# DICTAAT
# EINDIGE GROEPEN VAN LIE TYPE

Erik Koelink

Voorjaar 1998

Versie van 14 mei 1998

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

# Inhoud



**Inleiding.** Dit dictaat is ontstaan tijdens het Stieltjes college "Eindige Groepen van Lie Type" in het voorjaarssemester 1998 dat is verzorgd door Eric Opdam (RUL) en Erik Koelink (UvA). Dit dictaat vergezelt de colleges van de laatst genoemde. Het deel van Eric Opdam is gericht op de theorie van algebraïsche groepen en de definitie van eindige groepen van Lie type, zie Carter [2, Ch. 2]. Daarvoor is van Springers boek [8] gebruik gemaakt.

## 1. Coxeter groepen

De inhoud van dit hoofdstuk is gerelateerd aan §2.2, 2.3 uit Carter [2]. Daar wordt dit materiaal herhaald. Betere verwijzingen met betrekking tot de theorie van Coxeter groepen zijn Bourbaki [1] en Humphreys [5]. Enkele onbewezen uitspraken kunnen daar met bewijs worden teruggevonden.

### 1.1. Definities.

**Definitie 1.1.1.**
(i) *Een* **Coxeter groep** *is een paar* $(W, S)$ *met* $W$ *een groep en* $S \subset W$ *een verzameling van involuties, i.e.* $s \neq 1$, $s^2 = 1$, *die* $W$ *voortbrengen en zodanig dat de relaties* $(st)^{m_{st}} = 1$, $\forall s, t \in S$, $s \neq t$, *de enige relaties in* $W$ *zijn.*
(ii) $(W, S)$ *is een* **irreducibele** *Coxeter groep als er geen partitie* $S = S_1 \cup S_2$ *bestaat zodanig dat* $m_{st} = 2$ *voor alle* $s \in S_1$ *en* $t \in S_2$.

De generatoren zijn involuties, en dit impliceert $m_{st} = m_{ts}$. We zullen enkel eindige Coxeter groepen beschouwen en dan is $m_{st} < \infty$. Als conventie stellen we $m_{ss} = 1, \forall s \in S$. Merk op dat $m_{st} = 2$ betekent dat $st = ts$, ofwel $s$ en $t$ commuteren, want $s = s^{-1}$ en $t = t^{-1}$.

*Opmerking 1.1.2.* De Coxeter groep wordt vastgelegd door $m_{st}$, $s, t \in S$, en we geven dit weer in een **Coxeter diagram**. Het Coxeter diagram is een graaf met knopen en lijnen met een gewicht. Het aantal knopen is $|S|$ en we verbinden $s$ en $t$ niet als $m_{st} = 2$ en met een lijn met gewicht $m_{st}$ als $m_{st} \geq 3$. De gewichten worden alleen genoteerd als $m_{st} \geq 4$. Merk op dat $(W, S)$ irreducibel is precies dan als het Coxeter diagram samenhangend is. We hebben dan de volgende classificatie van irreducibele eindige Coxeter groepen in termen van de Coxeter diagrammen met $n = |S|$ knopen:

$$A_n (n \geq 1): \quad \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \qquad\qquad B_n (n \geq 2): \quad \circ - \circ - \dots - \circ \overset{4}{-} \circ$$

$$D_n (n \geq 4): \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \circ & & \\ & & & & & & | & & \\ \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & - & \circ \end{array} \qquad\qquad E_6: \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \circ & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \end{array}$$

$$E_7: \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \circ & & & & \\ & & & & & & | & & & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \end{array} \qquad E_8: \quad \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & \circ & & & & \\ & & & & & & & & | & & & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \end{array}$$

$$F_4: \quad \circ - \circ \overset{4}{-} \circ - \circ \qquad\qquad H_3: \quad \circ \overset{5}{-} \circ - \circ$$

$$H_4: \quad \circ \overset{5}{-} \circ - \circ - \circ \qquad\qquad I_2(m) (m \geq 5): \quad \circ \overset{m}{-} \circ$$

De benamingen $H_2 = I_2(5)$ en $G_2 = I_2(6)$ zijn gebruikelijk.

**Definitie 1.1.3.** *Voor* $w \in W$ *definiëren we de* **lengte van** $w$ *als*

$$\ell(w) = \min_p \{p \mid w = s_1 \dots s_p,\ s_i \in S\}.$$

*Als* $w = s_1 \dots s_{\ell(w)}$ *dan heet het rechterlid een* **gereduceerde expressie voor** $w$.

*Opgave 1.1.4.* Bewijs de volgende eigenschappen van de lengtefunctie:

a. $\ell(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1$ en $\ell(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$.
b. $\ell(w) = \ell(w^{-1})$.
c. $|\ell(w) - \ell(w')| \leq \ell(ww') \leq \ell(w) + \ell(w')$.

*Opmerking.* De afbeelding $S \to \{\pm 1\}$, $s \mapsto -1$, breidt uit tot een 1-dimensionale representatie van $W$, want de relaties van $W$ worden gerespecteerd. Deze representatie heet de **tekenrepresentatie** $\varepsilon: W \to \{\pm 1\}$, en $\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$. Dan geldt voor $w \in W$ en $s \in S$ ook dat $(-1)^{\ell(ws)} = \varepsilon(ws) = -\varepsilon(w) = -(-1)^{\ell(w)}$, dus $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$ vanwege Opgave 1.1.4(c). Evenzo $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$.

*Voorbeeld 1.1.5.* Zij $S_n$ de permutatiegroep op $n$ letters, en laat $s_i = (i, i{+}1)$, $i = 1, \ldots, n-1$ de transpositie van de $i$-de en $i+1$-de letter zijn. Dan $s_i^2 = 1$, $s_i s_j = s_j s_i$ als $|i - j| > 1$ en $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, en de $s_i$'s brengen $S_n$ voort. We concluderen dat $S_n$ een quotiënt van de Coxeter groep van type $A_{n-1}$ is. We zullen later zien dat $S_n = W(A_{n-1})$.

*Opgave 1.1.6.* Laat $D_m$ de dihedraalgroep van orde $2m$ zijn, i.e. $D_m$ is de groep van orthogonale transformaties van $\mathbb{R}^2$ die een regelmatig polygon met $m$ zijden en de oorsprong als middelpunt invariant laten. Laat zien dat $D_m$ $m$ rotaties en $m$ spiegelingen bevat, en dat het een quotiënt is van $W(I_2(m))$. (Ook hier geldt $W(I_2(m)) = D_m$, zoals we later zullen zien.)

*Opgave 1.1.7.* Zij $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ de groep van tekenpermutaties, i.e. de groep van monomiale matrices waarbij de niet-nul matrixelementen $\pm 1$ zijn. (Monomiale matrices zijn de matrices met precies één niet-nul element op iedere rij en kolom.) Laat zien dat het een quotiënt is van $W(B_n)$. (Ook hier geldt $W(B_n) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$, zoals we later zullen zien.)

### 1.2. Spiegelingsrepresentatie.

Zij $V$ een $|S|$-dimensionale reële vectorruimte met basis $\alpha_s$, $s \in S$. We voorzien $V$ van de bilineaire vorm gedefinieerd door $\langle \alpha_s, \alpha_t \rangle = -\cos \pi / m_{st}$, zodat in het bijzonder $\langle \alpha_s, \alpha_s \rangle = 1$. Merk op dat $m_{st} = m_{ts}$ maakt dat de bilineaire vorm symmetrisch is. Definieer nu de spiegeling $\tau_s$ in het hypervlak $H_s = \{v \in V \mid \langle v, \alpha_s \rangle = 0\}$, ofwel

$$\tau_s: V \to V, \qquad \tau_s(v) = v - 2\langle v, \alpha_s \rangle \alpha_s. \tag{1.2.1}$$

*Opmerking.* De normalisatie $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ is natuurlijk, maar een veel meer gebruikte normalisatie is $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$. We volgen Carter [2, §2.2].

*Opgave 1.2.1.* Zij $\tau_\phi$, $\phi \in V$, de spiegeling in het hypervlak horend bij $\phi$ zoals gedefinieerd in (1.2.1), en zij $A \in GL(V)$. Bewijs dat $\tau_{A\phi} = A \circ \tau_\phi \circ A^{-1}$.

**Lemma 1.2.2.** *Er geldt*
(i) $\tau_s^2 = 1$, $\forall s \in S$,
(ii) $(\tau_s \tau_t)^{m_{st}} = 1$, $\forall s, t \in S$,
(iii) $\langle \tau_s(v_1), \tau_s(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\forall s \in S$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

*Bewijs.* Dat $\tau_s$ een involutie is volgt uit een triviale berekening met (1.2.1). Evenzo is (iii) een eenvoudige berekening met (1.2.1).

Voor (ii) beschouwen we de 2-dimensionale deelruimte $V_{st} = \mathbb{R}\cdot\alpha_s \oplus \mathbb{R}\cdot\alpha_t$. Merk op dat de beperking tot $V_{st}$ van de bilineaire vorm positief definiet is. Immers, als $v = a\alpha_s + b\alpha_t$, $a, b \in \mathbb{R}$, dan is $\langle v, v\rangle = a^2 + b^2 - 2ab\cos\pi/m_{st} = (a - b\cos\pi/m_{st})^2 + b^2\sin^2\pi/m_{st}$. Omdat $m_{st} < \infty$ volgt dat $\langle v, v\rangle = 0$ dan en slechts dan als $a = b = 0$ ofwel $v = 0$. Dus $V_{st} \cong \mathbb{R}^2$, de 2-dimensionale Euclidische ruimte. Dan is de hoek tussen $\alpha_s$ en $\alpha_t$ gelijk aan $\pi(1 - m_{st}^{-1})$, en dus is $\tau_s\tau_t$ op $V_{st}$ gelijk aan een rotatie over $2\pi/m_{st}$ en $(\tau_s\tau_t)^{m_{st}} = 1$ op $V_{st}$. Omdat $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positief definiet is op $V_{st}$ volgt dat $V = V_{st} \oplus \{v \in V \mid \langle v, \lambda\rangle = 0, \forall\lambda \in V_{st}\}$. Aangezien de laatste deelruimte puntsgewijs invariant wordt gelaten door $\tau_s$ en $\tau_t$ volgt het resultaat. □

**Gevolg 1.2.3.** *$\theta\colon W \to GL(V)$, $s \mapsto \tau_s$, is een representatie van $W$, de* **spiegelingsrepresentatie**.

**Definitie 1.2.4.** *De eindige verzameling van vectoren in $V$ gedefinieerd door $\Delta = \{\alpha_s \mid s \in S\}$ heten de* **simpele wortels** *en de eindige verzameling van vectoren in $V$ gedefinieerd door $\Phi = W(\Delta)$ heet het* **wortelsysteem**. *De wortels $\alpha \in \Phi$, $\alpha = \sum_s c_s\alpha_s$, $c_s \in \mathbb{R}$, met $c_s \geq 0$, noemen we* **positieve wortels**. *De verzameling positieve wortels noteren we met $\Phi^+$. Een wortel $\alpha$ heet* **negatief** *als $-\alpha \in \Phi^+$, en de verzameling van negatieve wortels is $\Phi^-$.*

**Stelling 1.2.5.** *Zij $w \in W$ en $s \in S$ dan geldt*
(i) $\ell(ws) > \ell(w) \Rightarrow w(\alpha_s) > 0$,
(ii) $\ell(ws) < \ell(w) \Rightarrow w(\alpha_s) < 0$.

*Schets van het bewijs.* Merk op dat (ii) uit (i) volgt door van $w$ op $ws$ over te gaan en op te merken dat $ws(\alpha_s) = -w(\alpha_s)$.

Het bewijs van (i) gaat met behulp van inductie op de lengte $\ell(w)$. Het geval $\ell(w) = 0$, of $w = 1$, is triviaal. Zij $t \in S$ gekozen zodat $\ell(wt) < \ell(w)$, dan is $s \neq t$. Zij $W_J = \langle s, t\rangle$ de ondergroep voortgebracht door $s$ en $t$, dan $W_J \cong D_m$ voor zekere $m < \infty$. Later zullen we dit zien als een speciaal geval van een zogenaamde parabolische ondergroep, en dat zelfs $m = m_{st}$. Nu weten we slechts dat $m | m_{st}$. Zij $\ell_J$ de bijbehorende lengtefunctie, dan $\ell(w) \leq \ell_J(w)$ voor $w \in W_J$. De inductiestap is enigzins ingewikkeld, en loopt vooruit op het begrip minimale nevenklasse representant. Stel $D = \{w' \in W \mid (w')^{-1}w \in W_J,\ \ell(w') + \ell_J((w')^{-1}w) = \ell(w)\}$, dan is $D$ niet leeg want $w \in D$. Zij $v \in D$ het element met minimale lengte $\ell(v)$, en laat $v_J = v^{-1}w$ zodat $w = vv_J$ en $\ell(w) = \ell_J(v_J) + \ell(v)$. Merk op dat $wt \in D$ per definitie, dus $\ell(v) \leq \ell(wt) < \ell(w)$, dus we kunnen de inductiehypothese op $v$ en $s$ toepassen mits we weten dat $\ell(vs) > \ell(v)$. Stel $\ell(vs) < \ell(v)$, dan volgt uit

$$\begin{aligned}\ell(w) \leq \ell(vs) + \ell(sv^{-1}w) \leq \ell(vs) + \ell_J(sv^{-1}w) &= \ell(v) - 1 + \ell_J(sv^{-1}w)\\ &\leq \ell(v) - 1 + \ell_J(v^{-1}w) + 1 = \ell(v) + \ell_J(v^{-1}w) = \ell(w)\end{aligned}$$

dat $\ell(w) = \ell(vs) + \ell_J(sv^{-1}w)$ in tegenspraak met het feit dat $v \in D$ minimale lengte heeft.

De inductiehypothese zegt dat $v(\alpha_s) > 0$, en op een soortgelijke wijze zien we dat $v(\alpha_t) > 0$. Omdat $w = vv_J$ is het voldoende te bewijzen dat $v_J(\alpha_s) = A\alpha_s + B\alpha_t$, $A, B \geq 0$. Dit reduceert tot een berekening over rotaties in $\mathbb{R}^2$, zie het bewijs van Lemma 1.2.2(ii). Dit laten we aan de lezer over. □

**Gevolg 1.2.6.** *$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, ofwel $\forall \alpha \in \Phi$ met $\alpha = \sum_s c_s \alpha_s$ zijn óf alle coëfficiënten niet-negatief óf niet-positief.*

*Bewijs.* Merk op dat voor alle $\alpha \in \Phi$ is er een $w \in W$ en een $s \in S$ zodat $\alpha = w(\alpha_s)$. Pas nu Stelling 1.2.5 toe. $\square$

**Gevolg 1.2.7.** *De spiegelingsrepresentatie is getrouw, i.e.* Ker$\theta$ *is triviaal.*

*Bewijs.* Stel niet, kies $1 \neq w \in \mathrm{Ker}\theta$ en daarbij een $s \in S$ zodanig dat $\ell(ws) < \ell(w)$. Dan volgt uit Stelling 1.2.5 dat $w(\alpha_s) < 0$. Maar $w \in \mathrm{Ker}\theta$ leidt tot $\alpha_s = w(\alpha_s) \in \Phi^+$. Tegenspraak. $\square$

*Voorbeeld 1.2.8.* Voor de Coxeter groep $W(A_{n-1})$ kunnen we de wortels $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)/\sqrt{2}$, $i \neq j$, nemen, waarbij $\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, de standaard orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$ nemen. Nu is $V = \langle \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \rangle^\perp$ een $n-1$-dimensionale vectorruimte met als basis de simpele wortels $(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})/\sqrt{2}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Uit Gevolg 1.2.7 volgt nu dat $W(A_{n-1}) = S_n$, zie Voorbeeld 1.1.5.

*Opgave 1.2.9.* Laat zien dat $W(B_n) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$, vergelijk Opgave 1.1.7. Evenzo, $W(I_2(m)) = D_m$, vergelijk Opgave 1.1.6.

**Stelling 1.2.10.** *De invariante bilineaire vorm is positief definiet voor een eindige Coxeter groep $W$, ofwel, $V$ is een $|S|$-dimensionale Euclidische ruimte. Dan beeldt de spiegelings-representatie $\theta\colon W \to O(V) \cong O_n(\mathbb{R})$ de Coxeter groep getrouw af in de orthogonale af-beeldingen.*

*Bewijs.* Nummer de knopen van het Coxeter diagram voor $W$ zodanig dat $\{1, \ldots, n_1\}$, $\{n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2\}$, etcetera corresponderen met de samenhangscomponenten van het Coxeter diagram. Zij $V_1, \ldots, V_k$ de deelruimtes van $V$ opgespannen door $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}\}$, $\{\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_1+n_2}\}$, etcetera. Merk nu op dat de orde van $s_i s_j$ gelijk is aan 2 dan en slechts dan als $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, dus $V_i \subset V_j^\perp$ voor alle $j \neq i$. Dus we hebben de orthogonale direkte som $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, en bovendien $\tau_{\alpha_i}(V_j) \subset V_j$ vanwege (1.2.1).

We zullen laten zien dat $V_j$ een simpel moduul voor $W$ is door te laten zien dat elke vervlechtingsoperator een constante maal de identiteit is op elke $V_i$. Zij $X\colon V \to V$ een vervlechtingoperator. Uit $V = \langle \alpha_s \rangle \oplus \langle \alpha_s \rangle^\perp$, vergelijk het bewijs van Lemma 1.2.2, volgt dat $X\alpha_s = \lambda_s \alpha_s$, $\lambda_s \in \mathbb{R}$, voor alle $s \in S$. Stel nu dat $s, t \in S$ in dezelfde samenhangscomponent van het Coxeter diagram zitten en dat $m_{st} \geq 3$. Dan is $\langle \alpha_s, \alpha_t \rangle \neq 0$ en dus $\tau_s \alpha_t = \alpha_t + a_{ts}\alpha_s$ met $a_{ts} \neq 0$. Dan volgt uit $\lambda_t \alpha_t + a_{ts}\lambda_s \alpha_s = X\tau_s\alpha_t = \tau_s X \alpha_t = \lambda_t(\alpha_t + a_{ts}\alpha_s)$ dat $\lambda_t = \lambda_s$. Dus $\lambda_s$ is constant op samenhangscomponenten van het Coxeter diagram.

Omdat op elk simpel moduul voor een eindige groep hoogstens één (tot op een positieve constante factor) invariante bilineaire vorm bestaat, die positief definiet is, volgt de positief definietheid van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en daarmee de stelling. $\square$

*Opmerking.* De spiegelingsrepresentatie kan voor willekeurige Coxeter groepen worden gedefinieerd, en dan is $W$ eindig dan en slechts dan als de invariante bilineaire vorm positief definiet is. Stelling 1.2.10 is feitelijk een karakterisatie van *eindige* Coxeter groepen.

We kunnen vanaf nu over de eindige Coxeter groep $W$ denken als een eindige onder-groep van de orthogonale groep voortgebracht door simpele spiegelingen, i.e. spiegelingen in de simpele wortels. We identificeren vanaf nu $s$ met $\tau_s$.

**Lemma 1.2.11.** $s\Big(\Phi^+\backslash\{\alpha_s\}\Big) = \Phi^+\backslash\{\alpha_s\}$ *en* $s(\alpha_s) = -\alpha_s$.

*Bewijs.* Het laatste volgt direct uit (1.2.1). Kies nu $\alpha \in \Phi^+\backslash\{\alpha_s\}$, of $\alpha = \sum_{t\in S} c_t\alpha_t$ met $c_t \geq 0$ en minstens een $t' \neq s$ met $c_{t'} > 0$, dan is

$$s(\alpha) = \sum_{t\in S} c_t s(\alpha_t) = \sum_{t\in S} c_t(\alpha_t - 2\langle\alpha_t, \alpha_s\rangle\alpha_s)$$

en de coëfficiënt van $\alpha_{t'}$ is $c_{t'} > 0$. Dus $s(\alpha) \in \Phi^+$ vanwege Gevolg 1.2.6. Dus volgt de inclusie $s\Big(\Phi^+\backslash\{\alpha_s\}\Big) \subset \Phi^+\backslash\{\alpha_s\}$, en omdat $s = s^{-1}$ volgt gelijkheid. $\square$

**Propositie 1.2.12.** $\ell(w) = |\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-|$, *of de lengte van* $w$ *is het aantal positieve wortels dat door* $w$ *naar de negatieve wortels wordt afgebeeld.*

*Bewijs.* Zij $n(w) = |\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-|$, dan $n(w) = 0$ dan en slechts dan als $w = 1$ en $n(w) = 1$ dan en slechts dan als $w \in S$ vanwege Lemma 1.2.11. Merk nu op dat $\Phi^+ \cap (ws)^{-1}\Phi^- = s\big(s\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-\big) = s\big(\Phi^+\backslash\{\alpha_s\} \cap w^{-1}\Phi^-\big) \cup s\big(\{-\alpha_s\} \cap w^{-1}\Phi^-\big)$ vanwege Lemma 1.2.11. Stel nu dat $w(\alpha_s) > 0$, dan is $|\{-\alpha_s\} \cap w^{-1}\Phi^-| = 1$ en $|\Phi^+\backslash\{\alpha_s\} \cap w^{-1}\Phi^-| = |\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-|$, ofwel $n(ws) = n(w)+1$ als $w(\alpha_s) > 0$. Op dezelfde manier zien we dat $w(\alpha_s) < 0$ impliceert dat $n(ws) = n(w) - 1$. Gebruik nu Stelling 1.2.5 en inductie om te zien dat $n(w) = \ell(w)$ voor alle $w \in W$. $\square$

*Opgave 1.2.13.* Zij $w = s_1 \ldots s_r$ een gereduceerde expressie. Stel $\beta_i = s_r s_{r-1} \ldots s_{i+1}(\alpha_{s_i})$, en $\beta_r = \alpha_r$. Toon aan dat $\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^- = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$.

**Lemma 1.2.14.** *De eindige Coxeter groep* $W$ *heeft een uniek element* $w_0$ *van maximale lengte;* $\ell(w_0) = |\Phi^+|$, $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$.

*Bewijs.* Omdat $W$ eindig is bestaat er een element $w_0 \in W$ van maximale lengte. Uit Stelling 1.2.5 volgt dat $w_0(\Delta) \subset \Phi^-$ en dus $w_0(\Phi^+) \subset \Phi^-$. Dus $\ell(w_0) = |\Phi^+|$ uit Propositie 1.2.12.

Aangezien $\Phi^- = -\Phi^+$ volgt dat $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$. Als er nog een ander maximaal element, zeg $w'$, is, dan volgt dat $w'w_0^{-1}(\Phi^+) = \Phi^+$, en dus dat $\ell(w'w_0^{-1}) = 0$ vanwege Propositie 1.2.12. Dan is $w'w_0^{-1} = 1$. $\square$

*Opgave 1.2.15.* Beschouw de Coxeter groep $S_{n+1}$ met generatoren $s_1, \ldots, s_n$, zie Voorbeeld 1.1.5. In geval $n = 2m-1$ oneven stellen we $r_1 = s_1 s_n$, $r_2 = s_2 s_{n-1}$, $\ldots$, $r_{m-1} = s_{m-1}s_{m+1}$, $r_m = s_m$. In geval $n = 2m$ even stellen we $r_1 = s_1 s_n$, $r_2 = s_2 s_{n-1}$, $\ldots$, $r_{m-1} = s_{m-1}s_{m+2}$, $r_m = s_m s_{m+1} s_m$. Bewijs dat de ondergroep van $S_{n+1}$ voortgebracht door $r_1, \ldots, r_m$ gelijk is aan $W(B_m)$.

## 1.3. Karakterisering van Coxeter groepen.

**Stelling 1.3.1.** (Uitwisselingsconditie) *Zij* $w = s_1 \ldots s_r \in W$ *een gereduceerde expressie voor* $W$, *zij* $s \in S$ *met* $\ell(ws) < \ell(w)$, *dan* $\exists p \in \{1, \ldots, r\}$ *zodat* $w = s_1 \ldots \hat{s}_p \ldots s_r s$, *waar* $\hat{s}_p$ *betekent dat het element* $s_p$ *wordt weggelaten.*

*Bewijs.* Zij $\alpha_s \in \Phi^+$ de simpele wortel voor $s \in S$. Stelling 1.2.5 geeft $w(\alpha_s) \in \Phi^-$. Definieer nu $w_j = s_j s_{j+1} \ldots s_r s$, $w_{r+1} = s$ en $\beta_j = w_j(\alpha_s)$. Dan is $\beta_1 = -w(\alpha_s) \in \Phi^+$

en $\beta_{r+1} = -\alpha_s \in \Phi^-$. Zij $p \in \{1, \ldots, r\}$ met $\beta_p \in \Phi^+$ en $\beta_{p+1} = s_p(\beta_p) \in \Phi^-$. Vanwege Lemma 1.2.11 volgt $\beta_p = \alpha_{s_p} = -\beta_{p+1}$ en $s_p = \tau_{\beta_{p+1}} = \tau_{s_{p+1}\ldots s_r(\alpha_s)} = s_{p+1}\ldots s_r s s_r \ldots s_{p+1}$ vanwege Opgave 1.2.1. Vul dit nu in voor $s_p$ in de expressie voor $w$. $\square$

Merk op dat Stelling 1.3.1 ook waar is als de expressie voor $w$ niet gereduceerd is. Stelling 1.3.1 laat zien dat als $\ell(ws) < \ell(w)$, dat we dan altijd een gereduceerde expressie voor $w$ hebben die op $s \in S$ eindigt.

*Opgave.* Formuleer en bewijs de linkervariant van de uitwisselingsconditie, i.e. voor $w \in W$, $t \in S$ en $\ell(tw) < \ell(w)$. Laat zien dat dit equivalent is met Stelling 1.3.1.

**Stelling 1.3.2.** *Zij $W$ een groep voortgebracht door een verzameling $S$ van involuties. Veronderstel dat voor $(W, S)$ de uitwisselingsconditie van Stelling 1.3.1 geldt, dan is $(W, S)$ een Coxeter groep.*

Zie [1, Ch. IV, §1.6] voor een bewijs.

### 1.4. Parabolische ondergroepen.

**Definitie 1.4.1.** *Laat $(W, S)$ een Coxeter groep zijn, en zij $I$ een index set voor $S$, i.e. $S = \{s_i \mid i \in I\}$. De ondergroep $W_J = \langle s_j \mid j \in J\rangle \subset W$ voortgebracht door de elementen van $S$ corresponderend met de index set $J \subset I$ heet een* **parabolische ondergroep van** $W$. *$W_J$ heet een* **maximaal** *parabolische ondergroep als $|I \backslash J| = 1$.*

Merk op dat $W_\emptyset = \{1\}$ en $W_I = W$.

**Stelling 1.4.2.**
(i) *Elke parabolische ondergroep $W_J$ is een Coxeter groep met genererende verzameling $S_J = \{s_j \mid j \in J\}$ van involuties.*
(ii) *Als $w = s_1 \ldots s_r$, $w \in W_J \subset W$, een gereduceerde expressie is, dan $s_k \in S_J$, $k = 1, \ldots, r$. In het bijzonder geldt $\ell_{W_J} = \ell|_{W_J}$, en $W_J \cap S = S_J$.*
(iii) *De afbeelding $J \mapsto W_J$ van deelverzamelingen van $I$ naar ondergroepen van $W$ is een isomorphisme van de machtsverzameling van $I$ naar de parabolische ondergroepen van $W$, i.e.*
  (a) $J_1 \subset J_2 \Longleftrightarrow W_{J_1} \subset W_{J_2}$,
  (b) $W_{J_1 \cup J_2} = \langle W_{J_1}, W_{J_2}\rangle$,
  (c) $W_{J_1 \cap J_2} = W_{J_1} \cap W_{J_2}$.

*Bewijs.* Zij $\bar{W}_J$ de abstracte Coxeter groep voortgebracht door $S_J$ met de voorgeschreven ordes voor de produkten van generatoren. Dan hebben we een surjectief homomorphisme $\psi\colon \bar{W}_J \to W_J$. Merk nu op dat de spiegelingsrepresentatie van $\bar{W}_J$ werkt in $V_J = V \cap \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_j \mid j \in J\}$, waarbij $V$ de spiegelingsrepresentatie van $W$ is, omdat de bilineaire vormen overeenkomen. Gevolg 1.2.7 laat zien dat deze afbeelding $1-1$ is, anderzijds is ook $W_J$ op een $1-1$ ingebed in $GL(V_J)$. We hebben dan het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccc} \bar{W}_J & \rightarrow & GL(V_J) \\ \psi\downarrow & \nearrow & \\ W_J & & \end{array}$$

Dus is $\psi$ een isomorphisme, en $W_J$ een Coxeter groep.

Voor het bewijs van (ii) gebruiken we weer inductie op $\ell(w)$ met het geval $\ell(w) = 0$ triviaal. Kies $s = s_r$, dan is $w(\alpha_s) < 0$ vanwege Stelling 1.2.5. Anderzijds, $w \in W_J$ en dus $w = t_1 \ldots t_p$, $t_k \in S_J$, en $p \geq r = \ell(w)$. Dus geldt $w(\alpha_s) = \alpha_s + \sum_{i=1}^{p} c_i \alpha_{t_i} < 0$ voor zekere $c_i \in \mathbb{R}$ door (1.2.1) te herhalen. Dus moet er een $k \in \{1, \ldots, p\}$ zijn met $t_k = s$. Dan is $ws \in W_J$, $\ell(ws) < \ell(w)$, en kunnen we de inductiehypothese gebruiken.

Voor (iii)(a) merken we op dat, vanwege (i), geldt $J_1 = S \cap W_{J_1} \subset S \cap W_{J_2} = J_2$. Uitspraken (b) en (c) volgen evenzo direkt uit (i) en (ii). $\square$

*Voorbeeld.* $S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_k}$, $n_1 + \ldots + n_k = n$, is een parabolische ondergroep van de Coxeter groep $S_n$, maar ook van $W(B_n) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ en elke andere Coxeter groep, wiens Coxeter diagram het $A_{n-1}$-diagram als subdiagram heeft.

**Gevolg 1.4.3.** *Elke Coxeter groep $W$ is het directe product van irreducibele Coxeter groepen; $W = W_1 \times \ldots \times W_k$. Hierbij correspondeert elke $W_i$ met de Coxeter groep horend bij een samenhangscomponent van het Coxeter diagram voor $W$.*

Dus elke eindige Coxeter groep $W$ is het direkte product van irreducibele eindige Coxeter groepen als in Opmerking 1.1.2. We kunnen dus zeggen dat $W$ van type, bijvoorbeeld, $A_6E_7F_4H_3$, is. We kunnen dus het type van een parabolische ondergroep $W_J$ aflezen door alle knopen die niet in $J$ zitten weg te halen als ook de zijden die aan deze knopen zijn verbonden.

