Radboud Universiteit Nijmegen

Faculteit der Filosofie, Theologie en Religiewetenschappen

Platonisme in de wiskunde

Wordt wiskunde ontdekt of gecreëerd?

Scriptie ter verkrijging van de graad "Master of Arts" in de filosofie aan de Radboud Universiteit Nijmegen

Auteur:
Febe Verstraten
s1007069

Begeleider:
Klaas Landsman

Eerste examinator:
Corien Bary

4 juli 2024
Aantal woorden: 19.687

Hierbij verklaar en verzeker ik, Febe Verstraten, dat voorliggende eindwerkstuk getiteld Platonisme in de wiskunde, zelfstandig door mij is opgesteld, dat geen andere bronnen en hulpmiddelen dan die door mij zijn vermeld zijn gebruikt en dat de passages in het werk waarvan de woordelijke inhoud of betekenis uit andere werken – ook elektronische media – is genomen door bronvermelding als ontlening kenbaar gemaakt worden. Nijmegen, 4 juli 2024

Samenvatting

Het platonisme als filosofische stroming in de wiskunde is de overtuiging dat wiskundige theorieën gaan over abstracte objecten die een apart domein van bestaande objecten vormen, los van de zintuigelijke wereld. In deze masterscriptie staat deze overtuiging van de wiskunde centraal, en wordt beschreven hoe deze overtuiging voor Kurt Gödel volgt uit zijn onvolledigheidsstellingen. Hij is overtuigd van een vorm van het platonisme, gecombineerd met een wiskundige intuïtie die geïnspireerd is door de fenomenologie van Husserl. Ook komt Hilberts Programma aan bod, een theorie die een ander fundament voor de wiskunde kan bieden. Ten slotte wordt er kritiek gegeven op enkele onderdelen uit de opvatting van Gödel.

Inhoudsopgave

Introductie

In 1931 bewees Kurt Gödel (1906 - 1978) zijn twee befaamde onvolledigheidsstellingen. Australisch wiskundige John Stillwell beschreef het bewijs van deze stellingen als

> a brilliant train of thought – one of the most stunning in mathematics.[1]

In sectie 2.1 wordt het bewijs van deze twee stellingen geschetst, maar in het kort laat de eerste stelling zien dat er in ieder consistent formeel systeem waarin voldoende rekenkunde gedaan kan worden, een onbeslisbare uitspraak bestaat (vaak wordt dit geformuleerd als 'een ware, onbewijsbare uitspraak'), en specificeert de tweede onvolledigheidsstelling een uitspraak die onbewijsbaar is, namelijk, de uitspraak die de consistentie van het systeem uitdrukt. Beknopt geformuleerd betekent dit dat geen enkel consistent formeel (wiskundig) systeem *alle* wiskundige 'waarheden' kan bewijzen. Deze stellingen leggen iets fundamenteels bloot, want ze laten zien dat ieder formeel, consistent systeem zijn eigen consistentie nooit kan bewijzen.

Dit roept de vraag op of dit betekent dat er wiskundige waarheden zijn die onafhankelijk zijn van de mens, en absoluut onbeslisbaar zijn. Namelijk, als er voor ieder consistent formeel systeem S een wiskundige waarheid is die niet in dit systeem bewezen kan worden, zijn er dan wiskundige waarheden die de wiskundige systemen, of zelfs de mens, als het ware *overstijgen*? De vraag naar wat wiskunde is, en of het wordt ontdekt of gecreëerd was al pregnant, maar de onvolledigheidsstellingen gooien alleen maar meer olie op het vuur. Kan de menselijke geest alle wiskundige waarheden beslissen? Of zijn er wiskundige waarheden die onbeslisbaar zijn, en bestaat de wiskunde onafhankelijk van de mens? En indien de wiskunde onafhankelijk van de mens bestaat, hoe kunnen we er dan kennis over vergaren?

Er zijn verschillende reacties op dit vraagstuk. Een reactie komt van een van de bekendste wiskundigen, David Hilbert (1862-1943). Hilbert heeft een fundament voor de wiskunde ontwikkeld, een filosofie die Hilberts Programma wordt genoemd. Dit programma zoekt een axiomatische *formalisering* van de wiskunde die bewijsbaar consistent is. Concepten zijn zo gedefinieerd door hun relatie tot andere concepten, en hebben niet noodzakelijkerwijs een correspondentie met de werkelijkheid. Wiskundige bewijzen gaan over symboolmanipulatie, wat volgens bepaalde regels gaat.

Een andere reactie op dit vraagstuk is het platonisme. Deze stroming staat centraal in mijn scriptie, en ik zal hier in hoofdstuk 1 in detail op ingaan. In grote lijnen zegt het platonisme dat wiskundige objecten en waarheden een aparte ontologische status genieten: het zijn abstracte objecten die een apart domein vormen. Dit betekent dat de objecten wel degelijk *echt* bestaan en geen gevolg zijn van taalkundige conventies of regels, en dat ze niet slechts in de zintuigelijke wereld bestaan. Echter, deze stroming heeft een epistemologisch probleem: hoe kunnen we kennis opdoen van objecten als we hier geen waarnemingen van kunnen doen?

Het onderzoek naar wat de wiskunde *echt* is was al belangrijk, maar de onvolledigheidsstellingen zorgden er dus voor dat dit onderzoek nog veel pregnanter werd. Er bestaan flink uiteenlopende fundamenten voor de wiskunde en daarom is mijn probleemstelling: wat zijn

[1] John Stillwell. *A concise history of mathematics for philosophers.* Cambridge University Press, 2019, p.62.

volgens Kurt Gödel de implicaties van zijn onvolledigheidsstellingen voor de filosofie van de wiskunde?

Om antwoord te geven op deze vraag baseer ik me in mijn beschrijving van de filosofie van Gödel voornamelijk op het boek *After Gödel. Platonism and rationalism in mathematics and logic.*[2] van Richard Tieszen, die beschrijft dat Gödel een bepaalde vorm van het platonisme als filosofie van de wiskunde steunt. Een van de belangrijkste motivaties van Gödel voor deze stroming is zijn overtuiging dat de onbeslisbare uitspraken wel door de mens beslist kunnen worden, wat gemotiveerd lijkt te zijn door de onafhankelijkheid van de Continuum Hypothese van ZFC. ZFC, het Zermelo-Fraenkel systeem met het Keuzeaxioma,[3] is het axiomatische systeem dat aan de grondslag ligt van de huidige wiskunde. De Continuum Hypothese is de wiskundige uitspraak die zegt dat 'er geen verzameling bestaat waarvan de kardinaliteit tussen de kardinaliteit van de natuurlijke getallen en de kardinaliteit van de reële getallen ligt', ofwel 'de verzameling van reële getallen is de wiskundig kleinste verzameling die wiskundig groter is dan de natuurlijke getallen.'[4] Deze uitspraak bleek, in lijn met zijn onvolledigheidsstellingen, onbeslisbaar in de huidige wiskunde. Dit zou betekenen dat, als er slechts van waarheid of onwaarheid gesproken kan worden indien uitspraken volgen uit de axioma's en deze axioma's zelf geen waarheidsaanspraak doen, de waarheid van de Continuum Hypothese irrelevant is. Echter, Gödel vond dat de waarheid van deze uitspraak wel bepaald moest kunnen worden. Dit betekende voor hem dat de axioma's wel degelijk een waarheidsaanspraak doen, en dus dat de wiskunde ontdekt wordt en dus *bestaat*, en niet gecreëerd wordt. Daarbij geloofde hij dat de wiskunde spreekt over abstracte objecten (en dat wiskundige objecten dus geen abstracties van objecten uit de zintuigelijke wereld zijn).

Echter, Gödel moet ook een reactie geven op het epistemologische probleem dat volgt uit dit standpunt: hoe is het mogelijk om kennis te vergaren van objecten die niet in de zintuigelijke wereld gevonden kunnen worden? Om deze vraag te beantwoorden breidt Gödel het intuïtiebegrip van Immanuel Kant uit door gebruik te maken van Edmund Husserls fenomenologie. Zo vergroot Gödel het intuïtiebegrip van Kant dat slechts zintuigelijk is, tot een intuïtiebegrip waarin ook ruimte is voor een categorische intuïtie. Deze categorische intuïtie buigt hij om tot een vorm van wiskundige intuïtie. Zo kan Gödel zijn vorm van het platonisme ontwikkelen, waarin hij dankzij de categorische intuïtie het epistemische probleem uit het platonisme wil ontwijken.

Ik zal in hoofdstuk 1 het platonisme toelichten om de lezer een duidelijk idee te geven van wat het platonisme inhoudt, wat voor vormen dit platonisme kan aannemen, en waarom wiskundigen zich aangetrokken kunnen voelen tot deze stroming. Dit laatste doe ik door het onmisbaarheidsargument in sectie 1.3 toe te lichten, dat zegt dat wiskundige objecten wel *moeten* bestaan, omdat de wiskunde onmisbaar is voor de natuurkunde, en de objecten van een ware theorie wel moeten bestaan. In hoofdstuk 2 beschrijf ik Gödels filosofie, waarbij ik eerst zijn onvolledigheidsstellingen beschrijf in 2.1, en de implicaties voor de filosofie van de

[2] Richard L. Tieszen. *After Gödel. Platonism and rationalism in mathematics and logic.* Oxford, England: Oxford University Press UK, 2011. ISBN: 978–0–19–960620–7.

[3] Zie Joan Bagaria. „Set theory". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023

[4] Peter Koellner. „The Continuum Hypothesis". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Winter 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

wiskunde in 2.2. Daarna beschrijf ik de motivatie voor Gödels wiskundige intuïtie en de rol van Kant en Husserl voor Gödel in 2.3, en beschrijf ik het platonisme dat volgt uit Gödels overtuigingen in 2.4. In hoofdstuk 3 beschrijf ik het gedachtegoed van Hilbert, en hoe dit een alternatief zou kunnen zijn op de filosofie van Gödel. Hiervoor beschrijf ik in 3.1 het Programma van Hilbert, en geef ik in 3.2 een argument tegen het onmisbaarheidsargument. In hoofdstuk 4 beschrijf ik mijn eigen kritiek op de visie van Gödel.

In deze scriptie gebruik ik, in overeenkomst met Panza en Sereni,[5] de term 'platonisme' met een kleine letter p, om aan te duiden dat het in deze scriptie gaat over de stroming 'platonisme', en niet slechts 'de leer van Plato'. Ook gebruik ik in deze scriptie meerdere malen het concept 'waarheid'. Dit is op zich een lastig begrip, omdat vele definities ervan een correspondentie met de zintuigelijke wereld inhouden. Op Wikipedia staat: "Waarheid is het in overeenstemming zijn met de werkelijkheid.",[6] de Van Dale definieert waarheid als "overeenstemming van woorden met feiten.".[7] Het probleem met een soortgelijke definitie is dat het gelijk een objectief bestaande Waarheid met hoofdletter 'W' lijkt te suggereren: een uitspraak is waar als we deze in de werkelijkheid kunnen bevestigen. Dit lijkt een vorm van het platonisme eigenlijk gelijk aan te nemen, terwijl dit een stroming is die ter discussie staat in mijn scriptie. Daarom wil ik de lezer erop wijzen dat dit niet mijn doel is als ik spreek over 'ware' uitspraken, en dus dat het hier niet per definitie gaat over een uitspraak die een correspondentie heeft met de werkelijkheid.

Om dit begrip wat beter te duiden onderscheid ik in mijn discussie de termen 'bewijsbaar' en 'waar'. Hier is een uitspraak 'bewijsbaar' als deze uitspraak een 'logisch gevolg van een formeel systeem' is. Een uitspraak is in mijn discussie 'waar' als de bewijsbaarheid volgt, ofwel uit het systeem zelf, ofwel uit een redenatie of bewijs buiten het systeem. Zo weten we dat de uitspraak 'PA is consistent' niet bewijsbaar is in PA (vanwege de onvolledigheidsstellingen, zie 2.1), maar dat deze uitspraak wel *waar* is, omdat de consistentie van PA te bewijzen is in ZFC.[8] PA staat voor Peano Arithmetic, en dit zijn de axioma's voor eerste-orde rekenkunde, die de natuurlijke getallen definiëren. Ook kunnen we aannemen dat 'ZFC consistent is', wat op haar beurt niet te bewijzen is in ZFC, maar aangezien we deze uitspraak hebben aangenomen, kunnen we deze beschouwen als waar. Waarheid kan dus zowel een correspondentie hebben met de werkelijkheid, als slechts gedefinieerd zijn op basis van consistentie: de uitspraak 'PA is consistent' is bewijsbaar consistent met ZFC, dus kan deze uitspraak als waar beschouwd worden.

Ik besef me dat deze toelichting allesbehalve bevredigend is, maar hopelijk is dit wel voldoende de lezer ervan bewust te maken dat het begrip 'waarheid' in deze scriptie niet noodzakelijkerwijs verwijst naar 'in overeenstemming zijn met de werkelijkheid'.

Bovendien bevat deze scriptie enkele wiskundige uitspraken en termen die wellicht niet voor iedere lezer bekend zijn. Ik heb getracht deze voldoende uit te leggen, maar ik ben me ervan bewust dat deze uitleg wellicht te bondig is voor de niet wiskundig onderlegde lezer.

---

[5] Marco Panza en Andrea Sereni. *Plato's Problem. An introduction to mathematical platonism.* Red. door Andrea Sereni en Marco Panza. New York: Palgrave-Macmillan, 2013.

[6] *Waarheid.* Bezocht op 9-5-2024. URL: https://nl.wikipedia.org/wiki/Waarheid.

[7] *Betekenis 'waarheid'.* Bezocht op 9-5-2024. URL: https://www.vandale.nl/gratis-woordenboek/nederlands/betekenis/waarheid.

[8] Zie Michael Rathjen en Wilfried Sieg. „Proof theory". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024

Vandaar heb ik ook referenties toegevoegd naar de *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, zodat de lezer deze gemakkelijk kan raadplegen.

1 Het platonisme

Het platonisme als stroming in de filosofie van de wiskunde kan als volgt gekarakteriseerd worden: het platonisme berust op twee gedachten dat de uitspraken die gedaan worden in wiskundige theorieën gaan over abstracte objecten, en dat deze samen een apart domein van bestaande objecten vormen.[9] Deze stroming bestaat dus uit twee onderdelen, namelijk, dat wiskundige uitspraken over (1) een *apart domein* van objecten gaan, én (2) dat de objecten van wiskundige uitspraken *abstract* zijn. Dit eerste onderdeel houdt in dat wiskundige objecten buiten de zintuigelijke wereld bestaan, maar toch *echt* bestaan. We kunnen dit contrasteren met de nominalisten, die ontkennen dat de abstracte objecten waar de wiskunde over spreekt bestaan.[10] Een voorbeeld van het nominalisme komt voort uit de filosofie van Rudolph Carnap, die beschreef dat wiskundige uitspraken geen inhoud bevatten en ofwel volgen uit taalkundige conventies, of tautologieën zijn.[11] Aan het tweede onderdeel van het platonisme ontbreekt een positieve definitie.[12] Een abstract object kan gecontrasteerd worden met een concreet object, dat in de zintuigelijke wereld gevonden kan worden, echter, welke objecten onder welk concept vallen is niet geheel duidelijk. We kunnen wel voorbeelden van mogelijke abstracte objecten bedenken: de pijp van Sherlock Holmes is een object, we kunnen er theorieën over vormen of meningen over hebben, maar de pijp is geen (waarneembaar) fysiek, noch een mentaal, object. Vanuit het platonisme vallen de wiskundige objecten ook onder deze opvatting van abstracte objecten: verzamelingen, getallen of cirkels bestaan wel degelijk, maar zijn geen mentale of fysieke objecten, en bestaan dus als abstracte objecten onafhankelijk van de zintuigelijke wereld. Dit is niet onbetwist, want bijvoorbeeld Aristoteles zag wiskundige objecten als generalisaties van objecten uit de zintuigelijke wereld, en zou wiskundige objecten dus kunnen toekennen aan de concrete objecten.[13] Voor Aristoteles is het getal 4 geen abstract getal, maar een belichaming van een concept uit de zintuigelijke wereld, zoals bijvoorbeeld het aantal stoelen in mijn eetkamer of het aantal euromunten in mijn portemonnee.[14] Wat het onderscheid tussen abstracte en concrete objecten precies zou kunnen definiëren ga ik in deze scriptie niet verder op in, maar voor de volgende hoofdstukken is het vooral belangrijk om in te zien dat vanuit het platonisme wiskundige objecten beschouwd worden als *verschillend* van fysieke en mentale objecten en als abstract; dat deze objecten een apart domein vormen.

1.1 Plato

Het is de lezer vast niet ontgaan dat het woord 'platonisme' afgeleid is van Plato. Hoewel Plato tot de platonisten gerekend kan worden, is deze stroming veel breder dan zijn leer. Toch wil ik eerst stilstaan bij de manier waarop Plato zijn filosofie van de wiskunde formuleerde.

Plato ging onderzoek doen naar de wiskunde vanwege de problemen die hij vond in de

[9] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.1.
[10] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.9.
[11] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.10.
[12] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.3.
[13] David Bostock. „Plato versus Aristotle". In: *Philosophy of mathematics: an introduction.* Wiley-Blackwell, 2009, p. 1–32. ISBN: 978-1-405-18992-7, p.15.
[14] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.15.

ethiek.[15] Het is volgens hem namelijk niet mogelijk om universeel geaccepteerde voorbeelden van correct ethisch handelen te vinden. Dit gebrek aan voorbeelden is een probleem, omdat een definitie van een woord vaak pas duidelijk wordt nadat hier voorbeelden van gegeven zijn.[16] Een argument uit de cognitiefilosofie genaamd het kennisargument, ofwel Mary's Kamer, beschreven door Frank Jackson in 1986, leent zich goed voor een illustratie van het belang van voorbeelden. In dit gedachtenexperiment bevindt Mary zich in een kamer waarin slechts zwart en wit waarneembaar zijn, maar leert ze alle natuurkundige feiten over kleuren. Als zij later deze kamer uitstapt en rood ziet, zo gaat het argument, *leert* zij iets nieuws.[17] Dit argument is niet onbetwist, maar het illustreert wel het probleem: als zij een voorbeeld ziet van de kleur rood leert zij iets nieuws, en wordt de betekenis van dit concept duidelijker. In het gebrek aan voorbeelden zag Plato de analogie met de wiskunde: in de wiskunde is het ook niet mogelijk om duidelijke, zintuigelijke voorbeelden te vinden van de objecten waarover in de theorieën uitspraken worden gedaan.[18] Dit is dus ook de aanleiding voor zijn interesse in de wiskunde.[19]

Plato beschreef in zijn *Republiek* twee soorten domeinen, het zintuigelijke en het intelligibele domein.[20] Deze twee domeinen waren op hun beurt ook op te delen. Het zintuigelijke domein bevatte de originele objecten (zoals een pijp), en hun kopie of reflectie (zoals de afbeelding '*Ceci n'est pas une pipe*' van René Magritte: deze afbeelding is een *afbeelding* van deze pijp, en geen echte pijp[21]). Het intelligibele domein deelt Plato op in twee kennisdomeinen die onderscheiden worden door de manier van kennisvergaring binnen dit domein. In het eerste domein wordt gebruik gemaakt van hypotheses voor kennisvergaring, en het andere domein spreekt direct over de idee zelf.[22] Wiskunde hoort bij het eerste domein, namelijk, wiskunde stelt eerst het bestaan van haar objecten en eigenschappen hiervan (verzamelingen, getallen, rechte hoeken, etc.), en behandelt deze daarna als hypotheses.[23] Hier is het eerst belangrijk om op te merken dat Plato met het woord 'hypothese' niet de natuurwetenschappelijke invulling van dit woord bedoelt (een vermoeden dat bewezen of weerlegd gaat worden), maar een hypothese wordt aangenomen als vanzelfsprekend voor iedereen. Deze uitspraken worden dus behandeld als vanzelfsprekend en liggen aan de grondslag van het wiskundige systeem. In de huidige terminologie zouden we dit kunnen vergelijken met aannames, axioma's of definities.[24]

Bovendien behoren de objecten van de wiskunde tot het intelligibele domein. Namelijk, de stellingen in de wiskunde zijn waar (daar ging Plato vanuit), en deze waarheden gelden niet voor objecten in de zintuigelijke wereld (want geen enkel object is zo perfect als de objecten die gebruikt worden voor de wiskunde: perfecte cirkels, rechte hoeken, etc.), dus,

---

[15] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.2-3.
[16] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.2.
[17] Martine Nida-Rümelin en Donnchadh O Conaill. „Qualia: the knowledge argument". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.
[18] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.3.
[19] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.3.
[20] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.20.
[21] Zie `https://collections.lacma.org/node/239578`. Bezocht 17-4-2024
[22] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.20-21.
[23] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.20-21.
[24] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.21.

het zijn waarheden van ideële objecten.[25]

Deze ontologische status van de objecten van de wiskunde leidde tot een volgend probleem. De menselijke activiteit van het beoefenen van de wiskunde en de (waarheden over) wiskundige objecten zelf bevinden zich in andere domeinen.[26] De waarheden over wiskundige objecten gaan namelijk over de ideële wereld, maar de menselijke activiteit van het beoefenen van wiskunde kan slechts gaan over objecten uit de zintuigelijke wereld: cirkels getekend in het zand, rechthoekige driehoeken in klei[27] of tien vingers.[28] Dus, als de objecten van de wiskunde zich in het intelligibele domein bevinden, hoe kan hier, indien überhaupt mogelijk, kennis van vernomen worden? Om deze vraag te begrijpen moet eerst toegelicht worden wat *kennis* voor Plato inhoudt.

