel dat, voor $j = 1, \dots, n$, we een basis $\{e_1^{(j)}, \dots, e_{\dim(V_j)}^{(j)}\}$ hebben van V_j. Stel dat $M\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to X$ voldoet aan
$$M(e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_{k_n}^{(n)}) = 0.$$
voor alle $k_1, \dots, k_n$. Bewijs dat $M = 0$.

Opgave 3.1.2. Bewijs Lemma 3.1.2.

Opgave 3.1.3. Bewijs Lemma 3.1.6.

Opgave 3.1.4. Bewijs Lemma 3.1.7.

Opgave 3.1.5 (bij het bewijs van Lemma 3.1.8)**.** (a) Bewijs dat de afbeelding $T(M)$ in Lemma 3.1.8 bilineair is voor alle $M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n)$.

(b) Bewijs dat de afbeelding (3.1.2) die zo gedefinieerd is lineair is.

(c) Bewijs dat de afbeelding $S(B)$ in het bewijs van Lemma 3.1.8 multilineair is voor alle $B \in \mathrm{Bilin}\big(\mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1})^*, V_n\big)$.

(d) Bewijs dat de afbeelding (3.1.3) die zo gedefinieerd is lineair is.

(e) Bewijs dat $S \circ T = I_{\mathrm{Multilin}(V_1,\dots,V_n)}$ en $T \circ S = I_{\mathrm{Bilin}\left(\mathrm{Multilin}(V_1,\dots,V_{n-1})^*, V_n\right)}$.

3.2 Het algemene tensorprodukt

We gaan nu tensorsprodukten van willekeurige aantallen vectorruimtes definiëren. We zullen achteraf zien dat we zulke tensorprodukten ook op een eenduidige manier kunnen krijgen door herhaaldelijk tensorprodukten van twee vectorruimtes te vormen. Dat betekent dat alle constructies voor tensorprodukten van twee vectorruimtes generaliseren naar tensorprodukten van meer vectorruimtes, zie Sectie 3.4.

Stel vanaf nu dat de vectorruimtes $V_1, \ldots, V_n$ eindig-dimensionaal zijn.

Definitie 3.2.1. Het *tensorprodukt* van $V_1, \ldots, V_n$ is

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := \mathrm{Multilin}(V_1^*, \ldots, V_n^*).$$

Een element van $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ heet een *tensor van rang* n.

Definitie 3.2.2. Als $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$, dan definiëren we de afbeelding

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \colon V_1^* \times \cdots \times V_n^* \to F$$

door

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \xi_1(v_1) \cdots \xi_n(v_n),$$

voor $\xi_1 \in V_1^*, \ldots, \xi_n \in V_n^*$.

Lemma 3.2.3. *Als $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ dan is $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.*

Bewijs. Dit is Opgave 3.2.1. □

Definitie 3.2.4. Een element van $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ van de vorm $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, voor $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$, is een *simpele tensor*.

Lemma 3.2.5 (Rekenregels voor tensoren van rang n)**.** *Voor alle $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$, $j = 1, \ldots, n$, $v_j' \in V_j$ en $\lambda \in F$ geldt*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes (v_j + v_j') \otimes \cdots \otimes v_n = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n + v_1 \otimes \cdots \otimes v_j' \otimes \cdots \otimes v_n;$$
$$v_1 \otimes \cdots \otimes \lambda v_j \otimes \cdots \otimes v_n = \lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Bewijs. Dit is Opgave 3.2.2. □

Stel dat $W_1, \ldots W_n$ eindig-dimensionale vectorruimtes zijn, en voor $j = 1, \ldots, n$, $T_j \colon V_j \to W_j$ een lineaire afbeelding.

Definitie 3.2.6. De lineaire afbeelding

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_n$$

is de afbeelding

$$(T_1^* \times \cdots \times T_n^*)^* \colon \text{ Multilin}(V_1^*, \ldots, V_n^*) \to \text{Multilin}(W_1^*, \ldots, W_n^*)$$

als in Lemma 3.1.6, met $T_j^* \colon W_j^* \to V_j^*$ als in Lemma 1.4.2.

Lemma 3.2.7. *(a) Stel dat* $X_1, \ldots X_n$ *nog* n *eindig-dimensionale vectorruimtes zijn, en voor* $j = 1, \ldots, n$, $S_j \colon W_j \to X_j$ *een lineaire afbeelding. Dan is*

$$(S_1 \otimes \cdots \otimes S_n) \circ (T_1 \otimes \cdots \otimes T_n) = \big((S_1 \circ T_1) \otimes \cdots \otimes (S_n \circ T_n)\big).$$

(b) Als alle afbeeldingen T_j *isomorfismes zijn, dan is* $T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$ *dat ook.*

Bewijs. Dit volgt uit Lemma's 1.4.4 en 3.1.7, net zoals Lemma 1.4.11 volgt uit Lemma's 1.4.4 en 1.4.8. □

Opgaven

Opgave 3.2.1. Bewijs Lemma 3.2.3.

Opgave 3.2.2. Bewijs Lemma 3.2.5.

3.3 Het algemene tensorprodukt als herhaald tensorprodukt van twee vectorruimtes

Er is nog een manier om het tensorprodukt van meer dan twee vectorruimtes te nemen, en we gaan zien dat die hetzelfde oplevert als Definitie 3.2.1. Stel eerst dat $n = 3$. Dan is $V_1 \otimes V_2$, gedefinieerd als in Definitie 1.3.1, weer een vectorruimte. We kunnen vervolgens het tensorprodukt nemen van die ruimte $V_1 \otimes V_2$ met V_3. Het resultaat geven we aan met $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. We gebruiken dus haakjes om aan te geven welk tensorprodukt we eerst nemen.

We kunnen ook eerst het tensorprodukt $V_2 \otimes V_3$ vormen, en dan het tensorprodukt van V_1 met die vectorruimte $V_2 \otimes V_3$. Dat geven we aan met

$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. Als deze twee constructies hetzelfde resultaat opleveren, preciezer gezegd, als er een natuurlijk lineair isomorfisme

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

is, dan kunnen we ook op deze manier tensorprodukten van drie ruimtes nemen. We laten nu zien dat dat inderdaad het geval is, en hetzelfde resultaat geeft als Definitie 3.2.1.

