Inleiding in de wiskunde

Collegejaar 2017–2018
week 36–42 (2017)

VERSIE: 7 SEPTEMBER 2017

Klaas Landsman

Onderwijsinstituut voor Wiskunde, Natuurkunde, en Sterrenkunde
Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics
FNWI, Radboud Universiteit Nijmegen
Heyendaalseweg 135, 6525 AJ Nijmegen

`landsman@math.ru.nl`

- Hoorcollege: dinsdag 15:45-17:30, HG00.304, donderdag 15:45-17:30, zie rooster

- Tutorcollege: woensdag 10:45–12:30, HG00.068 + HG00.071
  Mart van den Brekel (`M.vandenBrekel@science.ru.nl`)
- Werkcollege: vrijdag 10:45–12:30, groepen:
  1. Michiel Flipsen (`michiel.f@live.nl`), HG01.029,
     vd Aa t/m Hageraats;
  2. Iris van der Giessen (`IrisvdGiessen@hotmail.nl`), HG00.633,
     Harskamp t/m Kruger;
  3. Fons van der Plas (`fonsvdplas@gmail.com`), HG03.054,
     de Kruijff t/m Roovers;
  4. Loek van Rossem (`L.vanRossem@student.ru.nl`), HG00.114,
     Rusu t/m Zwitserloot
- Tentamen: maandag 30 oktober 12:30-15:30

1

Inleiding

Wiskunde is dat wat zich 'wiskundigen' noemende mensen doen. Dat doen ze al zo'n 2500 jaar en zullen ze, zolang de mensheid bestaat, hopelijk ook blijven doen. Uit historisch onderzoek in vooral de afgelopen vijftig jaar is duidelijk geworden dat het begrip wiskunde in een periode van slechts 40 jaar is ontstaan in het Athene van de vierde eeuw v.Chr., en dan in het bijzonder in Plato's Academie.[1] Deze periode liep van ongeveer 387 v.Chr., het jaar waarin Plato zijn Academie stichtte, tot de dood van Plato op tachtigjarige leeftijd in 348 of 347.[2] In deze periode werd een praktische bezigheid die duizenden jaren eerder in de Egyptische en Babylonische beschavingen was ontwikkeld als hulpmiddel bij zaken als astronomie, landmeetkunde, handel en belastinginning omgezet in een nieuwe wetenschap met een eigen taal en methodiek. De wezenlijke kenmerken van de moderne wiskunde, namelijk haar axiomatisch-deductieve opbouw en het abstracte karakter van wiskundige objecten en structuren, dateren uit het genoemde tijdvak.[3] Euclides, Archimedes en Apollonios, van wie de werken pas in de derde eeuw v.Chr. verschenen, troffen dit raamwerk vrijwel voltooid aan en vulden het verder in.

Wiskunde heeft zo te zien iets te maken met getallen, figuren, axioma's, stellingen, en bewijzen. Bovendien maken andere vakken er gebruik van. Traditioneel was dat de sterrenkunde, vanaf de 17e eeuw ook de natuurkunde,[4] en in de 20e eeuw kwam

---

1. Zie bijvoorbeeld F. Laserre, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* (Londen, 1964), D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy* (Oxford, 1987), R. Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics* (Cambridge, 1999) en, enigszins verouderd maar nog steeds heerlijk leesbaar, *Ontwakende Wetenschap* door B.L. van der Waerden (Groningen, 1950). Het is een wijdverbreid misverstand Pythagoras een belangrijke rol in de geschiedenis van de wiskunde toe te schrijven; zie W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon* (Nürnberg, 1962). Over de wiskundige activiteiten van Thales van Milete is te weinig bekend om hem in deze context een prominente plaats te geven.
2. Naast Plato's eigen vertrek uit het leven verlieten rond die tijd ook Eudoxos (naar verluidt de grootste wiskundige van zijn tijd) en Plato's belangrijkste leerling Aristoteles (in deze geschiedenis de rol spelend van de grondlegger van de logica) Athene.
3. Ofschoon concrete wiskundige resultaten van Plato zelf niet bekend zijn, speelde hij in deze ontwikkeling vermoedelijk een beslissende rol. Ten eerste hamerde hij in zijn Academie voortdurend op het belang van de wiskunde. Dit wordt sterk gesuggereerd door dialogen als *Meno, Staat, Theaitetos, Philebos* en *Timaios* en blijkt tevens direct uit latere getuigenissen, met name van Aristoteles. Het invoeren van wiskunde in het hoger onderwijs voor de Atheense elite, dat tot dan toe voornamelijk uit lichamelijke opvoeding, muzikale scholing en retorica had bestaan, was een belangrijke vernieuwing van Plato. Het wiskundeprogramma op de Academie duurde maar liefst tien jaar. Wie dat had doorstaan kon op zijn dertigste nog eens verder met een vijfjarige studie van de 'dialectiek' (i.e. filosofie naar Socratisch model), om pas dán in de (hoogste kringen van de) samenleving terug te keren.
4. Dé doorbraak die de huidige natuurkunde mogelijk heeft gemaakt was precies de combinatie van

daar de informatica bij.[5] Inmiddels is wiskunde het onzichtbare fundament van een belangrijk deel van onze technologische infrastructuur, bijvoorbeeld:

- Dienstregeling NS (grafentheorie en combinatorische optimalisatietheorie);
- TomTom (positiebepaling m.b.v. driehoeksberekeningen vanuit gps-data, en tevens kortste-pad algoritmen voor de routebepaling met soortgelijke technieken als bij de NS);
- Elektronisch betalingsverkeer (versleuteling m.b.v. rekenkunde en algebraïsche meetkunde);
- MP3/AAC muziekspelers (datacompressie m.b.v. Fourier-analyse);
- Mobiele telefonie (stochastische netwerktheorie en alle tot nu toe genoemde technieken);
- Google (page ranking methode gebruikt lineaire algebra);
- Bank-, verzekerings-, en pensioenwezen (statistiek, analyse, wiskundig modelleren);
- Algoritmische handelssystemen op de beurs (wiskunde geheim!);
- Containertransport in de Rotterdamse haven (optimalisatie, lineair programmeren).

In de geldwereld is de rol van complexe producten het afgelopen decennium sterk toegenomen; het door zowel aanbieder als afnemer niet goed begrijpen van dergelijke producten behoort tot de onomstreden oorzaken van de kredietcrisis. Niet voor niets was het pensioenfonds APG drie jaar lang (2007–2009) hoofdsponsor van het Wiskundetoernooi! Een opvallende recente ontwikkeling is de groeiende betrokkenheid van de wiskunde ook bij de economische, juridische, sociale, en cognitiewetenschappen. Ook dit heeft uiteraard dan weer maatschappelijke consequenties: forensische statistiek is soms zelfs voorpaginanieuws (het Nederlands Forensisch Instituut was de sponsor van het Wiskundetoernooi van 2010). Meer in het algemeen blijkt wiskunde onontbeerlijk voor het begrip van complexe systemen in een maatschappij die zelf steeds ingewikkelder wordt. Zelfs ouderwets klinkende bedrijfstakken als plantenveredeling en fokkerij van dieren - die voor de BV Nederland van groot belang zijn - hebben om concurrerend te kunnen blijven tegenwoordig grote behoefte aan genetici met een wiskundige achtergrond. Er staat echter nog meer op het spel: in een dichtbevolkt land als Nederland is kennis van een wiskundig gebied als epidemiologie (zowel humaan als veterinair) letterlijk van levensbelang!