Kennis voor Plato is kennis van een object zelf.[29] Ook onderscheidt Plato *ware mening* van *kennis*. Ware mening kan gezien worden als de identificatie van een object uit de zintuigelijke wereld met wat het *is* in de ideeënwereld. Kennis is nu ware mening samen met de interpretatie van wat dit object onderscheidt van de andere objecten.[30] Echter, dit betekent dat om kennis te krijgen over een object waar nog geen kennis over bestond, er *wél* al kennis over moet bestaan, namelijk, wat het onderscheidt van de andere objecten.[31] Zo weten we dus, als we nog geen kennis van een object hebben, niet waarin het verschilt van andere objecten, en weten we dus ook niet of de 'kennis' die we gevonden hebben wel over dit object gaat. In andere woorden: als we kennis willen vergaren over een object kunnen we nooit zeker weten dat de 'kennis' die we gevonden hebben ook waar is, want we wisten er nog niets over![32] Plato heeft drie oplossingen geopperd over hoe ware mening en kennis zich tot elkaar verhouden.

In *Meno* beschrijft Plato dat de geest de waarheden die deze heeft opgedaan in de ideeënwereld, deze bij de geboorte, ofwel het toetreden van de aardse wereld zijn verloren.[33] Door het ondervragen kan deze kennis nu 'herinnerd' worden. Op deze manier is kennis geen nieuwe kennis, maar slechts herinnering.[34] De kennis die de geest heeft opgedaan in de ideeënwereld ziet Plato nu als *ware mening*, en deze kan door het herinneren tot kennis omgezet worden.[35] In *Phaedrus* is Plato iets negatiever, en beschrijft hij dat het ondervragen en herinneren de herinneringen aan de werkelijkheid oproept, maar dit niet zorgt voor ware kennis.[36] De waarheid van deze herinneringen kan dus niet vastgesteld worden, want er is geen ware kennis, waardoor deze herinneringen samen een schim zijn van de ware kennis.[37] In *Theaetetus* beschrijft Plato nu dat vanwege bovenstaande problemen, perceptie, ware mening of redenatie allemaal geen kennis kunnen creëren.[38]

[25] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.23.
[26] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.24-26.
[27] zoals de Babyloniërs die rond 1800 v.Chr al Pythagorese tripels in kleitabletten schreven
[28] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.24-26.
[29] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.18.
[30] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.18.
[31] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.18.
[32] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.3.
[33] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.19.
[34] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.18-19.
[35] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.19.
[36] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.20.
[37] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.20.
[38] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.17.

Laten we ons nu keren tot Plato's visie op kennis over wiskunde. In *Meno* illustreert Plato zijn theorie, ook *anamnese* genoemd, door een dialoog tussen Socrates en een tot slaaf gemaakte jongen te beschrijven, waarin Socrates hem een wiskundige waarheid, namelijk de methode voor de verdubbeling van het vierkant, zelf laat inzien, slechts door hem vragen te stellen.[39] In *Republiek* onderscheidde Plato wiskundige objecten als onderdeel van een apart domein binnen de intelligibele wereld, namelijk, het domein dat gebruik maakt van hypotheses of aannames. Dan is de methode van de wiskunde de studie van deze intelligibele objecten, via hun representaties in de zintuigelijke wereld.[40] Dit is nu nog steeds geen ware kennis, maar de uitspraken die volgen uit de wiskunde zijn wel het dichts bij ware kennis dat mensen kunnen komen.[41] Zo wordt het epistemologische probleem niet volledig opgelost, maar kan er toch een beperkte vorm van kennis vergaard worden.

1.2 Modern platonisme

Het platonisme is na Plato nog veel verder ontwikkeld. In deze sectie beschrijf ik drie verschillende vormen van het platonisme in de moderne tijd die belangrijk zijn voor de rest van de scriptie.

Een voorbeeld van een vorm van het platonisme uit de tijd na Plato is het constitutief platonisme dat volgens Richard Tieszen volgt uit de interpretatie van de fenomenologie van Husserl. Hierbij eerst een disclaimer: dit is slechts de interpretatie van Tieszen van de filosofie van Husserl. Er zijn anderen die de filosofie van Husserl anders interpreteren: Gian-Carlo Rota beschrijft Husserl als een realist en Mark van Atten beschrijft Husserl als meer een intuïtionist zoals Brouwer.[42] Echter, Tieszen beschrijft Husserls theorie als een speciale vorm van platonisme, en gebruikt deze later om de theorie van Gödel te duiden. Tieszen beschrijft dat Husserls theorie, waarin de intentionaliteit van het menselijk bewustzijn centraal staat, de menselijke geest zich kan richten (intentionaliteit) op de *ervaring* van objecten, en niet de objecten zelf, welke immanent is.[43] Namelijk, we kunnen twijfelen aan het bestaan van de objecten, maar ongeacht het bestaan van de objecten bestaat de *ervaring* van deze objecten wel degelijk.[44] Dit betekent dus dat het bewustzijn betekenis geeft aan deze objecten, en dus is het bewustzijn *constitutief* voor de betekenis van objecten. Hierover meer in sectie 2.3

Wat betekent dit nu voor de objecten van de wiskunde? Tieszen beschrijft twee verschillende soorten "geest-(on)afhankelijkheden". Zo is het mogelijk dat de wiskundige objecten, in zijn woorden, geest-onafhankelijk$_1$ zijn, of geest-afhankelijk$_1$ zijn.[45] Deze twee termen houden respectievelijk in dat de objecten van de wiskunde ofwel volledig onafhankelijk van de geest bestaan (in de puur platonistische zin), of afhankelijk van de geest bestaan. Binnen deze laatste categorie zijn er nog twee subcategorieën: geest-onafhankelijkheid$_2$ of geest-

39 Bostock, „Plato versus Aristotle", p.3-5.

40 Bostock, „Plato versus Aristotle", p.12.

41 Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.22.

42 Zie bijvoorbeeld M. Hartimo. „Husserl's pluralistic phenomenology of mathematics". In: *Philosophia Mathematica* 20.1 (2012), p. 86–110. DOI: 10.1093/philmat/nkr032, p.86. Hartimo beschrijft in dit artikel wel dat ze het voornamelijk eens is met de opvatting van Tieszen, zie p.87

43 Tieszen, *After Gödel*, p.94.

44 Tieszen, *After Gödel*, p.94.

45 Tieszen, *After Gödel*, p.103.

afhankelijkheid$_2$.[46] Deze eerste houdt in dat, ondanks dat de objecten geest-afhankelijk zijn, ze ook geest-onafhankelijk zijn: ze verschijnen als geest-onafhankelijk, maar de verschijning zelf is geest-afhankelijk. Deze categorie past bij Husserls overtuiging: het bestaan van de objecten (van de wiskunde) is altijd afhankelijk van de ervaring (we kunnen de onafhankelijkheid ervan niet vaststellen want slechts de *ervaring* is immanent, zie ook sectie 2.3), maar de objecten zijn wel altijd hetzelfde geconstitueerd en verschijnen dus als geest-onafhankelijk.[47] De wiskundige objecten verschijnen dus aan ons als geest-onafhankelijk, maar de waarneming ervan is nog steeds geest-afhankelijk.[48] De categorie van geest-afhankelijk$_2$ houdt in dat de objecten dus volledig geest-afhankelijk zijn.

Volgens de theorie van Husserl kunnen wiskundige objecten dus gezien worden als geest-onafhankelijk, en dus kan de theorie van Husserl gezien worden als een vorm van het platonisme, al legt Husserl wel de nadruk op de *ervaring* van wiskundige objecten als constituerend.[49] Over de theorie van Husserl in sectie 2.3 meer.

De tweede moderne invulling van het platonisme die ik wil beschrijven is de theorie van Joel David Hamkins. Zijn theorie beschrijft een platonistisch *multiversum*, waarin ieder mogelijk concept van een verzameling bestaat (in hun corresponderende verzamelingtheoretische universum), en dat deze allemaal op dezelfde platonistische wijze bestaan.[50] Dat betekent dat wat hij de *universe view* noemt, de overtuiging dat er *een unieke* absolute definitie van het concept verzameling bestaat waarin iedere uitspraak een vaste waarheidswaarde heeft, verwerpt. Ieder mogelijk universum en de bijbehorende definities van het concept 'verzameling' bestaat, en met dezelfde platonistische waarheidsaanspraak.[51] Zo kan de verzamelingenleer alsnog een grond zijn voor de rest van de wiskunde, aangezien het bestaan van de wiskundige objecten niet ontkend wordt, slechts de uniciteit van het concept 'verzameling'.[52]

Een andere theorie is de theorie van Willard Van Orman Quine (en Hilary Putnam), die de Platoonse ontologie met de Aristotelische epistemologie combineren:[53] wiskunde gaat over abstracte maar bestaande objecten, en de kennis hiervan kan op empirische wijze verkregen worden. Ook is een van de bekendste argumenten voor het platonisme afkomstig van Quine en Putnam, namelijk, het onmisbaarheidsargument:[54] de wiskunde is onmisbaar voor de empirische wetenschappen, dus bestaan wiskundige objecten.

[46] Tieszen, *After Gödel*, p.103.
[47] Tieszen, *After Gödel*, p.103.
[48] Tieszen, *After Gödel*, p.103.
[49] Tieszen, *After Gödel*, p.98.
[50] Joel David Hamkins. „The set-theoretic multiverse". In: *The review of symbolic logic* 5.3 (aug 2012), p. 416–449. ISSN: 1755-0211. DOI: 10.1017/s1755020311000359. URL: http://dx.doi.org/10.1017/S1755020311000359, p.416.
[51] Hamkins, „The set-theoretic multiverse", p.417.
[52] Hamkins, „The set-theoretic multiverse", p.417.
[53] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.31.
[54] Peter Hylton en Gary Kemp. „Willard Van Orman Quine". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Herfst 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

1.3 Onmisbaarheidsargument

In 1960 schreef de natuurkundige Eugene Wigner een artikel genaamd "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences"[55] waarin hij het effect van de wiskunde op de natuurkunde toelicht. Een centraal punt uit zijn vertoog is dat

> the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious.[56]

Hij beargumenteert in dit artikel dat we zien dat met name concepten uit de wiskunde toepasbaar blijken te zijn in delen waar ze niet voor ontwikkeld zijn. Wigner gebruikt ter illustratie het voorbeeld van het getal π, wat de verhouding tussen de diameter en de omtrek van een cirkel is, maar ook gevonden kan worden in de statistiek.[57] Bovendien schrijft Wigner dat

> the mathematical formulation of the physicist's often crude experience leads in an uncanny number of cases to an amazingly accurate description of a large class of phenomena. This shows that the mathematical language has more to commend it than being the only language which we can speak; it shows that it is, in a very real sense, the correct language.[58]

Ofwel, de wiskunde is zo universeel toepasbaar op de natuurkunde dat de wiskunde wel waar *moet* zijn. Als we daarbij aannemen dat als een theorie waar is, de objecten ervan moeten bestaan, zouden we hieruit kunnen concluderen dat wiskundige objecten *moeten* bestaan: de wiskunde is zo universeel toepasbaar dat deze wel waar moet zijn, en dus bestaan haar objecten.[59] Kort samengevat komt het onmisbaarheidsargument, een belangrijk argument voor het bestaan van wiskundige objecten, hierop neer.

Er bestaan meerdere uitwerkingen van dit argument. De eerste mogelijke uitwerking is ontologisch.

(1) Als er ware wetenschappelijke theorieën bestaan,

(2) de wiskunde onmisbaar is voor deze wetenschappelijke theorieën (zoals volgens Wigner de wiskunde is voor de natuurkunde),

(3) deze wetenschappelijke theorieën slechts waar zijn als de wiskunde waar is,

(4) een wiskundige theorie slechts waar is als haar objecten bestaan,

($\therefore$) De objecten van de wiskunde bestaan.[60]

---

[55] Eugene Wigner. „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences". In: *Communications in pure and applied mathematics* 13 (1960), p. 1–9. URL: `https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wigner.pdf`.

[56] Wigner, „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", p.2.

[57] Wigner, „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", p.1.

[58] Wigner, „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", p.6.

[59] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.197.

[60] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.197.

Deze vorm van het onmisbaarheidsargument is niet onbetwist: aanname (1) kan namelijk al makkelijk in twijfel worden getrokken. Zo heeft wetenschapsfilosoof Thomas Kuhn in *The Structure of Scientific Revolutions*[61] bijvoorbeeld de notie van een *paradigma* ontwikkeld. Dit is een verzameling van concepten, axioma's of theorieën die universeel erkend zijn en als standaard gelden voor bijdrages aan deze wetenschappelijke theorie.[62] Dit betekent dat het ook mogelijk is dat er een verandering van paradigma plaatsvindt, zoals volgens Kuhn de verandering van het Ptolemeïsche systeem waarin de zon om de aarde draaide, naar het Copernicaanse systeem waarin de aarde om de zon draait.[63] Dit kan als kritiek gezien worden op aanname (1), namelijk, kunnen we wel spreken van *ware* wetenschappelijke theorieën, of zijn deze theorieën slechts waar *binnen hun paradigma*?

Dit bezwaar kan aanleiding zijn om een, wellicht zwakkere, versie van dit argument te bekijken, de epistemologische variant. Dit argument zegt dat

(1) Als we voldoende grond hebben om te geloven dat wetenschappelijke theorieën waar zijn,

(2) de wiskunde onmisbaar is voor deze theorieën,

(3) we voldoende grond hebben om in de waarheid van de wetenschappelijke theorieën te geloven slechts wanneer we ook voldoende grond hebben om in de waarheid van de wiskunde te geloven,

(4) we slechts voldoende grond hebben om in de waarheid van de wiskunde te geloven als de objecten van de wiskunde ook daadwerkelijk bestaan.

($\therefore$) We hebben voldoende grond om te geloven dat de objecten van de wiskunde bestaan.[64]

Het verschil tussen dit argument en het voorgaande, is dat de conclusie van dit argument slechts aangeeft dat er voldoende grond is om het bestaan van de objecten van de wiskunde aan te nemen, niet dat ze daadwerkelijk bestaan.[65] Een probleem met deze formulering zou kunnen zijn dat het slechts laat zien dat we voldoende grond hebben om te geloven in het bestaan van objecten, en niet dat deze echt *bestaan*.[66]

Wat de bezwaren ook zijn, een vorm van het onmisbaarheidsarument is toch een intuïtief sterk argument voor het platonisme: in de natuurkunde is het gebleken dat de wiskunde onmisbaar is, dus moet de wiskunde wel echt bestaan (of is het in Wigners woorden *the correct language*), en dus moeten haar objecten ook echt bestaan. Dit sluit natuurlijk andere filosofieën van de wiskunde niet uit, zoals bijvoorbeeld het (Aristotelisch) realisme of de theorie beschreven door Quine of Putnam (kortweg een combinatie van de Platoonse ontologie en Aristotelische epistemologie[67]) aangezien het slechts een argument is voor het

[61] Thomas S. Kuhn. *The structure of scientific revolutions.* University of Chicago Press: Chicago, 1962.
[62] Zie p.viii uit Kuhn, *The structure of scientific revolutions*, URL:`https://www.lri.fr/~mbl/Stanford/CS477/papers/Kuhn-SSR-2ndEd.pdf`
[63] Kuhn, *The structure of scientific revolutions*.
[64] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.198.
[65] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.198.
[66] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.198.
[67] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.31.

bestaan van de objecten, maar het is geen argument voor het abstract zijn van deze objecten. Noch zegt dit argument iets over de wiskundige theorieën die geen relatie hebben tot de natuurkunde (zoals bijvoorbeeld theorieën over transfiniete kardinaalgetallen), maar de onmisbaarheid van bepaalde delen van de wiskunde voor de natuurkunde valt niet te ontkennen.

Gödel geeft in "Russells mathematical logic"[68] een soortgelijk onmisbaarheidsargument:

> It seems to me that the assumption of such [wiskundige] objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to assert about these entities as propositions about the 'data', i.e., in the latter case the actually occurring sense perceptions.[69]

Volgens Gödel is het bestaan van wiskundige objecten om een voldoende sterk wiskundig systeem te maken net zo noodzakelijk als het bestaan van natuurkundige objecten om een sterk genoeg natuurkundig systeem te maken. Het bestaan van de objecten is dus even noodzakelijk voor wiskundige theorieën als voor natuurkundige. Bovendien schrijven Panza en Sereni dat Gödel in dit essay het bestaan van verzamelingen als objecten aanneemt, en dit rechtvaardigt door zich te beroepen op de ontwikkeling van de verzamelingenleer:[70]

> [I]t seems likely that for deciding certain questions of abstract set theory and even for certain related questions of real numbers new axioms based on some hitherto unknown idea will be necessary.[71]

De noodzaak voor sterkere axioma's in de toekomst bevestigt dat de wiskunde ontdekt wordt en dus dat de objecten ervan bestaan. Dus, de theorie van de verzamelingenleer is waar, en voor een wiskundige theorie is het noodzakelijk dat de objecten bestaan, dus de objecten bestaan.[72]

Hier kunnen we nog aan toevoegen dat Gödel in (het supplement uit 1964) van zijn artikel "What is Cantor's Continuum Problem"[73] schreef dat

> Despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true.[74]

[68] Kurt Gödel. „Russell's mathematical logic". In: *Kurt Gödel: collected works. Volume 2.* Deel 2. Oxford University Press, 1944, p. 119–141. URL: `https://monoskop.org/images/b/b7/Kurt_Godel_Collected_Works_Volume_II_1989.pdf`.

[69] Gödel, „Russell's mathematical logic", p.128.

[70] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.93.

[71] Gödel, „Russell's mathematical logic", p.121.

[72] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.93.

[73] Kurt Gödel. „What is Cantor's Continuum Problem". In: *Kurt Gödel: collected works. Volume 2.* Oxford University Press, 1964, p. 254–270. URL: `https://monoskop.org/images/b/b7/Kurt_Godel_Collected_Works_Volume_II_1989.pdf`.

[74] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

Dit lijkt nog bijna verder te gaan dan het onmisbaarheidsargument: de axioma's van de wiskunde forceren hun eigen waarheid, dus bestaan deze objecten niet alleen, maar kunnen we deze ook op een bepaalde manier waarnemen. Deze waarneming is voor Gödel wiskundige intuïtie, maar hier kom ik in sectie 2.4 op terug.