Lemma 3.3.1. *Er is een uniek lineair isomorfisme*

$$T\colon (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

zo dat voor alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ *en* $v_3 \in V_3$ *geldt dat*

$$T\big((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3\big) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3). \tag{3.3.1}$$

Bewijs. Stel dat we, voor $j = 1, 2, 3$, een basis $\big\{e_1^{(j)}, \ldots, e_{\dim(V_j)}^{(j)}\big\}$ hebben van V_j. Vanwege Lemma 1.3.8 is dan $\big\{e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)}; k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)\big\}$ een basis van $V_1 \otimes V_2$. Nog een keer Lemma 1.3.8 toepassen laat dan zien dat $\big\{\big(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)}\big) \otimes e_{k_3}^{(3)}; k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)\big\}$ een basis is van $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Net zo vinden we dat $\big\{e_{k_1}^{(1)} \otimes \big(e_{k_2}^{(2)} \otimes e_{k_3}^{(3)}\big); k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)\big\}$ een basis is van $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$.

Deze twee bases hebben evenveel elementen, en elke een bijectie ertussen heeft een unieke uitbreiding tot een lineair isomorfisme van $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ naar $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. Er is dus zo'n lineair isomorfisme T zo dat voor alle $k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)$,

$$T\big(\big(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)}\big) \otimes e_{k_3}^{(3)}\big) = e_{k_1}^{(1)} \otimes \big(e_{k_2}^{(2)} \otimes e_{k_3}^{(3)}\big).$$

Omdat T lineair is, impliceert dit dat (3.3.1) geldt voor alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ en $v_3 \in V_3$. $\square$

Het lineaire isomorfisme in Lemma 3.3.1 geeft ook lineaire isomorfismes tussen verschillende manieren om het tensorprodukt van meer dan drie vectorruimtes op te bouwen uit tensorprodukten van twee vectorruimte. Stel bijvoorbeeld dat $n = 4$. Dan geeft twee keer toepassen van Lemma 3.3.1 lineaire isomorfismes

$$\begin{aligned} V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4) &\to (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 \\ &\to ((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Dit betekent dat we op een eenduidige manier het tensorprodukt van n vectorruimtes ook opeen alternatieve manier kunnen definiëren als herhaald tensorprodukt van steeds twee vectorruimtes tegelijk. We zullen zien in Propositie 3.3.3 dat dat hetzelfde resultaat geeft als Definitie 3.2.1. Hiervoor gebruiken we het volgende lemma.

Lemma 3.3.2. *Er is een uniek lineair isomorfisme*

$$T\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n \tag{3.3.3}$$

zo dat voor alle $v_1 \in V_1, \ldots v_n \in V_n$,

$$T((v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n. \tag{3.3.4}$$

Bewijs. Als we Lemma 3.1.8 toepassen met elke ruimte V_j vervangen door V_j^*, dan krijgen we een lineair isomorfisme (3.3.3). Het is Opgave 3.3.1 om te bewijzen dat dit voldoet aan (3.3.4) voor alle $v_1 \in V_1, \ldots v_n \in V_n$. □

In het geval $n = 3$ geeft Lemma 3.3.2 een lineair isomorfisme

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3.$$

Dit kunnen we uitbreiden naar meer dan drie vectorruimtes.

Met inductie definiëren we de ruimte

$$(\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_n \tag{3.3.5}$$

als volgt. Als $n = 2$, dan is $V_1 \otimes V_2$ als in Definitie 1.3.1. En als $n \geq 3$, en

$$(\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1} \tag{3.3.6}$$

is gedefinieerd, dan definiëren we (3.3.5) als het tensorprodukt van (3.3.6) met V_n.

Propositie 3.3.3. *Er is een lineair isomorfisme*

$$T\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to (\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_n \tag{3.3.7}$$

zo dat voor alle $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ *geldt dat*

$$T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (\cdots(v_1 \otimes v_2) \otimes \cdots) \otimes v_n. \tag{3.3.8}$$

Bewijs. We gebruiken inductie over n. Als $n = 2$, dan nemen we voor T de identiteitsafbeelding op $V_1 \otimes V_2$. Dit het enige lineaire isomorfisme met de gewenste eigenschap, vanwege Lemma 1.3.10.

Stel voor de inductiestap dat er een lineair isomorfisme

$$T' \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1} \to (\cdots (V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1}$$

is, zo dat voor alle $v_1 \in V_1, \ldots, v_{n-1} \in V_{n-1}$,

$$T'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}) = (\cdots (v_1 \otimes v_2) \otimes \cdots) \otimes v_{n-1}. \tag{3.3.9}$$

Vanwege Lemma 1.4.11 geeft dit een lineair isomorfisme

$$T' \otimes I_{V_n} \colon (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n \to (\cdots (V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_n.$$

Stellen we dit samen met het lineaire isomorfisme

$$T'' \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n$$

uit Lemma 3.3.2, dan krijgen we een lineair isomorfisme $T = (T' \otimes I_{V_n}) \circ T''$ als in (3.3.7). Het volgt uit Lemma 3.3.2 en (3.3.9) dat T voldoet aan (3.3.8), voor alle $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$. □

Opmerking 3.3.4. Het isomorfisme T in Propositie 3.3.3 is uniek, zie Gevolg 3.4.3.

Als we Lemma 3.3.1 en Propositie 3.3.3 combineren, dan zien we dat elke manier om het tensorprodukt van n vectorruimtes to vormen door steeds het tensorprodukt van twee vectorruimtes tegelijk te nemen hetzelfde oplevert als Definitie 3.2.1. Bijvoorbeeld, als $n = 4$, dan hebben we het isomorfisme

$$V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4) \to ((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4$$

in (3.3.2). Stellen we de inverse van dit isomorfisme samen met het isomorfisme (3.3.7), dan krijgen we een lineair isomorfisme

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4 \to V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4).$$

Opgaven

Opgave 3.3.1 (bij het bewijs van Lemma 3.3.2)**.** Bewijs dat het isomorfisme (3.3.3) zoals gedefinieerd in het bewijs van Lemma 3.3.2 voldoet aan (3.3.4) voor alle $v_1 \in V_1, \ldots v_n \in V_n$.

Opgave 3.3.2 (bij het bewijs van Propositie 3.3.3)**.** (a) Bewijs dat de afbeelding B in het bewijs van Propositie 3.3.3 bilineair is. (Hint: zie het bewijs van Lemma 3.3.1.)

(b) Bewijs dat de afbeelding B' in het bewijs van Propositie 3.3.3 bilineair is.

Opgave 3.3.3. Geef een generalisatie van het lineaire isomorfisme $(V \otimes W)^* \to V^* \otimes W^*$ uit Voorbeeld 2.2.1 naar tensoprodukten van n vectorruimtes.

3.4 Eigenschappen van tensorprodukten van meer dan twee vectorruimtes

We werken nog steeds met n eindig-dimensionale vectorruimtes $V_1, \ldots, V_n$.