De wiskunde is weliswaar uit haar toepassingen (in de oudheid) voortgekomen, maar toch ligt het allerminst voor de hand dat wiskunde überhaupt toepassingen heeft! Bij

experiment en op wiskunde gebaseerde theorievorming, voor het eerst in primitieve vorm bij Galileo Galilei (1564–1642) en kort daarna zeer geavanceerd bij Isaac Newton (1642–1727). Zie bijvoorbeeld het klassieke werk van E.J. Dijksterhuis, *De Mechanisering van het Wereldbeeld* (Amsterdam, 1950), en meer recent Floris Cohen, *De Herschepping van de Wereld* (Bert Bakker, 2007) en Stephen Gaukroger, *The Emergence of a Scientific Culture: Science and the Shaping of Modernity 1210–1685* (Oxford University Press, 2006).

5. De uitvinder van de moderne computer, John von Neumann (1903–1957), was niet toevallig een wiskundige.

Plato was dat dan ook niet het geval. Één van Plato's belangrijkste ideeën was dat wiskundige objecten los zouden staan van de empirische werkelijkheid en dus een abstract karakter hebben.[6] Meer nog dan de bewijstheoretische aard van de wiskunde (die goed beschouwd slechts een geïdealiseerde versie van de retoriek is, een vaardigheid die in Athene van groot belang werd geacht) is het deze eigenschap van abstractie die wiskunde vleugels geeft en de ongelofelijke kracht ervan verklaart. Juist de abstractie maakt het namelijk mogelijk om hetzelfde wiskundige instrumentarium in schijnbaar totaal verschillende situaties in te zetten. Maar tegelijk is het deze abstractie van de wiskunde die het moeilijk uit te leggen maakt dat zij zo toepasbaar is! Een verwant probleem is dat van de (vermeende) *waarheid* van wiskundige uitspraken. In de werkelijkheid om ons heen lijkt niets waar, het is eigenlijk maar een rommeltje. Hoe kan deze werkelijkheid dan een exacte wiskundige beschrijving hebben? Hoe meer nadruk de waarheid van de wiskunde krijgt, hoe lastiger het is de toepasbaarheid ervan te begrijpen. Plato's leerling Aristoteles was het dan ook niet met zijn leermeester eens: waar Plato dacht dat de zintuigelijk toegankelijke wereld eigenlijk een schijnwereld is die een vertroebeld beeld geeft van een intellectueel toegankelijke perfecte wereld van wiskundige 'vormen', vond Aristoteles juist het omgekeerde: de wereld om ons heen is de echte wereld, en de wiskunde geeft daar een geïdealiseerd (en dus vertekend) beeld van.[7]

6. Plato's ontdekking van wiskundige abstractie is nauw verbonden met zijn vormenleer (oftewel ideeënleer, een minder gelukkige naam) en is daar in zekere zin ook de culminatie van, zowel in scherpte van de formulering als in de nadruk op juist de wiskundige vormen (ten koste van de ethische, waar bij Socrates de nadruk op lag) in zijn latere geschriften. Volgens deze leer zijn—ruw gezegd—zowel objecten uit de alledaagse waarneming als bepaalde ethische begrippen slechts onvolmaakte afspiegelingen van oorspronkelijke vormen die zich bevinden in een hoger domein dat als het ware achter de empirische werkelijkheid verborgen ligt. Dit domein is niet toegankelijk voor de waarneming, maar uitsluitend voor het denken. Veel wiskundigen verbinden Plato's cruciale idee van wiskundige abstractie nog steeds met diens twijfelachtige doctrine dat abstracte wiskundige objecten 'echt bestaan' in een 'hogere sfeer'. Deze combinatie is niet nodig en leidt tot aanzienlijke filosofische problemen. Plato's nauw gerelateerde inzicht dat achter de verschijnselen een fraaie wiskundige structuur schuilgaat was daarentegen een ontdekking van de eerste orde, zonder welke de latere exacte wetenschap onmogelijk of sterk vertraagd zou zijn geweest. In Plato's *Timaios* vinden we bijvoorbeeld de gedachte dat de kosmos op harmonieuze wijze is georganiseerd als een perfecte meetkundige structuur, namelijk een systeem van concentrische bollen. Ook de vijf platonische veelvlakken spelen in dit wereldbeeld een belangrijke rol als wiskundige vormen die achter de waargenomen diversiteit van materile objecten schuilgaat. Deze wiskundige perfectie is inderdaad abstract en niet zichtbaar: de verschijnselen maken eerder een rommelige dan een harmonieuze, laat staan een perfecte indruk. Hier speelde ook een rol dat hogere zaken als muziek en abstractie het domein van de gegoede burgers (zoals Plato zelf) waren, terwijl toepassingen en zo iets als werken voorbehouden waren aan slaven. De stricte scheiding tussen zuivere en toegepaste wiskunde (en meer in het algemeen tussen zuivere en toegepaste wetenschap), die veel wiskundigen (en wetenschappers) ook nu nog aanhouden, maar die in feite al lang achterhaald is, is daarmee een erfenis van de scheiding tussen burgers en slaven in Athene. Zie Donald E. Stokes, *Pasteur's Quadrant: Basic Science and Technological Innovation* (Brookings Institution Press, 1997).

7. Je vindt een soortgelijke discussie in een religieuze context: schiep God de mens naar zijn evenbeeld of schiep de mens God naar zijn evenbeeld? De zogenaamde 'Platonist' kent de wiskunde een soort goddelijke, absolute status toe, terwijl een 'Aristoteliaan' de wiskunde als een menselijke creatie ziet.

Voorlopig is het voldoende het *duale karakter* van de wiskunde te beseffen:

- zuiver én toegepast;
- zeker én benaderend (en dus onzeker);
- creatie van de menselijke geest én beschrijving van de werkelijkheid;
- constructie én ontdekking.

Ons huidige begrip van deze dualiteit is terug te voeren tot een diepgaande studie van de grondslagen van de wiskunde die rond 1900 plaatsvond.[8] Belangrijke bijdragen aan deze discussie werden geleverd door Richard Dedekind (1831–1916), Georg Cantor (1845–1918), Gottlob Frege (1848–1925), Giuseppe Peano (1858–1932), David Hilbert (1862–1943), Ernst Zermelo (1871–1953), Bertrand Russell (1872–1970), L.E.J. (Bertus) Brouwer (1881–1966), en in een later stadium ten slotte Kurt Gödel (1906–1978) en Alan Turing (1912–1954). Er zijn dus twee perioden geweest waarin intensief over de vraag naar de aard van de wiskunde is nagedacht:

1. de 4e eeuw v.Chr.;
2. een tijdvak rond 1900.[9]

Dat er door de oude Grieken goed over de wiskunde is nagedacht toen deze discipline ontstond ligt voor de hand, maar wat verklaart het ontstaan van de tweede belangrijke grondslagendiscussie in de tweede helft van de 19e eeuw? Deze discussie had een lange aanloop en had haar oorsprong in het werk van Newton in de 17e eeuw. Newton was de grootste wiskundige sinds de oudheid. Vanuit modern perspectief ontwikkelde hij—in een unificatiestap die zijn weerga in de wetenschapsgeschiedenis niet kent—naast de al bestaande meetkunde en rekenkunde (en tot op zekere hoogte algebra) een derde tak van de wiskunde, namelijk de analyse, of preciezer gezegd de voorloper daarvan, de calculus.[10] Hiermee reduceerde hij alle methoden die sinds de oudheid waren ontwikkeld voor de berekening van lengtes, oppervlakten, inhouden, snelheden, versnellingen, minima en maxima, enzovoort, tot twee operaties, namelijk

---

8. Zie voor en korte inleiding M. Giaquinto, *The Search for Certainty* (Oxford, 2002), en voor een encyclopedisch overzicht I. Grattan-Guinness, *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel* (Princeton University Press, 2000). Op de website van Desda staat een mooie film van de BBC over dit onderwerp, zie `www.desda.science.ru.nl/cgi-bin/script.pl?archief,nieuws`.