Dan is er nog een laatste citaat uit hetzelfde supplement uit 1964, waarin Gödel schrijft dat

> besides mathematical intuition, there exists another (though only probable) criterion of the truth of mathematical axioms, namely their fruitfulness in mathematics and, one may add, possibly also in physics.[75]

Ook dit kan gekoppeld worden aan het onmisbaarheidsargument:[76] de waarheid van wiskundige axioma's volgt uit de enorme hoeveelheid aan positieve gevolgen in de wiskunde en de natuurkunde.

[75] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.269.
[76] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.98.

2 Gödels filosofie

Kurt Gödel was een van de meest invloedrijke wiskundigen van de twintigste eeuw. Zijn onvolledigheidsstellingen, bewezen in 1931, hadden een diepe impact op zowel de wiskunde zelf, als de filosofie van de wiskunde.[77] Dankzij de onvolledigheidsstellingen weten we dat voor ieder consistent formeel systeem, er een wiskundige uitspraak bestaat die onbeslisbaar is in dit systeem. Ook de consistentie van het systeem is niet in dit systeem zelf te bewijzen.

Voor Gödel leek dit aanleiding te zijn om op zoek te gaan naar een nieuw fundament voor de wiskunde. Als er namelijk aan ieder consistent formeel systeem wiskundige uitspraken ontsnappen, dan zouden er uitspraken kunnen bestaan die *absoluut onbeslisbaar* zijn. Dit lijkt voor Gödel een onacceptabele conclusie, en dus bekritiseert hij het werk van Carnap en Hilbert, voor wiens filosofieën het bestaan van absoluut onbeslisbare uitspraken niet problematisch is, en neemt hij zijn toevlucht tot de fenomenologie van Husserl. Husserls theorie kan namelijk wel een verklaring geven voor het door mensen kunnen beslissen van wiskundige uitspraken. Dit is dan ook de theorie waarop zijn filosofie van de wiskunde is gebaseerd.[78]

Deze onvolledigheidsstellingen hebben niet slechts invloed gehad op de wiskunde, maar hebben ook ver daarbuiten nog implicaties. Zo hebben filosoof John Lucas en natuurkundige Roger Penrose de onvolledigheidsstellingen van Gödel gebruikt om een argument te geven voor de hypothese dat het menselijk bewustzijn niet als computer gezien kan worden.[79]

2.1 Onvolledigheidsstellingen

De onvolledigheidsstellingen zijn twee stellingen waar de tweede stelling eigenlijk een gevolg is van de eerste stelling. Hoewel het een enorm interessant en ongelooflijk creatief bewijs is (volgens Australisch wiskundige John Stillwell "one of the most stunning in mathematics"[80]), zal ik het gedetailleerde bewijs van Gödel in deze scriptie achterwegen laten. Voor een uitgebreid bewijs verwijs ik de lezer graag door naar *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*[81] voor een vertaling van het originele bewijs van Gödel.

Voordat we de onvolledigheidsstellingen bekijken moeten eerst wat wiskundige noties toegelicht worden. Een *formeel systeem* S is een axiomatische theorie waarin wiskundige uitspraken bewezen of weerlegd kunnen worden.[82] Voorbeelden hiervan zijn ZFC of PA. ZFC, Zermelo-Fraenkel met het Keuzeaxioma is het systeem dat heden ten dage gebruikt wordt in de axiomatische verzamelingenleer en dus als fundament voor de huidige wiskunde. Dit systeem is pas in het begin van de twintigste eeuw ontwikkeld, maar PA, Peano Arith-

[77] Panu Raatikainen. „Gödel's incompleteness theorems". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta. Lente 2022. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2022.

[78] Tieszen, *After Gödel*.

[79] Zie ook mijn bachelorscriptie.

[80] Stillwell, *A concise history of mathematics for philosophers*, p.62.

[81] Kurt Gödel. *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*. Dover Publications Inc., 1992. ISBN: 0-486-66980-7. URL: `https://monoskop.org/images/9/93/Kurt_G%C3%B6del_On_Formally_Undecidable_Propositions_of_Principia_Mathematica_and_Related_Systems_1992.pdf`.

[82] Torkel Franzén. *Gödel's Theorem. An incomplete guide to its use and abuse.* Jun 2005. ISBN: 9781439876923, p.13.

metica is een formeel systeem dat in de negentiende eeuw was ontwikkeld om de axioma's voor de natuurlijke getallen uit te drukken. Als een formeel systeem S *consistent* is bevat dit systeem geen tegenspraken, en als een formeel systeem S *volledig* is zijn alle ware uitspraken ook bewijsbaar.

De eerste onvolledigheidsstelling zegt nu dat

Stelling 1. *Ieder consistent formeel systeem S waarin voldoende rekenkunde gedaan kan worden is onvolledig: dit systeem bevat een onbeslisbare uitspraak.*[83]

Dit betekent dus dat in ieder consistent formeel systeem S waarin voldoende rekenkunde gedaan kan worden, er uitspraken bestaan die niet bewijsbaar zijn, en waarvan de ontkenning ook niet bewijsbaar is. Hiervoor is het ook belangrijk dat er voldoende rekenkunde in het systeem gedaan kan worden, want in het bewijs van deze stelling maakt Gödel gebruik van een techniek die Gödelnummering wordt genoemd, waarin hij ieder syntactisch wiskundig object een getal toekent. Door gebruik te maken van (de uniciteit van) priemfactoren kan iedere wiskundige uitspraak (uniek) gerepresenteerd worden door een natuurlijk getal. Hierna kan er ook een Gödeluitspraak gecreëerd worden. De Gödeluitspraak van een formeel systeem S is de uitspraak G_S waarvoor geldt dat: S bewijst G_S desda n is geen Gödelnummer van een uitspraak in S, waar n het Gödelnummer van G_S is.[84] Wat hier in essentie staat, is een soort leugenaarsparadox: de Gödeluitspraak G_S is bewijsbaar in S desda het Gödelnummer van deze uitspraak G_S geen nummer is van een theorie uit S.[85] G_S is dus de uitspraak die zegt dat 'G_S niet bewijsbaar is in S'. Als G_S bewijsbaar is in S, dan is 'G_S is niet bewijsbaar is in S' dus bewijsbaar, en is G_S dus *niet* bewijsbaar in S. Dit geeft een tegenspraak, wat weer in tegenspraak is met de aanname dat S consistent is. Dit betekent dus dat G_S niet bewijsbaar is in S.[86]

Stel dat $\neg G_S$ bewijsbaar is. Dat betekent dat n geen nummer is van een theorie uit S (want als dit wel zo zou zijn zou G_S een stelling in S zijn, en zou S dus inconsistent zijn), en dus dat G_S bewijsbaar is in S. We zagen hierboven dat dit niet kan, dus is $\neg G_S$ ook niet bewijsbaar in S.[87] Zowel G_S als $\neg G_S$ zijn dus niet bewijsbaar in S, en dus is er een uitspraak die onbeslisbaar is in S.

Gödels eigen bewijs van de eerste onvolledigheidsstelling was puur syntactisch.[88] Het ging slechts om de bewijsbaarheid van uitspraken binnen een systeem, en niet over hun waarheidsaanspraak. Echter, het is vrij eenvoudig om de notie van correctheid bij dit bewijs te betrekken. Namelijk, een systeem is Σ-*correct* als er, in essentie, geen onware uitspraken bewezen kunnen worden.[89] Als we nu aannemen dat een systeem ook Σ-correct is, dan hebben we gezien dat het bewijsbaar is dat G_S niet bewijsbaar is, dus dan is het bewijsbaar dat 'G_S niet bewijsbaar is in S'. Dit betekent bovendien dat G_S *waar* is, aangezien het bewijsbaar is dat n geen nummer van een theorie uit S is, dus is G_S bewijsbaar, en vanwege Σ-correctheid is G_S dus ook waar. We kunnen dit ook als volgt zien: als G_S niet bewijsbaar is in S, dan is de uitspraak 'G_S is niet bewijsbaar in S' waar, en dus is G_S waar, aangezien

[83] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.16.
[84] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.42.
[85] Tieszen, *After Gödel*, p.26.
[86] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.42.
[87] Raatikainen, „Gödel's incompleteness theorems".
[88] Raatikainen, „Gödel's incompleteness theorems".
[89] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.43.

deze uitspraak over zichzelf zegt dat hij niet bewijsbaar is in S, en dat klopt. Zo hebben we dus een ware, onbewijsbare uitspraak geconstrueerd.[90] Hieruit volgt ook nog dat $\neg G_S$ niet bewijsbaar kan zijn, want aangezien G_S waar is, is $\neg G_S$ onwaar, en dus kan $\neg G_S$ vanwege de de Σ-correctheid niet bewijsbaar zijn.[91]

De tweede onvolledigheidsstelling luidt:

Stelling 2. *Voor ieder consistent formeel systeem S waarin voldoende rekenkunde gedaan kan worden kan de consistentie van S niet in S bewezen worden.*[92]

Gödel bewees deze uitspraak in 1931 niet erg rigoureus,[93] maar het idee van dit bewijs volgde uit de eerste onvolledigheidsstelling.

Namelijk, we zagen in de eerste onvolledigheidsstelling dat als S consistent is, G_S niet bewijsbaar is. Deze gehele redenering is in S zelf uit te voeren (want het bewijs van de eerste onvolledigheidsstelling kan in ieder consistent formeel systeem S waarin voldoende rekenkunde gedaan kan worden volbracht worden), en dat betekent dat als S consistent is, we een bewijs hebben voor de uitspraak dat 'G_S niet bewijsbaar is'. Echter, dit betekent dat G_S bewijsbaar is, aangezien G_S uitdrukt dat 'G_S niet bewijsbaar is', en dit is bewijsbaar. Dit betekent weer dat 'als S consistent is dan is G_S bewijsbaar' bewijsbaar is in S. *Als* de consistentie van S bewezen kan worden in S, dan is G_S bewijsbaar in S, wat in tegenspraak is met de conclusie uit de eerste onvolledigheidsstelling. Dus, de uitspraak 'S is consistent' is niet bewijsbaar in S.[94]

Dit bewijs kan ook gegeven worden door gebruik te maken van de semantische interpretatie van de eerste onvolledigheidsstelling. Voor de tweede onvolledigheidsstelling geldt dat de bovenstaande redenering dat 'als S consistent is, dan is G_S waar' uit te voeren is in S, en dat betekent dat 'als S consistent is dan is G_S waar' bewijsbaar is in S. Dat betekent dat, als bewijsbaar is dat S consistent is, dan volgt de waarheid van G_S. Dit is precies een bewijs van G_S! Echter, de bewijsbaarheid van G_S is in tegenspraak met de eerste onvolledigheidsstelling, dus is de uitspraak 'S is consistent' niet bewijsbaar in S.[95]

De onvolledigheidsstellingen laten dus zien dat ieder consistent formeel systeem S haar eigen consistentie niet kan bewijzen. Dit betekent ook dat als de uitspraak 'S is consistent' toegevoegd wordt aan S er een nieuw systeem ontstaat, $S_1 = S +$ 'S is consistent', waarvan de consistentie niet in S_1 bepaald kan worden. Zo *ontglipt* er dus aan ieder consistent formeel systeem een wiskundig uitspraak.

2.2 Implicaties van de onvolledigheidsstellingen: Gödels disjunct

Betekent dit dan ook dat er absoluut onbewijsbare wiskundige uitspraken bestaan? Gödel bespreekt dit probleem in zijn *Gibbs Lecture* uit 1951. Hierin formuleert hij de conclusie van zijn onvolledigheidsstellingen als 'ofwel de menselijke geest overstijgt iedere machine, ofwel er bestaan absoluut onbeslisbare Diophantische problemen'.[96] Een *Diophantische vergelij-*

[90] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.42-43.
[91] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.43.
[92] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.34.
[93] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.48.
[94] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.48.
[95] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.48.
[96] Tieszen, *After Gödel*, p.181.

king is een vergelijking van de vorm $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$, waar $D(x_1, \ldots, x_n)$ een polynoom is met gehele getallen als coëfficiënten.[97] Een voorbeeld hiervan kan zijn $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, die de Pythagorese tripels, zoals bijvoorbeeld $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$, als oplossingen heeft.[98] Waarom precies deze verwoording gebruikt wordt is niet erg relevant, dus daarom wil ik mij beperken tot de interpretatie van deze uitspraak: het bestaan van absoluut onbeslisbare Diophantische problemen betekent dat er absoluut onbeslisbare wiskundige waarheden bestaan. De disjunct die Gödel dus beschrijft is: ofwel de menselijke geest overstijgt iedere machine (waarbij een machine ook gezien kan worden als Turingmachine, en dus als formeel systeem), ofwel er bestaan absoluut onbeslisbare wiskundige waarheden.

Stel dat deze disjunct niet waar is. Dat betekent dat er geen absoluut onbeslisbare wiskundige waarheden bestaan, en dat de menselijke geest een machine is. Dan kan het formele systeem S dat aan de basis ligt van deze machine *alle* wiskundige waarheden bewijzen, want er bestaan geen absoluut onbeslisbare waarheden. Echter, dit is in tegenspraak met de onvolledigheidsstellingen aangezien S nooit de uitspraak 'S is consistent' kan bewijzen.[99] De disjunct is dus een direct gevolg van de onvolledigheidsstellingen. Als we nu alle door een formeel systeem of Turingmachine bewijsbare uitspraken uitdrukken met T, alle door de menselijke geest bewijsbare uitspraken uitdrukken met G en alle wiskundige waarheden uitdrukken met W, dan is het vanwege de onvolledigheidsstellingen niet mogelijk dat $T = G = W$, aangezien er een uitspraak φ bestaat die niet in T zit, maar wel in W. Dus volgen drie opties:

(1) $T \subsetneq G = W$

(2) $T = G \subsetneq W$

(3) $T \subsetneq G \subsetneq W$

Ofwel, (1) de menselijke geest overstijgt iedere machine en er bestaan geen absoluut onbeslisbare wiskundige waarheden, (2) de menselijke geest is een machine en er bestaan absoluut onbeslisbare wiskundige waarheden, (3) de menselijke geest is geen machine, maar er bestaan alsnog absoluut onbeslisbare wiskundige waarheden.[100] Dus, aangezien geen consistent formeel systeem S haar eigen consistentie kan bewijzen is de vraag dus eigenlijk: kunnen mensen dit *wel* en overstijgt de menselijke geest iedere machine (optie (1) of (3)), of kan de mens dit *niet* en bestaan er absoluut onbeslisbare Diophantische vergelijkingen (optie (2) of (3)).

Wat zijn nu de filosofische implicaties van deze disjunct? In zijn latere werken verkiest Gödel optie 1, maar in zijn *Gibbs Lecture* licht hij toe waarom de acceptatie van tweede disjunct, dus optie (2) of (3), (een vorm van) het platonisme als gevolg zou hebben.[101] De aanname van de tweede disjunct lijkt voor Gödel in ieder geval de verwerping van het Aristotelisch realisme, het psychologisme en het idee dat wiskunde een creatie is van de mens te impliceren.[102]

[97] Franzén, *Gödel's Theorem*, p.10.
[98] Zie Raatikainen, „Gödel's incompleteness theorems", sectie 4.4
[99] Tieszen, *After Gödel*, p.182.
[100] Tieszen, *After Gödel*, p.182.
[101] Tieszen, *After Gödel*, p.64.
[102] Tieszen, *After Gödel*, p.64.

Ten eerste, Aristotelisch realisme. Aristotelisch realisme was de overtuiging dat wiskunde in abstracte termen over gegeneraliseerde objecten uit de zintuigelijke wereld spreekt.[103] Als de tweede disjunct wordt aangenomen, en daarbij dus de objectiviteit van de wiskunde wordt aangenomen, betekent dit volgens Gödel dat de objecten wel daadwerkelijk moeten verschillen van objecten in de zintuigelijke wereld, en dus niet van de vorm kunnen zijn die Aristoteles beschrijft.[104] Hij vindt namelijk dat wiskunde niet over de zintuigelijke wereld spreekt, de objecten van de wiskunde volledig kenbaar zijn (de kennis is deductief), en de objecten gekend kunnen worden zonder gebruik te maken van de zintuigen.[105] Als de objectiviteit van de wiskunde dus wordt aangenomen, moeten volgens Gödel deze objecten deze eigenschappen hebben, en zijn ze dus *anders* dan zintuigelijke objecten.[106] Hiermee verwerpt Gödel het Aristotelisch realisme vanuit de acceptatie van de tweede disjunct.

Ten tweede, het psychologisme. Volgens het psychologisme volgen de objecten van de wiskunde slechts uit de psychologische wetten die verantwoordelijk zijn voor ons gevoel van overtuiging.[107] Dit betekent dat er helemaal geen wiskundige waarheden zijn, slechts dat wij weten dat onze geest *denkt* dat er wiskundige waarheden zijn. Als de tweede disjunct wordt aangenomen, of überhaupt de aanname dat een (klein) deel van de wiskunde wel degelijk objectieve waarheden bevat, kan deze positie niet behouden worden.[108]

Bovendien impliceert deze disjunct volgens Gödel dat er wiskundige waarheden bestaan die ongrijpbaar zijn voor de mens, waardoor het onmogelijk is voor wiskunde om een creatie te zijn van de mens. Want, ten eerste, beargumenteert hij dat voor een schepper altijd alle eigenschappen van haar eigen schepping bekend zullen zijn.[109] Dat betekent dus dat alle eigenschappen van wiskundige objecten voor de mens bekend moeten zijn. Als dit niet zo zou zijn, dan zou dit slechts te wijten kunnen zijn aan een gebrek aan inzichtelijkheid in het onderwerp.[110] Ondanks de ontwikkelingen in de wiskunde en de toename in inzichtelijkheid zijn de objecten nog steeds onduidelijk.[111] Ten tweede beargumenteert Gödel dat als de wiskunde gezien wordt als creatie, het wel erg weinig vrijheid toelaat: als creatie in de wiskunde bestaat, dan wordt deze creatie beperkt door de logische gevolgtrekking die noodzakelijk is in de wiskunde, en we kunnen niet gewoonweg bewijzen wat we willen.[112] We hebben geen volledige vrije wil in de wiskunde, dus moet er iets *buiten* de wiskunde bestaan dat de vrije wil hierin beperkt.[113] Ten derde zegt Gödel dat als we in wiskunde bepaalde objecten bepaalde eigenschappen geven, dan moeten we, om deze eigenschappen te begrijpen, andere objecten creëren.[114] Als voorbeeld gebruikt hij gehele getallen en verzamelingen van gehele getallen: het tweede concept volgt niet uit de eerste, maar om bepaalde eigenschappen van gehele getallen te bewijzen hebben we het tweede concept nodig. Zo creëren we dus objecten met bepaalde eigenschappen, die we pas kunnen begrijpen door het gebruik van

[103] Bostock, „Plato versus Aristotle", p.15.
[104] Tieszen, *After Gödel*, p.64.
[105] Tieszen, *After Gödel*, p.64.
[106] Tieszen, *After Gödel*, p.64.
[107] Tieszen, *After Gödel*, p.67.
[108] Tieszen, *After Gödel*, p.67.
[109] Tieszen, *After Gödel*, p.64.
[110] Tieszen, *After Gödel*, p.66.
[111] Tieszen, *After Gödel*, p.66.
[112] Tieszen, *After Gödel*, p.67.
[113] Tieszen, *After Gödel*, p.67.
[114] Tieszen, *After Gödel*, p.67.

andere objecten.[115] Deze drie argumenten geeft Gödel tegen het idee dat de wiskunde een menselijke creatie is, vanuit de acceptatie van de tweede disjunct: als we de objectiviteit van wiskunde aannemen, en aannemen dat wiskunde een creatie is, dan voldoet onze wiskunde niet aan de karakteriserende eigenschappen van een creatie.

De tweede disjunct impliceert dus, volgens Gödel, altijd een bepaalde vorm van het platonisme. De wiskunde is geen creatie en bestaat dus echt, maar niet in de zintuigelijke wereld zoals Aristoteles postuleerde. Hierover meer in hoofdstuk 4. Gödel was zelf echter overtuigd van optie 1, en accepteerde dus de eerste disjunct en verwierp de tweede disjunct. Ook uit deze optie volgde volgens hem een vorm van het platonisme. Hier kom ik in 2.3 en 2.4 op terug.