De eigenschappen van tensorprodukten van twee vectorruimtes die we hebben gezien gelden in aangepaste vorm in het algemeen voor tensorprodukten van willekeurige aantallen vectorruimtes. Een strategie om zulke generalisaties te bewijzen is om

1. Propositie 3.3.3 te gebruiken om een tensorprodukt van willekeurige aantallen vectorruimtes te schrijven als een herhaald tensorprodukt van steeds twee vectorruimtes; en

2. inductie te gebruiken om een eigenschap van tensorprodukten van twee vectorruimtes uit te breiden naar tensorprodukten van willekeurige aantallen vectorruimtes.

We werken deze strategie uit voor een paar eigenschappen van tensorprodukten, maar hij werkt algemener.

Opmerking 3.4.1. In deze strategie gebruiken steeds een eigenschap van het tensorprodukt van twee vectorruimtes om de corresponderende eigenschap van het tensorprodukt van willekeurige aantallen vectorruimtes te bewijzen. Een andere mogelijkheid is om in het bewijs van zo'n eigenschap van het tensorprodukt van twee vectorruimtes steeds bilineaire vormen te vervangen door multilineaire vormen, en zo een direct bewijs te krijgen van de corresponderende eigenschap van het tensorprodukt van willekeurige aantallen n vectorruimtes. Dan volgt het geval van twee vectorruimtes als het speciale geval $n = 2$, dus kunnen we bewijzen van eigenschappen van tensorprodukten van twee vectorruimtes weglaten. Dat is efficiënter dan de strategie die wij volgen, maar dan komen de ideeën van de bewijzen en constructies misschien minder goed over, omdat we meteen de ingewikkeldere notatie gebruiken die nodig is voor het geval van een willekeurig aantal vectorruimtes.

We beginnen met een generalisatie van Lemma 1.3.8.

Lemma 3.4.2. *Stel dat we, voor* $j = 1, \ldots, n$, *een basis* $\left\{e_1^{(j)}, \ldots, e_{\dim(V_j)}^{(j)}\right\}$ *hebben van* V_j. *Dan is*

$$\left\{e_{k_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{k_n}^{(n)}; k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)\right\} \tag{3.4.1}$$

een basis van $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. *In het bijzonder is*

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_n).$$

Bewijs. We laten met inductie zien dat

$$\left\{(\cdots(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)}) \otimes \cdots) \otimes e_{k_n}^{(n)}; k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)\right\} \tag{3.4.2}$$

een basis is van $(\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_n$. Dan volgt de bewering door het isomorfisme T uit Propositie 3.3.3 toe te passen op deze basis.

Als $n = 2$, dan zegt Lemma 1.3.8, toegepast met $V = V_1$ en $W = V_2$, dat

$$\left\{(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)}; k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)\right\}$$

een basis is van $V_1 \otimes V_2$. Stel voor de inductiestap dat

$$\left\{(\cdots(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)}) \otimes \cdots) \otimes e_{k_{n-1}}^{(n-1)}; k_j = 1, \ldots, \dim(V_j)\right\}$$

een basis is van $(\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1}$. Dan zegt Lemma 1.3.8, toegepast met $V = (\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1}$ en $W = V_n$, dat (3.4.2) een basis is van $(\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_n$, zoals beweerd. □

Gevolg 3.4.3. *Het isomorfisme* T *in Propositie 3.3.3 is uniek.*

Bewijs. Vanwege Lemma 3.4.2 legt (3.3.8) de lineaire afbeelding T vast op een basis, en dus op de hele ruimte $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. $\square$

Net als voor het tensorprodukt van twee vectorruimtes kunnen we Lemma 3.4.2 gebruiken om tensoren te beschrijven in termen van hun coëfficiënten t.a.v. een basis. Met notatie als in Lemma 3.4.2 kunnen we elk element van $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ schrijven als

$$\sum_{k_1=1}^{\dim(V_1)} \cdots \sum_{k_n=1}^{\dim(V_n)} a^{k_1,\ldots,k_n} e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_n},$$

voor $a^{k_1,\ldots,k_n} \in F$. Als duidelijk is welke bases van $V_1, \ldots, V_n$ gebruikt worden, dan kunnen berekeningen met tensoren expliciet worden uitgedrukt in deze coëfficiënten.

Het komt vaak voor dat sommige van de vectorruimtes V_j gelijk zijn aan dezelfde ruimte V, terwijl de andere ruimtes V_j gelijk zijn aan V^*. Dan is het natuurlijk om voor elke kopie van V dezelfde basis $\{e_1, \ldots, e_{\dim(V)}\}$ te gebruiken, en voor elke kopie van V^* de duale basis $\{e^1, \ldots, e^{\dim(V)}\}$. Beschouw het tensorprodukt $V^* \otimes \cdots \otimes V^* \otimes V \otimes \cdots \otimes V$, waarbij we l factoren V^* nemen, en m factoren V. Een algemeen element van deze vectorruimte is van de vorm

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{l+m}=1}^{\dim(V)} a_{k_1,\ldots,k_l}^{k_{l+1},\ldots,k_{l+m}} e^{k_1} \otimes \cdots e^{k_l} \otimes e_{k_{l+1}} \otimes \cdots \otimes e_{k_{l+m}}, \tag{3.4.3}$$

voor $a_{k_1,\ldots,k_l}^{k_{l+1},\ldots,k_{m+n}} \in F$.

Nu een generalisatie van de universele eigenschap.

Stelling 3.4.4 (Universele eigenschap van het tensorprodukt van n vectorruimtes)**.** *Zij X een vectorruimte. Voor elke multilineaire afbeelding $M\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to X$ is er een unieke lineaire afbeelding $T\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to X$ zo dat voor alle $v_1 \in V, \ldots, v_n \in V_n$,*

$$T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = M(v_1, \ldots, v_n). \tag{3.4.4}$$

Bewijs. We laten met inductie over n zien dat er voor elke multilineaire afbeelding $M\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to X$ er een lineaire afbeelding

$$T'\colon (\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_n \to X \tag{3.4.5}$$

is zo dat voor alle $v_1 \in V, \dots, v_n \in V_n$,

$$T'((\cdots(v_1 \otimes v_2) \otimes \cdots) \otimes v_n) = M(v_1, \dots, v_n). \tag{3.4.6}$$

Door T' samen te stellen met de inverse van het isomorfisme in Propositie 3.3.3 vinden we dan een afbeelding afbeelding T die voldoet aan (3.4.4) voor alle $v_1 \in V, \dots, v_n \in V_n$. Uniciteit van T volgt dan uit Lemma 3.4.2, zie onderdeel (d) van Opgave 3.4.2.