9. De precieze duur en eindpunten daarvan worden door verschillende auteurs verschillend genomen, van 50–90 jaar.

10. Uiteraard kwam deze niet uit de lucht vallen, zie bijv. R. Calinger, *A Contextual History of Mathematics* (Prentice-Hall, 1999). Sommige onderdelen van de calculus werden na Newton ook ontwikkeld door Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), die soms als mede-grondlegger van de differentiaal- en integraalrekening wordt beschouwd. Leibniz had tijdens een bezoek aan Londen echter inzage had gehad in het eerdere werk van Newton, dat pas na de dood van de laatste werd gepubliceerd, maar onder vakgenoten in Engeland al wel bekend was. In de 18e eeuw ontstond tussen Newton en Leibniz een gevecht over de prioriteit van de ontdekking van de caclulus, dat na hun dood door hun volgelingen werd voortgezet. Dit had tot gevolg dat de wiskunde zich in Engeland grotendeels onafhankelijk ontwikkelde t.o.v. het continentale Europa. De wet van de remmende voorsprong leidde uiteindelijk tot een achterstand van Engeland, temeer daar de notatie van Leibniz handiger was en zijn eerste generatie leerlingen (met name de Bernoulli familie) getalenteerder was dan de club rond Newton. Ook Leonard Euler (1707-1783), de belangrijkste wiskundige van de 18e eeuw, kwam indirect voort uit de school van Leibniz.

differentiatie en integratie,[11] die ook nog eens de inverse van elkaar zijn.

Niemand twijfelde aan de geldigheid van de stellingen van de meetkunde en de rekenkunde. Maar in de calculus gebeurden soms rare dingen. Wat betekende bijvoorbeeld de snelheid van een voorwerp op een bepaald tijdstip? In eerste instantie is snelheid een gemiddelde over een eindig tijdsinterval (zoveel kilometer per uur bijvoorbeeld), maar wat gebeurt er precies als dit tijdsinterval naar nul gaat, zoals in het werk van Newton? Dit stond in nauw verband met de status van 'infinitesimalen', de 'oneindig kleine' grootheden als dx die oorspronkelijk de basis van de calculus vormden, al schudde Newton ze (i.t.t. Leibniz) in zijn latere werk af ten gunste van meetkundig gedefinieerde limieten. Al waren er rekenregels voor, niemand begreep eigenlijk wat infinitesimalen of limieten waren. Naast limieten was Newton een fanatiek gebruiker van oneindige reeksen, waarmee hij bijvoorbeeld integralen uitrekende.[12] Dat leidde echter tot verwarring. Men kende de meetkundige reeks $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ en zag in dat dit voor kleine x een steeds betere benadering van $1/(1 - x)$ vormde. Voor $x = -1$ echter is de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, waarover de meningen verschilden. De een groepeerde de termen als $(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$ en beweerde dat er daarom 0 uit kwam. De ander schreef de reeks als $1 - (1 - 1) - (1 - 1) + \cdots$ en kreeg dus 1 als resultaat. Een derde noemde de reeks S en bewees dat $1 - S = S$, wat $S = \frac{1}{2}$ geeft, toch?

Kortom, de betrouwbaarheid van de wiskunde leek verdwenen, terwijl dat juist haar bepalende eigenschap zou moeten zijn! Daar stonden dan wel de enorme successen van Newton en zijn opvolgers tegenover. Zijn belangrijkste opvolger was Euler, die de wiskunde (en mathematische fysica) van 18e eeuw domineerde. Euler zag wel in dat er problemen waren met de calculus, en kwam daar gedeeltelijk aan tegemoet door de krommen van Newton (die in feite werkte met grafieken van functies, die hij zag als trajecten van deeltjes) te vervangen door het begrip 'functie' (zoals gebruikt op het vwo).[13] Dat deed hij in eerste instantie (in *Introductio in Analysin Infinitorum* uit 1748) door middel van een formule, meestal een (eindige of oneindige) machtreeks, zoals bij de exponentiële functie, of door een voorschrift, zoals bij de logaritme, die hij introduceerde als de inverse van de exponentiële functie (Euler suggereerde dat iedere functie als een machtreeks kan worden geschreven). Later (in *Institutiones Caculi Differentialis* uit 1755) werkte hij met functies als grootheden die van een andere grootheid afhangen.

---

11. Newton schreef optimistisch: "could this ever be done all problems whatever might be resolved."
12. We zouden nu zeggen dat hij de te integreren functie in een Taylor-reeks expandeerde en deze termsgewijs integreerde om vervolgens de som te nemen, dus $\int_0^x dy\, f(y) = \int_0^x dy \sum_k c_k y^k = \sum_k c_k \frac{1}{k+1} x^{k+1}$.
13. "The modern reader is likely to miss the import of this [first] chapter, 'On Functions in General,' for its main idea has been so totally incorporated into mathematics that we think nothing of it. This chapter is about functions. It is not about curves. This change of viewpoint represents a benchmark in the history of the calculus. Newton and Leibniz studied curves. The title of the first calculus book, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (L'Hôpital 1696), reflects this early point of view. Agnesi's book, published the same year as the *Introductio*, also studies curves." Geciteerd uit *A Readers Guide to Eulers Introductio* door V. Frederick Rickey, `www.math.usma.edu/people/Rickey/hm/Euler-Introductio.pdf`.

Maar hiermee werden de moeilijkheden met de wiskunde eigenlijk alleen nog maar erger, want alle problemen met convergentie en limieten kwamen zo met dubbele kracht terug en leidden tevens tot nieuwe vragen: is iedere functie zoals oorspronkelijk gedefinieerd door Euler (dus door een formule of voorschrift) inderdaad te schrijven als machtreeks? Is een machtreeks altijd continu?[14] Differentieerbaar? 'Glad'? Is een continue functie overal differentieerbaar behalve in eindig veel punten (denk aan een zaagtand)? Enzovoort. Bovendien voerden Euler en zijn tijdgenoten partiële differentiaalvergelijkingen in, zoals die voor de trillende snaar $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2 \partial^2 u/\partial x^2$ voor $u = u(x,t)$, waarbij allerlei nieuwe vragen en onduidelijkheden ontstonden, zoals over het bestaan en de uniciteit van de oplossing (bij gegeven randvoorwaarden) en over de mogelijkheid om willekeurige oplossingen te schrijven als machtreeksen in $\sin$ en $\cos$.[15] Men wist zich met dergelijke kwesties gewoon geen raad. Intussen bleek de analyse wel het krachtigste middel ooit om de wereld te beschrijven, en verdrong zij gaandeweg de traditionele disciplines van de wiskunde, zoals de meetkunde. Kortom, men ging onverdroten door maar maakte zich tegelijk zorgen. Deze werden versterkt doordat na de Franse Revolutie de gewoonte ontstond om analyse op universiteiten te onderwijzen,[16] zodat een stevige grondslag noodzakelijk was van het soort die de studenten uit de meetkunde gewend waren.[17]

---

14. Het huidige begrip van continuïteit stamt uit de 19e eeuw en bestond in de tijd van Euler dus nog niet. Voor Euler was een functie continu als deze functie over haar hele domein door hetzelfde 'voorschrift' wordt gegeven. Veel van zijn tijdgenoten dachten bij continuïteit eerder aan de grafiek van de functie, die bij Euler een ondergeschikte rol speelde. Deze twee begrippen zijn niet hetzelfde. De functie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x$ voor $x \geq 0$ en $f(x) = -x$ voor $x < 0$, oftewel $f(x) = |x|$, was voor Euler discontinu, terwijl de grafiek wel degelijke continu is. Ook naar de moderne definitie is deze functie continu. De stapfunctie daarentegen (i.e. $\theta(x) = 1$ voor $x \geq 0$ en $\theta(x) = 0$ voor $x < 0$) was voor iedereen discontinu.