2.3 Carnap, Kant en Husserl

Buiten de implicaties van deze disjunct om zet Gödel zich in het bijzonder af tegen Carnap, wiens theorie de druppel leek te zijn die de emmer deed overlopen. Gödel heeft in 1959 een artikel geschreven waarin hij in zijn ogen de filosofie van Carnap weerlegt (deze is ongepubliceerd gebleven aangezien Gödel vond dat hij wel uitlegde wat wiskunde niet was, maar niet wat het wel is).[116]

Carnap ontwikkelde een filosofie van de wiskunde die een combinatie was van nominalisme en conventionalisme.[117] *Nominalisme* was de opvatting dat de termen voor de werkelijkheid geen aparte ontologische status hebben, maar slechts woorden en namen zijn en *conventionalisme* is de opvatting dat waarheden gebaseerd zijn op afspraken die door de maatschappij of een gemeenschap gemaakt zijn. Het doel van deze filosofie van Carnap was om het empirische karakter van de natuurkunde en de a priori zekerheid van de wiskunde met elkaar te verbinden.[118] Deze theorie diende ertoe de door Gödel genoemde "linkse" en "rechtse" stromingen aan elkaar te verbinden.[119] Dit onderscheid tussen "links" en "rechts" heeft Gödel gemaakt op basis van de graad van de relatie van de stroming tot metafysica.[120] De *linkse* stromingen zijn stromingen die niet of weinig geloof hebben in een aparte ontologische status van objecten: empirisme, nominalisme, of ethiek als afhankelijk van gewoontes of cultuur.[121] De *rechtse* stromingen zijn stromingen die wel geloven in een aparte ontologische status objecten: a priorisme, platonisme of het geloof dat ethiek gebaseerd is op objectieve morele waarden.[122] De linkse stromingen zijn dus sceptisch over het bestaan van wiskundige objecten en dus objectieve waarheden, de rechtse stromingen geloven hier wel in. Het door Carnap verbinden van het empirisme van de natuurwetenschappen en het a priori karakter van de wiskunde zit dus in het midden: het empirisme hoort aan de linkerkant, het a priori zijnde van de wiskunde aan de rechterkant. Namelijk, volgens Gödel beargumenteert Carnap dat (1) wiskundige intuïtie niet bestaat, maar dat wiskunde slechts volgt uit syntaxconventies, (2) wiskunde inhoudsloos is en (3) dat, omdat wiskunde

[115] Tieszen, *After Gödel*, p.67.
[116] Tieszen, *After Gödel*, p.51.
[117] Tieszen, *After Gödel*, p.51.
[118] Tieszen, *After Gödel*, p.51.
[119] Tieszen, *After Gödel*, p.52.
[120] Tieszen, *After Gödel*, p.69.
[121] Tieszen, *After Gödel*, p.69.
[122] Tieszen, *After Gödel*, p.69.

het gevolg van syntaxconventies is, het a priori karakter ervan compatibel is met het empirisme: doordat de wiskunde slechts volgt uit syntaxconventies kan dit a priori zijn, terwijl andere wetenschappen de empirie als bron van kennis kunnen hebben.[123] Wiskundige uitspraken zijn dus waar vanwege syntactische conventies, en in de zintuigelijke wereld zijn deze uitspraken slechts systemen van symbolen.[124] Zo zien we dat Carnaps opvatting *van de wiskunde* aan de linkerkant van het schema staat: de wiskunde gaat niet over objecten die echt bestaan, maar hij accepteert wel het rechtse a priori karakter van de wiskunde.[125]

Gödel verwerpt deze visie door zich te beroepen op de tweede onvolledigheidsstelling.[126] Als alle wiskundige waarheden volgen uit een systeem van syntactische conventies, dan moet dit systeem wel consistent zijn. Als dit systeem namelijk niet consistent was, dan zou dit systeem een inconsistentie bevatten, en volgens de redeneringsregel *ex falso sequitur quotlibet* zouden dan alle uitspraken bewijsbaar zijn, ook uitspraken die niet wiskundig zijn, zoals onware empirische uitspraken.[127] Voor Carnaps filosofie moet dit systeem dus consistent zijn, en moet er ook een consistentiebewijs te geven zijn, want anders kan dit systeem altijd een inconsistentie bevatten, en is het gebruik ervan nooit gerechtvaardigd.[128] Echter, vanwege de tweede onvolledigheidsstelling weten we dat dit consistentiebewijs niet in het systeem zelf te vinden is. Er zijn dan twee mogelijkheden: (1) het is een wiskundig bewijs (2) het is geen wiskundig, en dus empirisch, bewijs. Optie (1) is niet mogelijk, want dit is in tegenspraak met zijn aanname dat alle wiskunde uitgedrukt kan worden in zijn systeem van taalkundige conventies (aangezien er in dit geval een wiskundige uitspraak bestaat die niet in het systeem bewezen kan worden).[129] Optie (2) is ook niet mogelijk, want dit is in tegenspraak met de aanname dat alle wiskundige waarheden gevolgen zijn van taalkundige conventies, en niet empirisch zijn.[130] Een consistentiebewijs voor deze verzameling van syntactische regels is dus niet mogelijk, en dus verwerpt Gödel de drie overtuigingen van Carnap: (1) wiskundige intuïtie is niet slechts symboolmanipulatie, (2) het kan niet zo zijn dat wiskunde geen inhoud heeft en (3) het samenvoegen van de empirie en het a priori karakter van de wiskunde op de manier van Carnap werkt niet.[131]

Ook Hilberts Programma was een combinatie van de linkse en rechtse stroming volgens Gödel.[132] Volgens het *formalisme* is de wiskunde geen verzameling axioma's die de realiteit beschrijven, maar zijn de objecten van de wiskunde slechts symbolen of tekens en de regels voor de manipulatie van deze symbolen zijn slechts dat, regels.[133] Het formalisme kan dus ook gezien worden als een combinatie van de linkse en rechtse stromingen: de wiskunde is afhankelijk van de regels die worden opgesteld, die afhankelijk zijn van de empirie (links), maar zodra deze regels zijn bedacht, zijn uitspraken beslisbaar en zijn de bewijzen van

[123] Tieszen, *After Gödel*, p.52.
[124] Tieszen, *After Gödel*, p.53.
[125] Tieszen, *After Gödel*, p.70.
[126] Tieszen, *After Gödel*, p.54.
[127] Tieszen, *After Gödel*, p.54.
[128] Tieszen, *After Gödel*, p.54.
[129] Tieszen, *After Gödel*, p.54-56.
[130] Tieszen, *After Gödel*, p.56.
[131] Tieszen, *After Gödel*, p.60-61.
[132] Tieszen, *After Gödel*, p.70.
[133] Alan Weir. „Formalism in the philosophy of mathematics". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

stellingen voldoende om de stelling te accepteren (rechts).[134] Hilberts Programma is een vorm van het formalisme, en hier kom ik in sectie 3.1 gedetailleerder op terug. Voor dit Programma moest er een eindig systeem gezocht worden dat alle wiskunde kon uitdrukken, en hier moest een consistentiebewijs voor geleverd worden.[135]

Vanwege de problemen die Gödel vond bij Carnap en Hilbert keerde hij naar Husserl.[136] Gödel wilde namelijk de linkse en rechtse eigenschappen van de wiskunde combineren, maar vond de pogingen van Hilbert en Carnap te links, en dus niet voldoende.[137] Hij wilde namelijk twee onderdelen uit de rechtse stroming behouden: (1) de beslisbaarheid van wiskundige uitspraken door de menselijke geest (let wel, dit is dus de eerste disjunct uit de implicaties van de onvolledigheidsstellingen!) en (2) dat het geven van bewijzen voldoende grond is voor de acceptatie van een wiskundige uitspraak.[138] Dit kan niet bereikt worden door bewijzen te geven voor de axioma's of nieuwe definities op te stellen, want hiervoor zijn wederom axioma's en definities nodig, die op hun beurt weer gerechtvaardigd moeten worden.[139] Volgens Gödel zou het vergroten van onze kennis over de abstracte concepten die aan de grondslag van de mechanistische, wiskundige, systemen liggen, leidden tot het behoud van deze rechtse, objectieve, aanspraak van de wiskunde.[140] Dit kan volgens hem slechts door op een hoger niveau (dus buiten de wiskunde) te reflecteren op de betekenis van deze concepten en objecten.[141] Dit was niet mogelijk vanuit de theorieën van Carnap en Hilbert, en dus keerde Gödel tot Husserl.

De onvolledigheidsstellingen lieten zien dat er voor ieder consistent formeel systeem een wiskundige uitspraak bestond die onbeslisbaar was. Deze onbeslisbare uitspraak is dus onafhankelijk van de axioma's en dat roept de vraag op: kan er nog wel gesproken worden van de *waarheid* van deze uitspraak? Is de zoektocht naar de waarheid of onwaarheid van deze uitspraak nog wel relevant? Gödel reageert op dit probleem in zijn artikel "What is Cantor's Continuum Problem",[142] waarin duidelijk wordt dat hij (de mogelijkheid tot) de beslisbaarheid van wiskundige uitspraken wilde behouden. Van dit artikel bestaan twee versies: de versie uit 1947, toen al duidelijk was dat ZFC + CH consistent is[143], en de versie uit 1964, toen duidelijk werd dat ZFC + $\neg$CH ook consistent is.[144] Mijn bespreking van dit artikel in deze sectie zal zich beperken tot het supplement dat Gödel in 1964 heeft gepubliceerd. CH staat voor *continuum hypothese*: de hypothese dat "er geen verzameling bestaat waarvan de kardinaliteit tussen de kardinaliteit van de natuurlijke getallen en de kardinaliteit van de reële getallen ligt".[145] Ofwel, de verzameling van de reële getallen is de wiskundig 'kleinste' overaftelbaar oneindige verzameling. Het belangrijkste voor deze scriptie is dat duidelijk is wat deze hypothese impliceert: deze uitspraak is namelijk (wis-

[134] Tieszen, *After Gödel*, p.70.
[135] Richard Zach. „Hilbert's Program". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Winter 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.
[136] Tieszen, *After Gödel*, p.69.
[137] Tieszen, *After Gödel*, p.72.
[138] Tieszen, *After Gödel*, p.75.
[139] Tieszen, *After Gödel*, p.72.
[140] Tieszen, *After Gödel*, p.72.
[141] Tieszen, *After Gödel*, p.72-73.
[142] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem".
[143] Wat overigens bewezen is door Gödel zelf, zie Koellner, „The Continuum Hypothesis"
[144] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.94.
[145] Zie Koellner, „The Continuum Hypothesis"

kundig) vrij eenvoudig, maar toch laat deze conclusie, dat zowel CH als ¬CH consistent is met ZFC, zien dat CH onbeslisbaar is in ZFC. Een wiskundige eenvoudige uitspraak kan toch onbeslisbaar blijken in een sterk wiskundig systeem.

Dit kan leiden tot de overtuiging dat de *waarheid* van deze hypothese irrelevant is, als de axioma's worden gezien als aannames (zoals Carnap en Hilbert dus deden).[146] Namelijk,

> As far as the epistemological situation is concerned, it is to be said that by a proof of undecidability a question loses its meaning only if the system of axioms under consideration is interpreted as a hypothetico-deductive system, i.e., if the meanings of the primitive terms are left undetermined. In geometry, e.g., the question as to whether Euclid's fifth postulate is true retains its meaning if the primitive terms are taken in a definite sense, i.e., as referring to the behavior of rigid bodies, rays of light, etc. The situation in set theory is similar; the difference is only that, in geometry, the meaning usually adopted today refers to physics rather than to mathematical intuition and that, therefore, a decision falls outside the range of mathematics. On the other hand, the objects of transfinite set theory, (...), clearly do not belong to the physical world, and even their indirect connection with physical experience is very loose(...).[147]

Dus, een onbeslisbare uitspraak is slechts betekenisloos als de betekenis van de axioma's niet verder verduidelijkt is. Dit is het geval wanneer er sprake is van 'hypothetisch-deductieve' systemen, waarin alle kennis slechts deductief uit hypotheses volgt, en deze hypotheses geen verdere betekenis hebben. Gödel contrasteert deze systemen met de meetkunde, in het bijzonder het vijfde postulaat van Euclides, het parallellenpostulaat (gegeven een lijn m, dan is er voor ieder willekeurig punt p een unieke lijn door p parallel aan m[148]). Hiervan is in de negentiende eeuw bewezen is dat dit postulaat niet volgt uit de voorgaande vier, en dus dat dit postulaat onbeslisbaar is in een axiomasysteem met slechts de eerste vier postulaten. Echter, in tegenstelling tot de hypothetisch-deductieve systemen kan er volgens Gödel in de meetkunde wel over de waarheid van dit postulaat gesproken worden vanwege de correspondentie van de meetkunde met (de waarneming van) fysieke objecten. Het verschil tussen verzamelingenleer en de meetkunde is dat de betekenis van axioma's in de verzamelingenleer wiskundige intuïtie behoeft, terwijl voor de meetkunde gekeken kan worden naar de natuurkunde. Dit komt omdat de objecten van de transfiniete verzamelingenleer niet aan de zintuigelijke wereld toebehoren, en de link tussen natuurkundige ervaring en verzamelingenleer erg beperkt is.

Wel gelooft Gödel dat de waarheidsaanspraak van wiskundige uitspraken ook geldt in de rest van de wiskunde, zoals onder andere de verzamelingenleer, want hij vervolgt,

> But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e.. in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories

[146] Panza en Sereni, *Plato's Problem*, p.94.
[147] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.267.
[148] Dit is niet Euclides' oorspronkelijke formulering

> and to expect that future sense perceptions will agree with them, and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future.[149]

Dus, er bestaat een vorm van wiskundige intuïtie, en er kunnen op een bepaalde manier waarnemingen gedaan worden van wiskundige objecten. Deze overtuiging van Gödel lijkt dus te volgen uit de onafhankelijkheid van CH van ZFC: CH lijkt voor Gödel een erg basale uitspraak, waardoor de waarheid ervan wel degelijk te bepalen zou moeten zijn. Echter, door te werken in een hypothetisch-deductief systeem zoals dat van Carnap of Hilbert, is de waarheid van een onbeslisbare uitspraak irrelevant, want deze valt buiten het systeem. Hier is Gödel het niet mee eens, want, "a question not decidable now has meaning and may be decided in the future."[150]

Deze wiskundige intuïtie wil Gödel duiden door de transcendentale methode van Kant uit te breiden met onderdelen uit fenomenologische methode van Husserl, waardoor er niet slechts zintuigelijke intuïtie bestaat (zoals bij Kant het geval was), maar dat er ook een vorm van categorische, ofwel wiskundige, intuïtie mogelijk is.[151] Husserls theorie kon dus een oplossing bieden voor de problemen die ontstonden wanneer de wiskunde gezien wordt als een hypothetisch-deductief systeem, zoals het geval was in de theorie van Hilbert of Carnap.

Hiervoor eerst een klein intermezzo over de filosofie van Kant. Kant maakt een onderscheid tussen fenomenen (*dingen-für-sich*) en noumena (*dingen-an-sich*). Fenomenen zijn de dingen zoals ze aan ons verschijnen, en de noumena zijn de dingen zoals ze zijn.[152] Van de noumena kunnen we geen kennis opdoen, maar van de fenomenen wel. Dit kan door gebruik te maken van de zintuigelijke intuïtie, de verstandsbegrippen ofwel categorische begrippen en ervaringen.[153] Deze ervaringen worden door de zintuigelijke intuïtie geplaatst of gestructureerd in tijd en ruimte, die respectievelijk naar binnen of naar buiten gekeerd kan zijn.[154] Intuïtie die naar binnen gekeerd is, plaatst ervaringen in tijd, en gaat over mentale fenomenen zoals gedachtes en gevoelens. Intuïtie die naar buiten gekeerd is, plaatst ervaringen in ruimte, en gaat over fysieke fenomenen.[155] Voor Kant zijn ruimte en tijd dus *eigenschappen* van hoe objecten ervaren worden, en zijn dus afhankelijk van (het bestaan van) de mens.[156] De verstandsbegrippen zijn nu constitutief voor kennis, zoals het verstandsbegrip van oorzaak-gevolg.[157] Dit betekent dat de intuïtie fenomenen in de ruimte en tijd plaatst, en dat de verstandsbegrippen hier nu kennis uit creëren: bepaalde ervaringen worden opgedaan met de zintuigen en worden door de intuïtie in de ruimte en tijd geplaatst, waardoor we dankzij de verstandsbegrippen, bijvoorbeeld het begrip van een oorzaak-gevolg relatie, kennis kunnen opdoen, en inzien dat een bepaald fenomeen de oorzaak is van een ander

[149] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.
[150] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.
[151] Tieszen, *After Gödel*, p.81.
[152] Tieszen, *After Gödel*, p.82.
[153] Tieszen, *After Gödel*, p.82.
[154] Tieszen, *After Gödel*, p.82.
[155] Tieszen, *After Gödel*, p.82.
[156] Nicholas F. Stang. „Kant's transcendental idealism". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.
[157] Tieszen, *After Gödel*, p.82.

fenomeen.[158] Dit betekent ook dat intuïtie en verstandsbegrippen beide essentieël zijn voor het creëren van kennis want "Kant says that concepts without intuitions are empty, and that intuitions without concepts are blind."[159] Verstandsbegrippen zonder intuïtie hebben geen inhoud, want ze kunnen nergens op toegepast worden, en intuïtie zonder verstandsbegrippen betekent niets, want dan kan er geen kennis uit opgedaan worden. Op deze manier kan Kant het transcendentale idealisme en het empirisch realisme verzoenen: objecten zijn geest-afhankelijk aangezien de vorm van deze objecten afhankelijk is van onze intuïtie en de manier waarop we ze kennen subjectief is, en ze zijn geest-onafhankelijk omdat ze in de ruimte aan ons verschijnen.[160] Dit betekent dus ook dat de intuïtie altijd van toepassing is op de *ervaringen* die opgedaan worden door de zintuigen, en dus dat het zintuigelijke intuïtie is.

Een vorm van categorische intuïtie bestaat dus niet voor Kant. Gödel wil dit wel, en ontwikkelt een vorm van wiskundige intuïtie. Voor Gödel verschilt deze wiskundige intuïtie wel met het idee van Kant dat de kennis die opgedaan wordt subjectief is.

> [T]he 'given' underlying mathematics is closely related to the abstract elements contained in our empirical ideas. It by no means follows, however, that the data of this second kind, because they cannot be associated with actions of certain things upon our sense organs, are something purely subjective, as Kant asserted. Rather they, too, may represent an aspect of objective reality, but, as opposed to the sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality.[161]

Dus, de wiskunde is nauw verbonden met onze empirische bevindingen, maar dat betekent niet dat deze wiskunde ook subjectief is, zoals bij Kant. De wiskunde representeert een objectief onderdeel van de werkelijkheid, hoewel de relatie tussen ons en de werkelijkheid verschilt omtrent de wiskunde of de zintuigen.