Als $n = 2$, dan geeft Stelling 2.1.1, toegepast met $V = V_1$ en $W = V_2$, een unieke lineaire afbeelding T' met de gewenste eigenschap.

Voor de inductiestap nemen we aan dat de bewering waar is voor $n-1$ vectorruimtes. Zij nu $M\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to X$ een multilineaire afbeelding. Voor elke $v_n \in V_n$ is definiëren we, analoog aan (3.1.1), $M(-, v_n) \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1}; X)$ door

$$\big(M(-, v_n)\big)(v_1, \dots, v_{n-1}) := M(v_1, \dots, v_n).$$

(Zie onderdeel (a) van Opgave 3.4.2 voor multilineariteit van deze afbeelding.) Vanwege de inductie-aanname is er dan een unieke lineaire afbeelding

$$T'_{v_n}\colon (\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1} \to X$$

zo dat voor alle $v_1 \in V, \dots, v_{n-1} \in V_{n-1}$,

$$T'_{v_n}((\cdots(v_1 \otimes v_2) \otimes \cdots) \otimes v_{n-1}) = \big(M(-, v_n)\big)(v_1, \dots, v_{n-1}) = M(v_1, \dots, v_n).$$

We bekijken nu de afbeelding

$$\tilde{M}\colon \big((\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1}\big) \times V_n,$$

gedefinieerd door

$$\tilde{M}(\alpha, v_n) := T'_{v_n}(\alpha),$$

voor $\alpha \in (\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1}$ en $v_n \in V_n$. Deze is bilineair, zie onderdeel (b) van Opgave 3.4.2. Dus vanwege Stelling 2.1.1 is er een unieke lineaire afbeelding (3.4.5) zo dat voor alle $\alpha \in (\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{n-1}$ en $v_n \in V_n$ geldt dat

$$T'(\alpha \otimes v_n) = \tilde{M}(\alpha, v_n).$$

Voor $\alpha = (\cdots(v_1 \otimes v_2) \otimes \cdots) \otimes v_{n-1}$ wordt dit (3.4.6), zie onderdeel (c) van Opgave 3.4.2. $\square$

Opmerking 3.4.5. We hebben het tensorprodukt van willekeurige aantallen vectorruimtes gedefinieerd in Definitie 3.2.1 door in Definitie 1.3.1 bilineaire vormen te vervangen door multilineaire vormen. De alternatieve constructies van het tensorprodukt van twee vectorruimtes in Gevolg 2.1.3 en Propositie 2.5.1 kunnen ook gegeneraliseerd worden tot willekeurige aantallen vectorruimtes.

We kunnen Gevolg 2.1.3 generaliseren door bilineaire afbeeldingen te vervangen door multilineaire afbeeldigen, en Stelling 3.4.4 toe te passen waar Stelling 2.1.1 wordt gebruikt in het bewijs van Gevolg 2.1.3.

En we kunnen Propositie 2.5.1 generaliseren tot een lineair isomorfisme $F(V_1 \times \cdots \times V_n)/X \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, door voor X de ruimte te nemen opgespannen door de generalisaties van de vectoren (2.5.1) die corresponderen met elk van de rekenregels in Lemma 3.2.5. In het bewijs van die generalisatie van Propositie 2.5.1 passen we dan Stelling 3.4.4 toe waar we Stelling 2.1.1 gebruiken in het bewijs van Propositie 2.5.1.

Een andere benadering om de twee alternatieve constructies van het tensor produkt te generaliseren tot willekeurige aantallen vectorruimtes is om Propositie 3.3.3 te gebruiken. Voor de linkerkant van (3.3.7) zijn er alternatieve constructies die we krijgen door Gevolg 2.1.3 of Propositie 2.5.1 herhaaldelijk toe te passen. Die geven dan alternatieve constructies van de rechterkant van (3.3.7). We kunnen vervolgens Propositie 3.3.3 gebruiken om te bewijzen dat deze constructies van het willekeurige aantallen vectorruimtes hetzelfde resultaat geeft als de constructies die we krijgen door Gevolg 2.1.3 en Propositie 2.5.1 te generaliseren zoals net beschreven.

Tenslotte generaliseren we Propositie 2.2.2. We gebruiken hiervoor het volgende lemma.

Lemma 3.4.6. *Stel dat* $n \geq 2$*, en dat* W *een vectorruimte is. Voor* $M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; W)$ *definiëren we* $T(M)\colon V_1 \times \cdots \times V_{n-1} \to \mathrm{Lin}(V_n, W)$

$$\big(\big(T(M)\big)(v_1, \ldots, v_{n-1})\big)v_n := M(v_1, \ldots, v_n),$$

voor $v_1 \in V, \ldots, v_n \in V_n$*. Dit definieert een lineair isomorfisme* $T\colon \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; W) \to \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_{n-1}; \mathrm{Lin}(V_n, W))$.

Bewijs. Het is onderdelen (a) en (b) van Opgave 3.4.3 om te laten zien dat T een lineaire afbeelding van $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; W)$ naar $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_{n-1}; \mathrm{Lin}(V_n, W))$

is. Voor $N \in \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_{n-1}; \mathrm{Lin}(V_n, W))$ definiëren we $S(N) \colon V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ door

$$\big(S(N)\big)(v_1, \ldots, v_n) := \big(N(v_1, \ldots, v_{n-1})\big)v_n.$$

Het is onderdelen (c) en (d) van Opgave 3.4.3 om te laten zien dat S een lineaire afbeelding van $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_{n-1}; \mathrm{Lin}(V_n, W))$ naar $\mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; W)$ is. Uit de definities van T en S zien we meteen dat $S \circ T$ en $T \circ S$ de identiteit zijn op de respectievelijke vectorruimtes. Dus T is een lineair isomorfisme. $\square$

Propositie 3.4.7. *Voor elke vectorruimte W is er een uniek lineair isomorfisme $T \colon W \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \to \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; W)$ zo dat voor alle $w \in W$, $\xi_1 \in V_1^*, \ldots, \xi_n \in V_n^*$ en $v_1 \in V, \ldots, v_n \in V_n$,*

$$\big(T(w \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n)\big)(v_1, \ldots, v_n) = \xi_1(v_1) \cdots \xi_n(v_n)w. \tag{3.4.7}$$