15. De vergelijking voor de trillende snaar heeft als algemene oplossing $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, waar f en g 'willekeurige' functies zijn. Uit niets volgt dat f en g machtreeksen zijn, zoals in eerste instantie gedacht door Euler. Als de eindpunten van de snaar vastzitten, geldt $u(0,t) = u(L,t) = 0$ voor alle t, waarbij L de lengte van de snaar is. Hieruit volgt dat $g(y) = -f(-y)$, en dat $f(y+2L) = f(y)$, m.a.w., f is periodiek met periode $2L$. Als wiskundige zeg je nu dat iedere functie van de vorm $f(y) = A_n \sin(n\pi y/L) + B_n \cos(n\pi y/L)$ een oplossing geeft, voor willekeurige constanten A_n en B_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Als fysicus verwacht je dat iedere beginconfiguratie $u(x,0) \equiv u_0(x)$ op tijdstip $t = 0$ na loslaten van de snaar een unieke beweging geeft. Als mathematisch fysicus—en dat was vrijwel iedere wiskundige in de 17e en 18e eeuw—concludeer je dan dat je een 'willekeurige' functie u_0 op het interval $[0, L]$ die voldoet aan $u_0(0) = u_0(L) = 0$ kennelijk kunt schrijven als $u_0(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi y/L)$. Deze stap was het begin van wat later Fourier-analyse zou heten; het is duidelijk dat deze redenering talloze vragen over de analyse oproept, zoals de convergentie van de reeks en de eventuele continuïteit van de som (als deze bestaat).

16. Tot aan de Franse Revolutie waren vooraanstaande wiskundigen i.h.a. verbonden aan koninklijke academies of hoven (m.u.v. Newton, die aan de Universiteit van Cambridge werkte). Zij gaven daar hoogstens onderwijs aan een kleine elite. Op de universiteiten onderwezen destijds tweederangs figuren totaal verouderde kennis (met uitzondering van filosofie en geneeskunde).

17. Op de middelbare scholen werd destijds als wiskunde uitsluitend Euclidische meetkunde onderwezen, meestal uit de *Elementen* van Euclides zelf. In Nederland bestond het wiskundeonderwijs tot 1960 uit Euclidische meetkunde, rekenen,goniometrie, trigonometrie, en enige algebra. De analyse wordt dus pas sinds 1961 op scholen onderwezen, bijna drie eeuwen na haar ontstaan.

Zoals je in het college Analyse zult leren werden de problemen met dit vak opgelost door een goede grondslag.[18] Deze kwam voort uit het werk van Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Peter Lejeune Dirichlet (1805–1859), Karl Weierstrass (1815–1897), Eduard Heine (1821–1881), Bernhard Riemann (1826–1866), de al genoemde Cantor, Dedekind, Hilbert, von Neumann, en anderen. Zo gaan onze definities van convergentie en continuïteit terug tot Cauchy (waarna ze door Weierstrass werden geperfectioneerd), gaf Dirichlet de moderne definitie van een functie (als een toekenning van een element van een bepaalde verzameling aan een willekeurige element van een andere gegeven verzameling), definieerde Riemann de naar hem genoemde integraal, construeerden Cantor, Heine, en Dedekind op verschillende wijze de reële getallen (de eerste twee als limieten van Cauchy-rijen, de laatste als de naar hem genoemde sneden),[19] en gaf Hilbert de moderne abstracte definitie van $\mathbb{R}$ (als een volledig geordend en compleet lichaam), waar de constructies van Dedekind en Cantor–Heine voorbeelden van waren. Eind 19e eeuw gold dan ook niet meer de meetkunde maar de analyse als het summum van wiskundige gestrengheid. Vrijwel alle colleges Analyse in de wereld verlopen sindsdien op dezelfde manier: definitie van $\mathbb{R}$, limieten, convergentie, continuïteit, differentiatie, integratie, . . . Er gebeuren nog steeds vreemde dingen, zoals het bestaan van een continue functie die nergens differentieerbaar is, of een functie die niet integreerbaar is, maar, hoe contraintuïtief ook, kan dat blijkbaar allemaal volgens de definities.

Dit had tot gevolg dat de analyse net als de Euclidische meetkunde op axiomatische grondslag werd gevest. Daardoor werd de analyse een formele aangelegenheid, waarbij aanschouwelijkheid, intuïtie en toepassingen steeds minder belangrijk wer-

---

18. Voor een bondig overzicht daarvan zie bijvoorbeeld Victor J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Addison Wesley Longman, 1998). Uitvoeriger is H.N. Jahnke (Ed.), *A History of Analysis* (American Mathematical Society, 2003).

19. De constructie van Heine en Cantor wordt behandeld in het college *Getallen*, maar voor de zekerheid: een rij (a_n) in $\mathbb{Q}$ heet een *Cauchy-rij* als er bij iedere $\varepsilon > 0$ (met $\varepsilon \in \mathbb{Q}$) een $N \in \mathbb{N}$ is zodat voor alle $m, n > N$ geldt $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Twee Cauchy-rijen (a_n) en (b_n) heten *equivalent* als $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$, met andere woorden, er is bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ is zodat $|a_n - b_n| < \varepsilon$ voor alle $n > N$. Een reëel getal is ten slotte een equivalentieklasse van Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$. De door Simon Stevin (1548–1620) in 1585 ingevoerde decimaalexpansie van een reëel getal kan worden gezien als een Cauchy-rij: bijvoorbeeld π is (de equivalentieklasse van) de Cauchy-rij $3, 3.1, 3.14, 3.141, \ldots$. Soortgelijke constructies verschenen tussen 1870 en 1880 tevens van Méray, Weierstrass, en Thomae. Een meer symmetrische maar equivalente definitie volgens ditzelfde idee werd later gegeven door Brouwer, als volgt.
We noemen een rij $([a_n, b_n])$ van gesloten intervallen in $\mathbb{Q}$ een *Brouwer-rij* als $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ en $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$. We verklaren twee Brouwer-rijen $([a_n, b_n])$ en $([a'_n, b'_n])$ equivalent als $\lim_{n\to\infty} |a_n - a'_n| = 0$ of $\lim_{n\to\infty} |b_n - b'_n| = 0$ (deze condities zijn equivalent voor Brouwer-rijen). Een reëel getal is dan een equivalentieklasse van Brouwer-rijen. Het idee is dat $[a_n, b_n]$ voor toenemende n steeds betere informatie verschaft over het gezochte reële getal. Zo kan π worden voorgesteld door de Brouwer-rij $[3, 4], [3.1, 3.2], [3.14, 3.15], [3.141, 3.142], \ldots$.
Een *Dedekind-snede* is een paar (L, U) met $L \subset \mathbb{Q}$, $U \subset \mathbb{Q}$, $L \cup U = \mathbb{Q}$, $L \cap U = \emptyset$, en $l < u$ voor alle $l \in L$ en $u \in U$. Als L een bovengrens b (in $\mathbb{Q}$) heeft, of U een ondergrens o, dan staat (L, U) voor het getal b resp. o in $\mathbb{Q}$, nu gezien als deelverzameling van de de verzameling $\mathbb{R}$ van alle Dedekind-sneden. Als dit echter niet het geval is, is de snede (L, U) een irrationeel getal in $\mathbb{R}$. We kunnen π bijvoorbeeld identificeren met de snede (L, U) waarbij L bestaat uit alle $q \in \mathbb{Q}$ zodat $q < a_n$ voor zekere n, terwijl U bestaat uit alle $r \in \mathbb{Q}$ zodat $r > b_n$ voor een bepaalde, met $(a_n) = 3, 3.1, 3.14, 3.141, \ldots$ en $(b_n) = 4, 3.2, 3.15, 1.142, \ldots$.