Deze wiskundige intuïtie is dus een uitbreiding van het intuïtiebegrip van Kant, en is categorisch en objectief. Husserls theorie en de methode van de fenomenologische reductie, ook wel *epoche*, boden een mogelijkheid voor een categorische intuïtie.[162]

Wat er volgens de methode van fenomenologische reductie of epoche gebeurt, is dat het zogenoemde "natuurlijke standpunt" opgeschort wordt. Hiervoor moet het bestaan van de objecten niet meer als vanzelfsprekend gezien worden, en moet de aandacht niet meer gericht worden op de objecten zelf (zoals dit in zowel het dagelijks leven, als de natuurwetenschappen gedaan wordt), maar op de *ervaring*, het *bewustzijn*, van deze objecten.[163] Er wordt dus niet gereflecteerd over de objecten zelf, maar over hoe deze gepresenteerd worden, waardoor er nagedacht kan worden over de objecten, zonder dat het object daadwerkelijk hoeft te bestaan. Het opschorten van het natuurlijke standpunt houdt dus in dat, omdat het natuurlijke standpunt aanneemt dat de objecten daadwerkelijk bestaan, het bestaan van de objecten niet langer wordt aangenomen, maar er nog over deze objecten nagedacht

[158] Tieszen, *After Gödel*, p.82.
[159] Tieszen, *After Gödel*, p.83.
[160] Tieszen, *After Gödel*, p.83.
[161] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.
[162] Tieszen, *After Gödel*, p.92.
[163] Tieszen, *After Gödel*, p.92.

kan worden.[164]

Deze opschorting is volgens Husserl geïnspireerd door het twijfelargument van Descartes:[165] bij een ervaring kan ik er niet aan twijfelen dat ik iets ervaar, maar ik kan wel betwijfelen of wat ik ervaar daadwerkelijk bestaat.[166] Door epoche kunnen we ons dus beperken tot wat er daadwerkelijk gegeven is, namelijk de ervaring van de objecten, en dus niet de objecten zelf.[167] De ervaring van de objecten is dus wat de objecten betekenis geeft. We kunnen een brein in een vat zijn, waardoor de hele wereld een illusie is, maar dan bestaat het bewustzijn, de ervaring van de objecten, nog steeds. Het bewustzijn en haar ervaringen bestaan dus absoluut.[168] Hier bedoelt Husserl dus dat we, door het opschorten van het natuurlijke standpunt (en dus onze particuliere mentale of zintuigelijke ervaringen), we ons kunnen richten op wat immanent en absoluut is. We richten ons dan dus niet meer op het transcendente zoals objecten in de zintuigelijke wereld (aangezien deze altijd afhankelijk zijn van het menselijk bewustzijn[169]), maar we richten op dat wat absoluut is, namelijk, de ervaring.[170] Zo kunnen we nog wel gedachtes hebben over objecten, zonder dat ze hiervoor daadwerkelijk hoeven te bestaan.

Deze theorie impliceert dat de menselijke geest dus de betekenis van de objecten waar het op gericht is *constitueert*, omdat de ervaring van de objecten hetgeen is waar niet aan getwijfeld kan worden.[171] Dit richten van het menselijk bewustzijn wordt ook intentionaliteit genoemd. Het menselijk bewustzijn kan zich dus richten op de ervaring van abstracte objecten en hier betekenis aan geven, en de categorische intuïtie kan deze betekenis objectief maken.[172] Dus, dankzij de intentionaliteit van de menselijke geest die volgt uit epoche, kan er, zoals er zintuigelijke intuïtie bestaat over zintuigelijke objecten, categorische intuïtie zijn over abstracte objecten.[173] Deze overtuiging noemt Tieszen (fenomenologisch) transcendentaal idealisme.[174]

Om deze methode te verduidelijken kan deze gecontrasteerd worden met reguliere introspectie of 'inner sense', waarbij gereflecteerd wordt op particuliere mentale processen: *mijn* gedachtes, *mijn* overtuigingen, etc.[175] Ook kan deze gecontrasteerd worden met 'outer sense', wat de particuliere ervaringen van de wereld om ons heen duidt: de informatie die *mijn* zintuigen *mij* geven.[176] Door de methode van epoche kan er gereflecteerd worden op concepten en objecten die algemeen zijn, en is de kennis die vergaard wordt via de categorische intuïtie dus objectief.

Wat is deze categorische intuïtie nu precies? Volgens Husserl kunnen kennis en illusie onderscheiden worden door intuïtie.[177] Kennis is dus afhankelijk van het bewijs dat voor

[164] Tieszen, *After Gödel*, p.93.
[165] Tieszen, *After Gödel*, p.94.
[166] Tieszen, *After Gödel*, p.94.
[167] Tieszen, *After Gödel*, p.95.
[168] Tieszen, *After Gödel*, p.96.
[169] Tieszen, *After Gödel*, p.95.
[170] Tieszen, *After Gödel*, p.14.
[171] Tieszen, *After Gödel*, p.12.
[172] Tieszen, *After Gödel*, p.16.
[173] Tieszen, *After Gödel*, p.14.
[174] Tieszen, *After Gödel*, p.95.
[175] Tieszen, *After Gödel*, p.9.
[176] Tieszen, *After Gödel*, p.9.
[177] Tieszen, *After Gödel*, p.99.

een bepaalde intentie wordt gegeven in de intuïtie. Een intentie is in deze context een 'gedachte' die gericht is op een object.[178] Een intentie kan vervuld of gefrustreerd worden, wat betekent dat deze intentie, of haar tegenstelling, door de intuïtie bevestigd wordt. Ook kan deze intentie leeg zijn. Om dit te illustreren maakt Tieszen gebruik van een voorbeeld: stel dat we een slang denken te zien, hoewel dit na aanvullende ervaringen een touw blijkt te zijn. Dan blijkt, dankzij de zintuigelijke intuïtie, dat de intentie 'dit is een slang' leeg is, want deze was uiteindelijk irrelevant, en de intentie 'dit is een touw' is vervuld, want het bleek een touw te zijn.[179] Intuïtie dient dus tot het vervullen van intenties. Als de intuïtie een intentie heeft vervuld of gefrustreerd, kunnen we spreken van kennis.[180] Intuïtie is dus hier datgene dat ervoor zorgt dat wij feiten en illusies kunnen onderscheiden, want zonder intuïtie zouden er slechts ervaringen bestaan die nooit besloten konden worden.[181] Zonder intuïtie hebben we slechts de ervaring van een gekronkeld object, en kunnen we niet beslissen of dit een slang of een touw is.

Omdat deze intentionaliteit zowel over zintuigelijke, als categorische objecten kan gaan (want dankzij epoche kan intentionaliteit immanente objecten als onderwerp hebben), leidt Husserls theorie tot de acceptatie van zowel zintuigelijke, als categorische intuïtie. Dit betekent niet dat deze intuïtie ook absolute kennis verschaft: het kan namelijk zo zijn dat het later blijkt dat het touw ook geen touw was.[182] Zo kan kennis slechts bevestigd worden door intuïtie dankzij aanvullende ervaringen.

Een belangrijk verschil tussen de zintuigelijke en categorische intuïtie is de aard van de objecten. Voor de natuurwetenschappen is de zintuigelijke intuïtie het fundament: de zintuigelijke ervaringen verschaffen bewijs voor een bepaalde hypothese over zintuigelijke objecten. Voor de wiskunde is dit anders. In de wiskunde spreken we namelijk niet over zintuigelijke objecten, maar over zogenoemde *momenten*.[183] Momenten contrasteert Husserl met *pieces*, stukken, waarbij momenten onderdelen zijn van objecten die *niet* onafhankelijk van deze objecten kunnen bestaan, en stukken onderdelen zijn van objecten die *wel* onafhankelijk van deze objecten kunnen bestaan.[184] Voorbeelden van momenten zijn kleuren of vormen. Deze momenten zijn dus abstracte objecten, omdat we ze wel kunnen denken, maar ze als object zelf nooit kunnen bestaan in de zintuigelijke wereld. We kunnen ons bewustzijn dus richten tot een echt universeel object, een moment, ook wel 'essentie', zoals een cirkel in plaats van 'de vorm van de ring om mijn vinger'.[185]

Behalve het verschil in de aard van de objecten is voor Husserl nog een belangrijk verschil tussen categorische en zintuigelijke intuïtie. Husserl ziet zintuigelijke intuïtie als abstractie, waar de zintuigen het object geven, maar deze moet door de intuïtie nog gevormd worden.[186] De zintuigen geven een gekronkeld object, en de zintuigelijke intuïtie vormt dit tot een touw. In de zintuigelijke intuïtie is dit proces automatisch, en is dus geen *actie*.[187]

[178]Tieszen, *After Gödel*, p.93.
[179]Tieszen, *After Gödel*, p.99-100.
[180]Tieszen, *After Gödel*, p.100.
[181]Tieszen, *After Gödel*, p.100.
[182]Tieszen, *After Gödel*, p.101.
[183]Tieszen, *After Gödel*, p142.
[184]Tieszen, *After Gödel*, p.142.
[185]Tieszen, *After Gödel*, p.144.
[186]Tieszen, *After Gödel*, p.149.
[187]Tieszen, *After Gödel*, p.149.

Het begrijpen van de objecten van de categorische intuïtie, de essenties, is volgens Husserl wel een actie, omdat het geen automatische gebeurtenis is zoals bij zintuigelijke intuïtie, maar er moet bewust naar het object gekeerd worden.[188] De categorische intuïtie kan ook bewijs leveren of voor objectiviteit zorgen, aangezien het voor kennis essentieel is dat we keer op keer naar hetzelfde object kunnen keren, en dit op dezelfde manier ervaren.[189] Voor het begrijpen van categorische objecten moet de aandacht hier actief op gericht worden, en dus kunnen we deze actie zo vaak herhalen als we willen, en heeft deze actie (normaliter) dezelfde uitkomst.[190]

Bovendien verschilt de wiskunde van andere theorieën over zintuigelijke objecten, omdat er in de wiskunde ook een oordeel geveld wordt. Het beoordelen van $x < y$ als x kleiner is dan y bevindt zich niet in het domein van de zintuigen, maar er kan toch een conclusie over getrokken worden.[191] Tieszen schrijft hierover dat

> The awareness of the essence as an essence is not awareness of a sensory individual or a sensory part. Moreover, it is not awareness of a mental entity. It is not a deliverance of inner sense or introspection but of reason. An essence is meant as something objective, not subjective. In accordance with constituted platonism, it is possible to mean and even intuit such objects (invariants) as mind-independent, but only in the sense of mind-independence$_2$.[192]

Dus, het bewustzijn van een essentie is een onderdeel van de menselijke rede, en deze essentie is (geconstitueerd als) objectief. Deze objecten kunnen, dankzij de categorische intuïtie, als geest-onafhankelijk$_2$ beschouwd worden. Dit gaat door middel van abstracties, idealisaties, generalisaties, variaties, etc. Een voorbeeld hiervan is de uitspraak (of in Husserls woorden de 'wiskundige intentie') 'de som van de hoeken van iedere driehoek is 180 graden' (een uitspraak die door de categorische intuïtie vervuld wordt), waar we de algemenere vorm $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ kunnen afleiden: voor alle objecten x geldt dat als x een driehoek is $(\varphi(x))$, dan is de som van alle hoeken gelijk aan 180 graden $(\psi(x))$.[193] Deze abstracties, maar ook generalisaties, variaties en allerlei andere eigenschappen van de rede, worden bij elkaar gevoegd en op systematische manier geordend, waardoor de wiskunde gevormd kan worden, en de objecten als geest-onafhankelijk$_2$ verschijnen.[194]

Een probleem aan deze categorische intuïtie is wel dat er veel verschillende manieren zijn om naar deze objecten te kunnen kijken, waardoor onze kennis eigenlijk nooit compleet is.[195] Zo kan, net als bij zintuigelijke intuïtie waarin een verschijning van een slang later een verschijning van een touw blijkt, ook de categorische kennis gecorrigeerd worden.[196] Wel houdt dit het objectieve karakter van de wiskunde in stand, omdat we de inhoud niet naar

[188] Tieszen, *After Gödel*, p.142.
[189] Tieszen, *After Gödel*, p.143.
[190] 'Normaliter' staat hier tussen haakjes omdat Husserl de mogelijkheid tot illusie, zoals een touw dat foutief gezien wordt als slang, nog wel openlaat.
[191] Tieszen, *After Gödel*, p.143.
[192] Tieszen, *After Gödel*, p.144.
[193] Tieszen, *After Gödel*, p.147.
[194] Tieszen, *After Gödel*, p.148.
[195] Tieszen, *After Gödel*, p.147.
[196] Tieszen, *After Gödel*, p.147.

wille kunnen aanpassen.[197]

Samenvattend zien we dat Husserl categorische intuïtie dus, net als zintuigelijke intuïtie, ziet als het vervullen, gedeeltelijk vervullen of frustreren van intenties. Bij zintuigelijke intuïtie zijn de objecten die het onderwerp zijn van de intentie zintuigelijke objecten, (zoals 'dit is een slang' heeft als onderwerp 'een slang'), en bij categorische intuïtie zijn de objecten die het onderwerp zijn van de intentie abstracte of categorische objecten (zoals wiskundige objecten x en y in '$x < y$'). Dankzij epoche kunnen we ons dus richten op (intentionaliteit) de ervaring van een object, zintuigelijk of categorisch, en de intuïtie kan deze intentie (gedeeltelijk) vervullen of frustreren.[198]

Zoals we in sectie 1.2 hebben gezien, onderscheidt Tieszen twee vormen van geest-onafhankelijkheid. Geest-onafhankelijkheid$_1$ en geest-onafhankelijkheid$_2$. Husserl ziet de objecten van de wiskunde als geest-afhankelijk$_1$ en geest-onafhankelijk$_2$: objecten kunnen als geest-onafhankelijk verschijnen aan de mens, maar zijn dus altijd een verschijning, en dus ook geest-afhankelijk. Echter, de geest-onafhankelijkheid$_2$ impliceert wel dat het constitueren van de betekenis van objecten niet op een willekeurige manier gaat, want dan zou de betekenis van objecten voor iedereen anders kunnen zijn (zoals het geval zou zijn bij geest-afhankelijkheid$_2$). Tieszen beschrijft dat het betekenis geven aan wiskundige objecten en dus het opbouwen van van wiskunde voor Husserl op een niet-willekeurige manier gebeurt aangezien we dankzij categorische intuïtie en de methode van epoche betekenis kunnen geven aan deze wiskundige objecten op een niet-willekeurige manier, maar door abstractie, idealisatie, vergelijking, etc.[199]

Deze wiskundige objecten worden dus geconstitueerd als geest-onafhankelijk$_2$, dus ziet Tieszen Husserls filosofie van de wiskunde als "constitutief platonisme": platonisme gecombineerd met transcendentaal idealisme.[200]

2.4 Wiskundige intuïtie en platonisme bij Gödel

Gödel wil niet het idee verwerpen dat niet iedere wiskundige uitspraak binnen een formeel systeem beslist kan worden, want dit is precies wat de onvolledigheidsstellingen voorschrijven. Hij wil wel het idee dat iedere wiskundige uitspraak waar of onwaar is behouden, en dat de menselijke geest deze uitspraken wel kan beslissen.[201] Het concept van bewijs ziet Gödel nu als dat waarvan we 'weten dat het waar is'. Dit is een abstracte uitspraak, want de objecten van bewijzen zijn geen zintuigelijke objecten.[202] Een bewijs is dus voor Gödel niet een rij die voldoet aan bepaalde formele regels, maar een rij gedachtes die overtuigen.[203] Zoals we al in sectie 2.3 zagen wilde Gödel dus (1) de beslisbaarheid van wiskundige uitspraken door de menselijke geest behouden, en (2) dat het geven van bewijzen voldoende grond is voor de acceptatie van een wiskundige uitspraak. Husserls opvatting van categorische intuïtie kan aan deze twee punten bijdragen.

Husserl zag intuïtie als het (gedeeltelijk) vervullen of frustreren van intenties. Als de

[197]Tieszen, *After Gödel*, p.147.
[198]Tieszen, *After Gödel*, p.157.
[199]Tieszen, *After Gödel*, p.154-155.
[200]Tieszen, *After Gödel*, p.98.
[201]Tieszen, *After Gödel*, p.152.
[202]Tieszen, *After Gödel*, p.152.
[203]Tieszen, *After Gödel*, p.153.

bovenstaande opvattingen van Gödel gecombineerd worden met die van Husserl, dan komt Tieszen tot de conclusie dat we Gödels opvatting van bewijzen kunnen zien als het vervullen van wiskundige intenties: bewijzen zijn uitdrukkingen van wiskundige intuïties.[204] Dit betekent dat wiskundige intenties ook leeg, vervuld of gefrustreerd kunnen zijn, net als bij zintuigelijke intuïtie. Neem $x = 2$, $y = 1$, dan is de wiskundige intentie $x \leq y$ gefrustreerd, want de ontkenning hiervan is waar, maar de wiskundige intentie $y < x$ is vervuld. Bewijzen zijn voor Gödel dus uitdrukkingen van wiskundige intuïties.[205] Het geven van een bewijs is dan voldoende grond voor de acceptatie van een wiskundige uitspraak. Zo kan ook de beslisbaarheid van wiskundige uitspraken door de menselijke geest behouden worden, aangezien een soortgelijk bewijs een uitdrukking van een wiskundige intuïtie is, wat geen formeel bewijs hoeft te zijn.

Om dit laatste punt te begrijpen is het belangrijk om te zien hoe deze wiskundige intuïtie nu precies werkt volgens Gödel. Tieszen beschrijft dat wiskundige objecten voor Gödel, in lijn met Husserl, te zien zijn als geest-onafhankelijk$_2$, en dus constitueert het menselijk bewustzijn wiskundige objecten als abstract en geest-onafhankelijk.[206] Dit betekent dus ook dat, net als bij Husserl, we geen intuïtie hebben van de objecten *zelf*, maar dat we wel intuïtie hebben over de concepten die ons naar de objecten doen keren, zoals het idee van een object.[207] Zo schrijft Gödel

> It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an immediate knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we form our ideas also of those objects on the basis of something else which is immediately given. Only this something else here is not, or not primarily, the sensations. That something besides the sensations actually is immediately given follows (independently of mathematics) from the fact that even our ideas referring to physical objects contain constituents qualitatively different from sensations or mere combinations of sensations, e.g., the idea of object itself, whereas, on the other hand, by our thinking we cannot create any qualitatively new elements, but only reproduce and combine those that are given.[208]

We verkrijgen dus geen directe kennis van de objecten *zelf*, maar, net als bij zintuigelijke intuïtie, vormen we onze ideeën over wiskundige objecten op basis van concepten over deze objecten, zoals het idee van het object. We vormen onze ideeën over wiskundige objecten dus op basis van iets dat niet afkomstig is van de zintuigen. Gödels argumentatie voor het bestaan van een categorische intuïtie is dus dat er nog iets anders bestaat dan slechts de zintuigen, aangezien zelfs onze ideeën over fysieke objecten constituerende eigenschappen bevatten die anders zijn dan dat gegeven door de zintuigen, zoals het idee van object. Echter, door slechts onze rede te gebruiken kan geen nieuwe kennis gecreëerd worden, want onze rede kan slechts informatie combineren.

[204]Tieszen, *After Gödel*, p.153.
[205]Tieszen, *After Gödel*, p.153.
[206]Tieszen, *After Gödel*, p.156.
[207]Tieszen, *After Gödel*, p.149.
[208]Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

Deze constitutie kan dankzij de wiskundige intuïtie de door de rede gecreëerde intenties over objecten vervullen gedeeltelijk vervullen of frustreren.[209] Tieszen schrijft hierover dat

> There is rational intuition in the context of mathematics when some invariant object or generalization is not only conjectured or postulated, not only merely intended, but is made present to consciousness, just as an ordinary perceptual object can be merely intended or can be made present to consciousness. That which is meant but is absent in the mere intention or conjecture is made present. We "see" it.[210]

Dus, de wiskundige intuïtie zorgt ervoor dat we ons bewust worden van een wiskundige intentie: we zien het.[211] Dit betekent dus ook dat, net als in het geval van zintuigelijke intuïtie, zonder wiskundige intuïtie de wiskunde niets zou betekenen: we zouden slechts lege intenties hebben.

Na de fenomenologische reductie bestaat dus voor beide vormen van intuïtie nog zowel kennis als illusie, en een voorbeeld van een illusie in de wiskunde noemt Gödel Russells paradox.[212] Het axioma

$$\textit{Voor iedere eigenschap } P \textit{ bestaat er een verzameling } Y = \{x|P(x)\}$$

leidt tot Russells paradox.[213] Het veranderen van deze uitspraak tot

$$\textit{Voor iedere eigenschap } P \textit{ en voor iedere verzameling } X \textit{ bestaat er een verzameling}$$
$$Y = \{x \in X|P(X)\}$$

sluit deze paradox uit.[214] Hierin zien we dus dat Gödel de paradoxen in de wiskunde hetzelfde ziet als illusies in de zintuigelijke wereld. Deze illusies zijn analoog, en hij schrijft hierover dat

> The set-theoretical paradoxes are hardly any more troublesome for mathematics than deceptions of the senses are for physics.[215]

Dus, de paradoxen in de wiskunde zijn nauwelijks problematischer dan illusies dat zijn voor de natuurkunde. Als we nu namelijk terugkijken naar het oorspronkelijke axioma, zien we in dat het slechts een *illusie* was dat het deze aangenomen kon worden, maar wat we ons later realiseren is dat deze eigenlijk aangepast moet worden tot het tweede axioma.