*Bewijs.* Elke $W_i$ is een parabolische ondergroep van $W$, en dus een Coxeter groep vanwege Stelling 1.4.2(i). Elk element van $W_i$ commuteert met elk element van $W_j$, $i \neq j$, en de uitspraak volgt nu direkt uit Stelling 1.4.2(iii). $\square$

**Propositie 1.4.4.** *Zij $D_J = \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w) \, \forall s \in S_J\}$.*
(i) *$D_J$ is een verzameling representanten voor $W/W_J$ zodanig dat de lengtes optellen. Ofwel, als $w = uv$ met $u \in D_J$ en $v \in W_J$ dan $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$.*
(ii) *$wW_J \cap D_J$ is het unieke element van minimale lengte in de nevenklasse $wW_J$. Een element $u \in D_J$ heet een* **minimale** *representant.*
(iii) *$D_J = \{w \in W \mid w(\Delta_J) \subset \Phi^+\}$, waar $\Delta_J = \{\alpha_s \mid s \in S_J\}$ de verzameling van simpele wortels voor de parabolische ondergroep $W_J$ is.*

*Bewijs.* We gebruiken inductie op $\ell(w)$. Als $\ell(w) = 0$, dan $w = 1 = 1 \cdot 1$ en $1 \in D_J$. Stel nu $\ell(w) > 0$. Als $w \in D_J$, dan $w = w \cdot 1$ is de gewenste ontbinding. Dus we kunnen nu aannemen dat $\exists s \in S_J$ met $\ell(ws) < \ell(w)$, dan vanwege de inductiehypothese $ws = u'v'$ met $u' \in D_J$ en $v' \in W_J$ en $\ell(ws) = \ell(u') + \ell(v')$. Dus $w = uv$ met $u = u' \in D_J$, $v = v's \in W_J$ en bovendien $\ell(v) = \ell(v') + 1$. Immers, stel dat de lengtes niet optellen, dan $\ell(v) < \ell(v')$ en $\ell(w) = \ell(ws) + 1 = \ell(u') + \ell(v') + 1 > \ell(u) + \ell(v) \geq \ell(w)$, tegenspraak. Hieruit volgt (i).

Uit (i) volgt dat $wW_J = uW_J$ en dat $\ell(w) \geq \ell(u)$. Als er nog een ander element, zeg $u'$, in $wW_J$ bestaat met dezelfde lengte, dan volgt uit $u' = uv$, $\ell(u') = \ell(u) + \ell(v)$ dat $\ell(v) = 0$ en dus $v = 1$ en $u' = u$.

Deel (iii) volgt uit Stelling 1.2.5. $\square$

Het is duidelijk dat $D_J^{-1}$ een verzameling van minimale representanten is voor $W_J \backslash W$. We stellen $D_{J,K} = D_J^{-1} \cap D_K$ voor deelverzamelingen $J, K \subset I$.

**Propositie 1.4.5.**
(i) *Elke dubbele nevenklasse* $W_JwW_K$ *bevat precies één element van* $D_{J,K}$.
(ii) *Als* $w \in D_{J,K}$, *dan is* $w$ *het unieke element van minimale lengte in* $W_JwW_K$.

**Lemma 1.4.6.**
(i) *Laat* $x \in W_J$, $w \in D_{J,K}$, $k \in K$ *en stel* $xw(\alpha_k) < 0$, *dan* $w(\alpha_k) = \alpha_j$ *voor zekere* $j \in J$.
(ii) *Laat* $v, w \in D_{J,K}$ *en stel* $W_J \cap vW_Kw^{-1} \neq \emptyset$, *dan* $v = w$.

*Bewijs.* We gebruiken Propositie 1.4.4 steeds voor $D_K$ en $D_J$. Voor (i) merken we op dat $w(\alpha_k) > 0$ omdat $w \in D_K$. Dus $x$ transformeert de positieve wortel $w(\alpha_k)$ in een negatieve wortel, en omdat $x \in W_J$ geldt $w(\alpha_k) \in \Phi_J^+$, de positieve wortels voor $W_J$. Ofwel, $\alpha_k = \sum_{j\in J} c_j w^{-1}(\alpha_j)$, $c_j \geq 0$. Nu is $w^{-1} \in D_J$, en dus $w^{-1}(\alpha_j) > 0$. Maar dan is een simpele wortel een positieve lineaire combinatie van positieve wortels, en dat kan slechts als de som uit één simpele wortel bestaat. Dus $\alpha_k = w^{-1}(\alpha_j)$ voor zekere $j \in J$.

Voor (ii) kiezen we $x \in W_J \cap vW_Kw^{-1}$, en we bewijzen dat $v = w$ met inductie op $\ell(x)$. Als $\ell(x) = 0$, dan $x = 1$ en $w \in vW_K$. Omdat $v, w \in D_K$ volgt $v = w$. Voor de inductiestap veronderstellen we $\ell(x) > 0$ en laat $y = v^{-1}xw \in W_K$. Dan merken we op dat $y \neq 1$, want als $y = 1$ dan $v = xw$ met $x \in W_J$ en $v, w \in D_J^{-1}$ en dan vanwege Propositie 1.4.4 $x = 1$ en $v = w$. Dus bestaat er $k \in K$ met $y = y's_k$, $\ell(y') < \ell(y)$. Dan geldt $y(\alpha_k) \in \Phi_K^-$, en omdat $v \in D_K$ is $xw(\alpha_k) = vy(\alpha_k) \in \Phi^-$. Vanwege (i) is $w(\alpha_k) = \alpha_j$ voor $j \in J$ en dus $s_j = ws_kw^{-1}$.

Nu is $x(\alpha_j) = xw(\alpha_k) < 0$, en dus is $x = x's_j$ vanwege de uitwisselingsconditie, Stelling 1.3.1, met $\ell(x') < \ell(x)$. En bovendien $W_J \ni x' = xs_j = xws_kw^{-1} = vys_kw^{-1} = vy'w^{-1} \in vW_Kw^{-1}$, zodat we de inductiehypothese kunnen toepassen om te concluderen dat $v = w$. $\square$

*Bewijs van Propositie 1.4.5.* Zij $w \in W_JwW_K$ het element van minimale lengte, dan volgt dat $w$ van minimale lengte is in de nevenklassen $W_Jw$ en $wW_K$. Dan $w \in D_J^{-1} \cap D_K = D_{J,K}$ vanwege Propositie 1.4.4, dus (ii) volgt uit (i).

Anderzijds, $W_JwW_K$ heeft een element van minimale lengte, dat als in de vorige alinea een element van $D_{J,K}$ is. Om uniciteit aan te tonen nemen we $v, w \in D_{J,K}$ met $v \in W_JwW_K$, ofwel $v = xwy$ met $x \in W_J$ en $y \in W_K$. Maar dan ook $x = vy^{-1}w^{-1} \in vW_Kw^{-1}$. Lemma 1.4.6(ii) laat zien dat $v = w$. $\square$

**Stelling 1.4.7.** (Kilmoyer) *Laat* $w \in D_{J,K}$ *met* $J, K \subset I$. *Dan is* $W_J \cap {}^wW_K = W_L$ *met* $L \subset I$ *gedefinieerd door* $\Delta_L = \Delta_J \cap w(\Delta_K)$.

*Bewijs.* De inclusie $W_L \subset W_J \cap {}^wW_K$, omdat elke generator van $W_L$ in $W_J \cap {}^wW_K$ bevat is.

Voor het omgekeerde nemen we $x \in W_J \cap {}^wW_K$. We bewijzen dat $x \in W_L$ met inductie op $\ell(x)$. Als $\ell(x) = 0$, dan $x = 1 \in W_L$. Veronderstel dat $\ell(x) > 0$ en laat $y = w^{-1}xw \in W_K$ zodat $y \neq 1$. Dus $y = y's_k$ met $\ell(y) > \ell(y')$ en $y(\alpha_k) \in \Phi_K^-$. Omdat $w \in D_K$ volgt $xw(\alpha_k) = wy(\alpha_k) \in \Phi^-$, zodat $w(\alpha_k) = \alpha_j$ voor $j \in J$ vanwege Lemma 1.4.6(i). En dus $\alpha_j \in \Delta_J \cap w(\Delta_K) = \Delta_L$, ofwel $j \in L$.

Omdat $x(\alpha_j) = xw(\alpha_k) < 0$ volgt $x = x's_j$, $\ell(x) > \ell(x')$ vanwege Stelling 1.3.1. En dan $W_J \ni x' = xs_j = xws_kw^{-1} = wys_kw^{-1} = wy'w^{-1} \in {}^wW_K$. En dus $x' \in W_J \cap {}^wW_K$, en $x' \in W_L$ vanwege de inductiehypothese. Omdat $x = x's_j$ met $j \in L$ volgt $x \in W_L$. $\square$

## 2. Groepen met een $BN$-paar

Dit hoofdstuk is een toelichting op Hoofdstuk 2 van Carter [2] in vereenvoudigde vorm. Andere bronnen zijn Bourbaki [1] en Curtis en Reiner [3].

### 2.1. Definitie en de Bruhat ontbinding.

**Definitie 2.1.1.** *Zij $G$ een groep met ondergroepen $B$ en $N$, dan heet $G$ een* **groep met een $BN$-paar** *als*
(i) *$G$ wordt voorgebracht door $B$ en $N$; $G = \langle B, N\rangle$, de groep $B$ heet de* **Borel ondergroep** *van $G$,*
(ii) *$B \cap N$ is een normale ondergroep van $N$,*
(iii) *De groep $W = N/B \cap N$ wordt voortgebracht door een verzameling $S$ van involuties, de groep $W$ heet de* **Weyl groep** *voor $G$,*
(iv) *Zij $\pi\colon N \to W$ de kanonieke afbeelding en zij $n \in \pi^{-1}(s)$ voor $s \in S$, dan $nBn \neq B$,*
(v) *Zij $n' \in N$, $n \in \pi^{-1}(s)$, dan $nBn' \subset Bnn'B \cup Bn'B$.*

*Opmerking 2.1.2.* (i) We zullen minder precies zijn in de notatie en (iv) en (v) schrijven als $sBs \neq B$, en $sBw \subset BswB \cup BwB$ voor $s \in S$ en $w \in W$.
(ii) In plaats van een groep met een $BN$-paar wordt het tupel $(G, B, N, S)$ ook wel een **Tits systeem** genoemd.
(iii) Omdat $W$ gegenereerd wordt door $S$ kunnen we als in Definitie 1.1.3 een lengtefunctie invoeren, zonder al te weten dat $W$ een Coxeter groep is. De resultaten van Opgave 1.1.4 zijn nog steeds geldig.
(iv) Merk op dat met $B$, $N$ ook geconjugeerde groepen $gBg^{-1}$, $gNg^{-1}$ de axioma's van een $BN$-paar voor $G$ vervullen. De Weyl groepen zijn isomorph onder deze overgang.

**Stelling 2.1.3.** (Bruhat ontbinding) *$G = BWB$ en de afbeelding $W \to B\backslash G/B$, $w \mapsto BwB$, is een bijectie van $W$ op de dubbele nevenklassen van $B$ in $G$.*

*Bewijs.* Om surjectiviteit van de afbeelding te bewijzen merken we op dat inverses nemen aanleiding geeft tot $(BwB)^{-1} = Bw^{-1}B$, dus $BWB$ is invariant onder het nemen van inverses. Vanwege Definitie 2.1.1(v) is $(BsB)(BwB) \subset BwB \cup BswB$, en vanwege Definitie 2.1.1(iii), volgt dat $BWB$ invariant is onder het nemen van produkten. Dus $BWB$ is een ondergroep van $G$, en omdat $B$ en $N$ in $BWB$ bevat zitten, volgt $G = BWB$ uit Definitie 2.1.1(i).

Om de injectiviteit in te zien bewijzen we dat

$$w, w' \in W,\ w \neq w',\ \ell(w) \geq \ell(w') = l \Longrightarrow BwB \neq Bw'B. \tag{2.1.1}$$

met inductie op $l$. Als $l = 0$, dan is $w' = 1 \in W$, en dan geeft de aanname $BwB = B$ aanleiding tot $w \in B$, ofwel $w = 1 = w'$, een tegenspraak.

Voor de inductiestap kiezen we $s \in S$ zodanig dat $\ell(sw') = l - 1 < \ell(w')$, dan is $w \neq sw'$. Bovendien, is $sw \neq sw'$. Uit de inductiehypothese volgt nu dat $BswB \neq Bsw'B$ en $BwB \neq Bsw'B$. Door nu Definitie 2.1.1(v) te gebruiken volgt $Bsw'B \cap BsB \cdot BwB = \emptyset$, maar ook $Bsw'B \subset BsB \cdot Bw'B$. Als nu $BwB = Bw'B$ dan zien we dat $Bsw'B \cap BsB \cdot BwB \neq \emptyset$. Omdat dubbele nevenklassen of disjunct of gelijk zijn geeft dit de injectiviteit. $\square$

We bekijken nu hoe de vermenigvuldiging van nevenklassen zich gedraagt.

**Propositie 2.1.4.** *Zij $w \in W$ en $s \in S$ met $\ell(sw) \geq \ell(w)$, dan $sBw \subset BswB$.*

*Bewijs.* Met inductie op $\ell(w)$. Het geval $\ell(w) = 0$, of $w = 1$, is triviaal. Neem $\ell(w) > 0$ en kies $t \in S$ met $w = w't$ en $\ell(w') \leq \ell(w) - 1$. Stel nu dat het resultaat niet waar is. We zullen dan een tegenspraak met de inductiehypothese afleiden. Uit de Bruhat ontbinding, Stelling 2.1.3, en Definitie 2.1.1(v) volgt dat dan $sBw \cap BwB \neq \emptyset$, en dus $sBw' \cap BwBt \neq \emptyset$. Merk op dat $sw = sw't$ en $\ell(sw) \geq \ell(w)$ impliceert dat ook $\ell(sw') \geq \ell(w')$. Immers, stel niet, dan geeft $\ell(sw) \leq \ell(sw') + 1 < \ell(w') + 1 \leq \ell(w)$ een tegenspraak met de aanname $\ell(sw) \geq \ell(w)$.

De inductiehypothese geeft nu $sBw' \subset Bsw'B$, en dus $Bsw'B \cap BwBt \neq \emptyset$. Vanwege en Definitie 2.1.1(v) volgt nu $Bsw'B = BwtB$ of $Bsw'B = BwB$, en dus $sw' = wt$ of $sw' = w$ vanwege de Bruhat ontbinding van Stelling 2.1.3. In het eerste geval is $s = 1$, hetgeen niet mogelijk is vanwege Definitie 2.1.1(iv). In het tweede geval hebben we $w' = sw$, en dus $\ell(w') = \ell(sw) \geq \ell(w)$ in tegenspraak met $\ell(w') \leq \ell(w) - 1$. Dit bewijst de inductiestap. □

**Propositie 2.1.5.** *Zij $w \in W$ en $s \in S$ met $\ell(sw) \leq \ell(w)$, dan $sBw \cap BwB \neq \emptyset$.*

*Bewijs.* Definitie 2.1.1(iv) en (v) laten zien dat $sBs \subset B \cup BsB$ en $sBs \cap BsB \neq \emptyset$. Dus $sB \cap BsBs \neq \emptyset$ en bijgevolg $sBw \cap BsBsw \neq \emptyset$. Nu hebben we $\ell(s(sw)) = \ell(w) \geq \ell(sw)$, en dus $BsBsw \subset BsswB = BwB$ vanwege Propositie 2.1.4. Hieruit volgt het gewenste resultaat. □

**Gevolg 2.1.6.** *Zij $w \in W$ en $s \in S$, dan geldt*
(i) $\ell(sw) \neq \ell(w)$,
(ii) $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$,
(iii) $\ell(sw) < \ell(w) \;\Rightarrow\; sB \subset BwBw^{-1}B$.

*Bewijs.* Als $\ell(sw) = \ell(w)$, dan zijn zowel Propositie 2.1.4 als Propositie 2.1.5 geldig, en we verkrijgen een tegenspraak uit de Bruhat ontbinding, Stelling 2.1.3. Hieruit volgt (i), en (i) impliceert (ii). Tot slot, uit (i) en Propositie 2.1.5 volgt dat $sB \cap BwBw^{-1} \neq \emptyset$. Dus de rechternevenklasse $sB$ is bevat in de collectie rechternevenklassen $BwBw^{-1}B$. □

**Stelling 2.1.7.** *De Weyl groep $W$ van een groep $G$ met een $BN$-paar is een Coxeter groep. Bovendien geldt $BswB = BsB \cdot BwB \Longleftrightarrow \ell(sw) = \ell(w) + 1$.*

*Bewijs.* Propositie 2.1.4 en Propositie 2.1.5 geven de laatste uitspraak in combinatie met Gevolg 2.1.6(ii).

Om aan te tonen dat $(W, S)$ een Coxeter groep is, is het voldoende om de uitwisselings conditie te bewijzen, zie Stelling 1.3.2. Zij $w = s_1 \ldots s_r \in W$ een gereduceerde expressie voor $W$, en laat $s \in S$ met $\ell(sw) < \ell(w)$, dan moeten we bewijzen dat $\exists p \in \{1, \ldots, r\}$ zodat $sw = s_1 \ldots \hat{s}_p \ldots s_r$, waar $\hat{s}_p$ betekent dat dit element wordt weggelaten. Merk op dat herhaalde toepassing van de Definitie 2.1.1(v) geeft

$$BwBw^{-1}B \subset \cup Bs_{j_1} \ldots s_{j_k} w^{-1}B,$$

waarbij de vereniging loopt over alle deelverzamelingen $\{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, r\}$ met $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Gebruik nu Gevolg 2.1.6(iii), zodat $BsB \subset BwBw^{-1}B$, en dus geeft de Bruhat ontbinding, Stelling 2.1.3, dat $s = s_{j_1} \dots s_{j_k} w^{-1}$ voor een zekere geordende deelverzameling $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, r\}$. Aangezien $\ell(s) = 1$ volgt uit Opmerking 2.1.2(iii), vergelijk Opgave 1.1.4, dat $k = r \pm 1$, en dus $k = r - 1$ hetgeen precies de gewenste uitwisselingsconditie is. $\square$

Stelling 2.1.7 zegt dat $BswB = BsB \cdot BwB$ als $\ell(sw) = \ell(w) + 1$, en dat $BswB \cup BwB = BswB$ als $\ell(sw) = \ell(w) - 1$. Merk op dat deze eigenschappen (iv) en (v) van Definitie 2.1.1 impliceren.

### 2.2. Het voorbeeld $GL_n(k)$.

Zij $G = GL_n(k)$ voor een zeker lichaam $k$ de groep van inverteerbare $n \times n$-matrices $a = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $a_{ij} \in k$, $B = \{a = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0, i > j\}$ de ondergroep van bovendriehoeksmatrices en $N$ de ondergroep van monomiale matrices, i.e. in elke rij en elke kolom is er precies één matrixelement ongelijk aan nul. Dan is $B \cap N$ de ondergroep van diagonaalmatrices.

**Stelling 2.2.1.** *$GL_n(k)$ is een groep met een $BN$-paar met $B$ de ondergroep van bovendriehoeksmatrices en $N$ de groep van monomiale matrices en Weyl groep $W \cong S_n$.*

In het bijzonder verkijgen we een eindige groep met een $BN$-paar voor $k = \mathbb{F}_q$, het eindige lichaam met $q = p^f$, $p$ priem, $f \in \mathbb{N}$, elementen. Merk op dat $GL_n(\mathbb{F}_q)$ een eindige groep van Lie type is. $GL_n(\mathbb{F}_q) = G^F$ met $G = GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ de lineaire algebraïsche groep en $F\colon g \mapsto (g_{ij}^q)_{ij}$ het standaard Frobenius automorphisme.

*Bewijs van Definitie 2.1.1(i).* Laat $e_1, \dots, e_n$ de standaard basis zijn voor de vectorruimte $k^n$, waarop $GL_n(k)$ op de natuurlijke wijze werkt. $GL_n(k)$ wordt voortgebracht door de ondergroep van diagonaalmatrices $H$ en de één-parameter ondergroepen $e_{ij} = \{1 + c \cdot E_{ij} \mid c \in k\}$, en $E_{ij}$ is de matrix met een 1 op de $(i,j)$-plaats en verder nullen. Hier nemen we $i \neq j$. Merk op dat de ondergroep $e_{ij}$ isomorph is met $k_a$, i.e. $k$ gezien als additieve groep. Nu bevat $B$ de diagonaalondergroep $H$ en de ondergroepen $e_{ij}$ met $i < j$. Merk op dat $N$ in het bijzonder de permutatiematrices bevat, i.e. alle niet-nul matrix elementen zijn 1, en dat door conjugatie met een permutatiematrix elke ondergroep $e_{ij}$ in $B$ kan worden afgebeeld. Dus $GL_n(k)$ wordt voortgebracht door $B$ en $N$. $\square$

*Bewijs van Definitie 2.1.1(ii).* $H = B \cap N$ is de ondergroep van diagonaalmatrices, die overduidelijk normaal is in $N$; $nH = Hn$ voor alle $n \in N$. $\square$

*Bewijs van Definitie 2.1.1(iii).* Merk op dat elk element $n \in N$ gezien kan worden als een permutatie van de lijnen $k \cdot e_i$ in $k^n$. Er bestaat dus een homomorphisme van $N \to S_n$, waarvan de kern $H$ is. Dus $W = N/(B \cap N) \cong S_n$. We hebben al gezien, zie Voorbeeld 1.2.8, dat $S_n$ wordt voortgebracht door involuties. Voor de generatoren $s_i = (i, i+1) \in S_n$ kunnen we de monomiale matrix nemen die $e_i$ en $e_{i+1}$ verwisselt. $\square$

*Bewijs van Definitie 2.1.1(iv).* Dit is gereduceerd tot een berekening voor $n = 2$, en dan $sBs \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ hetgeen in het algemeen, $b \neq 0$, niet in $B$ ligt. $\square$

*Bewijs van Definitie 2.1.1(v).* Dit is de meest moeizame verificatie. Laten we eerst opmerken dat het voldoende is te bewijzen dat

$$\bar{s}B \subset BB' \cup B\bar{s}B', \qquad B' = \bar{w}B\bar{w}^{-1}, \tag{2.2.1}$$

waarbij $\bar{s}$, etcetera, een representant van de betreffende nevenklasse aangeeft. Zij $G_i \subset GL_n(k)$ de ondergroep die $k \cdot e_i \oplus k \cdot e_{i+1}$ invariant laat en de andere basisvectoren onveranderd laat; dus $G_i \cong GL_2(k)$. Dan is $G_iB = BG_i$, want beide zijden bestaan uit de elementen $g \in GL_n(k)$ waarvoor geldt dat $g \cdot e_j \in \operatorname{span}_k(e_1, \dots, e_j)$, $j \neq i$, en $g \cdot e_i \in \operatorname{span}_k(e_1, \dots, e_{i+1})$. Dus ook $\bar{s}B \subset G_iB = BG_i$. Dus voor (2.2.1) is het voldoende te bewijzen dat $G_i \subset BB' \cup B\bar{s}B'$, en hiervoor is het voldoende dat

$$G_i \subset (B \cap G_i)(B' \cap G_i) \cup (B \cap G_i)\bar{s}(B' \cap G_i), \tag{2.2.2}$$

hetgeen reduceert tot een $2 \times 2$-berekening. We identificeren nu $G_i$ met $GL_2(k)$. Zij $B_2$ de ondergroep van bovendriehoeksmatrices en $\bar{B}_2$ de ondergroep van onderdriehoeksmatrices. Dan identificeren we $B \cap G_i$ met $B_2$.

Nu beschouwen we $B' \cap G_i = \bar{w}B\bar{w}^{-1} \cap G_i$. Merk op dat de ondergroep $\bar{w}^{-1}G_i\bar{w}$ de ruimte $k \cdot \bar{w}^{-1}e_i \oplus k \cdot \bar{w}^{-1}e_{i+1}$ invariant laat en ook de lijnen $k \cdot \bar{w}^{-1}e_m$, $m \neq i, i+1$, invariant laat. Omdat $\bar{w}^{-1}$ een monomiale matrix is volgt $k \cdot \bar{w}^{-1}e_i = k \cdot e_m$, $k \cdot \bar{w}^{-1}e_{i+1} = k \cdot e_l$ voor zekere $m$, $l$. Maar dan laat $B \cap \bar{w}^{-1}G_i\bar{w}$ of de lijn $k \cdot e_m$ of de lijn $k \cdot e_l$ invariant. Ofwel, $\bar{w}B\bar{w}^{-1} \cap G_i$ laat of $k \cdot e_i$ of $k \cdot e_{i+1}$ invariant. In het eerste geval is $\bar{w}B\bar{w}^{-1} \cap G_i = B_2$ en in het tweede geval is $\bar{w}B\bar{w}^{-1} \cap G_i = \bar{B}_2$. We zien dat het voldoende is de volgende twee gelijkheden te verifiëren;

$$GL_2(k) = B_2 \cup B_2\bar{s}B_2, \quad \text{en} \quad GL_2(k) = B_2\bar{B}_2 \cup B_2\bar{s}\bar{B}_2, \qquad \bar{s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

De eerste gelijkheid is niets anders dan de Bruhat ontbinding, die nog wel moet worden bewezen. Om de eerste gelijkheid van (2.2.3) te bewijzen nemen we $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin B_2$, dus $c \neq 0$. Een elementaire berekening laat zien dat $\bar{s}\begin{pmatrix} 1 & -a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \in B_2$, ofwel $g \in B_2\bar{s}B_2$.

De tweede gelijkheid van (2.2.3) kan uit de eerste worden verkregen. Merk op dat $\bar{s}^2 = 1$, en dat $\bar{s}B_2\bar{s} = \bar{B}_2$, dan geeft de eerste gelijkheid van (2.2.3)

$$GL_2(k) = GL_2(k)\bar{s} = B_2\bar{s} \cup B_2\bar{s}B_2\bar{s} \subset B_2\bar{s}\bar{B}_2 \cup B_2\bar{B}_2.$$

Aangezien de omgekeerde inclusie triviaal is, hebben we nu ook het laatste axioma van een groep met een $BN$-paar geverifieerd. $\square$

*Opmerking.* Op dezelfde wijze verkrijgen we dat $SL_n(k) = \{g \in GL_n(k) \mid \det g = 1\}$ een groep met een $BN$-paar is. Doorsnijd de groepen $B$ en $N$ van $GL_n(k)$ met $SL_n(k)$.

Bovendien is het centrum $Z(SL_n(k)) = \{a \cdot 1 \mid a^n = 1\}$ bevat in $H = B \cap N$, zodat de projectieve speciale lineaire groep $PSL_n(k) = SL_n(k)/Z(SL_n(k))$ ook een groep met een $BN$-paar is. Neem voor $B$ en $N$ het beeld onder de kanonieke afbeelding $SL_n(k) \to PSL_n(k)$.

### 2.3. Parabolische ondergroepen.

**Definitie 2.3.1.** *Een ondergroep $P$ van een groep $G$ met een $BN$-paar heet een* **parabolische ondergroep** *als $P$ een geconjugeerde $gBg^{-1}$ van de Borel ondergroep bevat. $P$ heet een* **standaard parabolische ondergroep** *als $B$ bevat is in $P$.*

**Lemma 2.3.2.** *Laat $w \in W$, en zij $H_w \subset G$ de groep voortgebracht door $BwB \cdot Bw^{-1}B$. Als $w = s_1 \dots s_r$ een gereduceerde expressie is, dan $Bs_iB \subset H_w$ voor $i = 1, \dots, r$. Bovendien, $H_w = \langle BwB \rangle$.*

*Bewijs.* Beschouw eerst de volgende situatie. Laat $w' = s_1 \dots s_{i-1}$, $w'' = s_{i+1} \dots s_r$, zodat $w = w's_iw''$ en $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'') + 1$. Stel $t = w's_i(w')^{-1}$. Vanwege Stelling 2.1.7 geldt

$$BwB \cdot Bw^{-1}B = Bw'B \cdot Bs_iB \cdot Bw''B \cdot B(w'')^{-1}B \cdot Bs_iB \cdot B(w')^{-1}B$$

en aangezien $B \subset Bw''B \cdot B(w'')^{-1}B$ volgt

$$BwB \cdot Bw^{-1}B \supset Bw'B \cdot Bs_iB \cdot Bs_iB \cdot B(w')^{-1}B \supset Bw'B \cdot Bs_iB \cdot B(w')^{-1}B \supset BtB, \tag{2.3.1}$$

waarbij de tweede inclusie volgt uit Definitie 2.1.1(v) en de derde door iteratie van Definitie 2.1.1(v).

Als we het voorgaande toepassen voor $i = 1$ volgt $t = s_1$, en dus is het bewezen voor $i = 1$. Met inductie op $i$ nemen we aan dat $Bs_jB \subset H_w$ voor $j = 1, \dots, i-1$, en dus ook, vanwege Stelling 2.1.7, $Bw'B \subset H_w$, $B(w')^{-1}B \subset H_w$. Uit de tweede inclusie van (2.3.1) volgt nu dat $Bs_iB \subset H_w$.

Uit het voorgaande en Stelling 2.1.7 volgt dat $BwB = Bs_1B \cdot \dots \cdot Bs_rB \subset H_w$, en hieruit volgt de laatste uitspraak. $\square$

**Stelling 2.3.3.**

(i) *Elke parabolische ondergroep van $G$ is geconjugeerd met een standaard parabolische ondergroep.*

(ii) *Zij $W_J \subset W$ een parabolische ondergroep van de Weyl groep $W$ van $G$, dan is $P_J = BW_JB$ een standaard parabolische ondergroep van $G$.*

(iii) *De afbeelding $J \mapsto P_J$ is een bijectie van de machtsverzameling van de index verzameling $I$ voor $S$ naar de verzameling standaard parabolische ondergroepen van $G$, die voldoet aan*
   (a) $J_1 \subset J_2 \Longleftrightarrow P_{J_1} \subset P_{J_2}$,
   (b) $P_{J_1} \cap P_{J_2} = P_{J_1 \cap J_2}$,

(iv) $N_G(P) = P$.

*Bewijs.* De eerste uitspraak is triviaal. De tweede volgt uit Stelling 2.1.3, de Bruhat ontbinding, en uit Stelling 1.4.2.