den. Een soortgelijke trend speelde zich in andere gebieden van de wiskunde af. Zelfs de Euclidische meetkunde bleek niet perfect. Sommige definities (bijvoorbeeld van een punt) waren onduidelijk en bepaalde bewijzen waren niet strict deductief vanuit de axioma's (maar gebruikten intuïtie of waren zelfs ronduit onvolledig). Dit leidde tot een nieuwe axiomatisering van de meetkunde door Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1899), waarin aanschouwelijkheid geen enkele rol meer speelt. Nog belangrijker dan Hilberts verbeterde axioma's en bewijzen was daarbij zijn eis dat begrippen als 'punt, lijn, en vlak' slechts een notatie zijn en net zo goed vervangen kunnen worden door 'liefde, wet, en schoorsteenveger', zolang ze maar worden gebruikt zoals de axioma's voorschrijven.[20] Ook de meetkunde werd dus geformaliseerd. Ten slotte ontstonden nieuwe, realiteitsvreemde gebieden als algebraïsche rekenkunde, projectieve meetkunde, lineaire algebra, algebraïsche logica, en differentiaalmeetkunde (met name in willekeurige dimensies), waarvan de mogelijke toepassingen in ieder geval op dat moment ver te zoeken waren.[21]

In de 19e eeuw vond aldus een ontwikkeling plaats die het aangezicht van de wiskunde voor altijd zou veranderen. Van Aristoteles en Euclides tot en met Newton en Euler ging de wiskunde, ondanks haar abstractie, over de werkelijkheid en was zij 'waar'. De Euclidische meetkunde beschreef de ruimte om ons heen, getallen kom je overal tegen, en de analyse beschreef de natuur(kunde) of was tenminste concreet. Nu, in de 21e eeuw (en gedurende het grootste deel van de 20e eeuw) zou niemand het in zijn hoofd halen om in het bos naar een 10-dimensionale vector-ruimte of een C*-algebra te zoeken. De wiskunde is *autonoom* geworden, en deze stap naar zelfstandigheid werd gezet in de 19e eeuw.[22]

De conclusie is dat wiskunde twee verschillende kanten heeft, die samen het vak vormen. De ene kant heet *syntax*: dit is een puur symbolische kant, die met een spel als schaken te vergelijken is. Wiskundige uitspraken zijn dan bepaalde welgedefinieerde

---

20. Zo schreef Hilbert op 29-12-1899 aan Frege: *"Ich will nichts als bekannt voraussetzen (...) Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ..., denke und dann meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras, auch von diesen Dingen."* Dit was een reactie op een eerdere brief van Frege, waarin deze ten onrechte opmerkt dat Hilbert begrippen als punt en lijn bekend veronderstelt, zodat hij het (in tegenstelling tot Euclides) niet nodig vond om ze expliciet te definiëren. Hilbert zegt daarover zelfs: *"Hier liegt wohl der Cardinalpunkt des Misverständnisses."* Voor de Nederlandse lezer: het kardinale misverstand bij Frege (overigens niet de minste), dat helaas nog steeds leeft bij de medewerkers van het Freudenthal-Instituut in Utrecht die in de jaren '80 het zgn. 'realistische' wiskundeonderwijs in Nederland hebben ingevoerd (later 'contextrijk' geheten), is dat wiskunde noodzakelijkerwijs aan de werkelijkheid gerelateerd moet worden en dat alle symbolen en constructies dus ook echt bestaan. Het tegendeel is waar: op het niveau waarop de wiskunde zekere resultaten geeft betekenen de symbolen juist helemaal niets, zoals Hilbert (maar voor hem al George Boole en Federigo Enriques) zeer scherp inzag.

21. Later kwamen er volkomen onverwachte toepassingen van bijvoorbeeld de differentiaalmeetkunde in de Algemene Relativiteitstheorie van Einstein (1915) en de van de lineaire algebra in oneindige dimensie (i.e. functionaalanalyse) in de kwantummechanica (1930). Zulke toepassingen zouden onmogelijk zijn zonder het abstracte karakter van de moderne wiskunde.

22. Zie J. Gray, *Plato's Ghost: The modernist Transformation of Mathematics* (Princeton University Press, 2008).

combinaties van symbolen; we zullen later precies zijn hoe dat werkt. Een voorbeeld is $2 + 2 = 5$ (terwijl $2 + 2 =$ geen uitspraak is). Deze symbolen betekenen in eerste instantie niets, hoewel het handig kan zijn als je er een bepaalde voorstelling bij hebt (zoals bij het symbool P voor punt, L voor lijn, en V voor vlak in de Euclidische meetkunde). Dan zijn er definities en axioma's die de symbolen aan elkaar relateren (er is geen stricte scheiding tussen definities en axioma's). Stellingen zijn uitspraken die je volgens bepaalde logische regels (die zelf eigenlijk ook weer keuzes zijn: er bestaan verschillende logische systemen om wiskunde te doen) uit de axioma's en definities af kunt leiden, zoals $2 + 2 = 4$. Zulke stellingen zeggen (nog) niets over de werkelijkheid.

Het schaakspel geeft hier een nuttige analogie. Bord en stukken staan dan voor wiskundige symbolen, definities voor de loop der stukken, axioma's voor de beginstand, en algemene logische regels voor de spelregels. Een wiskundige uitspraak is analoog aan een stand, in de zin van een willekeurige configuratie van de schaakstukken op het bord. Een wiskundige stelling is een uitspraak die kan worden bewezen; zo is een schaakstelling een stand die volgens de regels uit de beginstand kan ontstaan.

De tweede kant van de wiskunde heet *semantiek*: hierbij wordt de syntax op de een of andere manier geïnterpreteerd.[23] Je kunt de symbolen P, L, en V uit de abstracte Euclidische meetkunde bijvoorbeeld interpreteren als punten, lijnen en vlakken in de natuurlijke zin. Hierbij ga je er vanuit dat deze laatste ook echt bestaan. Zo'n interpretatie is zinvol als de 'echte' punten, lijnen en vlakken aan precies dezelfde axioma's voldoen als de abstracte. Vaak is dat maar bij benadering het geval. De stellingen op syntactisch niveau erven de interpretatie van de symbolen en zeggen dan iets over de werkelijkheid. Maar wat ze zeggen is meestal slechts een benadering, omdat de interpretatie zelf al slechts een benadering was. Dit is precies wat Albert Einstein uitdrukt met de volgende beroemde woorden:

> "Voor zover de conclusies van de wiskunde met de werkelijkheid te maken hebben zijn ze niet zeker, en voor zover ze zeker zijn verwijzen ze niet naar de werkelijkheid."

Het college *Inleiding in de wiskunde* is een eerste kennismaking met de (logische) taal van de wiskunde. Je leert deze taal in de meeste vakken gebruiken, en het tweedejaars college *Logica* gaat dieper op deze taal in (en wie dan nog geen genoeg heeft van de formele kant van de wiskunde kan in de master een vak als *Axiomatische Verzamelingenleer* volgen). Net als bij het leren van een natuurlijke taal geven we dus niet eerste alle regels en gaan dan pas praten; het praten en de regels gaan hand in hand, en ieder jaar kom je weer een stukje verder (dit proces gaat eigenlijk je hele wiskundige leven door).