Zowel Husserl als Gödel betoogt dat we intuïtie hebben van de concepten die aan de basis van verzamelingenleer liggen, maar de intuïtie nooit volledig is. Dat betekent dat we onze intuïtie dus altijd kunnen uitbreiden (net als in de zintuigelijke intuïtie), en het altijd

[209] Tieszen, *After Gödel*, p.157.
[210] Tieszen, *After Gödel*, p.157.
[211] Tieszen, *After Gödel*, p.157.
[212] Andrew David Irvine en Harry Deutsch. „Russell's paradox". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta. Lente 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021.
[213] Namelijk, neem als P de eigenschap 'is geen verzameling van zichzelf'. Dan zit x in P desda x niet in P zit.
[214] Thomas Jech. *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded.* Springer, 2003. ISBN: 3-540-63048-1, p.4.
[215] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

door nieuwe ervaringen gecorrigeerd kan worden.[216] Zo ook dus in het geval van Russells paradox: de categorische intuïtie wordt door latere ervaringen gecorrigeerd. Dit laat ook zien dat de wiskunde onuitputtelijk is: zoals ik oneindig veel ervaringen kan opdoen van een touw, zo kan ik ook oneindig veel ervaringen opdoen van wiskundige objecten.

We hebben dus wel degelijk een vorm van perceptie over wiskundige objecten. Gödel schrijft dat

> I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future.[217]

Het hebben van wiskundige perceptie en dus wiskundige intuïtie is voor Gödel even vanzelfsprekend als het hebben van zintuigelijke percepties. Wiskundige kennis is niet zo direct te verkrijgen als zintuigelijke kennis, maar

> It by no means follows, however, that the data of this second kind, because they cannot be associated with actions of certain things upon our sense organs, are purely subjective, as Kant asserted. Rather they, too, may represent an aspect of objective reality, but, as opposed to the sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality[218]

De kennis die verkregen wordt door de wiskundige intuïtie is dus niet ondergeschikt aan de kennis verkregen uit de zintuigen, aangezien ze ook een afspiegeling zijn van een objectieve wereld, en ondanks dat de correspondentie tussen de mens en deze objecten niet via de zintuigen verloopt.

Samenvattend kunnen we dus geen kennis hebben van de objecten *zelf*, maar de intuïtie kan de door de rede gecreëerde intenties (gedeeltelijk) vervullen of frustreren. Zo kan de mogelijkheid tot illusies in de wiskunde, net als illusies in de natuurkunde, nog steeds blijven bestaan. Zo hebben we dus wel degelijk ervaringen van wiskundige objecten, en kunnen er in de wiskunde, net als in de zintuigelijke wereld, steeds weer nieuwe ervaringen opgedaan worden.

Dit houdt dus Gödels eerste voorwaarde, dat wiskundige uitspraken die vanwege de onvolledigheidsstellingen onbeslisbaar zijn in ZFC toch door de mens beslist kunnen worden, in stand. We kunnen dit inzien door terug te komen op de (on)beslisbaarheid van CH in ZFC. We zagen eerder dat Gödel zich tot de filosofie van Husserl aangetrokken voelde vanwege de onbeslisbaarheid van CH (ofwel omdat hij de beslisbaarheid van wiskundige uitspraken door de menselijke geest wilde behouden), omdat een filosofie op basis van de hypothetisch-deductieve systemen de waarheidsaanspraak van onbeslisbare uitspraken als irrelevant zou bestempelen, maar dit voor Gödel onacceptabel was. Hoe ziet Gödel de waarheidsaanspraak van een uitspraak als CH dan wel? Als we wiskundige uitspraken kunnen

[216] Tieszen, *After Gödel*, p.149.
[217] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.
[218] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

zien als intenties, dan is de uitspraak 'CH' in ZFC leeg: deze is noch vervuld, noch gefrustreerd.[219] Voor het beslissen van CH zijn dus meer axioma's nodig, maar de ontwikkeling hiervan ziet Gödel niet als een onmogelijke opgave.[220]

> Cantor's conjecture [CH] must be either true or false, and its undecidability from the axioms known today can only mean that these axioms do not contain a complete description of this reality; and such a belief is by no means chimerical, since it is possible to point out ways in which a decision of a question, even if it is undecidable from the axioms in their present form, might nevertheless be obtained.[221]

Dus, het feit dat CH in het huidige systeem niet beslist kan worden betekent slechts dat dit systeem nog niet compleet was. CH is waar of onwaar, en het kan later, dankzij aanvullende door de categorische intuïtie vervulde wiskundige intenties, blijken welke dat dit is.

Dit betekent niet dat Gödel ook het *bestaan* van wiskundige objecten noodzakelijkerwijs aanneemt, want hij schrijft in zijn addendum dat,

> However, the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition (which, incidentally, is an exact replica of the question of the objective existence of the outer world) is not decisive for the problem under discussion here. The mere psychological fact of the existence of an intuition which is sufficiently clear to produce the axioms of set theory and an open series of extensions of them suffices to give meaning to the question of the truth or falsity of propositions like Cantor's continuum hypothesis.[222]

Het bestaan van een wiskundige intuïtie is dus volgens hem voldoende om te kunnen spreken van een waarheidsaanspraak van wiskundige uitspraken, *ook* van proposities die onafhankelijk zijn van bepaalde axioma's.

Als we nu alle bovenstaande opmerkingen samenvoegen, zien we dat Gödel leek te geloven in een vorm van platonisme, vanwege de onbeslisbaarheid van CH in ZFC. Hij wilde de waarheidsaanspraak van de wiskunde, de 'rechtse' stroming, houden, maar er moest ook ruimte zijn voor een illusionaire component, zoals geïllustreerd door de paradox van Russell. Hij zette zich dus duidelijk af tegen Carnap en Hilbert, en vond inspiratie voor zijn wiskundige intuïtie bij Husserl. Deze intuïtie over de beslisbaarheid van CH lijkt ook een aanleiding te zijn tot de acceptatie van de eerste disjunct (vanwege de verwerping van de tweede!), aangezien Gödel het idee dat er onbeslisbare wiskundige uitspraken (in zijn woorden absoluut onbeslisbare Diophantische vergelijkingen) bestaan verwerpt. Echter, een naïeve vorm van platonisme werkt niet, aangezien dit tot een groot epistemisch probleem leidt (zie 1.1).

Samenvattend beschrijft Tieszen dat de filosofie van Gödel volgens hem neerkomt op de volgende vijf onderdelen, grotendeels ontleend aan Husserl en Plato.

[219] Tieszen, *After Gödel*, p.168.
[220] Tieszen, *After Gödel*, p.169.
[221] Kurt Gödel. „What is Cantor's Continuum Problem". In: *Kurt Gödel: collected works. Volume 2.* Oxford University Press, 1947, p. 176–187. URL: `https://monoskop.org/images/b/b7/Kurt_Godel_Collected_Works_Volume_II_1989.pdf`, p.181.
[222] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

(1) Filosofie kan een rigoureuze, universele a priori wetenschap zijn.

(2) Transcendentaal idealisme en epoche kunnen gebruikt worden om een nieuw soort filosofie te ontwikkelen waarbij (de betekenis van) objecten geconstitueerd wordt door het menselijk bewustzijn.

(3) Dit transcendentale idealisme wordt gecombineerd met platonisme, waardoor het bestaan van abstracte objecten en concepten in de wiskunde wordt aangenomen.

(4) Deze combinatie maakt gebruik van categorische intuïtie zodat de betekenis van deze objecten en concepten verduidelijkt kan worden.

(5) Zodat uiteindelijk de in ZFC onbeslisbare problemen (zoals dus CH) bepaald kunnen worden, en er een nieuw fundament voor de wiskunde ontstaat.[223]

Zo zien we dat de eerder besproken punten erg goed samenkomen in dit standpunt: Gödel kan (1) het 'rechtse' karakter van de wiskunde behouden, maar accepteert ook (2) dat de 'linkse' stroming, in dit geval de rol van de mens en de ervaringen, niet te ontkennen is. Op deze manier kan Gödel (3) deze twee stromingen, het platonisme en transcendentale idealisme, combineren, en kan er toch uitgegaan worden van het bestaan van abstracte of ideële wiskundige objecten. De categorische intuïtie als beschreven door Husserl is nu de link tussen deze twee stromingen (4), aangezien er dankzij deze categorische intuïtie kennis van wiskundige objecten opgedaan kan worden. Hierdoor kan ook het epistemologische probleem dat ontstaat in Plato's platonisme vermeden worden. Vanuit deze overtuiging komen we niet in een 'te links' hypothetisch-deductief systeem terecht zoals bij Hilbert en Carnap (5), en kunnen onbeslisbare problemen wel degelijk bepaald worden.

[223] Tieszen, *After Gödel*, p.4, mijn vertaling.

3 Het Programma van Hilbert en de implicaties voor het platonisme

Hilbert wilde met zijn Programma een nieuw fundament bieden voor de wiskunde, of tenminste het gebruik van de wiskunde rechtvaardigen.[224] In het begin van de jaren '20 heeft Hilbert zijn zogenoemde Programma beschreven, en het was gebaseerd op twee onderdelen: de gehele wiskunde moest geformaliseerd worden in één axiomatisch systeem, en er moest een eindig consistentiebewijs voor dit axiomasysteem geleverd worden.[225] Daarmee valt Hilberts Programma binnen de stroming van het *formalisme*: als een wiskundige uitspraak bewijsbaar is, kan deze bewijsbaarheid slechts gezien kan worden als volgend uit de regels, en doet dit geen beroep op een (eventuele) inhoudelijke betekenis.[226] Hier had Hilberts formalistische overtuiging dus slechts betrekking op de bewijstheoretische kant van de wiskunde, en de inhoudelijke of natuurkundige wiskunde zag hij wel degelijk als 'bestaand' en 'inhoudelijk'.[227]

In eerste instantie lijkt Hilberts Programma overrompeld door de onvolledigheidsstellingen van Gödel.[228] Stel namelijk dat de gehele wiskunde in één formeel systeem uitgedrukt kan worden, dan zeggen de onvolledigheidsstellingen dat de consistentie van dit systeem niet in dit systeem zelf bewezen kan worden.[229] Echter, Gödels onvolledigheidsstelling werkt slechts wanneer consistentiebewijzen *binnen* hetzelfde axiomasysteem gegeven moeten worden. Als we deze voorwaarde versoepelen, zijn consistentiebewijzen van systemen wel degelijk mogelijk. Zo zou er een consistentiebewijs gegeven kunnen worden in een rekenkundig onvoldoende sterk systeem (zwakker dan PA bijvoorbeeld) om de onvolledigheidsstellingen erop te kunnen toepassen (denk bijvoorbeeld aan een consistentiebewijs dat slechts door het gebruik van de geest gegeven wordt). Ook zou een consistentiebewijs van een systeem in een *sterker* formeel systeem gegeven kunnen worden. Een voorbeeld hiervan is het consistentiebewijs van PA gegeven in ZFC door Gentzen, maar hier kom ik later op terug. Zo kan Hilberts Programma, in aangepaste vorm wellicht, een kritiek vormen op de filosofie van Gödel: ook het (aangepaste) Programma van Hilbert kan een fundament bieden voor de wiskunde.

Hierbij is het ook nog interessant om op te merken dat Gödel zelf in 1931 in zijn bewijs van de onvolledigheidsstellingen Hilberts Programma ook niet had afgeschreven. Zo schrijft hij

> It must be expressly noted that Proposition XI [de tweede onvolledigheidsstelling] (...) represent no contradiction of the formalistic standpoint of Hilbert. For this standpoint presupposes only the existence of a consistency proof effected

[224] Richard Zach. „Hilbert's Program then and now". In: *Philosophy of Logic*. Elsevier, 2007, p. 411–447. ISBN: 9780444515414. DOI: `10.1016/b978-044451541-4/50014-2`. URL: `http://dx.doi.org/10.1016/B978-044451541-4/50014-2`, p.411.

[225] Zach, „Hilbert's Program".

[226] Patricia Blanchette. „The Frege-Hilbert controversy". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

[227] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416, 428.

[228] Tieszen, *After Gödel*, p.71.

[229] Tieszen, *After Gödel*, p.71.

by finite means, and there might conceivably be finite proofs which cannot be stated in P [het systeem waarvoor Gödel zijn bewijs heeft gegeven][230]

Zo zorgt de tweede onvolledigheidsstelling dus niet noodzakelijkerwijs voor de verwerping van Hilberts Programma, aangezien er wellicht eindige consistentiebewijzen bestaan die niet in zijn systeem P gegeven kunnen worden.

3.1 Hilberts Programma

Onderdeel van Hilberts Programma was het axiomatiseren, ofwel het in een formeel systeem uitdrukken, van de wiskunde.[231] Door de bewijzen in de wiskunde op een axiomatische manier te benaderen wordt intuïtie over de concepten volledig uitgesloten: logische redenaties of analyses gaan slechts via de axioma's en dus de regels die voorgeschreven zijn.[232] Hierin is de consistentie van het axiomatische systeem dus uitermate belangrijk, want zonder consistentie schrijft de redenatieregel *ex falso sequitur quodlibet* voor dat *alle* uitspraken bewijsbaar zijn, en dus is het systeem nutteloos. Twee andere waardes die voor Hilbert belangrijk waren, zijn volledigheid (alle wiskundige uitspraken zijn beslisbaar) en onafhankelijkheid (van andere delen van de wiskunde).[233] Hierin vond Hilbert dat consistentie van een axiomatische theorie voldoende is om de theorie gerechtvaardigd te gebruiken.[234]

Volgens Hilbert was er een onderdeel van de wiskunde waarin slechts intuïtieve manipulatie van tekens gebruikt wordt. Dit was de elementaire getaltheorie, en deze tak van de wiskunde bestaat dus intuïtief en kan niet verder gereduceerd worden.[235] De objecten van deze getaltheorie zijn de tekens, $|$. Deze tekens hebben geen betekenis, en representeren geen (andere) objecten, maar ze kunnen wel gemanipuleerd worden.[236] Dit is volgens Hilbert consistent, aangezien er geen logische structuren op deze tekens worden gelegd.[237] De manipulatie is slechts gebaseerd op intuïtieve operaties: we zien dat $| + | = ||$ of dat $| + || = || + |$.[238] Deze tekens bestaan niet onafhankelijk van de menselijke intuïtie, en de menselijke intuïtie is wat ervoor zorgt dat $|$ geïnterpreteerd wordt als het getal 1.[239] Hier is het wel even belangrijk om te benoemen dat de intuïtie die Hilbert hier beschrijft (waarschijnlijk) intuïtie zoals beschreven door Kant, dus zintuigelijke intuïtie die ervaringen in ruimte en tijd plaatst, is[240] (zie sectie 2.3), en niet lijkt op de wiskundige intuïtie zoals beschreven door Husserl of Gödel. Ook betekent deze interpretatie van getallen dat ze niet onafhankelijk van de menselijke intuïtie bestaan, hoewel de kennis over getallen wel als onmiddellijk, en a priori aan de gedachtes bestaat.[241]

Deze operaties van tekens liggen aan de grondslag van de metawiskunde, de wiskunde die

[230] Gödel, *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*, p.71.
[231] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.412.
[232] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.412.
[233] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.412.
[234] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.413.
[235] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416.
[236] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416.
[237] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416.
[238] Zach, „Hilbert's Program".
[239] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.421.
[240] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.423.
[241] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.420-423.

over formele bewijzen gaat.[242] Zoals de elementaire getaltheorie dus gebruik maakt van de tekens, maakt deze metawiskunde gebruik van rijen formules of bewijzen. Dit zijn slechts opeenvolgingen symbolen die syntactisch gemanipuleerd worden.[243] Bewijzen zijn dus de objecten van de metawiskunde, en door de wiskunde te formaliseren in een axiomatisch systeem, kunnen de wiskundige uitspraken in dit systeem gebruikt worden als objecten van deze metawiskunde, en dus kunnen de bewijzen in de metawiskunde onderzocht worden.[244] Van dit axiomatische systeem moet nu een consistentiebewijs gegeven worden om te laten zien dat de gehele wiskunde dus gerechtvaardigd gebruikt mag worden.[245]

Deze formalistische interpretatie (dat bewijzen dus slechts symboolmanipulaties zijn), is slechts van toepassing op de metawiskunde, de wiskunde van formele bewijzen. De waarheid en het bestaan van de wiskundige objecten en uitspraken *zelf* zou volgen uit een consistentiebewijs, maar hierover later meer. De inhoud van de wiskundige uitspraken kan dus nog steeds een waarheidsaanspraak doen, hoewel de bewijzen in de wiskunde slechts gezien werden als symboolmanipulatie.[246]

Eindigheid in redenaties was in dit axiomatische systeem en consistentiebewijs essentieel, want eindige redenaties zorgden voor zekerheid en waren voor Hilbert de basis voor wiskundig denken.[247] Een voorbeeld van een eindige redenatie die Zach geeft is de uitspraak 'p is een priemgetal': de uitspraak 'er bestaat een priemgetal tussen $p+1$ en $p!+1$, waar p priem', heeft maar eindig veel getallen die gecontroleerd moeten worden. Dit kan dus prima op eindige wijze. Het probleem ontstaat dus als een algemenere, oneindige, uitspraak bewezen moet worden. Hilbert gebruikt het voorbeeld '$1+n=n+1$'. Dit kan nooit eindig bewezen worden, want niet alle getallen kunnen gecontroleerd worden aangezien er oneindig veel gevallen zijn.[248] Dit betekent niet dat alle oneindige uitspraken betekenisloos zijn, maar zo lang er een eindige procedure wordt gegeven voor het vinden van een uitkomst, kan deze uitspraak geaccepteerd worden. Zach geeft het voorbeeld 'voor ieder priemgetal p is er een priemgetal groter dan p'.[249] Een priemgetal groter dan p kan namelijk gevonden worden door alle getallen tussen $p+1$ en $p!+1$ te checken, en zulke operaties zijn eindig. Oneindige bewijzen zijn, indien ze zonder rechtvaardiging blijven, dus nutteloos, aangezien we niet alle getallen kunnen nagaan.[250]

Hilbert heeft dit programma in 1921 opgesteld, maar dit is al geïnspireerd door ideeën die hij had in 1904.[251] Later,[252] duidde Hilbert een verschil tussen eindige en oneindige wiskunde door een onderscheid te maken tussen de zogenoemde 'reële' en 'ideële' wiskunde.[253] De reële wiskunde bevat de inhoudelijke, eindige wiskundige uitspraken, die beslisbaar zijn en geen variabelen bevatten.[254] Deze wiskundige uitspraken kunnen dus geverifieerd worden,

[242]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416.
[243]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416.
[244]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416.
[245]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.416-417.
[246]Zach, „Hilbert's Program then and now".
[247]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.423.
[248]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.424.
[249]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.424.
[250]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.425.
[251]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.415.
[252]In 1926 maakte Hilbert dit onderscheid voor het eerst, maar in 1923 hintte hij hier al naar.
[253]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.428.
[254]Zach, „Hilbert's Program then and now", p.428.

zoals onder andere bovenstaande uitspraak ‘voor ieder priemgetal p is er een priemgetal groter dan p’.[255] Hier kende Hilbert dus wel degelijk een soort objectief ‘bestaan’ aan toe, want hij vergeleek deze wiskunde met uitspraken in de natuurkunde: ze kunnen empirisch bevestigd worden.[256] Deze eindige, reële wiskunde, hoefde dus niet verder gerechtvaardigd worden, want we zien hiervan in dat deze waar is.[257] De rest van de wiskunde is de ideële wiskunde, en het gebruik van deze wiskunde wil Hilbert dus op eindige, metawiskundige, wijze rechtvaardigen door het geven van een eindig consistentiebewijs.[258]