Voor (iii) beschouwen we een standaard parabolische ondergroep $P \supset B$. Omdat $P$ een ondergroep van $G$ is die $B$ bevat, is $P$ een som van dubbele nevenklassen. Stel $U = \{w \in W \mid BwB \subset P\}$, dan is $P = BUB$. Definieer nu $S_J = U \cap S$, dan is $P_J = BW_JB \subset P$. Anderzijds, zij $u = s_1 \dots s_r$ een gereduceerde expressie, dan is $BuB = Bs_1B \cdot \dots \cdot Bs_rB$ vanwege Stelling 2.1.7. Aangezien elk van de $r$ factoren in $P_J$ bevat is vanwege Lemma 2.3.2, volgt $BuB \subset P_J$ voor alle $u \in U$. Dus $P \subset P_J$, ofwel $P = P_J$. Dus de afbeelding is surjectief. De injectiviteit volgt uit (a), waarvoor de niet-triviale implicatie een direkt gevolg is van Stelling 1.4.2. Ook volgt (b) direkt uit Stelling 1.4.2.

Vanwege (i) en (iii) kunnen we in (iv) aannemen dat $P = P_J$ een standaard parabolische ondergroep is. Nu is de normalisator ook een standaard parabolische ondergroep, $N_G(P_J) \supset P_J \supset B$. Dus $N_G(P_J) = P_{J'}$ met $J \subseteq J'$. Laat nu $s \in S_{J'} \subset N_G(P_J)$, dan, omdat $B \subset P_J$, volgt $sBs^{-1} \subset P_J$ en dus volgt dat de ondergroep $P' = \langle B, sBs^{-1}\rangle \subset P_J$. Maar $P' = P_{J''}$ is weer een standaard parabolische ondergroep en (iii)(a) laat zien dat $s \in S_{J''} \subset S_J$, ofwel $J' \subset J$ en dus $J = J'$ en elke parabolische ondergroep is zijn eigen normalisator. □

*Opmerking.* De parabolische ondergroep $P$ heet **maximaal** als $P$ geconjugeerd is met de standaard parabolische ondergroep $P = BW_JB$, waarbij $W_J$ een maximale parabolische ondergroep van $W$ is, i.e. $|I\backslash J| = 1$.

*Voorbeeld 2.3.4.* De standaard parabolische ondergroepen van $Gl_n(k)$ bestaan uit de matrix ondergroepen, die een vaste trappenstructuur hebben. Voor vaste $P_J$ is $g \in P_J$ bestaande uit blokken van matrices met op de diagonaal blokken van $n_1 \times n_1$ matrices tot en met $n_r \times n_r$ matrices, met $n_1 + \ldots + n_r = n$, waarbij $g$ een bovenblokdriehoeksstructuur heeft. Deze standaard parabolische ondergroep $P_J$ correspondeert met de parabolische ondergroep $W_J = S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r}$ van $W = S_n$. Merk op dat we de diagonaalblokken in $P_J$ kunnen identificeren met de ondergroep $L_J = GL_{n_1}(k) \times \ldots \times GL_{n_r}(k)$ van $P_J$; deze ondergroep heet de **Levi component van** $P_J$, en is weer een groep met een $BN$-structuur.

*Opgave.* Zij $w \in W$. Bewijs dat $w \in S$ dan en slechts dan als $w \neq 1$ en $B \cup BsB$ is een ondergroep van $G$.

Laat $D_{J,K}$ de verzameling van representanten van minimale lengte zijn van de dubbele nevenklassen $W_J\backslash W/W_K$ als in Propositie 1.4.5.

**Propositie 2.3.5.**
(i) $P_JwP_K = BW_JwW_KB$,
(ii) $D_{J,K}$ *is een verzameling van representanten van de dubbele nevenklassen* $P_J\backslash G/P_K$.

*Bewijs.* $BW_JwW_KB \subset P_JwP_K$ per constructie. Voor de omgekeerde inclusie merken we op dat $W_JBwBW_K \subset BW_JwBW_K \subset BW_JwW_K$ vanwege herhaalde toepassing van Definitie 2.1.1(v).

Nu volgt (ii) uit (i), de Bruhat ontbinding, Stelling 2.1.3, en Propositie 1.4.5. □

**Propositie 2.3.6.** *Elke doorsnijding van parabolische groepen, zeg* $P_J^g \cap P_K^h$, *is geconjugeerd met* $P_J \cap {}^wP_K$ *met* $w \in D_{J,K}$.

*Bewijs.* $P_J^g \cap P_K^h = (P_J \cap {}^xP_K)^g$ met $x = gh^{-1}$. Schrijf nu $x = p_Jwp_K$ met $p_J \in P_J$, $p_K \in P_K$, $w \in D_{J,K}$ vanwege Propositie 2.3.5(ii), dan is $P_J \cap {}^xP_K = {}^{p_J}(P_J \cap {}^wP_K)$. □

## 3. Generieke Hecke algebra

Dit hoofdstuk is een toelichting op Carter [2, Ch. 10] voor het speciale geval van de minimale parabolische ondergroep $B = P_\emptyset$. Hierover kan ook informatie worden gevonden in Curtis en Reiner [3], Humphreys [5] en Bourbaki [1].

### 3.1. Existentie.

**Definitie 3.1.1.** *Zij $W$ een eindige Coxeter groep, zij $m$ het aantal equivalentieklassen op $S$ gegeven door $s \sim_W t$ als $s = wtw^{-1}$ voor $w \in W$. Dan definiëren we $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}] = \mathbb{C}[q_1, q_1^{-1}, \ldots, q_m, q_m^{-1}]$ de ring van Laurent polynomen in $m$ veranderlijken. Met $\mathcal{H}(W) = \oplus_{w\in W}\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]\,T_w$ noteren we het vrije $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$-moduul met basis $\{T_w \mid w \in W\}$.*

*Opmerking 3.1.2.* Als $m_{st} \geq 3$ oneven, dan is $s \sim_W t$. Dus geldt ook $s \sim_W t$ als er een rij elementen $(s_i)_{i=1}^r$, $s_i \in S$ bestaat met $m_{s_i,s_{i+1}} \geq 3$ oneven en $s_1 = s$ en $s_r = t$. Neem $s \in S$ vast en laat $A_s \subset S$ de verzameling van alle $t$ met deze eigenschap zijn. Definieer $f\colon S \to \{\pm 1\}$ door $f(t) = 1$ als $t \in A_s$ en $f(t) = -1$ als $t \in S\backslash A_s$. Dan is $f(t)f(t') = 1$ precies dan als $t, t' \in A_s$ of $t, t' \in S\backslash A_s$. Maar, als $f(t)f(t') = -1$ dan is $m_{tt'}$ even en dus ook $\big(f(t)f(t')\big)^{m_{tt'}} = 1$. Dus $f$ respecteert de Coxeter relaties en breidt uit tot een 1-dimensionale representatie $f\colon W \to \{\pm 1\}$. Als $s \sim_W t$, dan is $f(t) = f(s)$ en dus $t \in A_s$. Kortom, we hebben bewezen dat $m$ het aantal samenhangscomponenten is in het Coxeter diagram na reductie mod 2, i.e. na weglaten van alle zijden met een even gewicht $m_{st}$.

**Stelling 3.1.3.** *Er bestaat een unieke associatieve $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$-algebra structuur op $\mathcal{H}(W)$ zodanig dat voor $s \in S$, $w \in W$,*

$$T_sT_w = \begin{cases} T_{sw}, & \textit{als } \ell(sw) > \ell(w), \\ (q_s - 1)T_w + q_sT_{sw}, & \textit{als } \ell(sw) < \ell(w). \end{cases}$$

*$\mathcal{H}(W)$ heet de* **generieke Hecke algebra**.

*Opmerking 3.1.4.* (i) De vermenigvuldiging wordt ook al vastgelegd door (1) $T_sT_w = T_{sw}$ als $\ell(ws) > \ell(w)$ en (2) $T_s^2 = (q_s - 1)T_s + q_sT_1$. Dit is duidelijk een speciaal geval. Omgekeerd, als $\ell(sw) < \ell(w) = \ell(ssw)$, dan volgt $T_sT_w = T_sT_sT_{sw}$ hetgeen tot de relatie in Stelling 3.1.3 leidt. Merk op dat $T_s$ inverteerbaar is in $\mathcal{H}(W)$; $T_s^{-1} = q_s^{-1}T_s + (q_s^{-1} - 1)T_1$, en dan is ook elke $T_w$, $w \in W$, inverteerbaar.
(ii) Merk op dat als $\mathcal{H}(W)$ een algebra structuur heeft, dan volgt voor $t \in S$ dat

$$T_wT_t = \begin{cases} T_{wt}, & \text{als } \ell(wt) > \ell(w), \\ (q_t - 1)T_w + q_tT_{wt}, & \text{als } \ell(wt) < \ell(w). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Inderdaad, in het eerste geval is het duidelijk, want $s_1 \ldots s_rt$ is een gereduceerde expressie voor $wt$ als $w = s_1 \ldots s_r$ een gereduceerde expressie is. Voor het tweede geval merken we op dat $T_{wt}T_t = T_w$. Vermenigvuldig nu met $T_t$ van rechts en gebruik de kwadratische relatie voor $T_t$.
(iii) De generieke Hecke algebra heeft $2^m$ 1-dimensionale representaties. We definiëren de triviale representatie $\mathbf{1}$ door middel van $T_s \mapsto q_s$, $s \in S$, en de teken representatie $\varepsilon$ door

middel van $T_s \mapsto -1$, $s \in S$. Merk op dat $-1$ en $q_s$ de wortels zijn van de kwadratische relatie voor $T_s$. De andere 1-dimensionale representaties worden verkregen door combinaties te nemen van $\mathbf{1}$ and $\varepsilon$ op samenhangscomponenten van het Coxeter diagram na reductie mod 2, vergelijk Opmerking 3.1.2. Dus $\mathcal{H}(W(A_n))$ heeft 2 1-dimensionale representaties en $\mathcal{H}(W(B_n))$ heeft 4 1-dimensionale representaties.

*Bewijs.* Definieer voor $s, t \in S$ de volgende operatoren in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]}(\mathcal{H}(W))$ door middel van

$$\lambda_s(T_w) = \begin{cases} T_{sw}, & \text{als } \ell(sw) > \ell(w), \\ (q_s - 1)T_w + q_s T_{sw}, & \text{als } \ell(sw) < \ell(w), \end{cases}$$
$$\rho_t(T_w) = \begin{cases} T_{wt}, & \text{als } \ell(wt) > \ell(w), \\ (q_t - 1)T_w + q_t T_{wt}, & \text{als } \ell(wt) < \ell(w). \end{cases}$$

**Propositie 3.1.5.** *$\lambda_s \rho_t = \rho_t \lambda_s$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]}(\mathcal{H}(W))$ voor alle $s, t \in S$.*

Zij nu $\mathcal{L} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]}(\mathcal{H}(W))$ de algebra voortgebracht door de operatoren $\lambda_s$, $s \in S$. Definieer nu een $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$-moduul afbeelding $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{H}(W)$, $\lambda \mapsto \lambda(T_1)$. Dan is $\phi$ een bijectie. Inderdaad, $\phi$ is surjectief, want als $w = s_1 \dots s_r$ een gereduceerde expressie is, dan geldt $T_w = \phi(\lambda_{s_1} \dots \lambda_{s_r})$ omdat de lengtes steeds optellen. Om in te zien dat $\phi$ injectief is, beschouwen we $\phi(\lambda) = 0$ ofwel, $\lambda(T_1) = 0$. We claimen dat $\lambda(T_w) = 0$, $\forall w \in W$. Met inductie op de lengte van $w$; het geval $\ell(w) = 0$ is de aanname. Als $\ell(w) > 0$, kies dan $t \in S$ met $\ell(wt) < \ell(w)$, zodat $\lambda(T_w) = \lambda(T_{(wt)t}) = \lambda\big(\rho_t(T_{wt})\big) = \rho_t\big(\lambda(T_{wt})\big) = 0$ vanwege Propositie 3.1.5. Dus $\lambda = 0$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]}(\mathcal{H}(W))$.

We transporteren de algebra structuur van $\mathcal{L}$ naar $\mathcal{H}(W)$ door middel van $\phi$. We moeten nog controleren dat de opgelegde vermenigvuldiging geldt. Daartoe controleren we de relaties uit Opmerking 3.1.4(i). Ad (1): Zij $\lambda_w = \phi^{-1}(T_w) = \lambda_{s_1} \dots \lambda_{s_r}$ als $w = s_1 \dots s_r$ een gereduceerde expressie is. Als $\ell(sw) > \ell(w)$ dan is $ss_1 \dots s_r$ een gereduceerde expressie, en dus volgt $\lambda_{sw} = \lambda_s \lambda_w$. Ad(2): Als $\ell(sw) > \ell(w)$, dan is $\lambda_s^2(T_w) = (q_s - 1)T_{sw} + q_s T_w$ en dat is ook gelijk aan $(q_s - 1)\lambda_s + q_s \lambda_1(T_w)$. Als $\ell(sw) < \ell(w)$, dan is $\lambda_s^2(T_w) = \big((q_s - 1)^2 + q_s\big)T_w + (q_s(q_s - 1)T_{sw}$, en het volgt direkt dat ook $(q_s - 1)\lambda_s + q_s \lambda_1(T_w)$ hieraan gelijk is.

We zien dat er een associatieve $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$-algebra structuur op $\mathcal{H}(W)$ bestaat met de voorgeschreven vermenigvuldiging. Aangezien $T_w = T_{s_1} \dots T_{s_r}$ voor een gereduceerde expressie $w = s_1 \dots s_r$ volgt dat $T_w T_{w'}$ hierdoor volledig is vastgelegd. De $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$-algebra structuur is uniek. $\square$

*Bewijs van Propositie 3.1.5.* Neem $w \in W$ vast, en beschouw de mogelijkheden voor $\ell(w)$, $\ell(sw)$, $\ell(wt)$ en $\ell(swt)$. Omdat vermenigvuldiging met $s$, $t$ de lengte met 1 verhoogt danwel verlaagt, volgt dat deze lengtes niet alle vier verschillend kunnen zijn. Immers, als $\ell(w) \neq \ell(swt)$, dan is $\ell(w) \neq \ell(swt) \pm 2$, maar dan moet ook $\ell(sw) = \ell(wt) = \ell(w) \pm 1$. Er blijven dan 6 verschillende gevallen over, die afzonderlijk moeten worden afgehandeld;
(a) $\ell(w) < \ell(wt) = \ell(sw) < \ell(swt)$;
(b) $\ell(swt) < \ell(wt) = \ell(sw) < \ell(w)$;
(c) $\ell(wt) = \ell(sw) < \ell(swt) = \ell(w)$;
(d) $\ell(wt) < \ell(swt) = \ell(w) < \ell(sw)$;

(e) $\ell(sw) < \ell(swt) = \ell(w) < \ell(wt)$;
(f) $\ell(swt) = \ell(w) < \ell(wt) = \ell(sw)$.
In de gevallen (a), (b), (d) en (e) volgt $\rho_t\lambda_s(T_w) = \lambda_s\rho_t(T_w)$ direkt uit de definities van $\lambda_s$ en $\rho_t$. De gevallen (c) en (f) zijn moeilijker, maar worden op gelijke wijze behandeld. We nemen (c) als voorbeeld. Dan is

$$\rho_t\lambda_s(T_w) = (q_s - 1)(q_t - 1)T_w + (q_s - 1)q_tT_{wt} + q_sT_{swt},$$

en

$$\lambda_s\rho_t(T_w) = (q_t - 1)(q_s - 1)T_w + (q_t - 1)q_sT_{sw} + q_tT_{swt}.$$

De gelijkheid van deze twee uitdrukkingen volgt dan uit het volgende lemma, dat impliceert dat $sw = wt$ en dus $q_s = q_t$. $\square$

**Lemma 3.1.6.** *Zij $w \in W$, $s, t \in S$ met $\ell(swt) = \ell(w)$ en $\ell(sw) = \ell(wt)$, dan $sw = wt$.*

*Bewijs.* We nemen aan dat $\ell(sw) > \ell(w)$. Dit kan zonder verlies van algemeenheid, want in het geval $\ell(sw) < \ell(w)$ gaan we over op $sw$ in plaats van $w$ om de uitspraak te verkrijgen.

Zij $w = s_1 \ldots s_r$, $r = \ell(w)$, een gereduceerde expressie voor $w$. Nu geldt $\ell(w) = \ell((sw)t) < \ell(sw)$, dus we kunnen de uitwisselingsconditie van Stelling 1.3.1 toepassen op $sw$ met $t$; i.e. $sw = ss_1 \ldots \hat{} \ldots s_rt$. Ofwel $sw = w't$ met óf $w = w'$, i.e. $\hat{}$ staat boven $s$ óf $w = ss_1 \ldots \hat{} \ldots s_r$. Maar het laatste leidt tot een tegenspraak. Immers, $w = s(sw) = sw't = s_1 \ldots \hat{} \ldots s_rt$ en dus $\ell(wt) = \ell(w) - 1 = \ell(sw)$ in tegenspraak met de aanname. $\square$

*Opmerking 3.1.7.* Als $R$ een commutatieve $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$-algebra is, dan definiëren we de **gespecialiseerde Hecke algebra** $\mathcal{H}(W)_R = R \otimes_{\mathbb{C}[q_s,q_s^{-1}]} \mathcal{H}(W)$. In het bijzonder als $R = \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]/I_\alpha$ met $I_\alpha$ het ideaal voortgebracht door $q_i - \alpha_i$ voor $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, dan is $\mathcal{H}(W)_\alpha = \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]/I_\alpha \otimes_{\mathbb{C}[q_s,q_s^{-1}]} \mathcal{H}(W)$ de specialisatie in $\alpha \in (\mathbb{C}^*)^m$. Merk op dat $\mathcal{H}(W)_\alpha$ een algebra over $\mathbb{C}$ is. Voorbeelden van deze specialisatie zijn $\mathbb{C}[W] = \mathcal{H}(W)_1$, en $H(GL_n(\mathbb{F}_q), B) = \mathcal{H}(S_n)_q$, zie de volgende sectie.

*Opmerking.* Stelling 3.1.3 is ook waar wanneer de ring $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$ wordt vervangen door $\mathbb{C}[q_s]$, en dan kunnen we ook $q \to 0$ specialiseren.

### 3.2. Commutantenalgebra's.

Laat in deze sectie $G$ een willekeurige eindige groep zijn met $B$ een ondergroep. We beschouwen $\mathbb{C}[G]$ met standaardbasis $\delta_g$, $g \in G$, als een links $G$-moduul, of equivalent, als een links $\mathbb{C}[G]$-moduul via vermenigvuldiging. Stel $e_B = |B|^{-1} \sum_{b\in B} \delta_b$.

**Lemma 3.2.1.**
(i) $\delta_be_B = e_B\delta_b = e_B$, $\forall b \in B$, *en in het bijzonder* $e_B^2 = e_B$,
(ii) $\mathbb{C}[G]e_B \cong \mathbb{C}[G/B] = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f(gb) = f(g), \forall b \in B\}$,
(iii) $e_B\mathbb{C}[G]e_B \cong \mathbb{C}[B\backslash G/B] = H(G, B) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f(b'gb) = f(g), \forall b, b' \in B\}$.

*Opgave.* Bewijs Lemma 3.2.1.

**Stelling 3.2.2.** *$\mathbb{C}[G]e_B$ is een links $\mathbb{C}[G]$-moduul en*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G]e_B, \mathbb{C}[G]e_B) \cong e_B\mathbb{C}[G]e_B,$$

*waarbij de aktie van $e_B\mathbb{C}[G]e_B$ op $\mathbb{C}[G]e_B$ gegeven wordt door rechtsvermenigvuldiging.*

*Bewijs.* Omdat $\mathbb{C}[G]$ een associatieve algebra is, commuteren linker- en rechtervermenigvuldiging. Dus $e_B\mathbb{C}[G]e_B \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G]e_B, \mathbb{C}[G]e_B)$.

Omgekeerd, zij $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G]e_B, \mathbb{C}[G]e_B)$, dan is $T(e_B) \in \mathbb{C}[G]e_B$. Gebruik nu dat $T(\delta_g e_B) = \delta_g T(e_B)$, en omdat $\delta_g e_B$ het hele moduul $\mathbb{C}[G]e_B$ opspant volgt dat $T$ overeenkomt met rechtsvermenigvuldiging met $T(e_B)$. Gebruik nu het voorgaande voor $g = b \in B$, dan volgt uit Lemma 3.2.1(i) dat $\delta_b T(e_B) = T(\delta_b e_B) = T(e_B)$ voor alle $b \in B$, en dus $e_B T(e_B) = T(e_B)$ ofwel $T(e_B) \in e_B\mathbb{C}[G]e_B$. $\square$

We concluderen dat de Hecke algebra $H(G,B)$ de ontbinding van $\mathbb{C}[G/B]$ in irreducibele representaties van $G$ bepaalt. Zoals we later zullen zien, heet $\mathbb{C}[G/B] = \mathrm{Ind}_B^G 1$; we maken een representatie van $G$ door een representatie van een ondergroep $B$, in dit geval de triviale representatie, te induceren naar $G$.

*Opgave 3.2.3.* Laat $V_\pi$ de representatieruimte zijn van $\pi \in \hat{G}$, en laat $V_\pi^B = \{v \in V_\pi \mid \pi(b)v = v, \forall b \in B\}$ de ruimte van $B$-vaste vectoren zijn. Gebruik de algemene representatietheorie van eindige groepen om aan te tonen dat (i) $\mathbb{C}[G/B] \cong \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} \dim(V_\pi^B)\,\pi$ en (ii) $H(G,B) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} Mat_{\dim(V_\pi^B)}(\mathbb{C})$.

*Opgave.* Laat zien dat $\mathbb{C}[G/B]$ multipliciteitsvrij splitst dan en slechts dan als de Hecke algebra $H(G,B)$ commutatief is. Dan noemen we $(G,B)$ een **Gelfand paar**.

We zullen nu het belangrijkste voorbeeld bespreken. Zij $G$ een eindige groep met een $BN$-paar. Vanwege de Bruhat ontbinding, Stelling 2.1.3, is een basis voor $H(G,B)$ gegeven door de karakteristieke functies $\chi_{BwB}$ van $BwB$, $w \in W$. Het produkt in $\mathbb{C}[G]$, en dus in $H(G,B)$, is het convolutieprodukt,

$$\big(\phi\psi\big)(x) = \sum_{y\in G} \phi(xy^{-1})\psi(y), \qquad \phi,\psi \in \mathbb{C}[G].$$

Voor $\phi$ rechts-B-invariant en $\psi$ links-$B$-invariant kunnen we dit schrijven als

$$\big(\phi\psi\big)(x) = |B| \sum_{y\in B\backslash G} \phi(xy^{-1})\psi(y).$$

Laat $\mu$ de telmaat op $B\backslash G$, i.e. voor een verzameling $X \subset G$ met $bX \subset X$, $\forall b \in B$, definiëren we $\mu(X) = |B\backslash X|$. Dan herschrijven we het produkt voor $\phi,\psi \in H(G,B)$ door

$$\big(\phi\psi\big)(x) = |B| \sum_{y\in B\backslash G} \phi(xy^{-1})\psi(y) = |B| \int_{B\backslash G} \phi(xy^{-1})\psi(y)\, d\mu(y). \tag{3.2.1}$$

Zij nu $T_w = |B|^{-1}\chi_{BwB} \in H(G,B)$.

**Lemma 3.2.4.** *In de situatie als boven met het produkt* (3.2.1) *geldt*
(i) drager($\phi\psi$) $\subset$ drager($\phi$)drager($\psi$),
(ii) *De afbeelding* $\mu: H(G,B) \to \mathbb{C}$, $\psi \mapsto |B| \int_{B\backslash G} \psi(y)\, d\mu(y)$ *is een algebra homomorphisme,*
(iii) $T_w T_{w'} = \sum_{w''} \mu(Bw^{-1}Bw'' \cap Bw'B)\, T_{w''}$.

*Bewijs.* Laat $X$ en $Y$ bi-$B$-invariante verzamelingen in $G$ zijn, dan volgt voor de bijbehorende karakteristieke functies $\chi_X$ en $\chi_Y$ dat

$$\chi_X\chi_Y(x) = |B| \int_{B\backslash G} \chi_X(xy^{-1})\chi_Y(y)\, d\mu(y) = |B|\mu(X^{-1}x \cap Y).$$

Hieruit volgt (i) eenvoudig, en (iii) volgt door $X = BwB$, $Y = Bw'B$ en $x = w''$ te nemen.

Vanwege de rechtsinvariantie van $\mu$ volgt

$$\begin{aligned}\mu(\phi\psi) &= |B| \int_{B\backslash G} |B| \int_{B\backslash G} \phi(xy^{-1})\psi(y)\, d\mu(y)\, d\mu(x)\\ &= |B| \int_{B\backslash G} \psi(y)|B| \int_{B\backslash G} \phi(xy^{-1})\, d\mu(x)\, d\mu(y)\\ &= |B| \int_{B\backslash G} \psi(y)\, d\mu(y)|B| \int_{B\backslash G} \phi(x)\, d\mu(x) = \mu(\phi)\mu(\psi)\end{aligned}$$

en daarmee volgt (ii). □

Door gebruik te maken van Lemma 3.2.4 en Definitie 2.1.1(v) en Stelling 2.1.7 zien we dat de relaties $T_sT_w = C_1T_{sw}$ als $\ell(sw) > \ell(w)$ en $T_sT_w = C_2T_{sw} + C_3T_w$ gelden in $H(G,B)$ voor zekere constantes $C_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

**Lemma 3.2.5.** *In* $H(G,B)$ *met het product van* (3.2.1) *geldt*
(i) $T_sT_w = T_{sw}$ *als* $\ell(sw) > \ell(w)$,
(ii) $T_s^2 = (q_s - 1)T_s + q_sT_1$ *voor* $s \in S$ *voor zekere* $q_s \in \mathbb{N}$.

*Bewijs.* Het eerste resultaat volgt uit Lemma 3.2.4(iii), de voorgaande opmerking en $BsBsw \cap BwB = Bw$, zodat $\mu(BsBsw \cap BwB) = 1$. Inderdaad, laat $BsBsw \cap BwB = \cup_i Bg_i$ voor zekere indexverzameling, dan volgt uit $sBs \subset BsB \cup B$ dat $BsBsw \subset BsBw \cup Bw$ en dus $BsBsw \cap BwB \subset (BwB \cap BsBw) \cup (BwB \cap Bw)$. Maar $BwB \cap BsBw = \emptyset$, want als $x \in BwB \cap BsBw$, dan $b_1sb_2w = b_3wb_4$ ofwel $w \in BsBwB = BswB$ vanwege Stelling 2.1.7. Maar dan is $BwB \cap BswB \neq \emptyset$, in tegenspraak met de Bruhat ontbinding van Stelling 2.1.3. Dus we hebben nu bewezen dat $BsBsw \cap BwB \subset BwB \cap Bw \subset Bw$, en gelijkheid volgt omdat de linkerkant links-$B$-invariant is.

Voor de tweede relatie merken we op dat $T_s^2 = a_sT_s + b_sT_1$ voor zekere constantes $a_s, b_s \in \mathbb{C}$ vanwege de opmerkingen voor dit lemma. Vanwege Lemma 3.2.4(iii) volgt $b_s = \mu(BsB1 \cap BsB) = \mu(BsB) \in \mathbb{N}$. Stel $q_s = b_s$. Pas vervolgens $\mu$ toe op de kwadratische relatie voor $T_s$ en gebruik $\mu(T_s) = q_s$, $\mu(T_1) = 1$, zodat $q_s^2 = a_sq_s + q_s$, ofwel $a_s = q_s - 1$. □

Voor het geval $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ met de standaard Borel ondergroep $B$ kunnen we $\mu(BsB)$ gemakkelijk expliciet bepalen door te rekenen met $2 \times 2$-matrices, want $\mu(BsB)$ is voor het algemene geval en het geval $n = 2$ gelijk. Merk op dat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'b & bb' + ac' \\ a'c & cb' \end{pmatrix} \in BsB,$$

ofwel inverteerbare $2 \times 2$-matrices $g$ met $g_{21} \neq 0$. Anderzijds, volgt dat $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ in dezelfde nevenklasse zitten, i.e. $Bx = By$, dan en slechts dan als $d/c = d'/c'$. Dus $\mu(BsB) = |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)| - 1 = q$.

**Stelling 3.2.6.** *Zij $G$ een eindige groep met $BN$-paar en Weyl groep $W$. De algebra $H(G, B)$ is een specialisatie van de generieke Hecke algebra $\mathcal{H}(W)$ in $\mathbb{N}^m$.*

*Bewijs.* Uit Lemma 3.2.5 en Opmerking 3.1.4(i) volgt dat de definiërende relaties gelden. We weten dat $H(G, B)$ associatief is, en dit forceert, vergelijk met het bewijs van Propositie 3.1.5, $q_s = q_t$ als $s \sim_W t$. We zien dat de specialisatie $\mathcal{H}(W)_q$ voor $q_s \mapsto \mu(BsB)$ een algebra over $\mathbb{C}$ is die $H(G, B)$ als quotiënt heeft. Aangezien zowel de specialisatie en $H(G, B)$ dezelfde dimensie over $\mathbb{C}$, namelijk $|W|$, hebben, volgt gelijkheid. $\square$

We zien dus in het bijzonder dat $H(GL_n(\mathbb{F}_q), B) = \mathcal{H}(S_n)_q$ met $q$ een priemgetalmacht.

### 3.3. Semisimpele algebra's.

In deze sectie is $A$ een associatieve algebra met eenheid 1 over een lichaam $k$. Herinner je dat een $A$-moduul $M$ **simpel** heet als we voor een invariant submoduul $N \subset M$, i.e. $AN \subset N$, kunnen concluderen dat $N = \{0\}$ of $N = M$.

**Definitie 3.3.1.** *De algebra $A$ heet* **semisimpel** *als $A$ beschouwd als links $A$-moduul via vermenigvuldiging een direkte som van simpele modulen is.*

**Lemma 3.3.2.** *Er is een $1-1$ correspondentie tussen maximale idealen en simpele modulen.*

*Bewijs.* Als $I \subset A$ een maximaal linksideaal is, dan is $M = A/I$ een simpel $A$-moduul. Als $\{0\} \subset N \subsetneqq M$ een invariante deelruimte is, dan geeft het inverse beeld een linksideaal $J$ met $I \subset J \subsetneqq A$. Vanwege maximaliteit volgt $I = J$ of $N = \{0\}$.

Omgekeerd, zij $M$ een simpel $A$-moduul. Kies $0 \neq m \in M$, dan is $Am \subset M$ een invariante deelruimte ongelijk aan $\{0\}$. Dus $Am = M$. Zijn $I$ de kern van $a \mapsto am$, dan is $I$ een linksideaal. Bovendien, als $I \subset J \subset A$, dan is $A/I \cong M$ en de afbeelding $A/I \to A/J$ geeft een niet-nul homomorph beeld van $M$. Schur impliceert $A/I \cong A/J$ of $I = J$. $\square$

**Definitie 3.3.3.** *Het* **Jacobson radicaal** *van $A$ is*

$$\mathrm{rad}A = \cap_{I \text{ maximaal links ideaal}} I.$$

*Opmerking.* Dit betekent dat voor elk simpel moduul $M$ geldt dat $\mathrm{rad}A \cdot M = 0$.