Bewijs. We gebruiken inductie over n. Voor $n = 1$ is dit Propositie 2.2.2. Stel dat de bewering waar is met n vervangen door $n - 1$. Dan is er een uniek lineair isomorfisme

$$T_1 \colon \mathrm{Lin}(V_n, W) \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_{n-1}^* \to \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_{n-1}; \mathrm{Lin}(V_n, W))$$

is zo dat alle $S \in \mathrm{Lin}(V_n, W)$, $\xi_1 \in V_1^*$, ..., $\xi_{n-1} \in V_n^*$ en $v_1 \in V$, ..., $v_{n-1} \in V_{n-1}$,

$$\big(T_1(S \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{n-1})\big)(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \xi_1(v_1) \cdots \xi_{n-1}(v_{n-1})S. \tag{3.4.8}$$

Door Lemma's 2.2.5 en3.3.1 en Propositie 3.3.3 herhaaldelijk te gebruiken om haakjes te (ver)plaatsen en factoren en tensorprodukten van plek te laten ruilen, krijgen we een uniek lineair isomorfisme

$$T_2 \colon W \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \to (W \otimes V_n^*) \otimes (V_1^* \otimes \cdots \otimes V_{n-1}^*)$$

zo dat voor alle $w \in W$ en $\xi_1 \in V_1^*, \ldots, \xi_n \in V_n^*$,

$$T_2(w \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = (w \otimes \xi_n^*) \otimes (w \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{n-1}).$$

(Zie onderdeel (a) van Opgave 3.4.4.)

Zij $T_3 \colon W \otimes V_n^* \to \mathrm{Lin}(V_n, W)$ het lineaire isomorfisme van Propositie 2.2.2. Vanwege onderdeel (b) van Lemma 1.4.11 geeft dit een lineair isomorfisme

$$T_3 \otimes I_{V_1^* \otimes \cdots \otimes V_{n-1}^*} \colon (W \otimes V_n^*) \otimes (V_1^* \otimes \cdots \otimes V_{n-1}^*) \to \mathrm{Lin}(V_n, W) \otimes (V_1^* \otimes \cdots \otimes V_{n-1}^*).$$

Zij

$$T_4 \colon \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; W) \to \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_{n-1}; \mathrm{Lin}(V_n, W))$$

het lineaire isomorfisme uit Lemma 3.4.6. Dan krijgen we een lineair isomorfisme

$$T := T_4^{-1} \circ T_1 \circ (T_3 \otimes I_{V_1^* \otimes \cdots \otimes V_{n-1}^*}) \circ T_2 \colon W \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \to \mathrm{Multilin}(V_1, \ldots, V_n; W).$$

Het is onderdelen (b) en (c) van Opgave 3.4.4 om te laten zien dat dit het unieke lineaire isomorfisme is met de gewenste eigenschap. □

Voorbeeld 3.4.8. In de differentiaalmeetkunde worden meetkundige ruimtes bestudeerd die *variëteiten* heten. Die ruimtes zien er lokaal uit als $\mathbb{R}^n$, maar kunnen globaal een heel andere structuur hebben. Voorbeelden van variëteiten zijn cirkels, sferen, tori (oppervlakken van autobanden), cylinders en Möbiusbanden. Een eigenschap van variëteiten is dat ze in elk punt een *raakruimte* hebben. Dat is de vectorruimte die de variëteit in dat punt het best benadert. Voorbeelden van raakruimtes zijn raaklijnen aan cirkels en aan grafieken van functies, en raakvlakken aan de 2-sfeer en aan een torus.

Stel nu dat M een variëteit is. Voor een punt $p \in M$ geven we de raakruimte in dat punt aan met T_pM. Een *Riemannse metriek* op een variëteit is een inprodukt op elke raakruimte T_pM, dat op een differentieerbare manier van p afhangt. Zo'n Riemannse metriek bepaalt op een niet-triviale manier de meest fundamentele notie van kromming, de *Riemann-krommingstensor* R. In elk punt $p \in M$ geeft die krommingstensor een element

$$R_p \in \mathrm{Bilin}\big(T_pM, T_pM; \mathrm{Lin}(T_pM, T_pM)\big).$$

Als $v, w \in T_pM$, dan geeft $R_p(v, w) \in \mathrm{Lin}(T_pM, T_pM)$ min of meer aan wat het verschil is tussen eerst differentiëren in de richting v en daarna in de richting w, en differentiëren in de omgekeerde volgorde. In de calculus op $\mathbb{R}^n$ maakt de volgorde van differentiëren in verschillende richtingen niet uit, dus als $M = \mathbb{R}^n$, dan is $R_p = 0$ in elk punt p. Met andere woorden: $\mathbb{R}^n$ is vlak.

Vanwege Propositie 3.4.7 zijn er natuurlijke lineaire isomorfismes

$$\begin{aligned}\mathrm{Bilin}\big(T_pM, T_pM; \mathrm{Lin}(T_pM, T_pM)\big) &\to \mathrm{Lin}(T_pM, T_pM) \otimes (T_pM)^* \otimes (T_pM)^* \\ &\to T_pM \otimes (T_pM)^* \otimes (T_pM)^* \otimes (T_pM)^*.\end{aligned}$$

Zo vatten we R_p op als een tensor van rang vier. Vanwege Opmerking 1.4.12 wordt R ook wel een één keer covariante en drie keer contravariante tensor genoemd. In de natuurkunde worden de begrippen covariant en contravariant soms in de omgekeerde betekenis gebruikt. (Dit heeft ermee te maken dat de functies die aan een vector zijn coördinaten t.a.v. een basis toevoegen zich contravariant gedragen.)

Opgaven

Opgave 3.4.1. Geef een basis van $F^2 \otimes F^3 \otimes F^2$. Wat is de dimensie van deze ruimte?

Opgave 3.4.2 (bij het bewijs van Stelling 3.4.4)**.** (a) Bewijs dat de afbeelding $M(-, v_n)$ in het bewijs van Stelling 3.4.4 multilineair is voor alle $v_n \in V_n$.

(b) Bewijs dat de afbeelding $\tilde{M}$ in het bewijs van Stelling 3.4.4 bilineair is.

(c) Bewijs dat de afbeelding T', geconstrueerd in de inductiestap van het bewijs van Stelling 3.4.4, voldoet aan (3.4.6), voor alle $v_1 \in V, \dots, v_n \in V_n$.

(d) Bewijs dat het lineaire isomorfisme T zoals inStelling 3.4.4 uniek is. (Hint: gebruik Lemma 3.4.2.)

Opgave 3.4.3 (bij het bewijs van Lemma 3.4.6)**.** Stel dat $n \geq 2$, en dat W een vectorruimte is. Zij $T(M)\colon V_1 \times \cdots \times V_{n-1} \to \mathrm{Lin}(V_n, W)$ voor $M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n; W)$ gedefinieerd als in het bewijs van Lemma 3.4.6.