Deze ideële wiskunde behoeft dus een consistentiebewijs.[259] Als de reële wiskunde ook bevat is in de ideële wiskunde (dus als de ideële wiskunde de reële wiskunde *behoudt*), dan zorgt een consistentiebewijs ervoor dat alle reële wiskunde, bewijsbaar op ideële wijze ook op eindige wijze gecontroleerd en dus bewezen kan worden.[260] Namelijk, als de ideële wiskunde inconsistent was, dan zou deze ook reële uitspraken kunnen bewijzen die niet bewijsbaar zijn op reële wijze. Een consistentiebewijs impliceert dat alle reële uitspraken die bewezen kunnen worden in de ideële wiskunde, ook al in de reële wiskunde bewezen moeten kunnen worden, en dus dat de ideële wiskunde gebruikt kan worden.[261]

Hilberts overtuiging van de waarheid van de wiskunde strekte verder dan slechts de reële wiskunde. In Hilberts briefwisseling met Frege in 1899 beschreef hij namelijk al dat consistentie van een axiomatisch systeem een voldoende voorwaarde is voor de aanname van het bestaan van de wiskundige objecten en uitspraken.[262] Wat dit ‘bestaan’ dan precies inhoudt (wellicht slechts een modeltheoretische interpretatie, wellicht een volledig platonistische interpretatie), wordt niet nader gespecificeerd. In 1928 gaf Hermann Weyl kritiek op het Programma van Hilbert, en beschreef dat Hilbert volgens hem slechts op zoek was naar de consistentie, en niet naar de waarheid van de wiskunde.[263] Om een (wellicht duidelijkere) waarheidsaanspraak aan de wiskunde te geven maakte Weyl de vergelijking met theoretische natuurkunde.[264] Deze vergelijking is: de ideële wiskunde heeft geen correspondentie met de intuïtie nodig, net als de theoretische natuurkunde geen waarneming nodig heeft om een theorie op te stellen.[265] Zoals de theoretische natuurkunde dus geen waarneming nodig heeft van haar objecten om toch *waar* te zijn, heeft ook de ideële wiskunde geen intuïtie nodig om toch *waar* te zijn. Deze vergelijking ging Hilbert in mee, en dus was consistentie, zoals boven beschreven, een voldoende vereiste om de waarheid van de theorie aan te nemen, omdat na een consistentiebewijs de ideële wiskunde evengoed bestaat als andere theoretische objecten of theorieën.[266]

Wel was Hilbert niet erg duidelijk in welke operaties of principes direct onder ‘eindigheid’ vielen. Hij gaf slechts voorbeelden van operaties die hieronder vielen, en benadrukte het verband tussen intuïtie en eindigheid: de eindige getaltheorie kan in intuïtie gevonden

[255] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.428.
[256] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.428.
[257] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.428.
[258] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.428.
[259] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.428.
[260] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.430.
[261] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.430.
[262] Blanchette, „The Frege-Hilbert controversy”.
[263] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.429.
[264] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.429.
[265] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.429.
[266] Zach, „Hilbert’s Program then and now”, p.430.

worden.[267] Zach contrasteert dit met de kritiek van William W. Tait, die volgens Zach eindige redenaties ziet als de noodzakelijke redenaties voor nontriviale getaltheorie.[268] Het grootste verschil is dus dat, in tegenstelling tot Hilbert, bij Tait de grond van wiskunde in intuïtie volledig afwezig is.[269] Deze grond is voor Tait niet nodig, omdat hij beargumenteert dat deze wiskunde in Cartesiaanse zin essentieel is. Je kunt twijfelen aan de waarheidsaanspraak van de wiskunde, maar je kunt niet twijfelen aan het bestaan van de eindige methodes, aangezien deze aan de grondslag van de gehele wiskunde liggen. Deze methodes zijn noodzakelijk voor de redenaties in de wiskunde, dus om überhaupt de wiskunde te doen moeten deze al bestaan.[270]

Na de onvolledigheidsstellingen leek dit programma zoals opgesteld door Hilbert dus gedoemd te mislukken: een eindig consistentiebewijs kan niet in het formele systeem zelf gegeven worden. Alle methodes die door Hilbert als eindig geaccepteerd werden zijn formaliseerbaar in PA, en dus bestaat er geen consistentiebewijs van deze eindige methodes in PA.[271] Dit betekende echter niet dat het idee van Hilbert ook weerlegd was: Paul Bernays en Gerhard Gentzen hebben onderzoek gedaan naar de mogelijke consistentiebewijzen voor delen van de wiskunde als de voorwaarde van eindigheid uitgebreid wordt.[272] Zo heeft Gentzen laten zien dat PA, de eerste-orde rekenkunde, consistent is, mede door gebruik te maken van inductie tot ordinaalgetal ε_0.[273] Dit ordinaalgetal is strikt groter dan ω (de ordinaalrepresentatie van $\mathbb{N}$, de natuurlijke getallen) dus kan het consistentiebewijs van PA niet in PA zelf gedaan worden, maar wel in ZFC. Problemen met soortgelijke consistentiebewijzen kunnen dus zijn dat ze, aangezien ze niet meer eindig zijn, niet meer inzichtelijk zijn.[274]

Samenvattend is er volgens Hilbert een deel van de wiskunde dat in overeenstemming moet zijn met de werkelijkheid en de natuurkunde (de reële wiskunde), en een deel van de wiskunde dat niet vanzelfsprekend toepasbaar is op de werkelijkheid, maar dankzij een consistentiebewijs even gerechtvaardigd is als de theoretische natuurkunde. Zo kan Hilbert toch een bepaalde vorm van 'waarheid' in zijn theorie bewaren.[275]

3.2 Feferman en het onmisbaarheidsargument

Solomon Feferman heeft een interpretatie van Hilberts programma gegeven die grote implicaties had voor het onmisbaarheidsargument. Feferman wilde de eindige wiskunde als fundament voor de ideële wiskunde gebruiken, en reduceerde bewijstheoretisch delen van de wiskunde tot simpelere systemen door gebruik te maken van eindige methodes.[276] Een bewijstheoretische reductie van systeem S_1 tot S_2 betekent dat als een systeem S_1 iets bewijst, dan bewijst een zwakker systeem S_2 dit ook, en het bewijs hiervan moet op eindige wijze

[267] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.425.
[268] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.425.
[269] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.425.
[270] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.425.
[271] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.432.
[272] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.419.
[273] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.419.
[274] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.436.
[275] Zach, „Hilbert's Program".
[276] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.437.

gegeven worden.[277] Deze reductie houdt in dat een bepaalde theorie in een zwakker systeem gefundeerd kan worden.[278] Dit is analoog aan Hilberts Programma, want vanuit Hilberts programma was S_1 de ideële wiskunde, S_2 de reële wiskunde, en moest er een eindig bewijs van deze reductie gegeven worden.[279] Namelijk, als de ideële wiskunde een reële uitspraak bewijst, dan moest deze ook op reële wijze al te bewijzen zijn, anders is de ideële wiskunde inconsistent.

Feferman heeft laten zien dat nagenoeg alle wiskunde die nodig is voor de natuurkunde geformaliseerd kan worden in erg zwakke systemen.[280] In het bijzonder heeft hij het in zijn artikel "Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics"[281] over het systeem W, het door hem opgestelde systeem dat (nagenoeg) alle wiskunde die nodig is voor de natuurkunde, bevat. Hoe dit systeem in elkaar zit is voor deze scriptie niet relevant. Wat wel relevant is, is dat Feferman beargumenteert dat aangezien W gereduceerd kan worden tot PA[282], het bestaan van de objecten van W niet in de platonistische zin aangenomen hoeft te worden.[283] Namelijk, Fefermans conclusie is dat W alle wiskunde die nodig is voor de natuurkunde bevat, en dat W gereduceerd kan worden tot PA. Dit betekent dat het fundament voor W hetzelfde is als het fundament voor PA.[284]

Het fundament voor PA is nu niet noodzakelijkerwijs platonistisch. Zo kan PA gereduceerd worden tot HA, Heyting Arithmetic, wat de intuïtionistische interpretatie van PA is.[285] Essentieel hieraan is dat een intuïtionistisch systeem de (objecten van de) wiskunde als cognitief construct ziet, en niet als *echt* bestaand, in de platonistische zin.[286] Dit heeft invloed op de bewijsvoering binnen systemen, en daarom vallen bepaalde systemen wel onder intuïtionistische systemen, en andere niet. Intuïtionistische systemen zijn namelijk de formele systemen waarin de wet van uitgesloten derde, $(A \lor \neg A)$, wordt verworpen.[287] In dit geval geldt dat, $PA = HA+$ de wet van uitgesloten derde. W is dus te reduceren tot PA, en PA is te reduceren tot HA.

De implicatie voor het onmisbaarheidsargument is dat het bestaan van de objecten van de wiskunde die nodig zijn voor de natuurkunde niet essentieel voor de acceptatie van dit wiskundige systeem W is. Namelijk, W kan gereduceerd worden tot PA, en PA kan gereduceerd worden tot HA. De wiskunde die nodig is voor de natuurkunde heeft dus hetzelfde fundament als HA, de rekenkunde die de (objecten van de) wiskunde ziet als

[277] Zach, „Hilbert's Program".

[278] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.438.

[279] Zach, „Hilbert's Program".

[280] Zach, „Hilbert's Program then and now", p.438.

[281] Solomon Feferman. „Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics". In: *PSA: proceedings of the biennial meeting of the philosophy of science association* (1992), p. 442–455. ISSN: 02708647. URL: `http://www.jstor.org/stable/192856`.

[282] Wat hij niet bewijst in dit artikel, maar refereert wel naar het artikel waarin hij dit bewijst

[283] Feferman, „Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics", p.451.

[284] Feferman, „Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics", p.451.

[285] Feferman, „Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics", p.451.

[286] Joan Moschovakis. „Intuitionistic logic". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Zomer 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

[287] Moschovakis, „Intuitionistic logic".

cognitief construct.

Of de wiskunde nu onmisbaar is voor de natuurkunde of niet, het bestaan van de objecten van de wiskunde is dus niet *noodzakelijk* voor een adequate wiskundige theorie. Feferman schrijft hierover dat

> By the fact of the proof-theoretical reduction of W to PA, the only ontology it commits one to is that which justifies acceptance of PA. But even there, the answer to Q_1 and thence to Q_2 [respectievelijk welke objecten onmisbaar zijn en welke principes noodzakelijk zijn], is underdetermined. One view of PA is that it is about the natural numbers as independently existing abstract objects; that is again a Platonistic view, albeit an extremely moderate one. (...) Or one can make use of the fact that PA is reducible to HA to justify it on the basis of a more constructive ontology.[288]

Zo kunnen de natuurlijke getallen (de objecten van PA) nog steeds gezien worden als abstract bestaande objecten (de platonistische interpretatie), maar kunnen ze ook gezien worden als mentaal construct vanuit het intuïtionisme, omdat PA te reduceren is tot HA. Dat betekent dat als de wiskunde die nodig is voor de natuurkunde niet de aanname van het bestaan van de wiskundige objecten behoeft, het onmisbaarheidsargument haar grote kracht verliest. De objecten van de wiskunde die nodig zijn voor de natuurkunde hoeven niet daadwerkelijk te bestaan om toch W te accepteren.[289]

Hilberts Programma en de interpretatie van Feferman hebben dus grote implicaties voor het platonisme. Dankzij de bewijstheorie van Feferman die voortvloeit uit Hilberts Programma, kunnen we inzien dat het onmisbaarheidsargument niet zo sterk is als het lijkt, en kan Hilberts interpretatie van de wiskunde een tegengeluid bieden tegen de filosofie van Gödel. Het onmisbaarheidsargument is dankzij Feferman niet zo sterk meer, en de formalistische benadering van de ideële wiskunde is zeker niet afgeschreven. Ongeacht dat Hilberts Programma in originele vorm niet zal slagen, zijn er veel ontwikkelingen rondom deze filosofie geweest, zoals een consistentiebewijs van PA of de bewijstheoretische reductie van Feferman, die zeker serieus genomen moeten worden.

[288] Feferman, „Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics”, p.451.

[289] Feferman, „Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics”, p.451.

4 Kritiek

Mijn eerste punt van kritiek is op de directe redenering van Gödel. Wat ik opmaak uit de literatuur is dat Gödel het bestaan van absoluut onbeslisbare wiskundige uitspraken, zoals de Continuum Hypothese, als aanleiding nam om op zoek te gaan naar een theorie die zijn platonisme kon rechtvaardigen. Namelijk, hij leek ervan overtuigd te zijn dat er wel degelijk antwoorden waren op deze 'onbeslisbare' uitspraken, en dat de mens deze ook kon vinden. Dat betekent dat hij de tweede disjunct, dat er absoluut onbeslisbare Diophantische vergelijkingen bestaan, verwerpt. Echter, later lijkt ook juist de filosofie van Husserl het platonisme weer te impliceren. Zo volgt een vorm van het platonisme uit de filosofie van Husserl, en volgt de filosofie van Husserl voor Gödel uit de acceptatie van het platonisme. Zijn grootste motivatie buiten deze cirkelredenering lijkt dus te zijn dat hij niet wil accepteren dat er absoluut onbeslisbare wiskundige uitspraken bestaan.

Een mogelijke andere redenatie lijkt voort te komen uit het onmisbaarheidsargument, want Gödel schrijft dat "the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence".[290] Gödel neemt het bestaan van verzamelingen als objecten aan, en verantwoordt dit door te schrijven dat "it seems likely that for deciding certain questions (...) new axioms based on some hitherto unknown idea will be necessary."[291] Dan geldt voor deze axioma's dat "the axioms force themselves upon us as being true."[292] Nieuwe axioma's zijn dus in te toekomst nodig, maar deze axioma's zijn wel *waar*, ze forceren hun eigen waarheid. Hij verantwoordt dus de aanname van verzamelingen als objecten door te zeggen dat de axioma's ontwikkeld of ontdekt kunnen worden, maar dat deze axioma's hun waarheid forceren. Dit lijkt sterk gerelateerd aan zijn overtuiging dat CH beslisbaar is: door de wiskundige intuïtie kan de waarheid wiskundige uitspraken of axioma's later ingezien worden. De axioma's zijn (al dan niet in de toekomst) te bepalen als waar, net als uitspraken als CH, dus zijn de objecten ook waar. Mijns inziens haalt de verwerping van de overtuiging dat CH waar of onwaar is deze redenatie al onderuit: als we niet aannemen dat de axioma's een waarheidsaanspraak doen, of dat alle wiskundige uitspraken waar of onwaar zijn, is er geen reden om verzamelingen als bestaande objecten aan te nemen, want de wiskunde *hoeft* niet te gaan over de werkelijkheid.

Daar komt bij dat het klassieke onmisbaarheidsargument al sterk bekritiseerd is door het artikel van Feferman, beschreven in sectie 3.2. We hebben in die sectie gezien dat de acceptatie van de wiskunde voor de natuurkunde niet het bestaan van de objecten impliceert. Dat betekent dat, zelfs als axioma's vanzelfsprekend lijken, of "force themselves upon us",[293] ze dat niet hoeven zijn.

Dan, de acceptatie van de eerste disjunct is volgens Gödel niet de enige mogelijkheid om bij het platonisme uit te komen. De acceptatie van de tweede disjunct, dat er absoluut onbeslisbare Diophantische vergelijkingen bestaan, kan ook het platonisme impliceren. In sectie 2.2 zagen we dat, volgens Gödel, de wiskunde geen creatie kan zijn omdat de eventuele schepper, de mens dus, niet de vrijheden van een schepper geniet indien er absoluut

[290] Gödel, „Russell's mathematical logic", p.128.
[291] Gödel, „Russell's mathematical logic", p.121.
[292] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.
[293] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

onbeslisbare Diophantische problemen bestaan. De wiskunde is dus, volgens hem, geabstraheerd uit de werkelijkheid, maar aangezien de objecten gekend kunnen worden zonder gebruik te maken van de zintuigen, is het Aristotelisch realisme uitgesloten, en dus volgt het platonisme.

Ook met deze redenatie ben ik het niet vanzelfsprekend eens. Zelfs vanuit de acceptatie van de tweede disjunct, dat er absoluut onbeslisbare wiskundige waarheden bestaan, vind ik dat de wiskundige wel degelijk veel vrijheden in de wiskunde heeft. Zo kan er in de wiskunde gebruik gemaakt worden van allerlei verschillende axiomatische systemen of meetkundige ruimtes, en hoeft er geen rekening gehouden te worden met consistentie met de zintuigelijke wereld. Parallelle lijnen kunnen elkaar in niet-Euclidische meetkunde gewoon snijden, we kunnen gebruik maken van grote kardinaalgetallen of hogere, zelfs oneindigdimensionale ruimtes. Geen van deze dingen heeft nog enigerlei relatie tot de zintuigelijke wereld, maar toch kunnen we hier wiskunde over bedrijven. Bovendien hoeven we ook geen volledige vrijheid te hebben in onze creaties: het maken van de regels moet wellicht vrij zijn, maar de vervolgstappen moeten hier strikt uit volgen. In het schaken hebben we geen vrijheid om bepaalde zetten te doen, maar in het opstellen van de regels voor het schaken hebben we dat wel. Als we, in lijn met Hilbert, waarheid zien als consistentie, dan zegt de tweede disjunct slechts dat er uitspraken bestaan die consistent zijn met het huidige systeem, maar er niet in bevat zijn. Dit is geen onwaarschijnlijke uitspraak.

Daar komt nog bij dat Gödel in zijn filosofie ook niet aantoont waarom de wiskunde die volgt uniek is. Er zijn veel verschillende axiomasystemen[294], maar toch heeft ZFC voor Gödel een speciaal soort waarheidsaanspraak: deze lijkt toch in zijn filosofie *echt* de juiste te zijn.[295] Dit wordt ook geïllustreerd door citaten als "the axioms [van ZFC] force themselves upon us as being true"[296] Hier lijkt ruimte te zitten voor kritiek in de vorm van het multiversum beschreven door Hamkins (zie 1.2): zelfs als we een platonistisch universum accepteren, en accepteren dat wiskundige objecten abstract zijn in en in een ander domein bestaan, dan is de uniciteit van ZFC niet gegarandeerd. Gödel heeft hier geen verklaring voor, dus zie ik ook niet in waarom de theorie van Hamkins vanuit Gödels oogpunt niet acceptabel zou kunnen zijn: al deze concepten van verzamelingen bestaan op dezelfde platonistische wijze. Dan ligt het dus aan de individuele wiskundige welke zij verkiest. Toch lijkt Gödel een aparte status toe te kennen aan de ZFC axioma's, maar geeft geen rede voor *dit* axiomasysteem, behalve de enigmatische zin dat ze "force themselves upon us as being true".[297]

Ook los van de kritiek van Hamkins lijkt dit een problematisch punt. Het was in de tijd van Gödel wel degelijk duidelijk dat er verschillende soorten axiomasystemen bestaan,[298] maar hij geeft geen enkel argument ten faveure van ZFC. Gödel zou de waarheidsaanspraak van ZFC eventueel aan de wiskundige intuïtie kunnen toekennen: dankzij de wiskundige intuïtie *weten* we dat ZFC het juiste systeem is. Echter, het Keuzeaxioma is al een betwist axioma in dit systeem, en het is niet vanzelfsprekend dat iedere wiskundige dit axioma

[294]Zie bijvoorbeeld M. Randall Holmes. „Alternative axiomatic set theories". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Zomer 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024

[295]Tieszen, *After Gödel*, p.164.