**Lemma 3.3.4.**

$$\mathrm{rad}A = \cap_{M \text{simpel moduul}} \mathrm{ann}M,$$

*waarbij* $\mathrm{ann}M = \{a \in A \mid aM = 0\}$.

*Bewijs.* Uit Lemma 3.3.2 zien we dat $I = \mathrm{ann}\ m = \{a \in A \mid am = 0\}$ voor $0 \neq m \in M$, $M$ simpel, een maximaal linksideaal is. Dus

$$\cap_{M \text{simpel moduul}} \mathrm{ann}M = \cap_M \cap_{0 \neq m \in M} \mathrm{ann}m \supset \cap_I I = \mathrm{rad}A.$$

Omgekeerd, als $aM = 0$, en $M \cong A/I$ volgt $aA \subset I$ en dus $a \in I$ want $1 \in A$. Dus $\mathrm{ann}M \subset I$ en $\cap_M \mathrm{ann}M \subset \cap_I I = \mathrm{rad}A$. $\square$

**Propositie 3.3.5.** $\mathrm{rad}A = \{x \in A \mid 1 - ax$ *is links inverteerbaar in* $A\ \forall a \in A\}$

*Bewijs.* Neem $x \in \mathrm{rad}A$, en beschouw het linker ideaal $A(1-x)$. Als $A(1-x) \subsetneqq A$, dan bestaat er een maximaal links ideaal $L$ zodanig dat $A(1-x) \subset L \subsetneqq A$. Dan is $1 - x \in L$, en ook $x \in \mathrm{rad}A \subset L$. Dus $1 = (1-x) + x \in L$, maar dan hebben we $L = A$. Tegenspraak, en dus $A(1-x) = A$, en er bestaat een element $t \in A$ zodanig dat $t(1-x) = 1$. Aangezien $\mathrm{rad}A$ een links ideaal is volgt de inclusie $\subset$.

Voor de omgekeerde inclusie beschouwen we een willekeurig simpel moduul $M$ van $A$. We moeten laten zien dat $xM = 0$. Stel $xM \neq 0$, dan $\exists m \in M\ xm \neq 0$. Omdat $M$ simpel is volgt $Axm = M$, of $\exists a \in A$ met $axm = m$, of $(1-ax)m = 0$. Nu is $(1-ax)$ links inverteerbaar, dus $m = 0$. Dit is de vereiste tegenspraak. $\square$

**Propositie 3.3.6.** *Zij* $e \in A$ *een idempotent, i.e.* $e^2 = e$, *dan* $\mathrm{rad}\, eAe = e(\mathrm{rad}A)e$.

*Opmerking.* $eAe$ is een subalgebra van $A$, met als eenheid de idempotent $e$.

*Bewijs.* Merk eerst op dat $e(\mathrm{rad}A)e = \mathrm{rad}A \cap eAe$. Inderdaad, $\subset$ volgt uit Lemma 3.3.4 en $e(\mathrm{ann}M)e \subset \mathrm{ann}M$ voor elk simpel moduul $M$. Omgekeerd, als $x \in \mathrm{rad}A \cap eAe$, dan $exe = x$, want $x$ is van de vorm $eye$ en $e$ is idempotent, en $x = exe \in e(\mathrm{rad}A)e$.

Laten we de inclusie $\supset$ bewijzen. Kies $x \in e(\mathrm{rad}A)e$, dan $x = ex = xe$, en, vanwege het voorgaande, $x \in \mathrm{rad}A$. Dus voor alle $a \in eAe \subset A$ heeft $1 - ax$ een linker inverse $y \in A$; $y(1-ax) = 1$. Vanwege Propositie 3.3.5 moeten laten zien dat $e - ax$ een linker inverse in $eAe$ heeft. Nu is $(eye)(e-ax) = eye - eyeax = eye - eyaxe = e\big(y(1-ax)\big)e = e$, omdat $a, x \in eAe$. Dus $eye \in eAe$ is de linker inverse voor $e - ax$.

De omgekeerde inclusie laten we als opgave. $\square$

*Opgave 3.3.7.* Bewijs de omgekeerde inclusie gebruik makend van de karakterisatie van Propositie 3.3.5.

**Definitie 3.3.8.** *A heet een* **Artinse** *algebra als voor elke dalende rij idealen* $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ *geldt dat* $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \dots$ *voor zekere* $k$. *Ofwel, elke dalende rij idealen stabiliseert.*

**Lemma 3.3.9.** *Als A een Artinse algebra is, dan voldoet A aan de* **minimum conditie**, *i.e. elke niet-lege verzameling idealen bevat een minimaal element ten opzichte van de inclusie.*

*Opgave 3.3.10.* (i) Bewijs Lemma 3.3.9.
(ii) Bewijs dat het omgekeerde ook geldt; als $A$ voldoet aan de minimum conditie, dan is $A$ een Artinse algebra.

**Stelling 3.3.11.** *Zij $A$ een Artinse algebra. Het Jacobson radicaal* rad$A$ *is een tweezijdig nilpotent ideaal, en elk nilpotent links ideaal is bevat in* rad$A$.

Herinner je dat een ideaal $I$ **nilpotent** is als er een $k$ bestaat zodanig dat het $k$-voudige product $I \cdot \ldots \cdot I$ gelijk is aan 0. In het bijzonder is elk element van $x \in I$ nilpotent, $x^k = 0$.

*Bewijs.* Merk eerst op dat ann$M$ een tweezijdig ideaal is, zodat rad$A$ tweezijdig is vanwege Lemma 3.3.4.

Zij $J = \mathrm{rad}A$, dan is $J \supset J^2 \supset J^3 \supset \ldots$, dus er is een $m$ zodanig dat $J^m = J^{2m}$ omdat $A$ Artins is. Om nilpotentheid van $J$ aan te tonen nemen we aan dat $J^m \neq 0$. Beschouw de verzameling linksidealen $I$ zodanig dat $J^m I \neq 0$. Dan is de verzameling niet leeg, want $J^m$ is erin bevat. Vanwege Lemma 3.3.9 volgt dat er een minimaal element $I_0$ is zodanig dat $J^m I_0 \neq 0$. Dus $\exists a \in I_0$ zodanig dat $J^m a \neq 0$, maar anderzijds $J^m(J^m a) = J^{2m}a = J^m a \neq 0$, en dus, vanwege de minimaliteit, $I_0 = J^m a$. Dan $\exists x \in J^m \subset J$ met $a = xa$ of $(1-x)a = 0$. Vanwege Propositie 3.3.5 volgt nu $a = 0$, de vereiste tegenspraak. Dus rad$A$ is een nilpotent ideaal.

Zij $N$ een nilpotent ideaal. We moeten aantonen dat $N \subset \mathrm{rad}A$. Omdat elk element $x \in N$ nilpotent is, is $(1-x)$ inverteerbaar. Immers de eindige som $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ is de linker inverse in $A$ voor $x \in N$. Omdat $N$ een ideaal is, is ook $(1-ax)$ inverteerbaar voor alle $a \in A$. Dus $x \in \mathrm{rad}A$ vanwege Propositie 3.3.5. □

**Stelling 3.3.12.** *Zij $A$ een Artinse algebra. $A$ is semisimpel dan en slechts dan als het Jacobson radicaal* rad$A = 0$.

*Bewijs.* Zij $A$ semisimpel, dan $A = \oplus_i M_i$ met $M_i$ simpele modulen. Dus $\mathrm{rad}A \cdot A = \mathrm{rad}A \oplus_i M_i = 0$. Omdat $1 \in A$, volgt $\mathrm{rad}A = 0$.

Voor het bewijs van het omgekeerde gebruiken we de volgende claim: (C) elk niet-nilpotent ideaal in een Artinse algebra bevat een idempotent.

Laten we deze claim aannemen, en stel nu $\mathrm{rad}A = 0$, dan is, vanwege Stelling 3.3.11, elk ideaal van $A$ niet-nilpotent, en bevat dus een idempotent $e$. Zij $L$ een minimaal ideaal met $e = e^2 \in L$. Vanwege $Ae \subseteq L$, en $e = e^2 \in Ae$, volgt uit de minimaliteit dat $Ae = L$. Dus elk minimaal ideaal wordt voortgebracht door een idempotent, en bovendien geldt $Le = Ae \cdot e = Ae = L$. Zij nu $L' \supset L$ een links ideaal; we moeten bewijzen dat $L' = L \oplus M$ als linker $A$-modulen. Nu is $L' = L'e \oplus L'(1-e)$, en omdat $L = Le \subset L'e \subset Ae = L$ volgt $L'e = L$. Merk op dat $(1-e)^2 = 1-e$ en dat $e(1-e) = 0 = (1-e)e$, en dan is rechtsvermenigvuldiging met $e$ respectievelijk $1-e$ een projektie van $L'$ op $L$ respectievelijk $L'(1-e)$, die met de aktie van $A$ commuteert. Dus we zien dat $A$ als links $A$-modulen ontbindt in een direkte som van onontbindbare modulen, welke alle minimale links idealen, i.e. simpel, zijn.

Rest het bewijs van claim (C). Zij $I$ een minimaal niet-nilpotent links ideaal, dan is elk ideaal in $I$ nilpotent vanwege de minimaliteit. Beschouw het minimale ideaal $L$ dat voldoet aan $IL \neq 0$, $L \subset I$. Merk op dat het inderdaad niet leeg is; $I$ voldoet, want $I^2 = I$. Kies $x \in L$ met $Ix \neq 0$, dan $Ix \subset L$, en dus vanwege minimaliteit $Ix = L$. Ofwel, $\exists a \in A$ met $x = ax$ en dus $x = ax = a^2x = a^3x = \ldots$. In het bijzonder zien we dat $a$ niet nilpotent is. Zij $N = \{n \in I \mid nx = 0\} \subsetneq I$, want $Ix \neq 0$, een nilpotent links ideaal. Stel $n_1 = a^2 - a \in N$. Als $n_1 = 0$, dan zijn we klaar. Als $n_1 \neq 0$, dan stel $a_1 = a + n_1 - 2an_1 \in I$. Merk op dat $a_1$ niet-nilpotent is, anders zou $a = a_1 - n_1 + 2an_1$

nilpotent zijn. (Merk op dat $an_1 = n_1 a$.) Bovendien geldt $a_1^2 - a_1 = n_1^2(4n_1 - 3)$. Dus $n_2 = a_1^2 - a_1$ is nilpotent en bevat $n_1^2$ als factor. Zo doorgaand creëren we een reeks $a_i \in I$ zodanig dat $a_i^2 - a_i$ een factor $n_1^{2^i}$ bevat. Vanwege de nilpotentheid volgt dat $a_i^2 = a_i$ voor $i$ voldoende groot. $\square$

Merk op dat de ontbinding $A = \bigoplus_i M_i$ in simpele modulen van de semisimpele algebra $A$ uit een eindige som bestaat voor een Artinse algebra.

Het eerste gevolg van Stelling 3.3.12 is een gevolg van het bewijs. We voeren eerst een paar begrippen in.

**Definitie 3.3.13.** *Zij $A$ een algebra, en laat $e, e' \in A$ idempotenten zijn, i.e. $e^2 = e$. Dan heten $e$, $e'$* **orthogonale** *idempotenten als $ee' = 0 = e'e$. Als $e$ niet kan worden geschreven als de som van twee orthogonale idempotenten, dan heet de idempotent $e$* **primitief**.

Merk op dat de som van twee orthogonale idempotenten weer een idempotent is.

**Gevolg 3.3.14.** *Zij $A$ een semisimpele Artinse algebra. Dan is elk minimaal links ideaal $L = Ae$ voor een primitieve idempotent $e$. Bovendien $A = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$ voor een verzameling orthogonale primitieve idempotenten $\{e_1, \ldots, e_n\}$, en elk moduul van $A$ is van de vorm $Ae$ voor zekere idempotent $e$.*

*Bewijs.* In het bewijs van Stelling 3.3.12 hebben we gezien dat elk minimaal links ideaal $L = Ae$ voor zekere idempotent. Als $e$ niet primitief is, dan is $e = e_1 + e_2$, $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$. Maar dan $e_1 = e_1 e \in Ae = L$, en evenzo $e_2 \in L$. Nu is $Ae_1 \subsetneqq L$, want $e_2 \notin Ae_1$. Immers, als $e_2 = ae_1$, dan $Ae_2 = Ae_1 = L$ en $e_1 = be_2$. Maar dan $e_1 = be_2 = be_2 e_2 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = ae_1 e_1 = ae_1 = e_2$, tegenspraak. Dus als $e$ niet primitief is, dan is $L$ niet minimaal.

Zij nu $A = \oplus_{i=1}^n L_i$ een direkte som van minimale idealen, en stel $1 = e_1 + \ldots + e_n$. Dan volgt uit $1 \cdot 1 = 1$ en de linksinvariantie van $L$ dat $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een verzameling orthogonale idempotenten is. Immers, $x = x \cdot 1 = xe_1 + \ldots + xe_n$, en als $x \in L_i$, dan $x = xe_i$ en $xe_j = 0$ voor $i \neq j$. Vanwege het voorgaande zijn alle $e_i$'s primitief. $\square$

**Gevolg 3.3.15.** *Zij $A$ een eindigdimensionale algebra over $k$. Stel dat de bilineaire symmetrische associatieve vorm $(a, b) \mapsto \mathrm{tr}_A(ab)$, waar $ab \colon A \to A$, $x \mapsto abx$, werkt als linksvermenigvuldiging, niet gedegenereerd is. Dan is $A$ een semisimpele algebra.*

Herinner je dat een bilineaire vorm symmetrisch is als $(a, b) = (b, a)$ en associatief als $(ab, c) = (a, bc)$.

*Bewijs.* $A$ is Artins, omdat $\dim_k A < \infty$. Stel $x \in \mathrm{rad} A$, dan is $x$ en $ax$ nilpotent voor alle $a \in A$. Dus is $(a, x) = \mathrm{tr}_A(ax) = 0$, want het spoor van een nilpotent element is nul. Vanwege de niet-gedegenereerdheid volgt $x = 0$, ofwel $\mathrm{rad} A = 0$ en $A$ is semisimpel vanwege Stelling 3.3.12. $\square$

*Voorbeeld 3.3.16.* De directe som van matrixalgebra's over $k$, $\oplus_i \mathrm{Mat}_{n_i}(k)$ is semisimpel.

Zij $M$ een simpel $A$-moduul, dan zijn voor $f \in \mathrm{End}_A(M) = \{f \colon M \to M \mid f(am) = af(m), \forall a \in A, \forall m \in M\}$ de ruimtes $\mathrm{Im} f$ en $\mathrm{Ker} f$ invariante deelmodulen. Dus als $f \neq 0$, dan is $\mathrm{Ker} f = 0$ en $\mathrm{Im} f = M$, en dus is $f$ inverteerbaar in $\mathrm{End}_A(M)$ en $\mathrm{End}_A(M)$ is een delingsring. Dit is het Lemma van Schur. We hebben nu het volgende zeer algemene resultaat.

**Stelling 3.3.17.** (Jacobsons dichtheidsstelling (1945)) *Zij $A$ een deelring van* $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ *van een abelse groep $M$ zodanig dat $M$ een simpel $A$-moduul is. Dan is $D = \mathrm{End}_A(M)$ een delingsring, en $A$ is een dichtliggende ring in de ring van lineaire afbeeldingen van de vectorruimte $M$ over $D$, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x_i, y_i \in M$, $i = 1, \ldots, k$, met $x_i$ lineair onafhankelijk over $D$ bestaat er een $a \in A$ met $ax_i = y_i$, $\forall i$.*

*Schets van het bewijs.* Het bewijs gaat met inductie op $k$. Voor $k = 1$, kies $0 \neq x_1 \in M$, dan $Ax_1 = M$. Dus $\forall y_1 \in M$ $\exists a \in A$ met $ax_1 = y_1$.

Het geval $k = 2$ is illustratief voor de algemene inductiestap. Merk op dat $\exists a_2 \in A$ met $a_2x_1 = 0$ en $a_2x_2 \neq 0$. Immers, stel niet, dan is de afbeelding gedefinieerd door $ax_1 \mapsto ax_2$ een goed-gedefinieerd afbeelding van $Ax_1 = M$ naar $Ax_2 = M$, die commuteert met de $A$-aktie. Ofwel, $\exists \delta \in D = \mathrm{End}_A(M)$ met $\delta x_1 = x_2$, ofwel $x_1$ en $x_2$ zijn afhankelijk over $D$. Idem geldt $\exists a_1 \in A$ met $a_1x_1 \neq 0$ en $a_1x_2 = 0$. Pas nu het geval $k = 1$ toe om $b_1, b_2 \in A$ te vinden met $b_1a_1x_1 = y_1$, $b_2a_2x_2 = y_2$. Nu voldoet $a = b_1a_1 + b_2a_2$ aan $ax_i = y_i$, $i = 1, 2$. $\square$

**Gevolg 3.3.18.** *Zij $A$ een eindig voortgebrachte $k$-algebra en $M$ een eindig voortgebracht simpel $A$-moduul.*

(i) (Bicommutantenstelling) *Zij $D = \mathrm{End}_A(M)$ en zij $A_l$ het beeld van $A$ in $\mathrm{End}_k(M)$, dan $A_l \cong \mathrm{End}_D(M)$.*

(ii) (Stelling van Burnside) *Veronderstel dat $\mathrm{End}_A(M) = k \cdot 1_M$, dan $A_l = \mathrm{End}_k(M)$.*

**Stelling 3.3.19.** *Zij $A$ een semisimpele eindig voortgebrachte $k$-algebra, dan*

$$A \cong \oplus_i \mathrm{Mat}_{n_i}(k) \Longleftrightarrow \mathrm{End}_A(M) = k \cdot 1_M, \ \forall \textit{simpele } A\textit{-modulen } M.$$

*De groottes $n_i$ van de voorkomende matrices heten de* **numerieke invarianten** *van $A$.*

*Bewijs.* $A$ is een direkte som van minimale links idealen, die corresponderen met simpele modulen. Pas nu de Stelling van Burnside, Gevolg 3.3.18(ii), toe. $\square$

**Propositie 3.3.20.** *Zij $A$ een algebraïsch gesloten lichaam $k$, dan geldt voor elk simpel $A$-moduul $M$ dat $\mathrm{End}_A(M) = k \cdot 1_M$.*

*Bewijs.* Zij $\delta \in D = \mathrm{End}_A(M)$, en laat $m(X)$ het minimum polynoom over $k$ van $\delta$ zijn. Dan is $m(X) \in k[X]$ irreducibel. Immers, als $m(X) = m_1(X)m_2(X)$ waarbij de graden van $m_1$ en $m_2$ strikt kleiner zijn dan de graad van $m$, dan volgt $0 = m(\delta) = m_1(\delta)m_2(\delta)$ met $m_1(\delta) \neq 0$, $m_2(\delta) \neq 0$ in de delingsring $D$ vanwege Cayley-Hamilton. Tegenspraak. Omdat $k$ algebraïsch gesloten is volgt $m(X) = X - \alpha$ voor zeker $\alpha \in k$, en dus $0 = \delta - \alpha \cdot 1_M$, ofwel $\delta = \alpha \cdot 1_M$. $\square$

**Gevolg 3.3.21.** *Zij $A$ een semisimpele eindig voortgebrachte algebra over een algebraïsch gesloten lichaam $k$, dan is $A$ isomorph met een direkte som van matrixalgebra's.*

*Voorbeeld 3.3.22.* (i) Voor een eindige groep $G$ hebben we $\mathbb{C}[G] = \sum_{\pi \in \hat{G}} Mat_{\dim \pi}(\mathbb{C})$, en dus is de groepalgebra van een eindige groep een semisimpele algebra over $\mathbb{C}$. In het bijzonder volgt dat de groepalgebra van de Weyl groep semisimpel is.

(ii) De Hecke algebras, die ontstaan als commutantenalgebras, zijn semisimpel. Immers, ze zijn van de vorm $e_B\mathbb{C}[G]e_B$, en vanwege het eerste voorbeeld en Propositie 3.3.6, volgt de semisimpelheid. In het bijzonder is $H(GL_n(\mathbb{F}_q), B) = e_B\mathbb{C}[GL_n(\mathbb{F}_q)]e_B$ semisimpel.

**3.4. Hecke algebra's en semisimpelheid.**

Zij $\tau\colon \mathcal{H}(W) \to \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$ de $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$-lineaire afbeelding gedefinieerd door $T_w \mapsto \delta_{w,1}$.

**Propositie 3.4.1.** *Er geldt $\tau(T_w T_{w'}) = \delta_{w,(w')^{-1}} \mathbf{1}(T_w)$, waarbij $\mathbf{1}$ de triviale 1-dimensionale representatie van $\mathcal{H}(W)$ is. In het bijzonder, de bilineaire vorm $(a,b) = \tau(ab)$ is een niet-gedegenereerde symmetrische associatieve vorm, waarvoor de duale basis voor de basis $\{T_w \mid w \in W\}$ gegeven wordt door $\{\mathbf{1}(T_w)^{-1} T_{w^{-1}} \mid w \in W\}$.*

Merk op dat $\mathbf{1}(T_w)^{-1} \in \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$, omdat $\mathbf{1}(T_w)$ een produkt van machten van $q_s$ is.

*Bewijs.* Merk eerst op dat voor $w \in W$ en $s \in S$ geldt dat $\tau(T_w T_s) = \tau(T_s T_w)$. Inderdaad, $\tau(T_w T_s) = \tau(T_s T_w) = q_s \delta_{s,w}$, zoals gemakkelijk uit de commutatierelaties volgt.

We gebruiken nu inductie op de $\ell(w')$, waarbij de gevallen $\ell(w') = 0, 1$ gedaan zijn. Dan is er een $s \in S$ met $w' = w''s$ en $\ell(w') > \ell(w'')$ en

$$\begin{aligned}\tau(T_w T_{w'}) &= \tau(T_w T_{w''} T_s) = \tau(T_s T_w T_{w''}) \\ &= \begin{cases} \delta_{sw,(w'')^{-1}} \mathbf{1}(T_{sw}), & \text{als } \ell(sw) > \ell(w), \\ (q_s - 1)\delta_{w,(w'')^{-1}} \mathbf{1}(T_w) + q_s \delta_{sw,(w'')^{-1}} \mathbf{1}(T_{sw}), & \text{als } \ell(sw) < \ell(w), \end{cases}\end{aligned}$$

vanwege de inductiehypothese. Merk op dat $ww'' \neq 1$ als $\ell(sw) < \ell(w)$. Immers, als $w''w = w''ssw = w'sw = 1$, dan is $\ell(sw) = \ell(w') > \ell(w'') = \ell(w)$. Evenzo merken we op dat $1 = w''sw = w'w$ impliceert dat $\ell(sw) = \ell(w'') < \ell(w') = \ell(w)$. Dus we verkrijgen

$$\tau(T_w T_{w'}) = \begin{cases} 0, & \text{als } \ell(sw) > \ell(w), \\ q_s \delta_{sw,(w'')^{-1}} \mathbf{1}(T_{sw}), & \text{als } \ell(sw) < \ell(w), \end{cases} = \delta_{w,(w')^{-1}} \mathbf{1}(T_w),$$

omdat $T_s T_{sw} = T_{s^2 w} = T_w$ en dus $q_s \mathbf{1}(T_{sw}) = \mathbf{1}(T_w)$ als $\ell(w) > \ell(sw)$. $\square$

**Propositie 3.4.2.**

(i) $u = \sum_{w \in W} \mathbf{1}(T_w)^{-1} T_w T_{w^{-1}} \in Z(\mathcal{H}(W))$, *en $u$ is geen nuldeler,*

(ii) $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}(W)}(h) = \tau(hu)$, *waarbij $h\colon \mathcal{H}(W) \to \mathcal{H}(W)$ als links vermenigvuldiging wordt gezien.*

(ii) $(h, h') = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}(W)}(hh')$ *is een niet-gedegenereerde bilineaire vorm op $\mathcal{H}(W) \times \mathcal{H}(W)$.*

*Bewijs.* Voor (i) merken we op dat voor de centraliteit van $u$ het voldoende is om te laten zien dat $T_s u = u T_s$ voor alle $s \in S$. Dit is een direkte berekening;

$$\begin{aligned} T_s u &= \sum_{w;\ell(sw)>\ell(w)} \mathbf{1}(T_w)^{-1} T_{sw} T_{w^{-1}} + \sum_{w;\ell(sw)<\ell(w)} \mathbf{1}(T_w)^{-1} \big((q_s - 1)T_w + q_s T_{sw}\big) T_{w^{-1}} \\ &= \sum_{w;\ell(w^{-1})>\ell(w^{-1}s)} \mathbf{1}(T_{sw})^{-1} T_w T_{w^{-1}s} + \sum_{w;\ell(w^{-1}s)<\ell(w^{-1})} (q_s - 1)\mathbf{1}(T_w)^{-1} T_w T_{w^{-1}} + \\ &\qquad \sum_{w;\ell(w^{-1})<\ell(w^{-1}s)} q_s \mathbf{1}(T_{sw})^{-1} T_w T_{w^{-1}s} = uT_s, \end{aligned}$$

gebruik makend van het feit dat $\mathbf{1}$ een representatie is en de vermenigvuldigingsregels van Stelling 3.1.3 en (3.1.1). Een meer algemeen argument maakt gebruik van Propositie 3.4.1 en gaat als volgt. Zij $S_w = \mathbf{1}(T_w)^{-1}T_{w^{-1}}$ de duale basis voor $T_w$, dan voor $h \in \mathcal{H}(W)$

$$\begin{aligned} hu = \sum_{w\in W} hT_w S_w &= \sum_{w,w'\in W} (hT_w, S_{w'})T_{w'}S_w \\ &= \sum_{w,w'\in W} T_{w'}(T_w, S_{w'}h)S_w = \sum_{w'\in W} T_{w'}S_{w'}h = uh \end{aligned}$$

gebruik makend van de associativiteit, symmetrie en niet-gedegenereerdheid van $(\cdot,\cdot)$.

Stel nu er een $h = \sum_w h_w T_w \in \mathcal{H}(W)$ bestaat zodat $hu = uh = 0$. We mogen veronderstellen dat er een $w \in W$ bestaat met $h_w \notin \langle q_s - 1\rangle \subset \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$ door eventueel door machten van $(q_s - 1)$ te delen. Zij nu $\sigma\colon \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}] \to \mathbb{C}$ de specialisatie in 1, dan volgt dat $\sigma(h) \neq 0$ en $\sigma(h)\sigma(u) = 0$, maar $\sigma(u) = |W|$ is geen nuldeler in $\mathcal{H}(W)_1 = \mathbb{C}[W]$

Voor (ii) berekenen we $h(T_w) = \sum_{w'}(hT_w, \mathbf{1}(T_{w'})^{-1}T_{(w')^{-1}})T_{w'}$ met de bilineaire vorm als in Propositie 3.4.1. Neem vervolgens het spoor.

De derde uitspraak is een direkt gevolg van (i) en (ii). □

**Gevolg 3.4.3.** *Zij $F$ het quotiëntenlichaam van $\mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$ en $\bar{F}$ de algebraïsche afsluiting van $F$. Dan zijn $\mathcal{H}(W)_F$ en $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}}$ semisimpel, en de laatste is een direkte som van matrix algebras over $\bar{F}$.*

*Bewijs.* Gebruik Propositie 3.4.2 in combinatie met Gevolg 3.3.15 en Gevolg 3.3.21. □

### 3.5. Tits' isomorphiestelling.

**Stelling 3.5.1.** (Tits) *Stel dat $\mathcal{H}(W)_\alpha$ en $\mathcal{H}(W)_\beta$, $\alpha, \beta \in (\mathbb{C}^*)^m$, twee specialisaties zijn van de generieke Hecke algebra $\mathcal{H}(W)$ zodat $\mathcal{H}(W)_\alpha$ en $\mathcal{H}(W)_\beta$ semisimpele algebras over $\mathbb{C}$ zijn. Dan $\mathcal{H}(W)_\alpha \cong \mathcal{H}(W)_\beta$.*

Het heuristische argument is als volgt. De generieke Hecke algebra hangt "continu" van $q_s$ af, en voor bijna elke specialisatie is $\mathcal{H}(W)_\alpha$ semisimpel, omdat het slechts afhankelijk is van het al dan niet verdwijnen van de determinant $\Delta = (\mathrm{tr}_{\mathcal{H}(W)}(T_w T_{w'}))_{w,w'\in W}$, welke slechts eindig veel nulpunten heeft. Anderzijds is semisimpelheid bepaald door de discrete numerieke invarianten, die, als functies van de $q_s$, constant moeten zijn op de samenhangsgebieden waar $\Delta$ niet verdwijnt.

**Gevolg 3.5.2.** *Zij $G$ een eindige groep met een $BN$-paar en Weyl groep $W$. Dan is $H(G, B) \cong \mathbb{C}[W]$.*

*Bewijs.* Omdat $H(G, B) = e_B\mathbb{C}[G]e_B$ en $\mathbb{C}[W]$ semisimpel zijn, zie Voorbeeld 3.3.22, en beide specialisaties zijn van $\mathcal{H}(W)$, zie Stelling 3.2.6 en Opmerking 3.1.7, volgt het uit Tits' Stelling 3.5.1. □

We hebben het begrip gehele afsluiting van een ring nodig.

**Definitie 3.5.3.** *Zij $R$ een ring zonder nuldelers bevat in een ring $B$, dan heet $\alpha \in B$* **geheel** *over $R$ als er een monisch polynoom $p(X) \in R[X]$ bestaat zodanig dat $p(\alpha) = 0$. Met $I$ geven we de verzameling gehelen in $B$ over $R$ aan. $I$ heet de* **gehele afsluiting** *van $R$ in $B$.*

**Stelling 3.5.4.**
(i) *Equivalent zijn de volgende uitspraken*
  (a) $\alpha \in B$ *is geheel over* $R$
  (b) $R[\alpha]$ *een eindig voortgebracht* $R$*-moduul is,*
  (c) *er bestaat een getrouw* $R[\alpha]$*-moduul dat als* $R$*-moduul eindig voortgebracht is,*
(ii) $I$ *is een ring,*
(iii) *Als* $R$ *een ontbindingsring is, dan is* $R$ *gelijk aan zijn gehele afsluiting in het quotiëntenlichaam.*
(iv) $I[X]$ *is de gehele afsluiting van* $R[X]$ *in* $B[X]$*,*
(v) *Een ring homomorphisme* $\sigma\colon R \to \mathbb{C}$ *breidt uit tot een ring homomorphisme* $\sigma\colon I \to \mathbb{C}$*,*

*Schets van het bewijs.* Voor (i) merken we op dat als $\alpha$ geheel is, dan is $\alpha^n$ een combinatie van lagere machten als de graad van het monische polynoom $n$ is. Dus $R[\alpha]$ heeft hoogstens $n$ voortbrengers en dit bewijst (a) $\Rightarrow$ (b). Voor (b) $\Rightarrow$ (c) nemen we $R[\alpha]$ zelf. Voor (c) $\Rightarrow$ (a) nemen we aan dat het getrouwe $R[\alpha]$-moduul eindig voortgebracht is door $w_1, \ldots, w_n$, dan volgt $\alpha w_i = \sum_j a_{ij} w_j$ voor zekere $a_{ij} \in R$. Maar dan is $\alpha$ een nulpunt van $\det(X \cdot 1 - (a_{ij}))$. Voor dat laatste is getrouwheid noodzakelijk.