(a) Bewijs dat $T(M) \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1}; \mathrm{Lin}(V_n, W))$ voor alle $M \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n; W)$.

(b) Bewijs dat de zo gedefinieerde afbeelding $T\colon \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n; W) \to \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1}); \mathrm{Lin}(V_n, W))$ lineair is.

Zij $S(N)\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ voor $N \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1}), \mathrm{Lin}(V_n, W))$ gedefinieerd als in het bewijs van Lemma 3.4.6.

(c) Bewijs dat $S(N) \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n; W))$ voor alle $N \in \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1}), \mathrm{Lin}(V_n$

(d) Bewijs dat de zo gedefinieerde afbeelding $S\colon \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_{n-1}), \mathrm{Lin}(V_n, W)) \to \mathrm{Multilin}(V_1, \dots, V_n; W)$ lineair is.

Opgave 3.4.4 (bij het bewijs van Propositie 3.4.7)**.** (a) Werk de definitie van het lineaire isomorfisme T_2 in het bewijs van Propositie 3.4.7 in detail uit.

(b) Bewijs dat het isomorfisme T in het bewijs van Propositie 3.4.7 voldoet aan (3.4.7), voor alle $w \in W$, $\xi_1 \in V_1^*, \dots, \xi_n \in V_n^*$ en $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$.

(c) Bewijs dat het lineaire isomorfisme T zoals in Propositie 3.4.7 uniek is. (Hint: gebruik Lemma 3.4.2.)

3.5 Contracties

Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte, en $l, m \in \mathbb{N}$.

We beginnen met wat notatie. We schrijven

$$\begin{aligned} (V^*)^{\otimes l} &:= V^* \otimes \cdots \otimes V^*; \\ V^{\otimes m} &:= V \otimes \cdots \otimes V, \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

waarbij we op de eerste regel het tensorprodukt nemen van l kopieën van V^*, en op de tweede regel het tensorprodukt van m kopieën van V. Verder definiëren we $(V^*)^{\otimes 0} = V^{\otimes 0} := \mathbb{F}$.

Stel dat $j \in \{1, \dots, l\}$ en $k \in \{1, \dots, m\}$. We gebruiken dakjes om aan te geven dat we vectoren weglaten uit een simpele tensor. Zo krijgen we, als $\xi_1, \dots, \xi_l \in V^*$ en $v_1 \dots, v_m \in V$,

$$\begin{aligned} &\xi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\xi}_j \otimes \cdots \otimes \xi_l \in (V^*)^{\otimes (l-1)}; \quad \text{en} \\ &v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_k \otimes \cdots \otimes v_m \in V^{\otimes (m-1)}. \end{aligned}$$

Bijvoorbeeld, als $m = 3$, dan is

$$v_1 \otimes \hat{v}_2 \otimes v_3 = v_1 \otimes v_3 \in V \otimes V.$$

Als $l = 1$ of $m = 1$, dan schrijven we voor $\xi_1 \in V^*$ en $v_1 \in V$,

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &:= 1 \quad \in (V^*)^{\otimes 0} = F; \\ \hat{v}_1 &:= 1 \quad \in V^{\otimes 0} = F. \end{aligned}$$

Analoog aan (3.5.1) schrijven we $(V^*)^{\times l}$ voor het Cartesisch produkt van l kopieën van V^*, en $V^{\times m}$ voor het Cartesisch produkt van m kopieën van V. Beschouw nu de afbeelding

$$M_{j,k} \colon (V^*)^{\times l} \times V^{\times m} \to (V^*)^{\otimes(l-1)} \otimes V^{\otimes(m-1)}$$

gegeven door

$$M_{j,k}(\xi_1, \ldots, \xi_l, v_1, \ldots, v_m) := \xi_j(v_k)\xi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\xi}_j \otimes \cdots \otimes \xi_l \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_k \otimes \cdots \otimes v_m, \tag{3.5.2}$$

voor $\xi_1, \ldots, \xi_l \in V^*$ en $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Lemma 3.5.1. *De afbeelding* $M_{j,k}$ *is multilineair.*

Bewijs. Dit is Opgave 3.5.1. □

Vanwege Lemma 3.5.1 en Stelling 3.4.4 is er een unieke lineaire afbeelding

$$C_{j,k} \colon (V^*)^{\otimes l} \otimes V^{\otimes m} \to (V^*)^{\otimes(l-1)} \otimes V^{\otimes(m-1)} \tag{3.5.3}$$

zo dat voor alle $\xi_1, \ldots, \xi_l \in V^*$ en $v_1, \ldots, v_m \in V$,

$$C_{j,k}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_l \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = \xi_j(v_k)\xi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\xi}_j \otimes \cdots \otimes \xi_l \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_k \otimes \cdots \otimes v_m.$$

Definitie 3.5.2. De afbeelding (3.5.3) is de *contractie* van de j-de factor V^* en de k-de factor V in $(V^*)^{\otimes l} \otimes V^{\otimes m}$.

Contracties kunnen worden gedefinieerd op algemenere tensorprodukten dan $(V^*)^{\otimes l} \otimes V^{\otimes m}$, het is voldoende dat één factor de duale is van een andere factor. Maar voor een algemenere definitie wordt de notatie snel ingewikkeld.

We zullen wel een kleine generalisatie van Definitie 3.5.2 gebruiken naar contracties op tensorprodukten zoals $V \otimes V^* \otimes V \otimes V^*$, waarin de factoren V^* en V door elkaar staan. Zie Lemma 3.5.8 en Voorbeeld 3.5.9. We kunnen dan contracties defniëren door in de definitie van de afbeelding $M_{j,k}$ in (3.5.2) nog steeds het j-de element van V^* toe te passen op het k-de element van V. Dan krijgen we bijvoorbeeld

$$C_{1,2}(v_1 \otimes \xi_1 \otimes v_2 \otimes \xi_2) = \xi_1(v_2)v_1 \otimes \xi_2,$$

voor $\xi_1, \xi_2 \in V^*$ en $v_1, v_2 \in V$. (Dit in het algemeen uitschrijven in een formule wordt boekhoudkundig ingewikkeld, maar het idee is hopelijk duidelijk.)

Een andere mogelijke benadering, met hetzelfde resultaat, is om het isomorfisme uit Lemma 2.2.5 te gebruiken om alle factoren V^* links van de factoren V te krijgen, waarbij we de onderlinge volgorde van de factoren V^* niet veranderen, en de volgorde van de factoren V ook niet. Vervolgens kan de contractie in Definitie 3.5.2 letterlijk worden toegepast, en kunnen de overgebleven factoren V^* en V weer in hun oorspronkelijke volgorde gezet worden met het isomorfisme uit Lemma 2.2.5.