Veel plezier!

23. Logici bedoelen met semantiek meestal de interpretatie van een of andere syntactische theorie in de verzamelingenleer; we gebruiken de term hier veel breder.

2
Propositielogica

> *"They who are acquainted with the present state of the theory of Symbolic Algebra, are aware of the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination."*
>
> (George Boole, *Mathematical Analysis of Logic*, Preface)

De eerste stap in de axiomatische opbouw van welk gebied van de wiskunde ook is de ontwikkeling van een geschikte *logische taal*. Dat is op vele manieren geprobeerd, en we volgen in dit college de *mainstream*: eerste-orde logica (oorspronkelijk ontwikkeld door Frege en anderen, en later door Hilbert en zijn leerlingen gekozen als de basis van de wiskunde). Die zou in principe direct in volle glorie ingevoerd kunnen worden, maar uit didactische overwegingen bespreken we in dit hoofdstuk eerst een op zichzelf staand fragment daarvan, de *propositielogica*. Net als bij alle andere vormen van logica is het bij de propositielogica de bedoeling om aan te geven wat:

- de notatie is (i.e. welke symbolen in de taal voorkomen);
- de regels zijn om welgedefiniëerde *formules* (wff's) en vervolgens *uitspraken* samen te stellen; in de propositielogica vallen deze samen (in eerste-orde logica zijn uitspraken speciale formules).
- de axioma's zijn (die als uitgangsspunten van bewijzen dienen);
- de deductieregels zijn (die formuleren hoe een correct bewijs verloopt);
- de regels zijn die bepalen of een bepaalde uitspraak (on)waar is.

De eerste vier punten heten de *syntax* en het laatste heet de *semantiek* van de axiomatisering. We maken hier dus al een principieel verschil tussen *bewijsbaarheid* en *waarheid*. Het eerste is een puur syntactisch begrip, te vergelijken met het correct volgen van de regels van het schaakspel om zo een partij te spelen. Het tweede heeft te maken met de interpretatie van het formalisme in de werkelijkheid. In de wiskunde van Euclides tot ongeveer 1900 werd dit verschil (behalve wellicht door enige logici) niet gemaakt en werd ook gedacht dat de begrippen waarheid en bewijsbaarheid hetzelfde waren.

We zullen zien dat de waarheid van een uitspraak geen absoluut begrip is, maar is gedefinieerd ten opzichte van een bepaalde interpretatie van de uitspraak. In de propositielogica is een dergelijke interpretatie zeer eenvoudig, in de eerste-orde logica wordt het al ingewikkelder. Een uitspraak in de propositielogica die onder alle interpretaties waar is heet een *tautologie* (en omgekeerd heet een uitspraak die onder alle interpretaties onwaar is een *contradictie*). Een uitspraak heet een *stelling* of heet *bewijsbaar* als deze in een eindig aantal stappen uit axioma's kan worden afgeleid met behulp van bepaalde deductieregels. Een tautologie is dus totaal anders gedefinieerd dan een stelling, en toch zullen we zien dat een uitspraak een tautologie is desda zij bewijsbaar is (het eerste diepe resultaat in dit college!).

2.1 Notatie

De *notatie* van de propositielogica bestaat uit twee groepen symbolen:

1. De *zuiver logische symbolen* zijn $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, en $\perp$. Dit zijn de bekende afkortingen voor resp. *niet, en, of, impliceert* en *falso*, de altijd onware propositie. Maar let op! De hier gegeven betekenis van de zuiver logische symbolen is in principe niet nodig, omdat deze *betekenis* volgt uit de later op te stellen regels voor het *gebruik* van de symbolen.
2. De *niet-logische symbolen* van een theorie in de propositielogica zijn vastgelegd in een lijst of alfabet $S = \{p_1, p_2, \ldots\}$, ook wel geschreven als $\{p, q, r, \ldots\}$. Deze symbolen staan voor *atomaire* of *elementaire* proposities, die het eenvoudigste voorbeeld zijn van uitspraken (zie volgende punt). Formeel is deze lijst S een aftelbare verzameling, maar dat begrip moeten we nog officieel definiëren. Op dit moment is het slechts belangrijk dat we willekeurig veel atomaire proposities tot onze beschikking hebben (al wordt de lijst S soms ook eindig genomen). Syntactisch zijn de p_i slechts symbolen. Semantisch kun je ze binnen of buiten de wiskunde interpreteren zoals je wilt, zoals bijvoorbeeld: p_1 betekent "$7+5 = 12$" en p_2 staat voor "het regent" (en het is november).
3. We gebruiken ook haakjes (,). Deze zijn soms (maar niet altijd!) overbodig als we afspreken dat:
   - $\neg$ sterker bindt dan $\vee$ en $\wedge$;
   - $\vee$ en $\wedge$ op hun beurt weer sterker binden dan $\rightarrow$.

Voorbeeld: $p_1 \rightarrow p_2 \vee p_3$ is hetzelfde als $p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3)$, maar in $(p_1 \rightarrow p_2) \vee p_3$ zijn de haakjes noodzakelijk! De *uitspraken* of wff's (i.e. welgedefiniëerde formules) van de propositielogica, genaamd $\alpha, \beta, \ldots$, of φ, ψ etc., zijn alle uitdrukkingen in de bovenstaande symbolen die als volgt tot stand komen:

i) Ieder niet-logisch symbool $p \in S$ is een uitspraak, evenals $\perp$.

ii) Als α een uitspraak is, dan is $\neg\alpha$ dat ook;

iii) Als α en β uitspraken zijn, dan zijn $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, en $\alpha \rightarrow \beta$ dat ook.

Dit is een *iteratief* voorschrift: als je regel **ii)** toepast op regel **i)** kom je bijvoorbeeld op $\alpha = \neg p_1$, en dan kun je volgens **iii)** met zeg $\beta = p_4$ maken: $\alpha \to \beta$, oftewel $\neg p_1 \to p_4$. En daaruit kun je bijvoorbeeld weer maken $(\neg p_1 \to p_4) \vee p_2$, enzovoort. Let op: we gebruiken het (niet-logische) symbool $=$ hier informeel om een uitspraak een naam te geven. De notatie $\alpha = \neg p_1$ betekent dus: de uitdrukking $\neg p_1$ heet α, of wordt afgekort als α. Als logisch symbool treedt = pas op in de eerste-orde logica.

We noteren de (aftelbare) verzameling uitspraken (i.e. wff's) over een alfabet S als $U(S)$; ook hier gebruiken we het begrip 'verzameling' nog informeel (denk gewoon aan een lijst). Iets geavanceerder kunnen we $U(S)$ definiëren als de kleinste verzameling met de volgende eigenschappen:

1. $U(S)$ bevat alle atomaire proposities $p_i \in S$ (oftewel: $S \subset U(S)$);
2. $\perp \in U(S)$;
3. Als $\alpha \in U(S)$, dan $\neg\alpha \in U(S)$;
4. Als $\alpha \in U(S)$ en $\beta \in U(S)$, dan $\alpha \wedge \beta \in U(S)$, $\alpha \vee \beta \in U(S)$, en $\alpha \to \beta \in U(S)$.