[296]Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

[297]Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

[298]Zoals bijvoorbeeld het systeem NBG, vernoemd naar Von Neumann, Bernays en Gödel

aanneemt. Het Keuzeaxioma komt neer op de uitspraak dat voor iedere verzameling van disjuncte niet-lege verzameling een element uit iedere verzameling *gekozen* kan worden (ofwel dat er een keuzefunctie bestaat), om zo een nieuwe verzameling van al deze gekozen elementen te vormen.[299] Dit axioma is zeker niet oncontroversieel (ik spoor de lezer hier zeker aan een keer "axiom of choice controversy" te googlen). Onderdeel van deze controverse is dat dit axioma slechts aangeeft *dat* er een element gekozen kan worden, en het geeft geen constructie van *hoe* dit element gekozen kan worden. Dit is met name problematisch voor aanhangers van het intuïtionsime en constructivisme, aangezien vanuit deze stromingen uitspraken pas geaccepteerd worden als deze geconstrueerd kunnen worden. Een andere problematische implicatie van het Keuzeaxioma is de Banach-Tarski paradox: een driedimensionale bol kan in eindig veel niet-overlappende stukken verdeeld worden, waarna deze stukken herschikt kunnen worden om *twee* keer de oorspronkelijke bol te vormen.[300] Deze paradox lijkt mij allesbehalve een vervulde wiskundige intentie. Integendeel, dit zou juist kunnen pleiten voor een *frustratie* van de wiskundige intentie van het Keuzeaxioma: als ik een Bossche bol heb kan ik deze toch niet in eindig veel stukken verdelen om er daarna twee identiek aan de oorspronkelijke van te maken? De acceptatie van dit axioma lijkt mij dus, ook vanuit de positie van Gödel, allesbehalve gerechtvaardigd.

Ook wordt het niet volledig duidelijk waarom Gödel de eerste disjunct, dat de mens iedere machine overstijgt, verkiest. Het is grotendeels mijn lezing dat dit in het bijzonder komt doordat het voor Gödel onacceptabel is dat CH niet beslisbaar is, hoewel Tieszen hier ook naar hint.[301] Wel beschrijft Tieszen dat Gödel de beslisbaarheid van de wiskundige uitspraken door de menselijke geest wilde behouden.[302] Hij was tegen de hypothetisch-deductieve systemen, omdat dan de situatie ontstaat dat de waarheid van een onbeslisbare zin een loze vraag is. Echter, dit afzetten tegen de opvatting van Hilbert of andere hypothetisch-deductieve systemen lijkt slechts gebaseerd te zijn op zijn *overtuiging* of *gevoel* dat bepaalde wiskundige uitspraken wel beslisbaar *moeten* zijn. Hij geeft geen verdere argumenten tegen systemen of overtuigingen zoals die van Hilbert.

Als we nu deze overtuiging of dit gevoel van Gödel achterwegen laten, lijkt er geen argument te zijn *voor* de verwerping van soortgelijke hypothetisch-deductieve systemen. De disjunct die volgt uit de onvolledigheidsstellingen, namelijk dat ofwel de mens iedere machine overstijgt, ofwel er absoluut onbeslisbare Diophantische problemen bestaan, lijkt in geen enkele vorm het formalisme uit te sluiten.

Stel namelijk dat de eerste disjunct, dus dat de mens iedere machine overstijgt, geldt. Dat lijkt helemaal geen aanname die in tegenspraak is met het formalisme. Vanuit het formalisme is de wiskunde slechts symboolmanipulatie, en kan gezien worden als een creatie van de mens, dus lijkt het geen vreemde aanname dat de mens ieder haar creaties overstijgt. De computer is ook een creatie van de mens, en hoewel waarschijnlijk niet iedereen ieder onderdeel van de computer kent, is het niet mogelijk dat een computer meer weet dan een mens.

Stel nu dat de tweede disjunct, dus dat er *absoluut* onbeslisbare wiskundige uitspraken

[299] Zie John L. Bell. „The axiom of choice". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Red. door Edward N. Zalta. Winter 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021

[300] Zie Bell, „The axiom of choice"

[301] Zie Tieszen, *After Gödel* p.75,p.77-78, p.164-165

[302] Tieszen, *After Gödel*, p.75.

bestaan, geldt. ‘Waarheid’ kan vanuit het formalisme gezien worden als non-contradictie (als er een consistentiebewijs gegeven wordt kan de wiskunde dezelfde status toegekend worden als de theoretische natuurkunde), dus een uitspraak is *‘waar’* in een systeem als deze niet in tegenspraak is met dit systeem. Op deze manier kunnen er altijd uitspraken toegevoegd worden aan een systeem. Bovendien zijn er, door de onvolledigheidsstellingen van Gödel, uitspraken die onbeslisbaar zijn in dit systeem. Van deze uitspraken is het dus onduidelijk of ze wel of niet consistent zijn met het systeem, maar dit betekent niet dat ze er ook *daadwerkelijk* niet consistent mee zijn. Ze kunnen absoluut onbeslisbaar zijn binnen dit systeem, maar er toch consistent mee zijn. Ter illustratie: zowel CH als $\neg CH$ is consistent met ZFC. CH is dus onbeslisbaar in ZFC, terwijl, vanuit het oogpunt van ZFC, zowel CH als $\neg CH$ als waar beschouwd zou kunnen worden. Zo is het bestaan van een absoluut onbeslisbare wiskundige uitspraak vanuit het formalisme geen problematische these.

Om in te zien dat deze situatie voor het formalisme niet problematisch is, wil ik de wiskunde graag vergelijken met het schaken, zoals Hermann Weyl, leerling van Hilbert, heeft beschreven.[303] Als we wiskunde zien als schaken, dan is het mogelijk om telkens nieuwe regels voor deze stukken toe te voegen, zo lang deze regels niet inconsistent zijn met de al bestaande regels. Voorbeelden hiervan zijn bijvoorbeeld de rokade, of het en passant slaan. De rokade voegt een nieuwe regel toe aan het spel, zorgt voor uitzonderingen in het gedrag van stukken (zo kunnen twee stukken van dezelfde kleur in één zet verplaatst worden, of kan de koning twee plekken verplaatsen, in plaats van de normale regel van een), maar deze regels zijn niet inconsistent met de bestaande regels. Voor en passant slaan geldt hetzelfde: een pion kan in een uitzonderlijke situatie een naastgelegen pion slaan, wat normaal gesproken niet kan. De regels van en passant slaan zijn echter zo specifiek (het mag alleen nadat de ene partij een pion heeft verplaatst, waarna de andere partij in de direct volgende zet een pion *twee* plaatsten vooruit zet, om zo naast de eerstgenoemde pion te komen staan), dat dit ook niet in strijd is met de al bestaande regels. Zo kan de wiskunde ook benaderd worden. We kunnen een regel bedenken die niet inconsistent is met de bestaande regels, en niet volgt uit de regels die we hebben. Dit is altijd mogelijk, want dat schrijven de onvolledigheidsstellingen ons zelfs voor.

Er is wel een mogelijk probleem als waarheid gezien wordt als slechts consistentie zoals bij Hilbert, namelijk: hoe kan het dan dat het toch blijkt dat de wiskunde in Wigners woorden ‘the correct language’ blijkt te zijn? Vanuit het artikel van Feferman gezien is deze kritiek helemaal niet zo sterk meer. De objecten van de wiskunde hoeven niet daadwerkelijk te bestaan om de wiskunde te accepteren, en dus behoeft de wiskunde die voor de natuurkunde noodzakelijk is niet het bestaan van wiskundige objecten. Dit is ook een argument tegen de overtuiging van Gödel. Het bestaan van wiskundige objecten is dus niet “necessary to obtain a satisfactory system of mathematics.”[304] Het zien van wiskunde als cognitief construct is evengoed voldoende.

Bovendien ontkennen onder andere formalisten ook niet dat de wiskunde geen praktische component heeft, of dat het niet in overeenstemming is met de werkelijkheid. Voor Hilbert was de reële wiskunde namelijk wel degelijk van toepassing op de werkelijkheid. Echter,

[303] Zie H. Weyl. „The current epistemological situation in mathematics”. In: *From Brouwer to Hilbert: the debate on the foundations of mathematics in the 1920s.* Red. door P. Mancosu. Oxford University Press, 1998, p. 123–142

[304] Gödel, „Russell’s mathematical logic”, p.128.

Gödel trekt dit veel verder: hij zegt ook dat de wiskunde die niet meer toepasbaar is op de natuurkunde eenzelfde platonistische waarheidsaanspraak doet, want "it seems to me that the assumption of such [wiskundige] objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence."[305] Maar als we nooit grote kardinaalgetallen tegenkomen in de werkelijkheid, of ons überhaupt kunnen voorstellen dat deze in een bepaalde vorm in de werkelijkheid zouden kunnen bestaan, waarom zouden deze dan, in wat voor vorm dan ook, als geest-onafhankelijk gezien worden? Hier lijkt Hilberts formalisme wellicht wel beter aan de intuïtie te voldoen dan Gödels filosofie. Als we op geen enkele manier soortgelijke wiskundige entiteiten zouden kunnen waarnemen, is het dan niet logischer om aan te nemen dat we ze naar wille gecreëerd hebben, en dat ze dus niet daadwerkelijk (al dan niet geest-afhankelijk$_2$) bestaan?

[305] Gödel, „Russell's mathematical logic", p.128.

5 Conclusie

Platonisme voldoet dus voor veel wiskundigen, waaronder ook veel van mijn medestudenten, aan de intuïtie van wat wiskunde is. Echter, de epistemologische problemen die komen kijken bij Plato's oorsponkelijke formulering van zijn filosofie lijken bijna onoverbrugbaar. Toch blijft het een intuïtief waarschijnlijke filosofie, en hebben veel filosofen zich met deze stroming gemoeid. Tieszen noemt de overtuiging van Husserl constitutief platonisme, dan hebben we de overtuiging van Hamkins, dat alle opvattingen van het concept verzameling op dezelfde platonistische wijze bestaan in een *multiversum* gezien, en het onmisbaarheidsargument van Quine en Putnam.

Gödel lijkt ook gevoelig voor soortgelijke onmisbaarheidsargumenten, maar ontwikkelt ook zijn wiskundige intuïtie op basis van de categorische intuïtie van Husserl, om niet in het onoverbrugbare epistemologische probleem van Plato te vallen. Ook kan hij op deze manier recht doen aan het wispelturige of tijdsafhankelijke karakter van de wiskunde.

De onvolledigheidsstellingen van Gödel hebben laten zien dat voor ieder consistent formeel systeem S een onbeslisbare uitspraak φ bestaat, en dat de consistentie van S niet in S te bewijzen is. Hieruit leidde Gödel in zijn *Gibbs Lecture* af dat ofwel de mens iedere machine overstijgt, ofwel er absoluut onbeslisbare wiskundige uitspraken bestaan. Gödel accepteerde de eerste disjunct, verwierp de tweede, en kwam zo uit bij optie 1 in sectie 2.2. Gödel wilde namelijk de overtuiging dat wiskundigen iedere wiskundige uitspraak kunnen beslissen bewaren, en zette zich af tegen de hypothetisch-deductieve systemen van Carnap en Hilbert. Wel moest hij toegeven aan het feit dat wiskunde niet volledig a priori kan zijn, want Russells paradox laat zien dat er wel degelijk fouten gemaakt kunnen worden in de wiskunde. Uiteindelijk vindt Gödel zijn soelaas bij Husserl, die een fenomenologie beschrijft die gebruik maakt van categorische intuïtie en objecten ziet als geest-onafhankelijk$_2$, waardoor hij het linkse (geest-afhankelijke) en rechtse (geest-onafhankelijke) karakter van de wiskunde aan elkaar kan verbinden. Hierdoor kan Gödel zijn platonistische opvattingen behouden, en hij combineert deze met een transcendentaal idealisme. Zo kan Gödel zijn opvattingen dat de mens alle wiskundige uitspraken kan beslissen, en dat een bewijs voldoende grond is voor de acceptatie van een uitspraak, behouden. Bovendien ontwijkt de wiskundige intuïtie, afgeleid uit Husserls categorische intuïtie, het epistemische probleem van Plato. De wiskundige intuïtie kan wiskundige intenties frustreren, gedeeltelijk vervullen of geheel vervullen. Zo kan er wiskundige kennis vergaard worden, *en* kunnen wiskundigen de (in een bepaald axiomasysteem) onbeslisbare uitspraken, zoals CH, beslissen. Dankzij deze wiskundige intuïtie blijft er ook ruimte voor 'fouten' of correcties in de wiskunde, aangezien de wiskundige intuïtie, net als de zintuigelijke intuïtie, altijd gecorrigeerd kan worden. Een voorbeeld van zo'n correctie is de aanpassing van de axioma's van Frege, zoals nodig was na de ontdekking van Russells paradox. Voor Gödel volgt deze filosofie uit zijn onvolledigheidsstellingen.

Gödel laat echter niet zien hoe het axiomasysteem ZFC volgt uit zijn categorische intuïtie en waarom andere axiomasystemen 'minder waar' zijn. Sterker nog, de acceptatie van de C uit ZFC, het Keuzeaxioma, lijkt mij allesbehalve "force themselves upon us as being true".[306]

Zoals ik in hoofdstuk 3 heb beargumenteerd, is het Programma van Hilbert nog lang

[306] Gödel, „What is Cantor's Continuum Problem", p.268.

niet afgeschreven. Het kan mijns inziens evenwel, wellicht op aangepaste wijze, een reactie bieden op de problematiek beschreven door Gödel in zijn *Gibbs Lecture*. De overkoepelende stroming van het formalisme is namelijk zowel consistent met de overtuiging dat er absoluut onbeslisbare wiskundige uitspraken bestaan, als de overtuiging dat de mens iedere machine overstijgt. Toch is het formalisme geen stroming die ofwel de objecten van de wiskunde als onafhankelijk bestaand accepteert, ofwel een waardeoordeel of overtuiging toekent aan onbeslisbare uitspraken. Hoewel de oorspronkelijke formulering van Hilberts Programma niet opgewassen was tegen de onvolledigheidsstellingen, zijn er verschillende (moderne) interpretaties van Hilberts Programma die trachten hieraan te ontsnappen, zoals beschreven door onder andere Feferman. Zo zorgden zijn inspanningen op het gebied van het bewijstheoretisch reduceren van de wiskunde nodig voor de natuurkunde voor een argument tegen het onmisbaarheidsargument.

Concluderend: het platonisme lijkt voor Gödel dus te volgen uit zijn onvolledigheidsstellingen. Hij beschrijft dat de aanname van de tweede disjunct leidt tot de acceptatie van het platonisme, net als de acceptatie van de eerste disjunct. Deze eerste disjunct heeft Gödels voorkeur, en hij lijkt een filosofie te willen ontwikkelen die de overtuiging dat wiskundigen alle wiskundige uitspraken kunnen beslissen ondersteunt. Echter, bij nader onderzoek lijkt deze filosofie van Gödel bepaald niet waterdicht.

Ik hoop in mijn analyse te hebben aangetoond dat de onvolledigheidsstellingen van Gödel grote wiskundige, en filosofische implicaties hadden. Volgens Gödel zelf volgde een vorm van het platonisme, gecombineerd met zijn wiskundige intuïtie, uit zijn onvolledigheidsstellingen. Echter, ik hoop ook in mijn analyse te hebben aangetoond dat deze stellingen niet eenduidig deze filosofie van de wiskunde impliceren. Zo kan ook het formalisme, of een bepaalde versie van Hilberts Programma, evengoed een fundament voor de wiskunde bieden. Ik hoop ook in deze scriptie te hebben aangetoond dat de objectieve waarheidsaanspraak die de wiskunde lijkt te doen, niet vanzelfsprekend is.

Referenties

Bagaria, Joan. „Set theory". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

Bell, John L. „The axiom of choice". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta. Winter 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021.

Betekenis 'waarheid'. Bezocht op 9-5-2024. URL: `https://www.vandale.nl/gratis-woordenboek/nederlands/betekenis/waarheid`.

Blanchette, Patricia. „The Frege-Hilbert controversy". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

Bostock, David. „Plato versus Aristotle". In: *Philosophy of mathematics: an introduction.* Wiley-Blackwell, 2009, p. 1–32. ISBN: 978-1-405-18992-7.

Feferman, Solomon. „Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics". In: *PSA: proceedings of the biennial meeting of the philosophy of science association* (1992), p. 442–455. ISSN: 02708647. URL: `http://www.jstor.org/stable/192856`.

Franzén, Torkel. *Gödel's Theorem. An incomplete guide to its use and abuse.* Jun 2005. ISBN: 9781439876923.

Gödel, Kurt. *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*. Dover Publications Inc., 1992. ISBN: 0-486-66980-7. URL: `https://monoskop.org/images/9/93/Kurt_G%C3%B6del_On_Formally_Undecidable_Propositions_of_Principia_Mathematica_and_Related_Systems_1992.pdf`.

Gödel, Kurt. „Russell's mathematical logic". In: *Kurt Gödel: collected works. Volume 2.* Deel 2. Oxford University Press, 1944, p. 119–141. URL: `https://monoskop.org/images/b/b7/Kurt_Godel_Collected_Works_Volume_II_1989.pdf`.

Gödel, Kurt. „What is Cantor's Continuum Problem". In: *Kurt Gödel: collected works. Volume 2.* Oxford University Press, 1947, p. 176–187. URL: `https://monoskop.org/images/b/b7/Kurt_Godel_Collected_Works_Volume_II_1989.pdf`.

Gödel, Kurt. „What is Cantor's Continuum Problem". In: *Kurt Gödel: collected works. Volume 2.* Oxford University Press, 1964, p. 254–270. URL: `https://monoskop.org/images/b/b7/Kurt_Godel_Collected_Works_Volume_II_1989.pdf`.

Hamkins, Joel David. „The set-theoretic multiverse". In: *The review of symbolic logic* 5.3 (aug 2012), p. 416–449. ISSN: 1755-0211. DOI: `10.1017/s1755020311000359`. URL: `http://dx.doi.org/10.1017/S1755020311000359`.

Hartimo, M. „Husserl's pluralistic phenomenology of mathematics". In: *Philosophia Mathematica* 20.1 (2012), p. 86–110. DOI: `10.1093/philmat/nkr032`.

Holmes, M. Randall. „Alternative axiomatic set theories". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Zomer 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

Hylton, Peter en Gary Kemp. „Willard Van Orman Quine". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Herfst 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

Irvine, Andrew David en Harry Deutsch. „Russell's paradox". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta. Lente 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021.

Jech, Thomas. *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*. Springer, 2003. ISBN: 3-540-63048-1.

Koellner, Peter. „The Continuum Hypothesis". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Winter 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

Kuhn, Thomas S. *The structure of scientific revolutions*. University of Chicago Press: Chicago, 1962.

Moschovakis, Joan. „Intuitionistic logic". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Zomer 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

Nida-Rümelin, Martine en Donnchadh O Conaill. „Qualia: the knowledge argument". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

Panza, Marco en Andrea Sereni. *Plato's Problem. An introduction to mathematical platonism*. Red. door Andrea Sereni en Marco Panza. New York: Palgrave-Macmillan, 2013.

Raatikainen, Panu. „Gödel's incompleteness theorems". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta. Lente 2022. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2022.

Rathjen, Michael en Wilfried Sieg. „Proof theory". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

Stang, Nicholas F. „Kant's transcendental idealism". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

Stillwell, John. *A concise history of mathematics for philosophers*. Cambridge University Press, 2019.

Tieszen, Richard L. *After Gödel. Platonism and rationalism in mathematics and logic*. Oxford, England: Oxford University Press UK, 2011. ISBN: 978–0–19–960620–7.

Waarheid. Bezocht op 9-5-2024. URL: `https://nl.wikipedia.org/wiki/Waarheid`.

Weir, Alan. „Formalism in the philosophy of mathematics". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Lente 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024.

Weyl, H. „The current epistemological situation in mathematics". In: *From Brouwer to Hilbert: the debate on the foundations of mathematics in the 1920s*. Red. door P. Mancosu. Oxford University Press, 1998, p. 123–142.

Wigner, Eugene. „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences". In: *Communications in pure and applied mathematics* 13 (1960), p. 1–9. URL: `https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wigner.pdf`.

Zach, Richard. „Hilbert's Program". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Red. door Edward N. Zalta en Uri Nodelman. Winter 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

Zach, Richard. „Hilbert's Program then and now". In: *Philosophy of Logic*. Elsevier, 2007, p. 411–447. ISBN: 9780444515414. DOI: 10.1016/b978-044451541-4/50014-2. URL: http://dx.doi.org/10.1016/B978-044451541-4/50014-2.