Zij nu $\alpha, \beta \in I$, en zij $M = R[\alpha]$, $N = R[\beta]$ de eindig voortgebrachte $R$-modulen. Dan is ook $MN$ een getrouw eindig voortgebracht moduul, dat $\alpha \pm \beta$ en $\alpha\beta$ bevat. Dus $\alpha \pm \beta, \alpha\beta \in I$.

Voor het bewijs van (iii) veronderstellen we dat $a/b$, voor $a, b \in R$ geheel is. Zij $p \in A$ een priem, dat $b$ deelt maar niet $a$. Vermenigvuldig de relatie $(a/b)^n + a_{n-1}(a/b)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_i \in R$, met $b^n$, zodat $a^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \ldots + a_0 b^n = 0$. Maar dan deelt $p$ ook $a^n$, en dus $a$. Tegenspraak.

Zij $\tilde{I}$ de gehele afsluiting van de polynoomring $R[X]$, dan is $I \subset \tilde{I}$ als de constante polynomen. Bovendien is het polynoom $X \in \tilde{I}$, want $1 \cdot X - X \cdot (X)^0 = 0$. Vanwege (ii) volgt dat $I[X] \subset \tilde{I}$. Voor de omgekeerde inclusie moeten we met vergelijkingen van de vorm $\sum_{i=}^{k} f_i(X)(p(X))^i = 0$, $f_i \in R[X]$, $f_k = 1$, gaan spelen. Merk op dat specialisatie in $X = 0$ direkt geeft dat de constante coëfficiënt $p(0) \in I$. We laten dit als opgave.

Zij $\alpha \notin R$ geheel over $R$, dan is $\alpha$ een nulpunt van $\sum_{i=1}^{k} a_i X^i$, $a_i \in R$, $a_k = 1$. We definiëren nu $\sigma(\alpha)$ als een nulpunt van het monisch polynoom $\sum_{i=1}^{k} \sigma(a_i) X^i \in \mathbb{C}[X]$. Merk op dat we hier slechts nodig hebben dat $\mathbb{C}$ algebraïsch gesloten is. Dit brengt een uitbreiding tot $R[\alpha]$. Ga nu verder tot $I$ door gebruik te maken van het lemma van Zorn. $\square$

*Bewijs van Stelling 3.5.1.* Om de notatie te vereenvoudigen stellen we $R = \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}]$, $F$ het bijbehorende quotiëntenlichaam, en $\bar{F}$ de algebraïsche afsluiting. Dan zijn $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}}$ en $\mathcal{H}(W)_\alpha$ direkte sommen van matrix algebras over $\bar{F}$ en $\mathbb{C}$. We zullen aantonen dat de numerieke invarianten van deze twee semisimpele algebras gelijk zijn, hetgeen de stelling bewijst.

Kies onafhankelijke variabelen $x_w$ over $\bar{F}$, en beschouw het generieke element $a = \sum_{w \in W} x_w T_w \in \bar{F}(x_w) \otimes_{\bar{F}} \mathcal{H}(W)_{\bar{F}} = \mathcal{H}(W)_{\bar{F}(x_w)}$. Laat $P(t)$ het karakteristiek polynoom zijn van de rechtsvermenigvuldiging op $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}(x_w)}$, dan is $P(t) = \prod_k P_k(t)^{d_k}$ de factorisatie in irreducibele monische polynomen over $\bar{F}(x_w)$. Merk op dat, vanwege de vermenigvuldigingsregels in de generieke Hecke algebra, de coëfficiënten van $P$ in $R[x_w]$ liggen.

**Lemma 3.5.5.**
(i) $d_k = \text{graad}(P_k)$,
(ii) $d_k$*'s zijn de numeriek invarianten van* $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}(x_w)}$.

*Bewijs van Lemma 3.5.5.* Merk op dat $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}} = \bigoplus_k Mat_{d_k}(\bar{F})$ een basis heeft van matrix elementen $E^k_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d_k$, zodanig dat de standaard vermenigvuldigingsregel $E^k_{ij} E^l_{nm} = \delta_{kl}\delta_{jn} E^k_{im}$ geldt. Herschrijf het generieke element $a$ in termen van deze basis; $a = \sum_{k,i,j} y^k_{ij} E^k_{ij}$. Omdat de coördinaten van de basistransformatie van $T_w$ naar $E^k_{ij}$ al in $\bar{F}$ liggen, geldt dat het verband tussen $x_w$ en $y^k_{ij}$ wordt gegeven door een matrix uit $GL_{|W|}(\bar{F})$ en dus hebben we $\bar{F}(x_w) = \bar{F}(y^k_{ij})$. In deze basis hebben we $E^k_{ij} a = \sum_m y^k_{jm} E^k_{im}$, en dus zien we dat $P(t) = \prod_k P_k(t)^{d_k}$ met $P_k(t) = \det(t \cdot 1 - (y^k_{ij}))$ een monisch polynoom van de graad $d_k$.

Rest nog te bewijzen dat $P_k(t)$ irreducibel is in $\bar{F}(x_w)[t] = \bar{F}(y^k_{ij})[t]$. We hebben $y^k_{ij}$ algebraïsch onafhankelijk over $\bar{F}$, omdat de $x_w$'s dat zijn. Laten we de $y^k_{ij}$'s specialiseren;

$$(y^k_{ij}) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ y^k_{d_k,1} & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_k(t) = t^{d_k} - y^k_{d_k,1},$$

en deze is irreducibel in $\bar{F}(y^k_{d_k,1})[t]$ vanwege de voorwaarde van Eisenstein, zie bijvoorbeeld Lang [6, Ch. IV, §3, p.184]. Dus $P_k(t)$ is irreducibel in $\bar{F}(x_w)[t] = \bar{F}(y^k_{ij})[t]$. □

Vervolgens bestuderen we de coëfficiënten van $P(t)$. Vanwege de vermenigvuldigingsrelaties in $\mathcal{H}(W)$ volgt dat de coëfficiënten van $P(t)$ in $R[x_w]$ bevat zijn. De coëfficiënten van $P_k(t)$ liggen in $\bar{F}(x_w)$, en anderzijds in het lichaam voortgebracht door de nulpunten (in een eventuele uitbreiding van $\bar{F}(x_w)$) van de $P_k(t)$. Een nulpunt van $P_i(t)$ is een nulpunt van $P(t)$, en is dus geheel over de ring waarin de coëfficiënten van $P(t)$ zitten. Dit betekent dat de coëfficiënten van $P_k(t)$ bevat zijn in de gehele afsluiting van $R[x_w]$ in $\bar{F}(x_w)$. Merk op dat de gehele afsluiting bevat is in $\bar{F}[x_w]$, want de gehele afsluiting van $R[x_w]$ in $\bar{F}(x_w)$ is in het bijzonder bevat in de gehele afsluiting $\bar{F}[x_w]$ in $\bar{F}(x_w)$, hetgeen vanwege Stelling 3.5.4(iii) gelijk is aan $\bar{F}[x_w]$. Volgens Stelling 3.5.4(iv) is de gehele afsluiting van $R[x_w]$ in $\bar{F}[x_w]$, en dus in $\bar{F}(x_w)$, gelijk aan $I[x_w]$ met $I$ de gehele afsluiting van $R$ in $\bar{F}$. Vanwege Stelling 3.5.4(v) kunnen we dus elk van de polynomen $P_k(t)$ in de ontbinding van $P(t)$ gaan specialiseren.

Zij $\mathcal{H}(W)_\alpha$ de gespecialiseerde Hecke algebra met specialisatie $\sigma\colon R = \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}] \to \mathbb{C}$, $q_s \mapsto \alpha_s$. Beschouw het generieke element $\sigma(a) = \sum_w x_w T_w \in \mathbb{C}(x_w) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(W)_\alpha$, en $P_\sigma(t)$ het karakteristiek polynoom van de rechtsvermenigvuldiging met $\sigma(a)$. Dan is $P_\sigma(t)$ de specialisatie van $P(t)$, en omdat $\sigma$ lift naar de gehele afsluiting volgt dat $P_\sigma(t) = \prod_k P_{k,\sigma}(t)^{d_k}$, waarbij $P_{k,\sigma}(t)$ de specialisatie van $P_k(t)$ is. Omdat alle polynomen monisch zijn volgt dat de graad van $P_{k,\sigma}(t)$ gelijk is aan $d_k$.

We claimen nu dat de $d_k$'s ook de numerieke invarianten zijn van de gespecialiseerde Hecke algebra. Gebruik makend van de redenering als in Lemma 3.5.5 is dit zeker waar als alle $P_{k,\sigma}(t)$ ongelijk zijn en irreducibel over $\mathbb{C}(x_w)$. Maar als een van deze mogelijkheden wel voor zou komen, dan zou $P_\sigma(t)$ een irreducibele factor hebben met multipliciteit groter dan de bijbehorende graad, hetgeen weer in tegenspraak is met (het bewijs van) Lemma 3.5.5. $\square$

**Propositie 3.5.6.** *Zij $\sigma: R = \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}] \to \mathbb{C}$ een specialisatie $q_i \mapsto \alpha_i \in \mathbb{C}^*$. We veronderstellen de gespecialiseerde algebra $\mathcal{H}(W)_\alpha$ semisimpel. Zij $\psi: \mathcal{H}(W)_{\bar{F}} \to \bar{F}$ een irreducibel karakter, i.e. het spoor van de aktie van een element van $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}}$ op een simpel moduul. Dan geldt*

(i) *$\psi(T_w)$ is bevat in de gehele afsluiting $I$ van $R$ in $\bar{F}$.*
(ii) *$\psi^\sigma: \mathcal{H}(W)_\alpha \to \mathbb{C}$ gegeven door $\psi^\sigma(T_w) = \sigma(\psi(T_w))$ is een irreducibel karakter van $\mathcal{H}(W)_\alpha$.*
(iii) *De afbeelding $\psi \mapsto \psi^\sigma$ geeft een bijectie tussen de irreducibele karakters van $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}}$ en $\mathcal{H}(W)_\alpha$.*

**Gevolg 3.5.7.** *Zij $G$ een groep met een $BN$-paar en Weyl groep $W$. De irreducibele karakters van $H(G, B)$ staan in bijectief verband met $\hat{W}$, de verzameling irreducibele representaties modulo equivalentie.*

*Bewijs.* Zowel $H(G, B)$ als $\mathbb{C}[W]$ zijn specialisaties van de generieke Hecke algebra $\mathcal{H}(W)$, zodat Propositie 3.5.6(iii) een bijectie geeft van de irreducibele karakters van $H(G, B)$ en $\mathbb{C}[W]$. De laatste zijn niets anders dan de karakters van irreducibele representaties van $W$ die in bijectief verband met $\hat{W}$ staan. $\square$

*Bewijs van Propositie 3.5.6.* Zij $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}}$ een direkte som van matrix algebras over $\bar{F}$ zoals in het bewijs van Stelling 3.5.1, en laat nu $T_w = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k E_{ij}^k$ voor zekere $c_{ij}^k \in \bar{F}$. Dan zijn de irreducibele representaties van $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}}$ gegeven door $\rho_k: T_w \mapsto (c_{ij}^k)_{i,j=1,\dots,d_k}$ met bijbehorende karakters $\psi_k: T_w \mapsto \sum_i c_{ii}^k$. Nu kunnen we $\rho_k$ uitbreiden tot $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}(x_w)}$ en dan $\psi_k(\sum_w x_w T_w) = \sum_w x_w \sum_i c_{ii}^k$. Het karakteristieke polynoom van het generieke element op dit moduul is $P_k(t) \in I[x_w][t]$, en het karakter, ofwel het spoor, is een coëfficiënt van $P_k(t)$ tot op een minteken. Dus $\psi_k(\sum_w x_w T_w) \in I[x_w]$. Als we $\theta_w: \bar{F}[x_w] \to \bar{F}$ definiëren door $\theta_w(x_{w'}) = \delta_{w,w'}$, dan is $\theta_w$ een ringhomomorphisme en $\psi_k(T_w) = \theta_w(\psi_k(\sum_w x_w T_w)) \in I$, hetgeen (i) bewijst.

We hebben al gezien in Stelling 3.5.4(v) dat $\sigma$ uitbreidt tot de gehele afsluiting $I$, en dus is $\psi^\sigma$ goed gedefinieerd op $T_w$. Uit het bewijs van Stelling 3.5.1 weten we dat het karakteristieke polynoom van het generieke element $\sum_w x_w T_w \in \mathbb{C}(x_w) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(W)_\alpha$ op een irreducibel moduul van $\mathbb{C}(x_w) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(W)_\alpha$ gelijk is aan $P_{k,\sigma}(t) \in \mathbb{C}[x_w][t]$. Het spoor is dus gelijk aan dezelfde coëfficiënt, en dus is dit spoor de specialisatie $\sigma\big(\psi_k(\sum_w x_w T_w)\big)$. Het spoor van $T_w$ vinden we door $\theta_w: \mathbb{C}[x_w] \to \mathbb{C}$ toe te passen. Maar de operatoren $\theta_w$ en $\sigma$ commuteren, en dus is het karakter op $T_w$ voor dit moduul gelijk aan $\sigma\big(\psi_k(T_w)\big)$, ofwel aan het gespecialiseerde karakter.

Omdat de numerieke invarianten van $\mathcal{H}(W)_\alpha$ en $\mathcal{H}(W)_{\bar{F}}$ dezelfde zijn, volgt dat er evenveel karakters, namelijk het aantal matrix algebra's, zijn, en uit het bovenstaande blijkt het injectieve verband. $\square$

*Opmerking.* We gebruiken de notatie $T_w$ voor zowel de generieke Hecke algebra $\mathcal{H}(W)$ als voor de specialisaties $\mathcal{H}(W)_\alpha$.

*Voorbeeld 3.5.8.* De irreducibele karakters van de commutatieve Hecke algebra $\mathcal{H}(S_2)$ zijn de triviale representatie $\mathbf{1}\colon T_{s_1} \mapsto q$ en de teken representatie $\varepsilon\colon T_{s_1} \mapsto -1$. De irreducibele representaties van $\mathcal{H}(S_3)$ worden gelabeld door de partities van 3; (3), (111) en (21). De eerste correspondeert met de triviale representatie $\mathbf{1}$ en de tweede met de teken representatie $\varepsilon$. De partitie (21) correspondeert met de 2-dimensionale representatie gegeven door

$$T_{s_1} \mapsto \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T_{s_2} \mapsto \frac{1}{1-q^2} \begin{pmatrix} q-1 & 1-q^3 \\ q(1-q) & q^2(1-q) \end{pmatrix},$$

die voor $q = 1$ equivalent is met de spiegelings representatie van de Coxeter groep $S_3$, i.e. van type $A_2$. Het is nu eenvoudig het karakter $\chi$ uit te rekenen;

| $T_1$ | $T_{s_1}$ | $T_{s_2}$ | $T_{s_1 s_2}$ | $T_{s_2 s_1}$ | $T_{s_1 s_2 s_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $q-1$ | $q-1$ | $-q$ | $-q$ | 0 |

# 4. De ontbinding van $\mathrm{Ind}_B^G 1$

Dit hoofdstuk laat zien hoe Hecke algebra's kunnen worden gebruikt om geïnduceerde representaties te ontbinden. We ontwikkelen de Howlett-Lehrer-Lusztig theorie voor het speciale geval $\mathrm{Ind}_B^G 1$. Dit is een toelichting op Carter [2, Ch. 10].

## 4.1. Representatietheorie van eindige groepen.

In deze sectie herhalen we een aantal bekende feiten uit de representatietheorie van eindige groepen. In deze sectie is $G$ een eindige groep. We veronderstellen de lezer bekend met deze theorie, waarover meer informatie kan worden gevonden in bijvoorbeeld Serre [7] of Fulton en Harris [4].

Een **representatie** van $G$ is een homomorphisme $\rho: G \to GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$ met $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ de **graad** van de representatie, die we noteren met $\deg(\rho)$. $V$ wordt dan een links moduul voor de groepalgebra $\mathbb{C}[G]$. De representaties $\rho, \sigma: G \to GL_n(\mathbb{C})$ heten **equivalent**, notatie $\rho \sim \sigma$, als $\rho(g)T = T\sigma(g)$, $\forall g \in G$, voor zekere $T \in GL_n(\mathbb{C})$. De representatie $\rho$ heet **irreducibel** als voor een lineaire deelruimte $M \subset V \cong \mathbb{C}^n$ met $\rho(g)M \subset M$ volgt dat $M = \{0\}$ of $M = V \cong \mathbb{C}^n$. De direkte som van twee representaties $\rho_1: G \to GL_{n_1}(\mathbb{C})$ en $\rho_2: G \to GL_{n_2}(\mathbb{C})$ is de representatie $\rho_1 \oplus \rho_2: G \to GL_{n_1+n_2}(\mathbb{C})$ gedefinieerd door $\rho_1 \oplus \rho_2(g)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(g)v_1 \oplus \rho_2(g)v_2$. Dan is elke representatie van $G$ **volledig reducibel**, i.e. equivalent met een direkte som van irreducibele representaties.

Het **karakter** van een representatie $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ is $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^n} \rho(g)$. Dan is het karakter een klassefunktie, i.e. de funktie is constant op conjugatieklassen in $G$. We noemen deze funkties ook wel centrale funkties omdat $f(g_1g_2) = f(g_2g_1)$. Dan geldt dat $\rho$ en $\sigma$ equivalent zijn dan en slechts dan als $\chi_\rho = \chi_\sigma$. Een karakter $\chi_\rho$ heet **irreducibel** als $\rho$ een irreducibele representatie is. Elk karakter is de som van irreducibele karakters omdat $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$. In het bijzonder is $|\hat{G}| = \#\{\text{conjugatieklassen in } G\}$.

Het **Lemma van Schur** zegt nu dat voor twee irreducibele representaties $\rho_i: G \to GL(V_i)$ geldt dat

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 1, & \text{als } \rho_1 \sim \rho_2, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Definieer het inprodukt $\langle f_1, f_2 \rangle_G = |G|^{-1} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$ op de groepalgebra $\mathbb{C}[G]$. Dan vormen de irreducibele karakters, zeg $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ werkend op de vektorruimtes $V_i$, een orthonormale basis voor de klassefunkties ten opzichte van $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$. Bovendien voor een algemeen karakter $\chi = \sum_{i=1}^r n_i \chi_i$ werkend in de vektorruimte $V$ geldt

$$n_i = \langle \chi, \chi_i \rangle_G = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, V_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

ofwel $n_i$ is de multipliciteit van $V_i$ in $V$ in de ontbinding in irreducibele representaties. Als $\chi = \sum_{i=1}^r n_i \chi_i$ met $n_i \in \mathbb{Z}$ noemen we $\chi$ een **virtueel** karakter.

Merk op dat voor een karakter geldt dat $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ omdat elke representatie van $G$ unitariseerbaar, i.e. elke matrix $\rho(g)$ is unitair, is. Het spoor is de som van de eigenwaarden, zodat het gewenste resultaat volgt. Het volgt dat $\overline{f(g)} = f(g^{-1})$ voor elke klassefunktie $f \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$.

**Definitie 4.1.1.** *Zij $H \subset G$ een ondergroep met een representatie $\rho\colon H \to GL(M)$ met karakter $\chi_\rho$. Dan is $V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} M$ een links $\mathbb{C}[G]$-moduul, en een geeft een representatie van $G$, de zogenaamde* **geïnduceerde representatie** *van $H$ naar $G$. We noteren $V = \mathrm{Ind}_H^G M$ voor de representatieruimte, $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ voor de bijbehorende representatie en $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ voor het bijbehorende karakter.*

**Lemma 4.1.2.** $\mathrm{Ind}_H^G M \cong \{f\colon G \to M \mid f(gh) = \rho(h^{-1})f(g), \forall g \in G, \forall h \in H\}$, *en ook* $\mathrm{Ind}_H^G M \cong \sum_{s \in G/H}^{\oplus} s \cdot M$. *In het bijzonder geldt* $\deg(\mathrm{Ind}_H^G \rho) = \deg(\rho)\,|G/H|$.

In het bijzonder is $\mathbb{C}[G/B] = \{f\colon G \to \mathbb{C} \mid f(gb) = f(g), \forall g \in G, \forall h \in H\}$ is de representatieruimte voor $\mathrm{Ind}_B^G 1$.

*Bewijs.* Identificeer eerst $\mathbb{C}[G] \otimes M$ met de $M$-waardige funkties op $G$ door $\delta_g \otimes w$ te associëren met $f\colon G \to M$ zodat $f(g') = \delta_{gg'} w$. Het tensorprodukt nemen over $\mathbb{C}[H]$ betekent dat we het tensorprodukt $\mathbb{C}[G] \otimes M$ beschouwen modulo de equivalentierelatie $\delta_h \otimes w \sim 1 \otimes \rho(h)w$ voor alle $h \in H$ en $w \in M$. Ofwel $f\delta_h \otimes w = f \otimes \rho(h)w$ in $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} M$ voor $f \in \mathbb{C}[G]$, $h \in H$, $w \in M$. Het eerste element correspondeert met de $M$-waardige functie $g \mapsto f(gh^{-1})w$ en de tweede met $g \mapsto f(g)\rho(h)w$.

Laat $g_i \in G$ een verzameling representanten zijn voor $G/H$, i.e. $G = \cup_i g_i H$. Dan is $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} M = \sum_i g_i \otimes M$, want $\rho(H)M = M$. $\square$

*Opgave 4.1.3.* (i) Zij $H \subset K \subset G$ en $\rho$ een representatie van $G$. Laat zien dat inductie transitief is, i.e. $\mathrm{Ind}_K^G \mathrm{Ind}_H^K \rho = \mathrm{Ind}_H^G \rho$.
(ii) Zij $V = \bigoplus_i M_i$ een representatie van $G$ zodanig dat $G$ de deelruimtes $M_i$ transitief permuteert. Laat voor een vaste $j$ de ondergroep $H = \{g \in G \mid g \cdot M_j = M_j\}$. Bewijs dat $V = \mathrm{Ind}_H^G M_j$.

De eerste beschrijving van Lemma 4.1.2 generaliseert naar meer algemene groepen in termen van homogene vektorbundels.

We kunnen de laatste beschrijving van Lemma 4.1.2 gebruiken om $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ te bepalen in termen van $\chi$. $\mathrm{Ind}_H^G \chi(g) = \mathrm{tr}_V(g) = \sum_{s \in G/H} \mathrm{tr}_{s \cdot M}(g)$, en in de laatste som hoeven we enkel de termen mee te nemen waarvoor $s^{-1}gs \in H$ omdat anders $g$ de ruimte $s \cdot M$ niet stabiliseert en het spoor dan nul is. Maak gebruik van het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "s^{-1}gs"] \arrow[d, "s"'] & M \arrow[d, "s"] \\ s \cdot M \arrow[r, "g"] & s \cdot M \end{tikzcd}$$

om in te zien dat $\mathrm{tr}_{s \cdot M}(g) = \mathrm{tr}_M(s^{-1}gs)$, zodat we uiteindelijk

$$\mathrm{Ind}_H^G \chi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{s \in G,\ s^{-1}gs \in H} \chi(s^{-1}gs) \tag{4.1.1}$$

vinden. Merk op dat (4.1.1) de mogelijkheid biedt om ook inductie van klassefunkties op $H$ naar klassefunkties op $G$ te definiëren. In het bijzonder kunnen we ook spreken van het induceren van virtuele karakters.

**Stelling 4.1.4.** (Frobenius reciprociteit) *Laat $\phi$ een klassefunktie op $H \subset G$ en $\psi$ een klassefunktie op $G$ zijn, dan*

$$\langle \phi, \mathrm{Res}_H \psi \rangle_H = \langle \mathrm{Ind}_H^G \phi, \psi \rangle_G,$$

*waar* $\mathrm{Res}_H \psi$ *de restriktie van $\psi$ tot $H$ voorstelt.*

*Bewijs.* Het rechterlid is gelijk aan

$$\langle \mathrm{Ind}_H^G \phi, \psi \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \frac{1}{|H|} \sum_{z \in G,\, z^{-1}yz \in H} \phi(z^{-1}yz)\overline{\psi(y)}$$

vanwege (4.1.1). Ga over op $x = z^{-1}yz$ ofwel $y = zxz^{-1}$ en gebruik dat $\psi(zxz^{-1}) = \psi(x)$. De sommatie over $z \in G$ is dan triviaal geworden. $\square$

*Opgave 4.1.5.* Bewijs dat $\mathrm{Hom}_H(M, E) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G M, E)$ voor elke representatie van $G$ in de vektorruimte $E$. Dit bewijst Stelling 4.1.4 voor $\phi$ en $\psi$ karakters.

*Opgave 4.1.6.* We weten dat $\mathbb{C}[G]$ een semisimpele Artinse algebra over $\mathbb{C}$ is, en in het bijzonder geldt dat $M \cong \mathbb{C}[H]e$ voor zekere idempotent $e \in \mathbb{C}[H]$ vanwege Gevolg 3.3.14. Dan is $\mathrm{Ind}_H^G M \cong \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} \mathbb{C}[H]e = \mathbb{C}[G]e$. Bewijs dat de commutantenalgebra gelijk is aan

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G M, \mathrm{Ind}_H^G M) \cong e\mathbb{C}[G]e.$$

Hint: breidt het bewijs van Stelling 3.2.2 uit.

Laat $H \subset G$ een ondergroep van $G$ met representatie $\rho\colon H \to GL(M)$ in $M$. Zij nu $K \subset G$ een ondergroep van $G$, en laat $s \in K\backslash G/H$, dan is $K \cap {}^sH = K \cap sHs^{-1}$ een ondergroep van $K$, en we definiëren een representatie ${}^s\rho\colon K \cap {}^sH \to GL(M_s)$ met $M_s \cong M$ door middel van ${}^s\rho({}^sx) = \rho(x) \in GL(M)$.

**Stelling 4.1.7.** (Mackey) *Als representaties van de ondergroep $K \subset G$ geldt*

$$\mathrm{Res}_K \mathrm{Ind}_H^G \rho = \bigoplus_{s \in K\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{K \cap {}^sH}^K {}^s\rho.$$

*Bewijs.* Vanwege Lemma 4.1.2 volgt $\mathrm{Ind}_H^G M = \bigoplus_{x \in G/H} x \cdot M$. Voor $s \in K\backslash G/H$ stellen we $M(s)$ de deelruimte van $M$ opgespannen door $x \cdot M$ voor $x \in KsH$. Dan is elke $M(s)$ invariant onder $K$ en bovendien $\mathrm{Ind}_H^G M = \sum_{s \in K\backslash G/H} M(s)$. Rest nog te bewijzen dat $M(s)$ de representatieruimte is van $\mathrm{Ind}_{K \cap {}^sH}^K {}^s\rho$.

Merk eerst op dat $\{x \in K \mid x \cdot (s \cdot M) = s \cdot M\} = \{x \in K \mid (s^{-1}xs) \cdot M = M\} = \{x \in K \mid s^{-1}xs \in H\} = K \cap {}^sH$ vanwege Lemma 4.1.2. Bovendien permuteert $K$ de ruimtes $x \cdot M \subset M(s)$ op transitieve wijze per constructie. Vanwege Opgave 4.1.3(ii) volgt nu dat $M(s) = \mathrm{Ind}_{K \cap {}^sH}^K s \cdot M$. Omdat $s \cdot M \cong M_s$ als $K \cap {}^sH$-modulen gegeven door het isomorphisme $s\colon M_s \cong M \to s \cdot M$ volgt de stelling. $\square$

**Gevolg 4.1.8.** *Zij $H$, $K$ ondergroepen van $G$ met karakters $\chi$, $\psi$, dan*

$$\langle \mathrm{Ind}_K^G \psi, \mathrm{Ind}_H^G \chi \rangle_G = \sum_{s \in K\backslash G/H} \langle \mathrm{Res}_{K \cap {}^sH} \psi, \mathrm{Res}_{K\cap {}^sH} {}^s\chi \rangle_{K \cap {}^sH}.$$

*Bewijs.* Gebruik Frobenius reciprociteit, en vervolgens Mackeys stelling

$$\langle \mathrm{Ind}_K^G \psi, \mathrm{Ind}_H^G \chi \rangle_G = \langle \psi, \mathrm{Res}_K \mathrm{Ind}_H^G \chi \rangle_K = \sum_{s \in K\backslash G/H} \langle \psi, \mathrm{Ind}_{K\cap {}^sH}^K {}^s\chi \rangle_K.$$

Gebruik vervolgens weer Frobenius reciprociteit. □

Laten we nu het speciale geval $K = H$ nemen, dan is ${}^s\rho_s$ gedefinieerd. Bovendien kunnen we $\mathrm{Res}_{H\cap {}^sH}(\rho)$ definiëren, omdat $H \cap {}^sH$ een ondergroep van $H$ is.

**Gevolg 4.1.9.** (Mackeys irreducibiliteitscriterium) *De representatie* $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ *is irreducibel dan en slechts dan als de volgende twee voorwaarden zijn voldaan*

(i) *$\rho$ is een irreducibele representatie van $H$*
(ii) *voor elke $s \in G\backslash H$ zijn ${}^s\rho$ en* $\mathrm{Res}_{H\cap {}^sH}(\rho)$ *disjunkt als representaties van $H \cap {}^sH$, i.e. ze hebben geen gemeenschappelijke irreducibele constituent ofwel de karakters zijn orthogonaal.*

*Bewijs.* Vanwege Gevolg 4.1.8 voor $K = H$ hebben we

$$\dim_G(\mathrm{Ind}_H^G \rho, \mathrm{Ind}_H^G \rho) = \sum_{s \in H\backslash G/H} d_s, \qquad \text{met} \qquad d_s = \langle \mathrm{Res}_{H\cap {}^sH} \rho, {}^s\rho \rangle_{H \cap {}^sH}.$$

Merk vervolgens op dat voor de dubbele nevenklasse $s = 1$ geldt dat $d_1 = \langle \rho, \rho \rangle_H \geq 1$. We zien dus dat $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ irreducibel is dan en slechts dan als $d_1 = 1$ en $d_s = 0$ voor alle andere $s \in H\backslash G/H$. Het eerste betekent dat $\rho$ een irreducibele representatie van $H$ is, en het tweede betekent dat $\mathrm{Res}_{H\cap {}^sH}\rho$ en ${}^s\rho$ disjunkt zijn als representaties van $H \cap {}^sH$. □

### 4.2. Orthogonaliteitsrelaties voor symmetrische algebra's.

Laat $A$ een eindigdimensionale semisimpele algebra over een algebraïsch gesloten lichaam $k$ van karakteristiek 0 zijn. Uit Gevolg 3.3.14 weten we dat $A$ als links $A$-moduul een direkte som is van simpele modulen $L$, i.e. van minimale links idealen, $A = \bigoplus_{i=1}^n L_i$. Voor een minimaal links ideaal $L$ definiëren we de isotypische component $H = \sum_{L_i \cong L} L_i$.