We zullen verzamelingstheoretische symbolen als $\subset$ later invoeren; $S \subset U(S)$ staat voor: als $p \in S$, dan $p \in U(S)$. Let op! Dit is een implicatie buiten de syntax van de propositielogica, zodat we deze iets formeler niet schrijven als $p \in S \to p \in U(S)$ maar als $p \in S \Rightarrow p \in U(S)$. Eigenschap 3 kan evenzo worden geschreven als: $\alpha \in U(S) \Rightarrow \neg\alpha \in U(S)$, enzovoort. De logische regels voor het gebruik van $\Rightarrow$ zijn wel hetzelfde als voor $\to$ (die regels moeten we uiteraard nog geven!). Officieel zeggen we dat $\Rightarrow$ een symbool in de *metataal* is, dat is de taal waarmee we over de propositielogica praten (die zelf dus ook haar eigen taal heeft, die we nu aan het ontwikkelen zijn). Onze metataal is een combinatie van natuurlijke taal en af en toe een symbool als $\Rightarrow$. Ook de metataal kan volledig geformaliseerd worden, met als onderliggende logica propositielogica (dit kan zonder in een vicieuze cirkel te geraken), maar dat gebeurt zelfs niet in het vak *Logica*. Als je dit wel doet, krijg je zo iets als het volgende bewijs van de uitspraak $1 + 1 = 2$ uit *Principia Mathematica* van Russel & Whitehead (uit 1913), die zij noteren als:

$*\mathbf{54}\cdot\mathbf{43}.\ \vdash\colon .\alpha, \beta \in 1.\ \supset\colon \alpha \cap \beta = \Lambda.\ \equiv .\alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash .*54\cdot 26.\ \supset\vdash\colon .\alpha = \iota'x.\beta = \iota'y.\ \supset\colon \alpha \cup \beta \in 2.\ \equiv .x \neq y. & \\
\quad [*51\cdot 231] & \equiv .\iota'x \cap \iota'y = \Lambda. \\
\quad [*13\cdot 12] & \equiv .\alpha \cap \beta = \Lambda \\
\quad \vdash .(1).*11\cdot 11\cdot 35.\ \supset & \\
\qquad \vdash\colon .(\exists x, y).\alpha = \iota'x.\beta = \iota'y.\ \supset\colon \alpha \cup \beta \in 2.\ \equiv .\alpha \cap \beta = \Lambda & \\
\vdash .(2).*11\cdot 54.*52\cdot 1.\ \supset\vdash .Prop &
\end{array}
$$

2.2 Semantiek en waarheid

We onderbreken nu de opbouw van de syntax en gaan verder met de *semantiek* van de propositielogica (die namelijk straks de regels voor het bewijzen op puur syntactisch niveau zal motiveren). De semantiek van de propositielogica is extreem simpel: het maakt niet uit wat iedere atomaire propositie p_i betekent, het maakt alleen uit of deze waar is (of niet). Of dit zo is hangt af van de betekenis van p_i en van de toestand in de wereld (of in de wiskunde), en deze laatste geven we aan met v. Als p_i (met een bepaalde betekenis) waar is in de toestand v, noteren we $v(p_i) = 1$, en als p_i onwaar is schrijven we $v(p_i) = 0$. Als p_i dus staat voor "het regent" en het regent in toestand v, dan geldt $v(p_i) = 1$. Als p_j staat voor "$2 + 2 = 5$" en v volgt de gebruikelijke regels van de wiskunde, dan geldt $v(p_j) = 0$. Zodra we dus weten wat iedere $p_i \in S$ betekent en tevens de toestand v kennen, hebben we een afbeelding

$$v : S \to \{0, 1\}, \tag{2.1}$$

genaamd een *valuatie* op S. Als zuiver wiskundigen kunnen we gewoon uitgaan van zo'n v zonder te denken aan betekenissen en toestanden. We zullen de notatie in (2.1) later uitvoerig definiëren (het gaat hier om een functie), maar denk nu eenvoudig aan een lijst waarden $\{v(p_1), v(p_2), \ldots\}$. De notatie $\to$ in (2.1) is hoogst ongelukkig, omdat dit symbool al binnen de propositielogica was gedefinieerd, maar het is niet anders: de implicatie in logica wordt altijd als $\to$ genoteerd, en een functie altijd wordt geschreven als $f : X \to Y$, en dat terwijl deze twee pijlen niets met elkaar te maken hebben. Sorry! Het punt nu is dat, gegeven v, ook de (on)waarheid van een willekeurige uitspraak $\alpha \in U(S)$ volgt. Het allereenvoudigste voorbeeld is: als $v(p_i) = 0$, dan is $v(\neg p_i) = 1$, en omgekeerd: als p_i niet waar is, dat is niet-p_i waar. Een ander voorbeeld is: als $v(p_1) = 0$ en $v(p_2) = 1$, dan is $v(p_1 \vee p_2) = 1$, maar $v(p_1 \wedge p_2) = 0$. Alle mogelijkheden staan in de volgende *waarheidstabellen* (de kolom onder $\leftrightarrow$ komt later aan bod):

$\perp$
0

	$\neg$
0	1
1	0

		$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\leftrightarrow$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Deze tabellen worden als volgt gebruikt (waar α en β willekeurige uitspraken zijn):

- Voor iedere valuatie v geldt $v(\perp) = 0$.
- Als $v(\alpha) = 0$, dan $v(\neg\alpha) = 1$ en als $v(\alpha) = 1$, dan $v(\neg\alpha) = 0$.
- Als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \wedge \beta) = 0$; als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 1$, dan $v(\alpha \wedge \beta) = 0$,
  als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \wedge \beta) = 0$, als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 1$, dan $v(\alpha \wedge \beta) = 1$.
- Als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \vee \beta) = 0$, als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 1$, dan $v(\alpha \vee \beta) = 1$,
  als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \vee \beta) = 1$, als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 1$, dan

$v(\alpha \vee \beta) = 1$.

- Als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 1$, dan $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$,
  als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \rightarrow \beta) = 0$, als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 1$, dan $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$.
- Als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$, als $v(\alpha) = 0$ en $v(\beta) = 1$, dan $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 0$,
  als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 0$, dan $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 0$, als $v(\alpha) = 1$ en $v(\beta) = 1$, dan $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$.

We kunnen dit ook een tikje anders (en handiger) opschrijven: tot nu toe waren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, and $\rightarrow$ bedoeld om uitspraken α en β aan elkaar te plakken. Nu gebruiken we dezelfde symbolen om de getallen 0 en 1 aan elkaar te plakken, volgens de regels die uit de waarheidstabellen afgelezen kunnen worden, dus

$$\neg 0 = 1; \quad \neg 1 = 0; \tag{2.2}$$
$$0 \wedge 0 = 0; \quad 0 \wedge 1 = 0; \quad 1 \wedge 0 = 0; \quad 1 \wedge 1 = 1; \tag{2.3}$$
$$0 \vee 0 = 0; \quad 0 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 0 = 1; \quad 1 \vee 1 = 1; \tag{2.4}$$
$$0 \rightarrow 0 = 1; \quad 0 \rightarrow 1 = 1; \quad 1 \rightarrow 0 = 0; \quad 1 \rightarrow 1 = 1. \tag{2.5}$$

Nu kunnen we voor iedere uitspraak φ de waarde $v(\varphi)$ uitrekenen door de volgende regels toe te passen:

$$v(\bot) = 0; \tag{2.6}$$
$$v(\neg\alpha) = \neg v(\alpha); \tag{2.7}$$
$$v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta); \tag{2.8}$$
$$v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta); \tag{2.9}$$
$$v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha) \rightarrow v(\beta). \tag{2.10}$$