Contracties zijn generalisaties van een aantal constructies in de lineaire algebra, zoals het spoor van een matrix en de samenstelling van lineaire afbeeldingen. Zie Lemma's 3.5.6 en 3.5.8. Voordat we die bewijzen, geven we een uitdrukking voor contracties in termen van componenten van tensoren t.a.v. een basis.

Lemma 3.5.3. *Zij* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *een basis van* V, *en* $\{e^1, \ldots, e^n\}$ *de duale basis van* V^*. *Zij* $\alpha \in (V^*)^{\otimes l} \otimes V^{\otimes m}$, *en schrijf*

$$\alpha = \sum_{r_1,\ldots,r_{l+m}=1}^{n} a^{r_{l+1},\ldots,r_{l+m}}_{r_1,\ldots,r_l} e^{r_1} \otimes \cdots e^{r_l} \otimes e_{r_{l+1}} \otimes \cdots \otimes e_{r_{l+m}},$$

voor $a^{r_{l+1},\ldots,r_{m+n}}_{r_1,\ldots,r_l} \in F$. *zoals in* (3.4.3). *Dan is*

$$C_{j,k}(\alpha) = \sum_{r_1,\ldots,\hat{r}_j,\ldots r_l}^{n} \sum_{r_{l+1},\ldots,\hat{r}_{l+j},\ldots r_{l+m}}^{n} \left(\sum_{r_j=1}^{n} a^{r_{l+1},\ldots,r_{l+j-1},r_j,r_{l+j+1},\ldots,r_{l+m}}_{r_1,\ldots,r_l} \right)$$
$$e^{r_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e^{r_j}} \otimes \cdots \otimes e^{r_l} \otimes e_{r_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{r_{l+j}}} \otimes \cdots \otimes e_{r_{l+m}}. \quad (3.5.4)$$

Hierbij geven we met dakjes aan dat er niet gesommeerd wordt over r_j *en* r_{l+j} *in de eerste twee sommaties.*

Bewijs. Voor alle $r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_l$ en $r_{l+1}, \dots, r_{l+k-1}, r_{l+k+1}, \dots, r_{l+m}$ in $\{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
&C_{j,k}\left(\sum_{r_j, r_{l+j}=1}^{n} a_{r_1,\dots,r_l}^{r_{l+1},\dots,r_{l+m}} e^{r_1} \otimes \cdots e^{r_l} \otimes e_{r_{l+1}} \otimes \cdots \otimes e_{r_{l+m}} \right) \\
&= \sum_{r_j, r_{l+j}=1}^{n} a_{r_1,\dots,r_l}^{r_{l+1},\dots,r_{l+m}} e^{r_j}(e_{r_{l+j}}) e^{r_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e^{r_j}} \otimes \cdots \otimes e^{r_l} \otimes e_{r_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{r_{l+j}}} \otimes \cdots \otimes e_{r_{l+m}} \\
&= \sum_{r_j=1}^{n} a_{r_1,\dots,r_l}^{r_{l+1},\dots,r_{l+j-1},r_j,r_{l+j+1},\dots,r_{l+m}} e^{r_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e^{r_j}} \otimes \cdots \otimes e^{r_l} \otimes e_{r_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{r_{l+j}}} \otimes \cdots \otimes e_{r_{l+m}}.
\end{aligned}$$

Beide kanten sommeren over $r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_l$ en $r_{l+1}, \dots, r_{l+k-1}, r_{l+k+1}, \dots, r_{l+m}$ geeft nu (3.5.4). □

Opmerking 3.5.4. De notatie in Lemma 3.5.3 is wat ingewikkeld. Maar het idee is dat we de componenten van $C_{j,k}(\alpha)$ t.a.v. de natuurlijk basis van $(V^*)^{\otimes(l-1)} \otimes V^{\otimes(m-1)}$ krijgen door de componenten van α te sommeren over $r_j = r_{l+j}$. Zie Voorbeeld 3.5.5 en Lemma's 3.5.6 en 3.5.8 voor speciale gevallen, die hopelijk wat meer gevoel geven voor contracties.

Voorbeeld 3.5.5. Neem $l = m = 2$, $j = 1$ en $k = 2$. Dan is voor alle $\xi_1, \xi_2 \in V^*$ en $v_1, v_2 \in V$,

$$C_{1,2}(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes v_1 \otimes v_2) = \xi_1(v_2)\xi_2 \otimes v_1 \in V^* \otimes V.$$

Zie ook Opgave 3.5.2. Als

$$\alpha = \sum_{r_1,r_2,r_3,r_4=1}^{n} a_{r_1,r_2}^{r_3,r_4} e^{r_1} \otimes e^{r_2} \otimes e_{r_4} \otimes e_{r_4},$$

voor $a_{r_1,r_2}^{r_3,r_4} \in F$, dan is

$$C_{1,2}(\alpha) = \sum_{r_2=1}^{n} \sum_{r_3=1}^{n} \left(\sum_{r_1=1}^{n} a_{r_1,r_2}^{r_3,r_1} \right) e^{r_2} \otimes e_{r_3}.$$

Voor een vierkante matrix A schrijven we $\mathrm{tr}(A)$ voor het spoor van A: de som van zijn diagonaal-elementen. Dit is een speciaal geval van een contractie.

Lemma 3.5.6. *Beschouw de lineaire isomorfismes*

$$\begin{aligned} T\colon V \otimes V^* &\to \mathrm{Lin}(V,V); \quad \textit{en} \\ \mathrm{Mat}\colon \mathrm{Lin}(V,V) &\to M_{n\times n}(F). \end{aligned}$$

Hier is T *als in Propositie 2.2.2, en* Mat *gedefinieerd door een gegeven basis met* $n = \dim(V)$ *elementen. Voor alle* $\alpha \in V \otimes V^*$ *is*

$$C_{1,1}(\alpha) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}(T(\alpha))).$$

Bewijs. Zij $\{e_1, \dots, e_n\}$ een basis van V, en $\{e^1, \dots, e^n\}$ de duale basis van V^*. Vanwege Lemma 1.3.8 is een algemeen element $\alpha \in V^* \otimes V$ van de vorm

$$\alpha = \sum_{r,s=1}^{n} a^r_s e_r \otimes e^s,$$

voor $a^r_s \in F$. Lemma 3.5.3 zegt nu dat

$$C_{1,1}(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} a^r_r.$$

Vanwege Lemma 2.2.4 is de rechterkant gelijk aan $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}(T(\alpha)))$. □

Opmerking 3.5.7. Lemma 3.5.6 impliceert dat het spoor van de matrix van een lineaire afbeelding niet afhangt van de gekozen basis.