**Stelling 4.2.1.** (Stelling van Wedderburn) *Zij $A$ een eindigdimensionale semisimpele algebra over een algebraïsch gesloten lichaam $k$ van karakteristiek* 0, *dan is $A = H_1 \oplus \ldots \oplus H_r$, $r \leq n$, een direkte som van isotypische componenten, de zogenaamde* **Wedderburn componenten**. *Dan is $H_i$, $i = 1, \ldots, r$, een tweezijdig ideaal en $H_iH_j = 0$, $i \neq j$. Laat $1 = e_1 + \ldots + e_r$ de ontbinding van $1 \in A$ zijn, dan zijn $\{e_1, \ldots, e_r\}$ orthogonale centrale idempotenten. Elke isotypische component $H_i$ bevat geen niet-triviale twee-zijdige idealen en $H_i$ is isomorph met een matrixalgebra over $k$. In het bijzonder is het centrum van $H_i$ opgespannen door $e_i$, en is het centrum van $A$ opgespannen door $\{e_1, \ldots, e_r\}$.*

*Bewijs.* De eerst uitspraak volgt direkt uit Gevolg 3.3.14.

Zij $L \subset H_i$ een minimaal ideaal en kies $a \in H_j$, dan is $La \subset H_j$ een minimaal ideaal dat of nul is of van het type dat bij de isotypische component van $H_j$ hoort. Als $i \neq j$ dan is $La = 0$. Dus $H_i H_j = 0$ voor $i \neq j$, en bijgevolg is $H_i$ een tweezijdig ideaal.

Als in het bewijs van Stelling 3.3.12 zien we dat $H_i = Ae_i = e_i A$, waar de laatste gelijkheid volgt omdat $H_i$ een tweezijdig ideaal is. Merk op dat dus $e_i$ als de identiteit werkt op $H_i$ en als 0 op $H_j$, $i \neq j$. Dus $e_i$ is centraal.

Zij $S$ een tweezijdig ideaal in $H_i$, dan is $S$ ook een tweezijdig ideaal in $A$ omdat $H_i H_j = 0$. Kies $L$ een minimaal ideaal $L = Ae \subset S$, en zij $L' = Ae'$ een ander minimaal ideaal in $H_i$. Dan is $L \cong L'$ als linker $A$-modulen, en $L' = La$ met $a \in H_i$. Omdat $S$ een tweezijdig ideaal is in $A$ volgt dat $L' \subset S$, en dus $H_i \subset S$.

Als $M$ een $H_i$-moduul is, dan is $h \mapsto h_l \mapsto m \to hm$ een algebrahomomorphisme van $H_i$ op $\mathrm{End}_k(M)$, want $D = \mathrm{End}_{H_i}(M) \cong k$, vanwege Gevolg 3.3.18(ii) en Propositie 3.3.20. Omdat $H_i$ simpel is het homomorphisme een isomorphisme. Het centrum van $\mathrm{End}_k(M)$ is 1-dimensionaal. $\square$

*Opgave 4.2.2.* Bewijs dat de idempotenten uit Stelling 4.2.1 primitieve centrale orthogonale idempotenten zijn, i.e. niet te schrijven als som van twee centrale orthogonale idempotenten.

**Definitie 4.2.3.** *Een algebra $A$ heet* **symmetrisch** *als er een niet-gedegenereerde symmetrische associatieve bilineaire vorm $(\cdot,\cdot)\colon A \times A \to k$ bestaat, i.e. $(a,b) = (b,a)$ en $(ab,c) = (a,bc)$.*

*Opmerking.* Een semisimpele algebra over een algebraïsch gesloten lichaam $k$ is symmetrisch. Het is voldoende dit aan te tonen voor $A = \mathrm{Mat}_n(k)$, en neem dan $(a,b) = \mathrm{tr}(ab)$. Dit is een speciaal geval van een resultaat van Eilenberg en Nakayama (1955).

Als $M$ een $A$-moduul is dan wordt het **karakter van** $M$ op de gebruikelijke manier bepaald; $\chi\colon A \to k$, $\chi_M(a) = \mathrm{tr}_M(a)$. Het karakter heet **irreducibel** als $M$ simpel is.

**Stelling 4.2.4.** (Kilmoyer) *Zij $A$ een eindigdimensionale symmetrische semisimpele algebra $A$ over een algebraïsch gesloten lichaam $k$. Stel dat $\{a_1, \dots, a_n\}$ en $\{b_1, \dots, b_n\}$ duale bases zijn voor $(\cdot,\cdot)$. Laat $\chi$ een irreducibel karakter van het moduul $M$ van $A$ zijn en stel $d_\chi = \sum_{i=1}^n \chi(a_i) b_i$. Dan geldt*

(i) $\chi(a) = (d_\chi, a)$ *voor alle $a \in A$,*
(ii) $\chi(d_\chi) \neq 0$ *en laat $e_i$ de centrale idempotent zijn van $H_i$ met $M \subset H_i$, dan $e_i = \chi(1)\chi(d_\chi)^{-1} d_\chi$,*
(iii) (Fossum) *Laat $z = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, en laat $\chi'$ een irreducibel karakter van $A$ zijn, dan is $z$ centraal en*

$$\chi'(d_\chi) = \sum_{i=1}^n \chi(a_i)\chi'(b_i) = \begin{cases} \chi(z)\chi(1)^{-1}, & \text{als } \chi = \chi', \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

*Opgave.* Werk Stelling 4.2.4 uit voor het geval $A = \mathbb{C}[G]$ met $G$ een eindige groep.

*Bewijs.* Merk op dat (i) triviaal is voor $a = a_i$, en dan volgt het voor algemene $a \in A$ vanwege lineariteit.

Zij $A = H_1 \oplus \ldots \oplus H_r$ de Wedderburn ontbinding van $A$ uit Stelling 4.2.1 met $H_i = Ae_i = e_iA$. Dan is $(Ae_i, Ae_j) = (A, e_iAe_j) = 0$, want $H_iH_j = 0$. Dus $(\cdot,\cdot)|_{H_i}$ is niet-gedegenereerd. Merk op dat $\chi(H_j) = 0$, $i \neq j$ vanwege $H_iH_j = 0$. Nu is $(d_\chi e_j, Ae_j) = (d_\chi, Ae_j) = \chi(Ae_j) = \chi(H_j) = 0$ voor $i \neq j$ vanwege (i). Dus $d_\chi e_j = 0$ voor $i \neq j$ en $d_\chi = d_\chi \cdot 1 = \sum_{j=1}^r d_\chi e_j = d_\chi e_i$, ofwel $d_\chi \in Ae_i = H_i$. Vervolgens merken we op dat $d_\chi$ centraal is in $H_i$. Immers $(xd_\chi, y) = (yx, d_\chi) = \chi(yx) = \chi(xy) = (d_\chi, xy) = (d_\chi x, y)$ voor alle $y \in A$. Dus $xd_\chi = d_\chi x$. Aangezien het centrum van $H_i$ 1-dimensionaal is volgt $e_i = Cd_\chi$ voor zekere $C \in k^*$. Door het spoor te nemen volgt $\chi(1) = \chi(e_i) = C\chi(d_\chi)$. Nu is $\chi(1) = \dim_k(M) \neq 0$ omdat $k$ karakteristiek 0 heeft.

Zij $\rho$ het karakter van het $A$-moduul $A$, dan is $\rho = \sum_{i=1}^r \chi_i(1)\chi_i$ als $\chi_i$ het karakter van een simpel moduul $M$ uit $H_i$ is. Anderzijds $aa_j = \sum_{k=1}^n (aa_j, b_k)a_k$, zodat $\rho(a) = \sum_{j=1}^n (a, a_jb_j) = (a, z)$ voor $a \in A$. Pas nu toe op $d_\chi$ en merk op dat $\chi_j(d_\chi) = 0$ omdat $d_\chi \in H_i$. Dus

$$\chi(z) = (d_\chi, z) = \rho(d_\chi) = \sum_{j=1}^r \chi_j(1)\chi_j(d_\chi) = \chi_i(1)\chi_i(d_\chi)$$

en dit geeft de kwadratische norm. Anderzijds, $\sum_{i=1}^n \chi(a_i)\chi'(b_i) = \chi'(d_\chi) = 0$ als $d_\chi \notin H_j$ de isotypische component voor het moduul bij $\chi'$. Dat $z$ centraal is volgt als de centraliteit van $u$ in Propositie 3.4.2. $\square$

### 4.3. De ontbinding van $\mathrm{Ind}_B^G 1$.

In het algemeen is er een verband tussen karakters in de decompositie van de geïnduceerde representatie en de karakters van de commutantenalgebra. We formuleren eerst een algemeen resultaat.

**Propositie 4.3.1.** *Laat $A$ en $B$ semisimpele algebras over $\mathbb{C}$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ zijn. Veronderstel dat $M$ een links $A$-moduul en een rechts $B$-moduul is, zodat $A$ en $B$ elkaars commutantenalgebra zijn. Laat $\{N_i\}_{i\in I}$ de collectie van inequivalente simpele links $B$-modulen zijn, dan is*

$$M \cong \bigoplus_{i\in I} \big(M \otimes_B N_i\big)^{\dim N_i}$$

*de ontbinding van $M$ in simpele links $A$-modulen. Bovendien is de dimensie van de simpele links $A$-modulen in $M$ gegeven door de multipliciteit van simpele rechts $B$-modulen in $M$.*

*Bewijs.* Merk eerst op dat voor $b \in B$ de afbeelding $M \otimes_B B \cdot b \to M \cdot b$ een isomorphisme van links $A$-modulen is. Immers, beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_B B & \xrightarrow{\cdot b} & M \otimes_B B \cdot b & \xrightarrow{i} & M \otimes_B B \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ M & \xrightarrow{\cdot b} & M \cdot b & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

Omdat de vermenigvuldiging met $b$ surjectief is, en de afbeeldingen $i$ injectief zijn, volgt dat de middelste verticale pijl ook een isomorphisme is.

Stel nu dat $N$ een simpel links $B$-moduul is, dan is ook $M \otimes_B N$ een simpel links $A$-moduul. Om dat in te zien veronderstellen we eerst dat $M$ een irreducibel rechts $B$-moduul is. Dan is $A \cong \mathbb{C}$, want $A$ is de commutant van $B$. We moeten dan laten zien dat $\dim_{\mathbb{C}} M \otimes_B N \leq 1$. Nu is $B \cong \bigoplus_i \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ en $N$ is een simpel links $B$-moduul, zodat we $N$ kunnen identificeren met één kolom van één van de $\mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$. Evenzo is $M$ te identificeren met één rij van één van de $\mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$, zodat $\dim_{\mathbb{C}} M \otimes_B N = 1$ als de $n_i$'s overeenstemmen en $\dim_{\mathbb{C}} M \otimes_B N = 0$ als de $n_i$'s niet overeenstemmen. Als $M$ niet irreducibel is, dan is $M = \bigoplus_i M_i^{m_i}$ de ontbinding van $M$ in simpele rechts $B$-modulen. Dan geldt $M \otimes_B N = \bigoplus_i (M_i \otimes_B N)^{m_i} \cong \mathbb{C}^{m_j}$ voor zekere $j$. Omdat $A$ de commutant van $B$ is volgt dat $A \cong \bigoplus_i \mathrm{Mat}_{m_i}(\mathbb{C})$, en $\mathbb{C}^{m_j}$ is dan overduidelijk een simpel links $A$-moduul.

Gebruik nu de Stelling 4.2.1 van Wedderburn om $B \cong \bigoplus_i N_i^{\dim_{\mathbb{C}} N_i}$, zodat $M \cong M \otimes_B B$ de gewenste ontbinding geeft.

Het bewijs laat zien dat $\dim_{\mathbb{C}} M \otimes_B N_i = m_i$, met $m_i$ een multipliciteit van een simpel rechts $B$-moduul in $M$ als rechts $B$-moduul. □

Zij $G$ een eindige groep met ondergroep $P$ met irreducibel karakter $\phi$. Het karakter komt van een moduul $M = \mathbb{C}[P]e$ en dan is $\mathrm{Ind}_P^G M = \mathbb{C}[G]e$ met karakter $\mathrm{Ind}_P^G \phi$. De commutantenalgebra is $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$, zie Opgave 4.1.6.

**Propositie 4.3.2.** *Er is een bijectieve correspondentie tussen de irreducibele karakters $\chi$ van $G$ met $\langle \mathrm{Ind}_P^G \phi, \chi \rangle_G \neq 0$ en irreducibele karakters $\chi_{\mathfrak{H}}$ van $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$. $\chi_{\mathfrak{H}}$ is de beperking van het karakter $\chi$ van $\mathbb{C}[G]$ tot $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$. De graad van $\chi_{\mathfrak{H}}$ is de multipliciteit van $\chi$ in $\mathrm{Ind}_P^G \phi$, i.e. $\chi_{\mathfrak{H}}(e) = \langle \mathrm{Ind}_P^G \phi, \chi \rangle_G$.*

*Bewijs.* Beschouw het moduul $M'$ dat het karakter $\chi$ geeft. Dan geldt $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G]e, M') \cong eM'$ door $em \colon e\mathbb{C}[G]e \to eM'$, $a \mapsto aem$. Het bewijs is volstrekt analoog aan het bewijs van Stelling 3.2.2. En dus

$$\dim_{\mathbb{C}} eM' = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G]e, M') = \langle \mathrm{Ind}_P^G \phi, \chi \rangle_G.$$

Nu is $eM'$ een links $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$-module. Bovendien is $eM'$ irreducibel, immers $e\mathbb{C}[G]em = e\mathbb{C}[G]m = eM'$ voor $0 \neq m \in eM'$, omdat $M'$ een irreducibel $\mathbb{C}[G]$-moduul is. Laat nu $x \in \mathfrak{H}$, dan $xM' \subset eM'$, en dus is $\chi(x) = \mathrm{tr}_{M'}(x) = \mathrm{tr}_{eM'}(x)$. Dus het irreducibele karakter $\chi_{\mathfrak{H}}$ op $\mathfrak{H}$ is de beperking van $\chi$ tot $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$.

Dit geeft nu het verband, en we moeten nu controleren dat het een bijectie is. Voor de surjectiviteit beschouwen we een irreducibel $\mathfrak{H}$-moduul $N = e\mathbb{C}[G]en$ voor een zekere idempotent $n \in \mathfrak{H}$ met irreducibel karakter $\psi$. Dan is $n$ een primitieve idempotent in $\mathbb{C}[G]$. Immers, als $n = n_1 + n_2$ met $n_1, n_2 \in \mathbb{C}[G]$ orthogonale idempotenten dan is $n_1 = nn_1 = nn_1n \in e\mathbb{C}[G]e$ en idem $n_2 \in e\mathbb{C}[G]e$ in tegenspraak met de primitiviteit van $n \in e\mathbb{C}[G]e$. Dus $\mathbb{C}[G]n$ is een irreducibel $\mathbb{C}[G]$-moduul met een zeker irreducibel karakter $\chi$, maar dan $\chi_{\mathfrak{H}} = \psi$. De afbeelding is surjectief.

Om injectiviteit in te zien veronderstellen we dat $\mu$ een irreducibel karakter van $\mathbb{C}[G]$-moduul $V$ zodanig dat $\chi_{\mathfrak{H}} = \psi = \mu_{\mathfrak{H}}$. Beschouw de afbeelding $N \to ne\mathbb{C}[G]en = \mathbb{C}n$ door van links met de primitieve idempotent $n$ te vermenigvuldigen. Immers, $e\mathbb{C}[G]en$ is irreducibel, en dus is de commutantenalgebra $ne\mathbb{C}[G]en$ ééndimensionaal. In het bijzonder volgt $\psi(n) = 1$, en dus ook $\chi(n) = \mu(n) = 1$. Ofwel, $nV \neq 0$, en dus bestaat er een $v \in V$

met $nv \neq 0$. Beschouw nu de afbeelding $\mathbb{C}[G]n \to V$, $x \mapsto xv$. Deze afbeelding is niet nul, en commuteert met de $\mathbb{C}[G]$-aktie. Aangezien beide modulen irreducibel zijn, volgt $\mathbb{C}[G]n \cong V$ en dus $\chi = \mu$. $\square$

*Opmerking 4.3.3.* Propositie 4.3.2 kan worden vergeleken met Propositie 4.3.1. Neem daartoe $M = \mathbb{C}[G]e$, $A = \rho(\mathbb{C}[G])$, i.e. het beeld van $\mathbb{C}[G]$ onder de bijbehorende representatie in $\mathrm{End}(\mathbb{C}[G]e)$, en $B = \mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$. Dan zijn $e\mathbb{C}[G]en$ voor $n$ primitieve idempotenten in $\mathfrak{H}$ de simpele links $\mathfrak{H}$-modulen, en het bijbehorende simpele links $\mathbb{C}[G]$-moduul in $\mathbb{C}[G]e$ is $\mathbb{C}[G]e \otimes_{\mathfrak{H}} e\mathbb{C}[G]en = \mathbb{C}[G]n$. Dan zegt Propositie 4.3.2 dat het karakter $\chi_{\mathfrak{H}}$ van het irreducibel links $\mathfrak{H}$-moduul $e\mathbb{C}[G]en$ verkregen wordt door het karakter $\chi$ van het irreducibel links $\mathbb{C}[G]$-moduul $\mathbb{C}[G]n$ te beperken tot $\mathfrak{H}$. De ontbinding van $\mathbb{C}[G]e$ als links $\mathbb{C}[G]$-moduul is dan gelabeld door de primitieve idempotenten $n$ van $e\mathbb{C}[G]e$ met bebijhorend moduul $\mathbb{C}[G]n$ en multipliciteit $\dim_{\mathbb{C}} e\mathbb{C}[G]en$.

Zij $G$ een eindige groep met een $BN$-paar. We beschouwen de geïnduceerde representatie $\mathrm{Ind}_B^G 1$ werkend in $\mathbb{C}[G/B] = \mathbb{C}[G]e$ met als commutantenalgebra de Hecke algebra $H(G,B)$, een specialisatie van de generieke Hecke algebra $\mathcal{H}(W)$ met $W$ de Weyl groep van $G$.

**Lemma 4.3.4.** *Het spoor van de aktie van $T_w \in e\mathbb{C}[G]e$ op $\mathbb{C}[G/B]$ als rechts $e\mathbb{C}[G]e$-moduul is nul voor $1 \neq w \in W$.*

*Bewijs.* Gebruik dat $\mathbb{C}[G/B] = \bigoplus_i g_i \cdot \mathbb{C}$ vanwege Lemma 4.1.2 voor een verzameling representanten van $G/B$. Dan kiezen we een basis van functies $f_i$ door $f_i(g_j) = \delta_{ij}$ te definiëren. Dan is $(f_i T_w)(g_j) = |B|^{-1} \sum_{g \in G} f_i(g_j g^{-1}) \chi_{BwB}(g) = |B|^{-1} \sum_{g \in BwB} f_i(g_j g^{-1})$. Stel dat $f_i T_w(g_i) \neq 0$, dan $g_i b_1 w^{-1} b_2 \in g_i B$ voor zekere $b_1, b_2 \in B$ en dus $w \in B$ ofwel $w = 1 \in W$ vanwege de Bruhat ontbinding. $\square$

De Hecke algebra $H(G,B)$ is een symmetrische algebra als specialisatie van de generieke Hecke algebra door middel van $(a,b) = \tau(ab) =$ constante term van $(ab)$ met als basis $T_w$ en duale basis $\mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1} T_{w^{-1}}$, zie Propositie 3.4.1, waarbij $\sigma\colon \mathbb{C}[q_s, q_s^{-1}] \to \mathbb{C}$ de bijbehorende specialisatie is, zie Propositie 3.5.6.

**Propositie 4.3.5.** *Zij $\chi_{\mathfrak{H}}$ een irreducibel karakter van $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$ dat voorkomt met multipliciteit $m$ in het rechts $\mathfrak{H}$-moduul $\mathbb{C}[G/B] = \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}$. Dan*

$$m = \frac{\chi_{\mathfrak{H}}(T_1) \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}}{\sum_{w \in W} \chi_{\mathfrak{H}}(T_w) \mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1} \chi_{\mathfrak{H}}(T_{w^{-1}})}.$$

*Bewijs.* Laat $\chi_{\mathfrak{H}}^1, \ldots, \chi_{\mathfrak{H}}^n$ de irreducibele karakters van $\mathfrak{H}$ zijn die voorkomen met multipliciteit $m_i$, dan

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}}(T_w) = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{\mathfrak{H}}^j(T_w) = \delta_{w,1} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C} \tag{4.3.1}$$

vanwege Lemma 4.3.4. Vermenigvuldig met $\chi^i_{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1}T_{w^{-1}})$ en sommeer over $w \in W$, zodat

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G\mathbb{C}\ \chi^i_{\mathfrak{H}}(T_1) &= \sum_{w\in W}\sum_{j=1}^{n} m_j\chi^j_{\mathfrak{H}}(T_w)\chi^i_{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1}T_{w^{-1}})\\ &= m_i\chi^i_{\mathfrak{H}}(T_w)\chi^i_{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1}T_{w^{-1}})\end{aligned}$$

vanwege Stelling 4.2.4. □

Merk op dat $m = \big(\chi_{\mathfrak{H}}(T_1)\big)^2 \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G\mathbb{C}/\chi_{\mathfrak{H}}(u)$ vanwege Stelling 4.2.4 en Propositie 3.4.2.

**Gevolg 4.3.6.** *Zij $\chi$ een irreducibel karakter van $G$ zodanig dat $\langle \mathrm{Ind}_B^G 1, \chi\rangle_G \neq 0$, dan*

$$\deg\chi = \chi(1) = \frac{\chi_{\mathfrak{H}}(T_1)\ \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G\mathbb{C}}{\sum_{w\in W}\chi_{\mathfrak{H}}(T_w)\mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1}\chi_{\mathfrak{H}}(T_{w^{-1}})}$$

*met $\chi$ en $\chi_{\mathfrak{H}}$ gerelateerd als in Propositie 4.3.2.*

*Bewijs.* Pas Propositie 4.3.1 toe met $M = \mathbb{C}[G]e = \mathbb{C}[G/B] = \mathrm{Ind}_B^G\mathbb{C}$, $A$ het beeld onder deze representatie van $\mathbb{C}[G]$ en $B = \mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$. Merk op dat voor de semisimpele algebra $e\mathbb{C}[G]e$ het karakter van een simpel links moduul $e\mathbb{C}[G]en$ hetzelfde is als het karakter van het simpele rechts moduul $ne\mathbb{C}[G]e$. Gebruik hiervoor de realisatie van $e\mathbb{C}[G]e$ als direkts som van matrix algebras. Het volgt nu uit Propositie 4.3.2, Propositie 4.3.5 en Opmerking 4.3.3. □

*Opmerking 4.3.7.* Met Gevolg 4.3.6 kunnen we (4.3.1) herschrijven tot

$$\sum_{\chi\in\hat{G},\ \langle\chi,\mathrm{Ind}_B^G 1\rangle_G\neq 0} \deg\chi\,\chi_{\mathfrak{H}}(T_w) = \delta_{w,1}\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ind}_B^G\mathbb{C}, \qquad \forall\, w\in W$$

hetgeen in het algemeen een overgedetermineerd lineair stelsel vergelijkingen voor de graden geeft. Immers het aantal irreducibele karakters is gelijk aan het aantal irreducibele karakters van $W$, vanwege Gevolg 3.5.7 en Propositie 4.3.2. Dat is gelijk aan het aantal conjugatieklassen in $W$, wat strikt kleiner is dan $|W|$ tenzij $W$ abels is.

**Definitie 4.3.8.** *Zij $\chi_{\mathfrak{H}}$ een irreducibel karakter van $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e = H(G,B)$, de gespecialiseerde Hecke algebra $\mathcal{H}(W)_\alpha$, die correspondeert met het irreducibele karakter $\psi$ van de generieke Hecke algebra $\mathcal{H}(W)$, i.e. $\psi^\sigma = \chi_{\mathfrak{H}}$, zie Gevolg 3.5.7. Dan is*

$$d_\psi = \frac{\deg\psi\ \sum_{w\in W}\mathbf{1}(T_w)}{\sum_{w\in W}\psi(T_w)\psi(\mathbf{1}(T_w)^{-1}T_{w^{-1}})} \in \bar{F}$$

*de* **generieke graad** *horend by $\chi_{\mathfrak{H}}$.*

We kunnen Gevolg 4.3.6 herschrijven als

$$\deg\chi = \frac{\sigma(d_\psi)\ \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ind}_B^G\mathbb{C}}{\sum_{w\in W}\mathbf{1}^\sigma(T_w)},$$

hetgeen de naam generieke graad verklaart. De generieke graden zijn volledig getabuleerd.

Voor de 1-dimensionale representaties $\mathbf{1}$, de triviale representatie $T_s \mapsto q_s$, en de tekenrepresentatie $\varepsilon$, $T_s \mapsto -1$, verkrijgen we irreducibele karakters $\chi_{\mathbf{1}}$ en $\chi_\varepsilon$ in de ontbinding van $\mathbb{C}[G/B]$ van de graad $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C} / \sum_{w \in W} \mathbf{1}^\sigma(T_w)$ en $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C} / \sum_{w \in W} \mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1}$.

We zien dat we $\mathrm{Ind}_B^G 1$ volledig in irreducibele karakters van $G$ kunnen ontbinden met multipliciteiten en graden bekend door de representatietheorie van de gespecialiseerde Hecke algebra $H(G,B)$ te gebruiken; $\mathrm{Ind}_B^G 1 = \sum_{\pi \in \hat{W}} \chi_{\mathfrak{H}}^\pi(1)\, \chi^\pi$ voor irreducibele representaties $\pi$ met bijbehorend karakter $\chi_{\mathfrak{H}}^\pi$ van $\mathfrak{H} = e\mathbb{C}[G]e$, Gevolg 3.5.7, en karakter $\chi^\pi$ van $G$ dat voorkomt in $\mathrm{Ind}_B^G 1$, Propositie 4.3.2.

*Opmerking 4.3.9.* De som $\sum_{w \in W} \mathbf{1}(T_w)$ is een polynoom in de $q_s$, en dit heet het **Poincaré polynoom** $P_W$. Voor alle eindige Coxeter groepen $W$ is dit polynoom bekend. Voor $W = S_n$ hebben we

$$P_{S_n}(q) = \sum_{w \in S_n} q^{\ell(w)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{q^i - 1}{q - 1}.$$

Dit kan met inductie naar $n$ worden bewezen. Het geval $n = 2$ is eenvoudig. Kies nu $S_n \subset S_{n+1}$ als maximaal parabolische ondergroep met $J = \{1, \ldots, n-1\}$, dan kunnen we $\sigma_i = s_n s_{n-1} \ldots s_i$, $i = 1, \ldots, n$ en $\sigma_0 = 1$ representanten van nevenklassen $S_{n+1}/S_n$ nemen. Met Propositie 1.4.4 zien we dat dit de minimale representanten zijn, zodat de lengtes optellen, ofwel

$$P_{S_{n+1}}(q) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{w \in S_n} q^{\ell(\sigma_i) + \ell(w)} = \sum_{i=0}^{n} q^i P_{S_n}(q) = P_{S_n}(q) \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

*Voorbeeld 4.3.10.* In dit voorbeeld nemen we $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ met de standaard Borelondergroep $B$ van bovendriehoeksmatrices. Merk op dat $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1})$, omdat we de eerste kolom van een matrix vrij kunnen kiezen in $\mathbb{F}_q^n - \{0\}$, en dit geeft $q^n - 1$ mogelijkheden. De tweede kolom kunnen we vrij kiezen, maar niet in de lijn opgespannen door de eerste kolom, dit geeft $q^n - q$ mogelijkheden, etc. Nu is $|B| = (q-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, want we kunnen de diagonaalelementen willekeurig, maar verschillend van 0, kiezen, en dan blijven er nog $q$ keuzen voor elk van de matrixelementen boven de diagonaal over. Dus $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C} = |G\colon B| = P_{S_n}(q)$, hetgeen in grotere algemeenheid geldt.

Met het triviale karakter $\mathbf{1}^\sigma$ van $H(G,B)$ correspondeert dus een karakter $\chi$ van $G$ met $\deg\chi = 1$. Dit is het triviale karakter van $G$ dat in $\mathrm{Ind}_B^G 1$ zit vanwege $\langle \mathrm{Ind}_B^G 1, 1 \rangle_G = \langle 1, 1 \rangle_B = 1$, vanwege Frobenius reciprociteit. De tekenrepresentatie $\varepsilon$ van $H(G,B)$ correspondeert met een karakter met graad $P_{S_n}(q)/P_{S_n}(q^{-1}) = q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, het zogenaamde Steinberg karakter St.

In geval $n = 2$ is de Hecke algebra commutatief, en is de ontbinding van $\mathrm{Ind}_B^G 1$ multipliciteitsvrij. Omdat $\mathcal{H}(S_2)$ slechts de twee 1-dimensionale representaties heeft, volgt $\mathrm{Ind}_B^G 1 = 1 + \mathrm{St}$. Merk op dat $\deg(\mathrm{Ind}_B^G 1) = q + 1$.

In geval $n = 3$ is de Hecke algebra 6-dimensionaal, en de karaktertheorie van de gespecialiseerde Hecke algebra $H(GL_3(\mathbb{F}_q), B)$ is gelijk aan die van $S_3$, zie Voorbeeld 3.5.8.