Samenstelling van lineaire afbeeldingen is ook een speciaal geval van een contractie. (We laten dit zien voor samenstelling van lineaire afbeeldingen op dezelfde ruimte V om de notatie wat eenvoudiger te houden, maar dit is te generaliseren tot afbeeldingen tussen verschillende vectorruimtes.)

Lemma 3.5.8. *Zij* $T\colon V \otimes V^* \to \mathrm{Lin}(V,V)$ *het lineaire isomorfisme uit Propositie 2.2.2. Stel dat* $\alpha, \beta \in V \otimes V^*$. *Via de lineaire isomorfismes*

$$(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*) \to ((V \otimes V^*) \otimes V) \otimes V^* \to V \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \quad (3.5.5)$$

uit Lemma 3.3.1 en Propositie 3.3.3 vatten we $\alpha \otimes \beta$ *op als een element van het tensorprodukt aan de rechterkant. Er geldt*

$$T(C_{1,2}(\alpha \otimes \beta)) = T(\alpha) \circ T(\beta). \quad (3.5.6)$$

Bewijs. We bewijzen de bewering eerst voor α en β van de vorm $\alpha = v \otimes \xi$ en $\beta = v' \otimes \xi'$, voor $v, v' \in V$ en $\xi, \xi' \in V^*$. Vanwege Lemma 1.3.10 en lineariteit van T en $C_{1,2}$ impliceert dit het algemene geval.

Voor zulke α en β, en $v'' \in V$ geldt, vanwege de uitdrukkingen voor de lineaire isomorfimes (3.5.5) op simpele tensoren,

$$T(C_{1,2}(\alpha \otimes \beta))v'' = T(\xi(v')v \otimes \xi')v'' = \xi'(v'')\xi(v')v.$$

En $T(\beta)v'' = \xi'(v'')v'$, dus ook

$$\left(T(\alpha) \circ T(\beta)\right) v'' = \xi'(v'')\xi(v')v.$$

Dus (3.5.6) geldt. □

Voorbeeld 3.5.9. In Voorbeeld 3.4.8 zagen we dat een Riemannse metriek op een variëteit M een inprodukt g_p op elke raakruimte T_pM definieert. Dit bepaalt in elk punt de Riemann krommingstensor

$$R_p \in T_pM \otimes (T_pM)^* \otimes (T_pM)^* \otimes (T_pM)^*.$$

Van deze tensor zijn andere noties van kromming afgeleid, in termen van contracties. De *Ricci-kromming* in p is

$$\mathrm{Ric}_p := C_{2,1}(R_p) \in (T_pM)^* \otimes (T_pM)^*.$$

Zij $g_p^* \in \mathrm{Bilin}((T_pM)^*, (T_pM)^*)$ het inprodukt duaal aan g_p, zoals in Voorbeeld 1.4.7 en Opgave 1.4.5. Vanwege Stelling 2.1.1 definieert g_p^* een lineaire afbeelding $G_p^* \in \left((T_pM)^* \otimes (T_pM)^*\right)^*$. De *scalaire kromming* in p is

$$\kappa(p) := G_p^*(\mathrm{Ric}_p) \in \mathbb{R}.$$

Een diepe vraag in de differentiaalmeetkunde is of er op een gegeven variëteit M een Riemannse metriek bestaat zo dat $\kappa(p) > 0$ voor alle $p \in M$.

In Einstein's algemene relativiteitstheorie worden ruimte en tijd samen gemodelleerd als een vier-dimensionale variëteit M. Hierop is een *pseudo-Riemannse metriek* gedefinieerd: het verschil met een Riemannse metriek is dat het niet vereist is dat $g_p(v, v) \geq 0$ voor alle $p \in M$ en $v \in T_pM$. Het Minkowski-inprodukt in Voorbeeld 1.2.6 is hiervan een voorbeeld. Voor een pseudo-Riemannse metriek zijn de Riemann krommingstensor, Ricci kromming en scalaire kromming op dezelfde manier gedefineerd als in het Riemannse geval.

Een speciaal geval van *Einstein's veldvergelijking* in de algemene relativiteitstheorie is

$$\mathrm{Ric}_p = \frac{1}{2}\kappa(p)g_p \quad \in (T_pM)^* \otimes (T_pM)^*. \tag{3.5.7}$$

(Om precies te zijn: dit is het speciale geval dat geldt in gebieden waarin geen materie of energie aanwezig is, en als de kosmologische constante nul is.) De Riemann krommingstensor, en dus de Ricci-kromming en scalaire kromming, in het punt p hangt niet alleen af van g_p, maar ook van de afgeleiden van g in het punt p. Daarom is (3.5.7) een *differentiaalvergelijking*, waaruit in sommige gevallen g als functie van p kan worden opgelost.

Einstein vond bijvoorbeeld in 1916 gravitatiegolven, een soort rimpelingen in de ruimte-tijd, als oplossing van (3.5.7), gebaseerd op eerder werk van Poincaré. In 2015 werden gravitatiegolven voor het eerst waargenomen, de ontdekkers kregen hier in 2017 de Nobelprijs voor.

Opgaven

Opgave 3.5.1. Bewijs Lemma 3.5.1.

Opgave 3.5.2. We nemen $V = F^3$, en identificeren $(F^3)^*$ met de ruimte van rijvectoren met drie componenten, zoals in Voorbeeld 1.1.5. Bereken

$$C_{1,2}\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-2 & 7 & 2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) \quad \in (F^3)^* \otimes F^3.$$

Opgave 3.5.3. Zij $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis van V (met $n \geq 3$), en $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de duale basis van V^*. Beschouw de tensor

$$\alpha := e^1 \otimes e_1 \otimes e_1 + 2e^1 \otimes e_1 \otimes e_3 + 3e^1 \otimes e_2 \otimes e_1 + 4e^3 \otimes e_2 \otimes e_2 + 5e^3 \otimes e_3 \otimes e_3$$

in $V^* \otimes V \otimes V$. Druk $C_{1,1}(\alpha) \in V$ uit in de basiselementen $e_1, \ldots, e_n$.

Referenties

[1] Stephen Friedberg, Arnold Insel and Lawrence Spencer, *Linear algebra*, fourth edition, Pearson Education, 2003.

[2] Klaas Landsman, *Inleiding in de wiskunde*, collegedictaat Radboud Universiteit, versie 2021.