Deze heeft twee 1-dimensionale representaties, namelijk de triviale en de tekenrepresentatie horend bij de partities (3) en (111), en 1 2-dimensionale representatie horend bij (21). Voor het enige karakter $\chi$ van graad 2 berekenen we nu $\sum_{w\in S_3}\chi(T_w)\mathbf{1}^\sigma(T_w)^{-1}\chi(T_{w^{-1}}) = 6+2(q-1)^2q^{-1}$, en de bijbehorende generieke graad is $q(q+1)$. Dus de graad van de bijbehorende representatie van $G$ die in $\mathrm{Ind}_B^G 1$ voorkomt is $q(q+1)$, en die komt voor met multipliciteit 2. Dus we krijgen

$$\mathrm{Ind}_B^{GL_3(\mathbb{F}_q)}1 = 1+\mathrm{St}+2\chi.$$

We krijgen hetzelfde resultaat door Opmerking 4.3.7 toe te passen voor $n=3$ en $w=1$, dan volgt

$$1\cdot 1+\mathrm{St}(1)\cdot 1+\deg\chi\cdot 2 = |GL_3(\mathbb{F}_q)\colon B| = (1+q)(1+q+q^2).$$

In dit geval is $\mathrm{St}(1)=q^3$ zodat we $\deg\chi = q^2+q$ vinden als voorheen. Merk op dat we nu dat we niet de expliciete 2-dimensionale representatie van $\mathcal{H}(S_2)$ hebben gebruikt.

Voor $S_4$ en $\mathcal{H}(S_4)$ zijn er 5 representaties (2 van graad 1, 2 van graad 3 en 1 van graad 4), en we kunnen de bijbehorende generieke graden berekenen. Zie Carter [2, §13.5].

# 5. Cuspidale karakters en inductie

In dit hoofdstuk tonen we aan dat het voldoende is om de zogenaamde cuspidale karakters van alle Levi ondergroepen te kennen om via inductie vanaf parabolische ondergroepen alle karakters van de groep $G$ te verkrijgen. Dit is de philosophie van Harish-Chandra. Dit is een toelichting op Carter [2, Ch. 9]. Voor het ontbinden van geïnduceerde representaties van de cuspidale representaties van Levi ondergroepen spelen Hecke algebras weer een grote rol. Dit is de Howlett-Lehrer-Lusztig theorie, zie Carter [2, Ch. 10].

## 5.1. Parabolische ondergroepen.

In dit gehele hoofdstuk is $G$ een eindige groep met een splijt $BN$-paar van karakteristiek $p$ dat aan de commutator relaties voldoet, zie Carter [2, Ch. 2]. Dit zijn de nodige technische voorwaarden die het volgende impliceren. Elke standaard parabool $P_J$, $J \subseteq I$, de ontbinding $P_J = U_J \rtimes L_J$ heeft waarbij $L_J$ een groep is met een splijt $BN$-paar dat aan de commutator relaties voldoet, de zogenaamde **Levi component** en waarbij $U_J$ de maximale normale unipotente ondergroep van $P_J$ is. In het bijzonder geldt dat voor $I = J$, en dan verkijgen we dat $G = P_I = L_I$ en $U_I = \{1\}$, ofwel $G$ heeft geen normale unipotente ondergroep. Voor het andere uiterste geval hebben we $P_\emptyset = B = U_\emptyset \rtimes L_\emptyset$ met $L_\emptyset = H = B \cap N$. We stellen $U = U_\emptyset$. We veronderstellen bovendien dat $H$ geheel uit semisimpele elementen bestaat. Elke eindige groep van Lie type is een een groep met een splijt $BN$-paar dat aan de commutator relaties voldoet.

*Voorbeeld 5.1.1.* Voor $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ met $B$ de ondergroep van bovendriehoeksmatrices, $N$ de groep van monomiale matrices, $H$ de groep van diagonaal matrices, $U$ de groep van unipotente bovendriehoeksmatrices, en $W = S_n$, $I = \{1, \ldots, n\}$ zijn alle voorwaarden vervuld. Immers voor $J = \{1, \ldots, n_1 - 1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2 - 1, \ldots\}$ met $n = n_1 + \ldots + n_r$ een partitie van $n$ hebben we dat, zie Voorbeeld 2.3.4, $P_J$ bestaat uit de ondergroep van matrices van de vorm

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1r} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \ldots & B_{2r} \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & A_{r-1} & B_{r-1,r} \\ 0 & \ldots & & 0 & A_r \end{pmatrix}, \quad A_i \in GL_{n_i}(\mathbb{F}_q), \quad B_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n_i,n_j}(\mathbb{F}_q). \tag{5.1.1}$$

Dan correspondeert $L_J$ met de matrices waarvoor $B_{ij} = 0$, ofwel $L_J \cong GL_{n_1}(\mathbb{F}_q) \times \ldots \times GL_{n_r}(\mathbb{F}_q)$, dat inderdaad weer van hetzelfde type is. De bijbehorende maximale normale unipotente ondergroep correspondeert dan met $A_i = 1$, $i = 1, \ldots, r$. We kunnen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat de $H_J$ van $L_J$ overeenkomt met de $H$ van $G$, en dat $B_J$ de groep van bovendriehoeksmatrices is die in $L_J$ liggen ten opzichte van de matrix als in (5.1.1).

Het volgende lemma is duidelijk in Voorbeeld 5.1.1, maar geldt in grotere algemeenheid zie Carter [2, Prop. 2.6.6-7].

**Lemma 5.1.2.** *Zij $J \subseteq I$, $P_J = U_J \rtimes L_J$, dan zijn de standaard parabolische ondergroepen van $L_J$ gegeven door $K \subset J \subset I$ van de vorm $L_J \cap P_K$. Deze hebben de ontbinding*

$$P_K \cap L_J = (U_K \cap L_J) \rtimes L_K$$

*in een semidirekt produkt van een maximale normale uniptente ondergroep maal de Levi component.*

### 5.2. Cuspidale karakters.

**Definitie 5.2.1.** *Zij $G$ een eindige groep met normale ondergroep $N$ en karakter $\chi$, dan heet*

$$T_{G/N}(\chi)(g) = \frac{1}{|N|}\sum_{n\in N}\chi(ng)$$

*het* **afgebroken karakter** *van $G/N$.*

Om in te zien dat dit inderdaad een karakter van $G/N$ is laten we $V \subset \mathbb{C}[G]$ de representatieruimte waarvan we het karakter $\chi$ verkrijgen. Dan werkt de idempotent $e_N = |N|^{-1}\sum_{n\in N} n \in \mathbb{C}[G]$ als een projektie op de ruimte van $N$-vaste vectoren $V^N = \{v \in V \mid n \cdot v = v\, \forall n \in N\}$. Merk op dat $e_N$ centraal is in $\mathbb{C}[G]$, omdat $H$ normaal is in $G$. Dan is $V^N$ een moduul voor $G/N$, en dan is $\chi(e_N g) = \mathrm{Tr}_V(e_N g) = \mathrm{Tr}_{V^N}(e_N g)$. Ofwel $T_{G/N}(\chi)$ is het karakter van $G/N$ dat van $V^N$ komt.

**Definitie 5.2.2.** *Zij $G$ een groep met een splijt $BN$-paar dat aan de commutator relaties voldoet, zodat $P_J = U_J \rtimes L_J$ voor elke standaard parabolische ondergroep. Een karakter van $G$ heet* **cuspidaal** *als $T_{P_J/U_J}(\chi) = 0$ voor elke parabool $P_J \subsetneqq G$.*

Aangezien elke parabolische ondergroep geconjugeerd is met een standaard parabolische ondergroep volgt dat $T_{P/U(P)}(\chi) = 0$ voor cuspidale karakters $\chi$ met $U(P)$ de maximale normale unipotente ondergroep van $P$.

*Opmerking 5.2.3.* Als $G$ geen echte parabolische ondergroepen heeft dan is de voorwaarde in Definitie 5.2.2 leeg, en zijn alle karakters cuspidaal. In dat geval moeten we hebben dat $G = B = U \rtimes H$. Maar omdat $G$ geen normale unipotente ondergroep heeft volgt dat $G = H$ abels is.

**Propositie 5.2.4.** *Zij $\chi$ een irreducibel karakter van $G$. Dan is $\chi$ cuspidaal dan en slechts dan als $\langle \chi, \mathrm{Ind}_{U_J}^G 1\rangle_G = 0$ voor alle $J \subsetneqq I$.*

*Bewijs.* Als $\chi$ cuspidaal is, dan

$$0 = T_{P_J/U_J}(\chi)(1) = \frac{1}{|U_J|}\sum_{u\in U_J}\chi(u) = \langle \mathrm{Res}_{U_J}\chi, 1\rangle_{U_J} = \langle \chi, \mathrm{Ind}_{U_J}^G 1\rangle_G$$

voor alle $J \subsetneqq I$.

Omgekeerd, stel dat $0 = \langle \chi, \mathrm{Ind}_{U_J}^G 1\rangle_G = \langle \mathrm{Res}_{U_J}\chi, 1\rangle_{U_J}$ voor alle $J \subsetneqq I$. Laat $\rho$ de representatie van $G$ zijn met karakter $\chi$. Dan betekent dit dat $\rho|_{U_J}$ niet de triviale representatie bevat voor elke $J \subsetneqq I$. Vanwege het Lemma van Schur volgt dat alle matrix elementen van $\rho$ loodrecht staan op het matrix element van de triviale representatie van $U_J$; ofwel $\sum_{u\in U_J}\rho_{ij}(u) = 0$, maar dan geldt dit ook voor de matrix $\sum_{u\in U_J}\rho(u) = 0$. Door van rechts te vermenigvuldigen met $\rho(g)$, $g \in G$, zien we dat $\sum_{u\in U_J}\rho(ug) = 0$. Neem nu het spoor, zodat $\sum_{u\in U_J}\chi(ug) = 0 = \sum_{u\in U_J}\chi(gu)$. Neem vervolgens $g \in P_J$. $\square$

Als $\langle \mathrm{Res}_{U_J}\chi, 1\rangle_{U_J} = 0$, dan is $V^{U_J} = \{0\}$, en is het karakter $T_{P_J/U_J}(\chi) = 0$. Het bovenstaande bewijs geeft echter meer informatie.

**Gevolg 5.2.5.** *Zij $\chi$ een irreducibel karakter van $G$, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*
(i) *$\chi$ is een cuspidaal karakter,*
(ii) *$\langle \chi, \mathrm{Ind}_{U_J}^G 1\rangle_G = 0$ voor alle $J \subsetneqq I$,*
(iii) *$\sum_{u\in U_J} \chi(ug) = 0$ voor alle $g \in G$ en alle $J \subsetneqq I$,*
(iv) *$\sum_{u\in U_J} \chi(gu) = 0$ voor alle $g \in G$ en alle $J \subsetneqq I$.*

*Bewijs.* Vanwege Propositie 5.2.4 is (i) $\Leftrightarrow$ (ii), en omdat $\chi$ centraal is volgt (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Het bewijs van Propositie 5.2.4 laat zien dat (ii) $\Rightarrow$ (iii), en (iv) $\Rightarrow$ (i) per definitie door $g \in P_J$ te nemen. $\square$

**5.3. Inductie van cuspidale karakters.**

Zij $P_J = U_J \rtimes L_J$ een parabolische ondergroep van $G$. Voor $L_J$ kunnen we spreken van cuspidale karakters, aangezien $L_J$ een ondergroep binnen dezelfde klasse is. Zij $\phi$ een irreducibel karakter van $L_J$, dan kunnen we $\phi$ naar $P_J \supset L_J$ opblazen door middel van $\phi_{P_J}(ul) = \phi(l)$ hetgeen goed gedefinieerd is omdat $L_J \cap U_J = \{1\}$.

**Stelling 5.3.1.** *Zij $\chi$ een irreducibel karakter van $G$. Dan bestaat er een deelverzameling $J \subseteqq I$ en een irreducibel cuspidaal karakter $\phi$ van $L_J$ zodanig dat $\langle \chi, \mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}\rangle_G > 0$.*

*Bewijs.* We gaan eerst de $J$ en de $\phi$ bepalen. Zij daartoe $\mathcal{S} = \{J \subseteqq I \mid \langle \mathrm{Res}_{U_J}\chi, 1\rangle_{U_J} \neq 0\}$. Dan is $I \in \mathcal{S}$, want $U_I = \{1\}$ en $\langle \mathrm{Res}_{U_I}\chi, 1\rangle_{U_I} = \chi(1) \neq 0$. Laat $J$ een minimaal element van $\mathcal{S}$ zijn.

Zij $V$ een representatieruimte voor het karakter $\chi$ van $G$, dan zijn er $U_J$-vaste vectoren omdat de triviale representatie van $U_J$ voorkomt in $\mathrm{Res}_{U_J}\chi$. Zij $V' = \{v \in V \mid uv = v\, \forall u \in U_J\}$. Omdat $U_J$ normaal is in $P_J$ is de ruimte $V'$ ook $P_J$-invariant, en in het bijzonder $L_J$-invariant. Laat $\phi$ het bijbehorende karakter van $L_J$ zijn, en laat $\phi = \sum_i \phi_i$ de ontbinding in irreducibele karakters zijn. Merk op dat het karakter van $P_J$ precies het opgeblazen karakter $\phi_{P_J} = \sum_i (\phi_i)_{P_J}$ is, omdat $U_J$ triviaal werkt op $V'$. Dus komt elke $(\phi_i)_{P_J}$ voor in $\mathrm{Res}_{P_J}\chi$, en $\langle \mathrm{Ind}_{P_J}^G (\phi_i)_{P_J}, \chi\rangle_G = \langle (\phi_i)_{P_J}, \mathrm{Res}_{P_J}\chi\rangle_{P_J} \neq 0$.

Rest nog aan te tonen dat elk karakter $\phi_i$ een cuspidaal karakter van $L_J$ is. Stel dat $\phi_i$ geen cuspidaal karakter van $L_J$ is, dan bestaat er een verzameling $K \subsetneqq J$ met $\langle \phi_i, 1\rangle_{U_K \cap L_J} \neq 0$ vanwege Gevolg 5.2.5(iii) en Lemma 5.1.2. Dan bestaat er een $v \in V'$ met $xv = v\ \forall x \in U_K \cap L_J$. Maar dan is $v \in V'$ ook invariant onder $U_K \cap P_J = U_K$, omdat $P_J = U_J \rtimes L_J$. Ofwel $\langle \mathrm{Res}_{U_K}\chi, 1\rangle_{U_K} \neq 0$ en $K \in \mathcal{S}$, in tegenspraak met de minimaliteit van $J$. $\square$

*Opmerking.* Stelling 5.3.1 zegt dat het voldoende is cuspidale karakters van de Levi componenten van alle standaard parabolische ondergroepen te kennen. Merk op dat de stelling niet zegt dat $J \subsetneqq I$; het kan voorkomen dat $\langle \chi, \mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}\rangle_G = 0$ voor alle $J \subsetneqq I$. Dan $I = J$ en $\langle \chi, \phi\rangle_G = 1$, ofwel $\chi$ is cuspidaal. We zien uit het bewijs dat de cuspidale karakters van $G$ ook niet kunnen voorkomen in $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}$ voor $J \subsetneqq I$. Ofwel, de kennis van de cuspidale karakters van de Levi componenten van alle propere standaard parabolische ondergroepen geeft alle karakters van $G$ behalve de cuspidale karakters.

Gegeven Stelling 5.3.1 is het nu de bedoeling de $J$'s en de irreducibele cuspidale karakters van $L_J$ te vinden zodanig dat we precies alle karakters van $G$ uit de inductie procedure kunnen verkrijgen. We vermelden daartoe een aantal resultaten zonder bewijs, zie daarvoor Carter [2, §9.1-2].

**Stelling 5.3.2.** *Laat $\phi$, $\psi$ irreducibele cuspidale karakters zijn van de Levi ondergroepen $L_J$, $L_K$ van $G$ en veronderstel dat $\langle \mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}, \mathrm{Ind}_{P_K}^G \psi_{P_K} \rangle_G \neq 0$. Dan bestaat er een $w \in D_{J,K}$ zodanig dat $L_J = {}^wL_K$, $\phi = {}^w\psi$, en bovendien is dan $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J} = \mathrm{Ind}_{P_K}^G \psi_{P_K}$.*

*Schets van het bewijs.* De eerste stap in het bewijs van deze stelling gebruikt Gevolg 4.1.8 en Propositie 2.3.5;

$$\langle \mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}, \mathrm{Ind}_{P_K}^G \psi_{P_K} \rangle_G = \sum_{w \in D_{J,K}} \langle \mathrm{Res}_{P_J \cap {}^wP_K} \phi_{P_J}, \mathrm{Res}_{P_J \cap {}^wP_K} {}^w(\psi_{P_K}) \rangle_{P_J \cap {}^wP_K}. \tag{5.3.1}$$

Vervolgens hebben we allerlei informatie nodig over de unieke decompositie van $P_J \cap {}^wP_K$ in de volgende vorm;

$$P_J \cap {}^wP_K = (U_J \cap {}^wU_K)(U_J \cap {}^wL_K)(L_J \cap {}^wU_K)L_M \tag{5.3.2}$$

met $M = J \cap w(K)$, i.e. $\Delta_M = \Delta_J \cap w(\Delta_K)$ vergelijk Stelling 1.4.7. We kunnen nu elke component aan de rechterzijde van (5.3.1) uitschrijven gebruik makend van de unieke ontbinding (5.3.2). Merk op dat $\phi_{P_J}$, als opgeblazen karakter, de eerste twee componenten van (5.3.2) niet voelt, terwijl ${}^w(\psi_{P_K})$ de eerste en de derde component in (5.3.2) niet voelt; ofwel

$$\langle \mathrm{Res}_{P_J \cap {}^wP_K} \phi_{P_J}, \mathrm{Res}_{P_J \cap {}^wP_K} {}^w(\psi_{P_K}) \rangle_{P_J \cap {}^wP_K} = \frac{|U_J \cap {}^wU_K|}{|P_J \cap {}^wP_K|} \sum_{t \in L_M} \Big( \sum_{z \in L_J \cap {}^wU_K} \phi(zt) \Big) \overline{\Big( \sum_{y \in U_J \cap {}^wL_K} {}^w\psi(yt) \Big)} \tag{5.3.3}$$

dan zien we in dat de aanname in de stelling leidt tot het bestaan van een $t \in L_M$ met

$$\sum_{z \in L_J \cap {}^wU_K} \phi(zt) \neq 0, \qquad \sum_{y \in U_J \cap {}^wL_K} {}^w\psi(yt) \neq 0.$$

Aangezien $L_J \cap {}^wU_K$ de $U$-component is van een parabolische ondergroep $P$ van $L_J$ is, namelijk de parabool $L_J \cap {}^wP_K$, zien we dat de eerste som slechts ongelijk nul kan zijn als de parabool de groep $L_J$ zelf is, omdat $\phi$ een cuspidaal karakter van $L_J$ is vanwege Gevolg 5.2.5(iii). Aangezien de bijbehorende maximale normale unipotente groep $U$ triviaal is, zien we dat $L_J \cap {}^wU_K = \{1\}$. Voor $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ is het niet zo moeilijk in te zien dat we hieruit $L_J \subset {}^wL_K$ mogen concluderen, en dit geldt algemeen. Als we aannemen dat ${}^w\psi$ een cuspidaal karakter van ${}^wL_K$ is, dan volgt met een soortgelijke redenering $U_J \cap {}^wL_K = \{1\}$, en $L_K \subset {}^{w^{-1}}L_J$. Dus $L_J = {}^wL_K$. Met een analoge ontbinding als (5.3.2) kunnen we concluderen dat $M = J \cap w(K) = J$.

De som in (5.3.3) is nu enkel over $t \in L_J$ en bovendien volgt uit (5.3.2) en het voorgaande resultaat dat $|P_J \cap {}^wP_K| = |U_J \cap {}^wU_K||L_J|$, en dus reduceert (5.3.3) tot

$$\langle \mathrm{Res}_{P_J \cap {}^wP_K} \phi_{P_J}, \mathrm{Res}_{P_J \cap {}^wP_K} {}^w(\psi_{P_K}) \rangle_{P_J \cap {}^wP_K} = \langle \phi, {}^w\psi \rangle_{L_J}.$$

Aangezien er een $w \in D_{J,K}$ bestaat waarvoor dit ongelijk nul is, volgt dat $\langle \phi, {}^w\psi \rangle_{L_J} \neq 0$. Omdat $\phi$ een irreducibel karakter is van $L_J$, en ${}^w\psi$ een irreducibel karakter is van ${}^wL_K = L_J$ volgt dat $\phi = {}^w\psi$.

Zie Carter [2, Prop. 8.2.7] voor de laatste uitspraak. □

**Definitie 5.3.3.** *Voor $J, K \subsetneqq I$ zeggen we dat $J$* **geassocieerd is met** *$K$, notatie $J \sim K$, als $J = w(K)$ voor zekere $w \in W$.*

Het is eenvoudig in te zien dat $J \sim K$ dan en slechts dan als $\Phi_J = w(\Phi_K)$ dan en slechts dan als $L_J = {}^wL_K$. Het is zelfs voldoende om $w \in D_{J,K}$ te nemen omdat $D_{J,K}$ representanten zijn voor $W_J\backslash W/W_K$.

*Opmerking 5.3.4.* Geassocieerdheid definieert een equivalentierelatie op de machtsverzameling van $I$, en we zien uit Stelling 5.3.2 dat de irreducibele karakters van $G$ uiteen vallen in families gelabeld door de equivalentieklassen in $2^I$. De familie van karakters bij de lege verzameling $\emptyset$ heet de **hoofdreeks** ("principal series"), en bestaat uit alle karakters van $G$ die voorkomen in $\mathrm{Ind}_B^G \theta_B$ met $\theta$ een 1-dimensionaal karakter van $H$. In het bijzonder behoren alle irreducibele karakters in $\mathrm{Ind}_B^G 1$, zoals het triviale karakter en het Steinberg karakter als in Voorbeeld 4.3.10, tot de hoofdreeks. De familie die correspondeert met $I$ heet de **discrete reeks** en bestaat uit alle irreducibele cuspidale karakters van $G$. We zien dat gegeven de irreducibele cuspidale karakters van alle strikte Levi ondergroepen we alle irreducibele karakters van $G$ verkrijgen behalve de irreducibele cuspidale karakters.

Merk op dat we een nog fijnere verdeling kunnen aanbrengen als we ook rekening houden met de conditie dat de cuspidale representaties geconjugeerd moeten zijn in Stelling 5.3.2.

*Opmerking.* Voor eindige groepen van Lie type is deze inductie procedure gegeneraliseerd door Deligne en Lusztig, zodanig dat ook de cuspidale karakters uit de inductie procedure worden verkregen, zie Carter [2, Ch. 7]. De Deligne-Lusztig inductie procedure geeft voor een $F$-stabiele maximale torus $T$ in een reductieve algebraïsche groep $G$ en een bijbehorend karakter $\theta$ van $T^F$ een virtueel karakter $R_{T,\theta}$ van de eindige groep van Lie type $G^F = \{g \in G \mid F(g) = g\}$. Bovendien is $\pm R_{T,\theta}$ een irreducibel karakter voor voldoende algemene karakters $\theta$ van $T^F$, waarbij voldoende algemeen betekent dat $\theta$ niet vast is onder een niet-triviaal element van de Weyl groep $W(T)^F = (N_G(T)/T)^F$. De definitie van het geïnduceerde karakter gebruikt erg veel algebraïsche meetkunde, in het bijzonder $l$-adische cohomologie van algebraïsche variëteiten. De Deligne-Lusztig inductie generaliseert de Harish-Chandra inductie procedure in de volgende zin; als de maximale torus $T$ bevat is in een $F$-stabiele Borel ondergroep $B$ van $G$, dan is $R_{T,\theta} = \mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F} \theta_{B^F}$. Een maximale torus $T$ die in een $F$-stabiele Borel ondergroep $B$ van $G$ ligt heet een maximale splijt torus. Bovendien is voor voldoende algemene karakters $\theta$ van $T^F$ het geïnduceerde Deligne-Lusztig karakter $\pm R_{T,\theta}$ cuspidaal precies dan als $T$ in geen enkele $F$-stabiele Borel ondergroep ligt, ofwel precies dan als $T$ niet splijt is. Voor het geval $G = GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ met $F(g) = (g_{ij}^q)_{ij}$, $q = p^f$, $f \in \mathbb{N}$, het (standaard) Frobenius automorphisme, zodat $G^F = GL_n(\mathbb{F}_q)$, zijn de $G^F$-conjugatieklassen van $F$-stabiele maximale tori in $G$ in bijectieve correspondentie met de conjugatieklassen in de Weylgroep $W = S_n$. De $G^F$-conjugatieklasse van de maximale splijt tori, die allemaal geconjugeerd zijn in $G^F$, correspondeert met $1 \in S_n$, zie Carter [2, §3.3].

Als $\theta$ niet voldoende algemeen is, dan bevat $R_{T,\theta}$ meer componenten. Het triviale karakter 1 van $T^F$ is het meest niet algemeen, en de irreducibele karakters van $G^F$ die voorkomen in $R_{T,1}$ heten de unipotente karakters van $G^F$, zie [2, Ch. 12]. De cuspidale unipotente karakters met de bijbehorende graden zijn volledig bekend uit het werk van Lusztig, zie Carter [2, §12.2, §13.7].

**5.4. Howlett-Lehrer-Lusztig theorie.**

Deze theorie beschrijft de ontbinding van $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}$ voor een cuspidaal karakter $\phi$ van de Levi component $L_J$ van de parabool $P_J$ door de commutanten algebra te beschrijven. Het blijkt dat deze weer (grotendeels) in termen van een Hecke algebra kan worden beschreven. Zie Carter [2, Ch. 10] voor meer informatie. We berekenen eerst de dimensie van de commutanten algebra.

**Propositie 5.4.1.** *Zij $\phi$ een cuspidale representatie van de Levi component $L_J$ van $G$, dan*

$$\langle \mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}, \mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J} \rangle_G = |\{w \in D_J \mid w(J) = J,\ {}^w\phi = \phi\}|.$$

Merk op dat voor $J = \emptyset$ we $|W|$ voor de dimensie vinden in overeenstemming met de eerdere resultaten. Merk bovendien op dat $\{w \in D_J \mid w(J) = J\} = \{w \in W \mid w(J) = J\}$, en dus een ondergroep van $W$ vormt. De inclusie $\subset$ is triviaal, en de inclusie $\supset$ volgt direct uit Propositie 1.4.4(iii). De groep $W^{J,\phi} = \{w \in W \mid w(J) = J,\ {}^w\phi = \phi\}$ speelt een belangrijke rol in de ontbinding van $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}$.

*Schets van het bewijs.* In het geschetste bewijs van Propositie 5.3.2 nemen we $K = J$ en $\psi = \phi$ zodat het rechterlid gelijk is aan het aantal $w \in D_{J,J}$ met $J \cap w(J) = J$, ofwel $w(J) = J$ en $\phi = {}^w\phi$. Aangezien $w(J) = (J)$ impliceert dat $w \in N_W(W_J)$ volgt dat de dubbele nevenklasse $W_J w W_J$ gelijk is aan $wW_J$. $\square$

Laat $\rho\colon L_J \to GL(M)$ de representatie van de Levi component in de representatieruimte $M$ zijn met cuspidaal karakter $\phi$. Dan blazen we $\rho$ op tot $\rho_{P_J}\colon P_J \to GL(M)$ door $U_J$ triviaal te laten werken, zodat het karakter precies het opgeblazen karakter $\phi_{P_J}$ is. Dan kunnen we voor de representatie ruimte van $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}$ de ruimte $\{f\colon G \to M \mid f(gp) = \rho_{P_J}(p^{-1}) f(g),\ \forall g \in G\, \forall p \in P_J\}$ nemen. We gebruiken de notatie $\mathcal{F}(J,\rho) = \mathrm{Ind}_{P_J}^G M$ voor deze representatieruimte om het belang van $\rho$ te onderstrepen. De $G$-actie is dan gegeven door $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$.

**Lemma 5.4.2.** *Zij $w \in W$ met $w(\Delta_J) = \Delta_K$ dan definieert*

$$\big(\theta_w f\big)(g) = \frac{1}{|U_K|} \sum_{u \in U_K} f(guw), \qquad g \in G,$$

*een element $\theta_w \in \mathrm{End}_G(\mathcal{F}(J,\rho), \mathcal{F}(K, {}^w\rho))$.*

Merk op dat ${}^w\rho$ een representatie definieert van $L_K = {}^wL_J$ door ${}^w\rho({}^wx) = \rho(x)$. Bovendien is voor $w = 1$ de interwiner $\theta_1 = 1$ omdat $\rho_{P_J}(u) = 1$ voor alle $u \in U_J$.

*Bewijs.* Dat $\theta_w$ commuteert met de $G$-actie is triviaal. We moeten laten zien dat $\theta_w f \in \mathcal{F}(K, {}^w\rho)$ als $f \in \mathcal{F}(J,\rho)$. Het transformatiegedrag onder $u \in U_K$ is triviaal per constructie, en we hoeven slechts $\big(\theta_w f\big)(gl)$, $l \in L_K$, te beschouwen. Omdat $U_K$ normaal is in $P_K$ kunnen we $gluw = glul^{-1}lw = gu'lw = gu'w(w^{-1}lw)$ schrijven, zodat

$$\big(\theta_w f\big)(gl) = \frac{1}{|U_K|} \sum_{u \in U_K} f(guw(w^{-1}lw)) = \rho(w^{-1}l^{-1}w)\,\big(\theta_w f\big)(g) = {}^w\rho(l^{-1})\,\big(\theta_w f\big)(g)$$

aangezien $w^{-1}lw \in L_J$. $\square$

Als we nu in de situatie van Lemma 5.4.2 $w \in W^{J,\phi}$ nemen, dan is $K = J$ en bovendien is dan $\rho_{P_J}$ equivalent met ${}^w\rho_{P_J}$ als representaties van $P_J$, omdat ze hetzelfde karakter hebben. Laat $\tilde{\rho}(w) \in GL(M)$ een intertwiner zijn, i.e. ${}^w\rho_{P_J}(p) = \tilde{\rho}(w)^{-1}\rho_{P_J}(p)\tilde{\rho}(w)$ voor alle $p \in P_J$. Merk op dat $\tilde{\rho}(w)$ tot op een complexe constante is gedefinieerd vanwege het Lemma van Schur en de irreducibiliteit van $\rho$ en ${}^w\rho$.

**Propositie 5.4.3.** *Laat $w \in W^{J,\phi}$, en $B_w f = \tilde{\rho}(w)\theta_w f$. Dan is $B_w \in \mathrm{End}_G(\mathcal{F}(J,\rho))$, en de verzameling $\{B_w \mid w \in W^{J,\phi}\}$ vormt een basis voor de commutanten algebra.*

We kiezen $\tilde{\rho}(1) = 1$, zodat ook $B_1 = 1$.

*Schets van het bewijs.* De eerste uitspraak volgt vrijwel direkt uit Lemma 5.4.2. Aangezien de dimensie van de commutanten algebra $|W^{J,\phi}|$ is vanwege Propositie 5.4.1, is het voldoende om lineaire onafhankelijkheid aan te tonen.

Veronderstel $\sum_{w \in W^{J,\phi}} c_w B_w = 0$ in $\mathrm{End}_G(\mathcal{F}(J,\rho))$, dan $\sum_{w \in W^{J,\phi}} c_w \big(B_w f\big)(g) = 0$ in het bijzonder voor iedere $f \in \mathrm{End}_G(\mathcal{F}(J,\rho))$ en voor alle $g \in G$. We kiezen daartoe voor $0 \neq v \in M$ een functie $f(g) = \rho_{P_J}(g^{-1})v$ als $g \in P_J$ en $f(g) = 0$ als $g \notin P_J$. Dan is $f \in \mathrm{End}_G(\mathcal{F}(J,\rho))$. Vervolgens nemen we $g^{-1} = w \in W^{J,\phi}$, zodat

$$\sum_{w' \in W^{J,\phi}} c_{w'}\tilde{\rho}(w')\frac{1}{|U_J|}\sum_{u \in U_J} f(w^{-1}uw') = 0.$$

Uit de definitie van $f$ volgt dat de enige niet-nul termen komen als $(w')^{-1}u^{-1}w \in P_J$, ofwel als $w \in P_J w' P_J$, en vanwege Propositie 2.3.5 $w \in W_J w' W_J$. Nu is zowel $w, w' \in \{w \in D_J \mid w(J) = J\} \subset N_W(W_J)$, en dus $wW_J = w'W_J$. Propositie 1.4.4 impliceert $w = w'$, en dus

$$0 = c_w\tilde{\rho}(w)\sum_{u \in U_J} f(w^{-1}uw) = c_w \sum_{u \in U_J \cap {}^w P_J} \tilde{\rho}(w)\rho_{P_J}(w^{-1}u^{-1}w)v.$$

Het vergt nu enige kennis van doorsnijdingen van algemene parabolen voor deze specifieke $w$ om in te zien dat $w^{-1}u^{-1}w \in U_J$ in deze situatie. Maar dan is deze aktie voor elke $u$ triviaal. Verder is $v \neq 0$ en $\tilde{\rho}(w)$ inverteerbaar. Dus $c_w = 0$. $\square$

Om nu de structuur van de commutanten algebra te bepalen moeten we de samenstelling $B_w B_{w'}$ gaan uitrekenen. Om de stap naar een Hecke algebra te kunnen inzien zijn er meerdere stappen te doen;

a) de vermenigvuldiging $B_w B_{w'}$ als $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$,
b) welke Coxeter groep speelt een rol,
c) eventuele kwadratische relaties.

We zullen deze punten bespreken zonder in details te treden.

*Ad stap a).* Stap a) is een relatief eenvoudige stap, waarbij voornamelijk de structuur van bepaalde ondergroepen, wortel ondergroepen, van de verschillende $U_J$'s en bijbehorende factorisaties een belangrijke rol spelen. Het resultaat is dan het volgende.

**Lemma 5.4.4.** *Zij $w, w' \in W^{J,\phi}$ met $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$, dan $B_w B_{w'} = \lambda(w, w') B_{ww'}$ waarbij $\lambda(w, w') \in \mathbb{C}$ gedefinieerd is door $\tilde{\rho}(w)\tilde{\rho}(w') = \lambda(w, w')\tilde{\rho}(ww')$.*

Merk op dat $\tilde{\rho}(w)\tilde{\rho}(w')$ en $\tilde{\rho}(ww')$ beide intertwiners zijn voor ${}^{ww'}\rho$ met $\rho$ en dus een complex getal verschillen. Dus $\lambda(w, w')$ is goed gedefinieerd. Aangezien we nog keuze vrijheid hebben in $\tilde{\rho}$, zijn er mogelijkheden om $\lambda: W^{J,\phi} \times W^{J,\phi} \to \mathbb{C}$ goed te kiezen, zie Carter [2, Prop. 10.3.4].

*Ad stap b).* Stap b) is een belangrijke stap, aangezien deze al nodig is om de volgende stap ook te kunnen doen. In het algemeen is $W^{J,\phi}$ geen Coxeter groep, maar er is een normale ondergroep die dat wel is. Daarvoor is het nodig om het quotiënt wortel systeem te hebben, en om dit te introduceren hebben we enkel de verzameling $J \subset I$ nodig. Laat $\alpha \in \Phi\backslash\Delta_J$ zodanig dat $\Delta_J \cup \{\alpha\}$ binnen een deelverzameling van simpele wortels valt, of, equivalent, dat er $w \in W$ bestaat zodanig dat $\Delta_J \cup \{\alpha\} \subset w(\Delta)$. Definieer nu het element $w_{\bar{\alpha}} = (w_0)_{\Delta_J \cup \{\alpha\}}(w_0)_J$, waarbij $(w_0)_{\Delta_J \cup \{\alpha\}}$ respectievelijk $(w_0)_J$ de unieke elementen van maximale lengte, zie Lemma 1.2.14, zijn voor de Coxeter groepen met verzameling simpele wortels $\Delta_J \cup \{\alpha\}$ respectievelijk $\Delta_J$. Laat nu $\Omega$ de verzameling zijn van $\alpha \in \Phi\backslash\Delta_J$ zodanig dat $\Delta_J \cup \{\alpha\} \subset w(\Delta)$ voor zekere $w \in W$ en zodanig dat $w_{\bar{\alpha}}^2 = 1$. Deze laatste conditie is equivalent met $w_{\bar{\alpha}}(\Delta_J) = \Delta_J$ ofwel $w_{\bar{\alpha}}(J) = J$. Beschouw nu $V_J = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Delta_J \subset V$ en stel $\bar{V} = V/V_J \cong V_J^{\perp}$, en deze heeft dus een $W$-invariante bilineaire vorm. Zij $^-: V \to \bar{V}$ de kanonieke afbeelding, en laat $\bar{\Omega} = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Omega\}$. Laat bovendien $R_J = \langle w_{\bar{\alpha}} \mid \alpha \in \Omega \rangle$ de ondergroep van $W$ voortgebracht door deze elementen. Dan geldt het volgende.

**Lemma 5.4.5.** *$\bar{\Omega}$ is een wortelsysteem in $\bar{V}$ (tot op schaling met positieve factoren) en $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ voor $\alpha, \beta \in \Omega \Rightarrow \alpha = \beta$. Bovendien werkt $R_J$ getrouw op $\bar{V}$, en $R_J$ is de Weyl groep van het wortelsysteem $\bar{\Omega}$ in $\bar{V}$.*

$\bar{\Omega}$ is het quotiënt wortelsysteem; het spant niet noodzakelijkerwijs de ruimte $\bar{V}$ op.

We kunnen nu de eerste stap naar de kwadratische relaties maken.

**Lemma 5.4.6.** *Stel $\alpha \in \Delta\backslash\Delta_J$ met $w_{\bar{\alpha}} \in W^{J,\phi}$ (en dus $w_{\bar{\alpha}}^2 = 1$), dan bestaan er $\xi_\alpha, \eta_\alpha \in \mathbb{C}$ zodanig dat $B_{w_{\bar{\alpha}}}^2 = \eta_\alpha B_{w_{\bar{\alpha}}} + \xi_\alpha \cdot 1$.*

De waarden van $\xi_\alpha$ en $\eta_\alpha$ in Lemma 5.4.6 kunnen beter bepaald worden. Zo is bijvoorbeeld $\xi_\alpha^{-1} = |U_{w_{\bar{\alpha}}}|$ waar $U_w = U \cap U^{w_0 w}$ een zeker ondergroep van $U$ is, zodat in het bijzonder $\xi_\alpha$ een macht van $p$, de karakteristiek, is. Over de waarde van $\eta_\alpha$ kan ook meer worden gezegd, in het bijzonder door de situatie terug te brengen tot $|W^{J,\phi}| = 2$ door in $L_K$ te gaan werken met $\Delta_K = \Delta_J \cup \{\alpha\}$ zodat het geïnduceerde karakter splitst in een som van twee irreducibele karakters. Dan is $\eta_\alpha = 0$ dan en slechts dan als deze twee irreducibele karakters dezelfde graad hebben. We kunnen nu $\eta_\alpha$ voor $\alpha \in \Phi\backslash\Delta_J$ op geschikte manier, door $W^{J,\phi}$-conjugatie, definieren.

Stel nu $\Gamma = \{\alpha \in \Omega \mid w_{\bar{\alpha}} \in W^{J,\phi}, \eta_\alpha \neq 0\}$, ofwel $\Gamma$ is de verzameling van wortels niet in $\Delta_J$ zodanig dat 1. $\Delta_J \cup \{\alpha\}$ is een verzameling simpele wortels, 2. $w_{\bar{\alpha}}^2 = 1$ ofwel $w_{\bar{\alpha}}(\Delta_J) = \Delta_J$, 3. $w_{\bar{\alpha}} \in W^{J,\phi}$, en 4. $\eta_\alpha \neq 0$, ofwel $B_{w_{\bar{\alpha}}}$ is geen involutie (voor $\alpha \in \Delta$). Dan kan worden aangetoond dat $W^{J,\phi}$ een ondergroep van $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ is. Laat $R_{J,\phi}$ de ondergroep van $W$ zijn gegenereerd door de elementen $w_{\bar{\alpha}}$ voor $\alpha \in \Gamma$, en laat $C_{J,\phi} = \{w \in W^{J,\phi} \mid w(\Gamma^+) = \Gamma^+\}$ waarbij $\Gamma^+ = \Gamma \cap \Phi^+$ de positieve wortels in $\Gamma$ zijn. Dan geldt het volgende.

**Propositie 5.4.7.** *$R_{J,\phi}$ is een Coxetergroep met bijbehorend wortelsysteem $\bar{\Gamma} = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\}$ in $\bar{V}$, en $W^{J,\phi} = C_{J,\phi} \ltimes R_{J,\phi}$.*

Deze ontbinding is vergelijkbaar met de ontbinding van de automorphisme groep van een wortelsysteem in een semidirekt produkt van de Weyl groep met de automorphisme groep van het Dynkin diagram.

*Ad stap c).* We kunnen nu beschrijven hoe de Hecke algebra structuur van de commutanten algebra er uit ziet. Laat $\bar{\Lambda}$ de simpele wortels van $\bar{\Gamma}$ zijn, zodanig dat de bijbehorende positieve wortels $\bar{\Gamma}^+$ zijn en stel $\Lambda = \{\alpha \in \Gamma \mid \bar{\alpha} \in \bar{\Lambda}\}$, die de rol van de simpele wortels speelt.

**Stelling 5.4.8.** *Er bestaan geschikte constantes $c_w$, $w \in W^{J,\phi}$, zodanig dat de basis $T_w = c_w B_w$ van de commutanten algebra van $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}$, $\phi$ cuspidaal, voldoet aan de volgende commutatierelaties:*

(i) *Voor $w \in W^{J,\phi}$ en $w' \in C_{J,\phi}$ bestaat er afbeelding $\mu\colon W^{J,\phi} \times W^{J,\phi} \to \mathbb{C}$ zodanig dat*

$$T_w T_{w'} = \mu(w, w')\, T_{ww'}, \qquad T_{w'} T_w = \mu(w', w)\, T_{w'w},$$

(ii) *Er bestaat een $W^{J,\phi}$-invariante functie $\Lambda \to \mathbb{C}$, $\alpha \mapsto p_\alpha$ zodat voor $w \in W^{J,\phi}$ en $\alpha \in \Lambda$ geldt*

$$T_{w_{\bar{\alpha}}} T_w = \begin{cases} T_{w_{\bar{\alpha}} w}, & \textit{als } w^{-1}(\alpha) > 0, \\ p_\alpha T_{w_{\bar{\alpha}} w} + (p_\alpha - 1) T_w, & \textit{als } w^{-1}(\alpha) < 0, \end{cases}$$
$$T_w T_{w_{\bar{\alpha}}} = \begin{cases} T_{w w_{\bar{\alpha}}}, & \textit{als } w(\alpha) > 0, \\ p_\alpha T_{w w_{\bar{\alpha}}} + (p_\alpha - 1) T_w, & \textit{als } w(\alpha) < 0. \end{cases}$$

De functie $\mu$ is de functie $\lambda$ uit Lemma 5.4.4 afgezien van de vermenigvuldiging met zekere constanten. De waarden $p_\alpha$ zijn in het algemeen machten van de karakteristiek $p$, en soms zijn het halftallige machten.

In het bijzonder zien we dat in het geval $C_{J,\phi} = \{1\}$ de commutanten algebra van $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}$ een specialisatie is van de generieke Hecke algebra $\mathcal{H}(R_{J,\phi})$. De ontbinding van $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \phi_{P_J}$ volgt dan als voorheen door middel van de representatietheorie van deze Hecke algebra.

## Literatuur


1. N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5 et 6, Masson, 1981.
2. R.W. Carter, *Finite Groups of Lie Type*, Wiley, 1985.
3. C.W. Curtis en I. Reiner, *Methods of Representation Theory*, 2 vol., Wiley, 1981, 1987.
4. W. Fulton en J. Harris, *Representation Theory*, GTM 129, Springer Verlag, 1991.
5. J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, 1990.
6. S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Addison-Wesley, 1993.
7. J.P. Serre, *Représentations Linéaires des Groupes Finis*, Hermann, 1967.
8. T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser, 1981.

# 6. Groepen met een splijt $BN$-paar

## 6.1. Definitie en Bruhat ontbinding.

**Definitie 6.1.1.** *Een algebraïsche groep $G$ heet een groep met een* **splijt** $BN$**-paar** *als*

(i) *$G$ heeft gesloten ondergroepen $B$, $N$ zodanig dat $G$ een groep met een $BN$-paar vormt, zie Definitie 2.1.1,*

(ii) *$B = U \rtimes H$, $H = B \cap N$ zodanig dat de normale component $U$ een gesloten unipotente ondergroep vormt en $H$ een gesloten abelse ondergroep is, waarvan alle elementen semisimpel zijn,*

(iii) $\cap_{n \in N} nBn^{-1} = H$.

*Opmerking.* Herinner dat een algebraïsche groep $G$ een algebraïsche variëteit is waarvoor de afbeelding $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ van $G \times G \to G$ een morphisme van algebraïsche variëteiten is. De topologie op $G$ wordt gegeven door de Zariski topologie, waarvoor de gesloten verzamelingen overeenkomen met de affiene deelvariëteiten.

Aangezien elke algebraïsche groep getrouw kan worden ingebed in $GL_n(k) \subset \mathrm{End}_k(k^n)$ kunnen we spreken van de (additieve) Jordan ontbinding van een element $x \in G$, i.e $x = x_s + x_n$ met $x_s x_n = x_x x_s$ waarbij $x_s$ het semisimpele deel en $x_n$ het nilpotente deel van $x$ is. Dus $x_s$ is diagonaliseerbaar en $x_n$ is nilpotent, i.e. $(x_n)^n = 0$ voor $n$ voldoende groot. De (multiplicatieve) Jordan ontbinding is dan $x = x_s x_u = x_u x_s$ met $x_s$ het semisimpele deel en $x_u$ het unipotente deel, i.e. $(x_u - 1)^n = 0$ voor $n$ voldoende groot. Een groep heet unipotent als elk element unipotent is. Merk op dat we hiervoor moeten controleren dat de Jordan ontbinding niet afhankelijk is van de inbedding van $G$ in een $GL_n(k)$.

*Notatie 6.1.2.* We gebruiken de notatie ${}^y x = yxy^{-1}$, $x^y = y^{-1}xy$, zodat ${}^{yz}x = {}^y({}^z x)$ en $x^{yz} = (x^y)^z$. We definiëren nu de volgende ondergroepen:

$$\begin{aligned}
U^- &= U^{w_0} = w_0^{-1} U w_0 = w_0 U w_0, \\
X_i &= U \cap (U^-)^{s_i} = U \cap U^{w_0 s_i} = U \cap s_i w_0 U w_0 s_i, \\
U_i &= U \cap U^{s_i} = U \cap s_i U s_i, \\
X_{-i} &= X_i^{s_i} = s_i U s_i \cap w_0 U w_0 = s_i U s_i \cap U^-, \\
U_w &= U \cap U^{w_0 w} = U \cap (U^-)^w,
\end{aligned}$$

waar $s_i \in S = \{s_i \mid i \in I\}$ de verzameling generatoren voor de bijbehorende Coxeter groep $W$ is, $w \in W$ en $w_0$ het unieke element in $W$ is van maximale lengte, zie Lemma 1.2.14.

*Voorbeeld 6.1.3.* Voor $k$ algebraïsch gesloten lichaam is $GL_n(k)$ een groep met een splijt $BN$-paar met $B$, $N$ en $H$ als in Stelling 2.2.1 en voor $U$ de ondergroep van unipotente matrices nemen, i.e. de ondergroep van $B$ met allemaal énen op de diagonaal. Het is duidelijk dat $B$ en $N$ gesloten zijn, dus Definitie 6.1.1(i) volgt uit Stelling 2.2.1. Definitie 6.1.1(ii) is triviaal in dit geval. Aangezien $H \subset \cap_{n \in N} nBn^{-1}$ uit Definitie 2.1.1, omdat $H$ normaal in $N$ en $H \subset B$. Voor de omgekeerde inclusie merken we op dat $w_0 \in W = S_n$ overeenkomt met de permutatiematrix met 1 op de antidiagonaal, zodat $w_0 B w_0 = B^-$, de ondergroep van benedendriehoeksmatrices. Dus $B \cap w_0 B w_0 = H$, de groep van diagonaalmatrices, en $\cap_{n\in N} nBn^{-1} \subset H$.

Aangezien we een aantal algemeen geldige resultaten enkel voor dit geval zullen bewijzen werken we de ondergroepen uit Notatie 6.1.2 verder uit. Laat $E_{ij}$ de matrix zijn met overal nullen behalve op de $(ij)$-de plek, waar een 1 staat. Dan, voor een permutatie $w \in W = S_n$ hebben $w^{-1}E_{ij}w = E_{w^{-1}(i),w^{-1}(j)}$. Hieruit zien we dat $U^-$ bestaat uit de unipotente ondergroep van benedendriehoeksmatrices met énen op de diagonaal. Aangezien $s_i$ overeenkomt met $(i, i+1)$ volgt dat $X_i = 1 + k \cdot E_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, en we zien dat deze groep isomorph is met $k$ als additieve groep. Ook volgt direkt dat $U_i$ bestaat uit de ondergroep van $U$ waarbij er een nul op de $(i, i+1)$-component staat. Bovendien is nu $X_{-i} = 1 + k \cdot E_{i+1,i}$, $i = 1, \dots, n-1$. Tot slot beschrijven we $U_w$. Merk op dat $1 + k \cdot E_{ij} \subset U$ voor $i < j$, en dat voor $1 + k \cdot E_{ij} \subset (U^-)^w$ we ook $w(i) > w(j)$ nodig hebben. Ofwel, $U_w$ bestaat uit de ondergroep van bovendriehoeksmatrices met énen op de diagonaal en slechts niet-nul matrix elementen op de $(ij)$-de plek met $i < j$ en $w(i) > w(j)$. In het bijzonder zien we dat $\dim_k U_w = \ell(w)$ en $U_{w_0} = U$. Merk op dat $U_i$ niet gelijk is aan $U_{s_i}$.

*Opmerking 6.1.4.* Veronderstel dat $G$ een eindige groep met een $BN$-paar is, zodanig dat $\cap_{n\in N} nBn^{-1} = H$, $B = U \rtimes H$ met $H$ abels. Veronderstel bovendien dat er een priemgetal $p$ is zodanig dat $U$ een $p$-ondergroep is, i.e. $|U| = p^n$ voor $n \in \mathbb{N}$, en dat $p \nmid |H|$. Dan heet $G$ een eindige groep met **een splijt $BN$-paar van karakteristiek** $p$. Stel dat we $G$ kunnen beschouwen als een lineaire algebraïsche groep over een algebraïsch gesloten lichaam van karakteristiek $p$, dan is $U$ unipotent en elk element van $H$ semisimpel, en dus is $G$ dan een groep met een splijt $BN$-paar. Immers, als $G$ een eindige groep is dan deelt het minimale polynoom $m_g(X)$ van $g \in G$ het polynoom $X^{|G|} - 1$. Voor $u \in U$ volgt dat $m_u(X) \mid X^{|U|} - 1 = (X-1)^{|U|}$ omdat we in karakteristiek $p$ werken en $U$ een $p$-ondergroep is. Dus is $u$ unipotent. Voor $h \in H$ volgt $m_h(X) \mid X^{|H|} - 1$, en dat laatste polynoom splitst volledig in lineaire factoren over het algebraïsch gesloten lichaam van karakteristiek $p$, omdat $|H|X^{|H|-1}$ geen nulpunten heeft.

*Voorbeeld 6.1.5.* Beschouw $GL_n(\mathbb{F}_q) = GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)^F$ als lineaire algebraïsche variëteit, dan volgt uit Opmerking 6.1.4 dat $GL_n(\mathbb{F}_q)$ met $B$, $N$ en $U$ de vaste punten onder het Frobenius automorphisme $F$ van de $B$, $N$ en $U$ als in Voorbeeld 6.1.3 ook een splijt $BN$-paar geeft. Immers, $p \nmid (q-1)^n = |H|$ en $p \mid q^{\frac{1}{2}n(n-1)} = |U|$.

**Lemma 6.1.6.** *Er geldt $BwB = BwU_w$, en de decompositie aan de rechterkant is uniek.*

*Bewijs voor $GL_n$.* We merken op dat $B = HU$ en dat $U = U_{w_0 w} U_w$. Dat laatste volgt direkt uit Voorbeeld 6.1.3, omdat $\{i < j \mid w(i) > w(j)\}$ en $\{i < j \mid w_0 w(i) > w_0 w(j)\}$ precies complementair zijn. Dus we hebben

$$\begin{aligned} BwB = BwHU = BHwU = BwU = BwU_{w_0w}U_w &= Bw(U \cap U^w)U_w \\ &= B(U^{w^{-1}} \cap U)wU_w = BwU_w, \end{aligned}$$

want $wH = Hw$ en $U^{w^{-1}} \cap U \subset B$. Voor de uniciteit beschouwen we $b_1 w u_1 = b_2 w u_2$ met $b_1, b_2 \in B$, $u_1, u_2 \in U_w$. Dan $b_1^{-1} b_2 = w u_1 u_2^{-1} \in B \cap (U_w)^{w^{-1}}$, maar $(U_w)^{w^{-1}} = U^{w^{-1}} \cap U^-$ en $U^-$ heeft triviale doorsnede met $B$. Dus $b_1 = b_2$ en $u_1 = u_2$. $\square$

**Stelling 6.1.7.** (Bruhat ontbinding) *Zij $G$ een groep met een splijt $BN$-paar, dan is elk element uniek ontbindbaar in de vorm $uhwu'$ met $u \in U$, $h \in H$, $w \in W$, $u' \in U_w$.*

*Bewijs.* Pas de Bruhat ontbinding, Stelling 2.1.3, toe samen met Lemma 6.1.6 en $B = U \rtimes H$. $\square$

Met Stelling 6.1.7 kunnen we ordes van eindige groepen met een splijt $BN$-paar gemakkelijk uitrekenen. Zo vinden we

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = |H| \cdot |U| \cdot \sum_{w \in W} |U_w| = (q-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \sum_{w \in W} q^{\ell(w)}.$$

Met behulp van het Poincaré polynoom voor $S_n$, zie Opmerking 4.3.9 vinden we hetzelfde resultaat als in Voorbeeld 4.3.10 voor de orde van $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

**6.2. Levi ondergroepen en wortel ondergroepen.**

In Voorbeeld 6.1.3 en Voorbeeld 6.1.5 zien we dat $H$ de ondergroepen $X_i$ normaliseert; $h(1 + \alpha \cdot E_{i,i+1})h^{-1} = (1 + \alpha h_i h_{i+1}^{-1} \cdot E_{i,i+1})$ als $h = \mathrm{diag}(h_1, \dots, h_n)$. Dus we vinden op deze manier een linear karakter $\alpha_i\colon H \to GL_1(k)$, danwel $\alpha_i\colon H \to GL_1(\mathbb{F}_q)$, $h \mapsto h_i h_{i+1}^{-1}$, $i = 1, \dots, n$. We stellen $\alpha_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})/\sqrt{2}$, zie Voorbeeld 1.2.8. We noemen dit karakter een simpele wortel, en $X_i$ is de bijbehorende wortel ondergroep.

**Stelling 6.2.1.** *De verzameling ondergroepen van de vorm $wX_iw^{-1}$, $w \in W$, $i \in I$, is in bijectief verband met de wortels $\Phi$. Als $\alpha = w(\alpha_i)$ dan stellen we $X_\alpha = wX_iw^{-1}$.*

Voor het voorbeeld $GL_n$ zien we dat $\mathrm{diag}(h_1, \dots)w = w\mathrm{diag}(h_{w(1)}, \dots, h_{w(n)})$. Dan geeft conjugatie met $h$ op de ondergroep $wX_iw^{-1}$ aanleiding tot het karakter $w(\alpha_i) = (\varepsilon_{w(i)} - \varepsilon_{w(i+1)})/\sqrt{2}\colon h \mapsto h_{w(i)} h_{w(i+1)}^{-1}$. Merk op dat $wX_iw^{-1} = \{1 + \alpha E_{w(i),w(i+1)}\}$.

We introduceren $B_w = B \cap B^{w_0 w}$, $B_i = B_{s_i}$. Voor $GL_n(k)$ en $GL_n(\mathbb{F}_q)$ zien we dat $B_i = X_iH$, ofwel de matrices die ongelijk nul zijn op de diagonaal en op het $(i, i+1)$-ste element. Evenzo is $B_w = U_wH$, ofwel we laten ook willekeurige elementen op de diagonaal toe. Merk op dat $X_i \cap H = \{1\} = U_w \cap H$. Dit geldt in het algemeen.

**Lemma 6.2.2.**
(i) *$B_i \neq H$,*
(ii) *Als $w(\alpha_i) > 0$, dan $B_i \subset B_{w_0 w}$,*
(iii) *Als $w(\alpha_i) < 0$, dan $B_i \cap B_{w_0 w} = H$.*

*Bewijs voor $GL_n$.* Aangezien $X_i \subset B_i$ en $X_i \cap H = \{1\}$ volgt (i). Als $w(\alpha_i) > 0$ dan geldt voor de permutatie $w$ dat $w(i) < w(i+1)$. Maar dan is $E_{i,i+1} \in B_{w_0 w}$. Als $w(\alpha_i) < 0$ dan geldt voor de permutatie $w$ dat $w(i) > w(i+1)$, en dan $E_{i,i+1} \notin B_{w_0 w}$. $\square$

*Bewijs van Stelling 6.2.1.* Het is voldoende te bewijzen dat $w(\alpha_i) = \alpha_j$ dan en slechts dan als $wX_iw^{-1} = X_j$ voor simpele wortels $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$. Immers, $w'(\alpha_i) = w(\alpha_j) \iff w^{-1}w'(\alpha_i) = \alpha_j \iff w^{-1}w'X_i(w')^{-1}w = X_j \iff w'X_i(w')^{-1} = wX_jw^{-1}$.

Veronderstel eerst dat $w(\alpha_i) = \alpha_j$, dan is $B_i \subset B_{w_0 w}$ vanwege Lemma 6.2.2(ii), maar ook $w_0 s_j w(\alpha_i) \in \Phi^+$, dus $B_i \subset B_{s_j w}$ vanwege Lemma 6.2.2(ii). Dus $wB_iw^{-1} \subset B^{w^{-1}} \cap B \cap B^{w_0 s_j} \subset B_j$. Doe hetzelfde voor $w^{-1}(\alpha_i) = \alpha_j$, zodat $w^{-1}B_jw \subset B_i$. Dus verkrijgen we $wB_iw^{-1} = B_j$, en omdat $B_i = X_iH$ verkrijgen we $wX_iw^{-1} = X_j$.

Anderzijds, als $wX_iw^{-1} = X_j$, dan $wB_iw^{-1} = X_jH = B_j$ en dus $B_i \subset B^w \cap B^{w_0s_jw}$. In het bijzonder volgt $B_i \subset B \cap B^w = B_{w_0w}$. Als $w(\alpha_i) < 0$, dan is $B_i \cap B_{w_0w} = H$ vanwege Lemma 6.2.2(iii), en dus $B_i = H$ in tegenspraak met Lemma 6.2.2(i). Dus $w(\alpha_i) > 0$. Anderzijds, $B_i \subset B \cap B^{w_0s_jw} = B_{s_jw}$ en $B_i \neq H$ en dan laat Lemma 6.2.2(ii) zien dat $w_0s_jw(\alpha_i) > 0$, en dus $s_jw(\alpha_i) < 0$. Aangezien $s_j$ de positieve wortels behalve $\alpha_j$ permuteert, zie Propositie 1.2.12, volgt $w(\alpha_i) = \alpha_j$. □

**Stelling 6.2.3.** *$U_w = \prod_{\alpha\in\Phi^+\cap w^{-1}\Phi^-} X_\alpha$ met uniciteit als de volgorde van de wortel ondergroepen wordt vastgelegd. In het bijzonder is $U = \prod_{\alpha\in\Phi^+} X_\alpha$.*

Zie Opgave 1.2.13 voor een beschrijving van de verzameling wortels.

*Bewijs voor $GL_n$.* Voor $S_n$ is $\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^- = \{(\varepsilon_i - \varepsilon_j)/\sqrt{2} \mid i > j,\ w(i) < w(j)\}$, en nu volgt het direkt uit de beschrijving van $U_w$ in Voorbeeld 6.1.3. Als de volgorde is vastgelegd is de decompositie duidelijk uniek. □

**Definitie 6.2.4.** *Zij $G$ een groep met een splijt $BN$-paar, Coxeter groep $W$ en genererende verzameling $S = \{s_i \mid i \in I\}$. Voor $J \subset I$ definiëren we de* **Levi ondergroep** *$L_J$ als de ondergroep van $G$ voortgebracht door $H$ en de wortel ondergroepen $X_\alpha$, $\alpha \in \Phi_J = V \cap \Phi$ het wortelsysteem voor de parabolische ondergroep $W_j \subset W$.*

**Stelling 6.2.5.** *De Levi ondergroep $L_J$ is een groep met een splijt $BN$-paar met $B_J = U_{(w_0)_J}H$ en $N_J/H = W_J$, met $(w_0)_J$ het langste element in de Coxeter groep $W_J$.*

*Voorbeeld 6.2.6.* De Levi componenten voor $GL_n(k)$ en $GL_n(\mathbb{F}_q)$ zijn $GL_{n_1}(\mathbb{F}_q) \times \ldots \times GL_{n_r}(\mathbb{F}_q)$ voor een partitie $n_1 + \ldots + n_r = n$ als $J = \{1, \ldots, n_1 - 1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2 - 1, \ldots n\}$, zie ook Voorbeeld 2.3.4. Het is duidelijk dat dit weer een groep met een splijt $BN$-paar is, omdat het een produkt is van groepen met een splijt $BN$-paar.