Een paar voorbeelden illustreren wat hier wordt bedoeld en hoe je moet rekenen. Stel $\varphi = \neg p_1 \vee p_2$. Dan:

$$v(\varphi) = v(\neg p_1 \vee p_2) = v(\neg p_1) \vee v(p_2) = \neg v(p_1) \vee v(p_2). \tag{2.11}$$

Stel nu dat $v(p_1) = 1$ en $v(p_2) = 0$. Uit (2.7) volgt $\neg v(p_1) = 0$ en in (2.4) staat $0 \vee 0 = 0$, zodat $v(\varphi) = 0$. Met $v(p_1) = 0$ en $v(p_2) = 0$ komt er echter $v(\varphi) = 1$ (ga na). Nu geven we een voorbeeld waarin slechts de implicatie $\rightarrow$ voorkomt. We willen weten of de uitspraak

$$\psi = (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)) \tag{2.12}$$

waar is, gegeven bepaalde $v(p_1)$, $v(p_2)$, en $v(p_3)$; ga na dat de uitspraak (2.12) volgens de drie regels **i)**, **ii)**, en **iii)** boven kan worden gemaakt! Net als boven vinden we:

$$\begin{aligned}
v(\psi) &= v((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))) && (2.13)\\
&= v(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow v((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)) && (2.14)\\
&= (v(p_1) \rightarrow v(p_2 \rightarrow p_3))) \rightarrow (v(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow v(p_1 \rightarrow p_3)) && (2.15)\\
&= (v(p_1) \rightarrow (v(p_2) \rightarrow v(p_3))) \rightarrow ((v(p_1) \rightarrow v(p_2)) \rightarrow (v(p_1) \rightarrow v(p_3))). && (2.16)
\end{aligned}$$

Stel nu dat $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, en $v(p_3) = 1$. Dan volgt uit (2.5):

$$v(p_2) \to v(p_3) = 1; \tag{2.17}$$
$$v(p_1) \to v(p_2) = 0 \tag{2.18}$$
$$v(p_1) \to v(p_3) = 1. \tag{2.19}$$

Dit geeft
$$v(\psi) = (1 \to 1) \to (0 \to 1) = 1 \to 1 = 1. \tag{2.20}$$

Formeel kunnen we dit soort berekeningen als volgt samenvatten:

Stelling 2.1 *Iedere functie $v : S \to \{0, 1\}$ kan uniek worden uitgebreid tot een functie $v : U(S) \to \{0, 1\}$ die voldoet aan* (2.6) *t/m* (2.10)*.*

Het bewijs van deze stelling volgt formeel door inductie op het aantal symbolen in een uitspraak $\psi \in U(S)$, maar omdat we deze techniek nog niet behandeld hebben is het voldoende om het idee te schetsen: voor iedere $\psi \in U(S)$ bereken je $v(\psi)$ juist uit de eigenschappen (2.6) t/m (2.10) die hier vereist worden, en dat geeft een welgedefinieerd en uniek antwoord.

Met (2.12) is iets bijzonders aan de hand, dat niet voor iedere uitspraak geldt: de uitspraak ψ in (2.12) is *altijd* waar (i.e., voor alle keuzes van $v(p_1)$, $v(p_2)$, en $v(p_3)$)! Dit kun je eenvoudig zelf nagaan. Sterker nog, als $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ willekeurige uitspraken zijn (dus niet noodzakelijk atomaire proposities), dan is ook

$$\psi' = (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_3)) \to ((\alpha_1 \to \alpha_2) \to (\alpha_1 \to \alpha_3)) \tag{2.21}$$

altijd waar. Ook dit volgt weer op dezelfde manier, waarbij je in de bovenstaande afleiding $v(p_i)$ steeds vervangt door $v(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$. Voor dergelijke bijzondere uitspraken bestaat een aparte naam:

Definitie 2.1 *Een uitspraak φ die voor alle mogelijke valuaties v aan de atomaire proposities $p_1, p_2, \ldots$ die er in voorkomen waar is, heet een* tautologie*, notatie:* $\vDash \varphi$*. Omgekeerd heet een uitspraak die voor alle valuaties v onwaar is een* contradictie*.*

Zo is $\alpha \to \alpha$ een tautologie, hoe α ook is opgebouwd uit de $p_1, p_2, \ldots$. Dit volgt direct uit (2.5), want
$$v(\alpha \to \alpha) = v(\alpha) \to v(\alpha) = 1, \tag{2.22}$$
aangezien $v(\alpha) = 0$ of $v(\alpha) = 1$ en zowel $0 \to 0 = 1$ als $1 \to 1 = 1$. Contradicties geven niets nieuws, want een uitspraak α is een contradictie desda de negatie $\neg\alpha$ een tautologie is (en omgekeerd, zoals volgt uit (2.31) onder: α is een tautologie desda de negatie $\neg\alpha$ een contradictie is). We krijgen heel veel tautologieën als we een nieuw logisch symbool $\leftrightarrow$ invoeren door $\alpha \leftrightarrow \beta$ te definiëren als afkorting voor

$$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha). \tag{2.23}$$

De al eerder opgeschreven waarheidstabel voor $\leftrightarrow$ is makkelijk na te rekenen (opgave), bijvoorbeeld:

$$0 \leftrightarrow 0 = (0 \to 0) \wedge (0 \to 0) = 0 \wedge 0 = 1. \tag{2.24}$$

Hier is alvast een flink aantal tautologieën, waarvan die met $\leftrightarrow$ uiteraard ook waar zijn met $\to$ in plaats van $\leftrightarrow$, en bovendien met $\leftarrow$ in plaats van $\leftrightarrow$, in de zin dat $\alpha \leftarrow \beta$ hetzelfde betekent als $\beta \to \alpha$.

$$\models \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \to \neg\beta); \tag{2.25}$$
$$\models \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta); \tag{2.26}$$
$$\models \alpha \vee \beta \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta); \tag{2.27}$$
$$\models \alpha \vee \beta \leftrightarrow \neg\alpha \to \beta; \tag{2.28}$$
$$\models \alpha \to \beta \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta; \tag{2.29}$$
$$\models \alpha \to \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta); \tag{2.30}$$
$$\models \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha; \tag{2.31}$$
$$\models \alpha \vee (\neg\alpha); \tag{2.32}$$
$$\models (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha); \tag{2.33}$$
$$\models \neg\alpha \to (\alpha \to \beta); \tag{2.34}$$
$$\models \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)); \tag{2.35}$$
$$\models (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta); \tag{2.36}$$
$$\models \beta \to (\alpha \to \beta); \tag{2.37}$$
$$\models (\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta)); \tag{2.38}$$
$$\models (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha); \tag{2.39}$$
$$\models (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta; \tag{2.40}$$
$$\models \neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \to \bot); \tag{2.41}$$
$$\models \alpha \wedge \neg\alpha \leftrightarrow \bot; \tag{2.42}$$
$$\models \bot \to \alpha. \tag{2.43}$$

In al deze tautologieën zijn, α, β, etc. willekeurige uitspraken, volgens de regels opgebouwd uit de $p_i \in S$, $\bot$, en de logische connectieven. Een abstracte tautologie als $\bot \to \alpha$ staat dus eigenlijk voor oneindig veel concrete tautologieën waarin voor α een concrete uitspraak wordt ingevuld.

Laten we ter afsluiting even ingaan in de verschillen tussen het gebruik van de logische connectieven in de wiskunde en in de natuurlijke taal. Hier moet je erg mee oppassen!

- De conjunctie $\wedge$ ("en") heeft in de natuurlijke taal soms een tijdselement: ik ga naar huis en zet thee. Dat tijdselement is er in de wiskunde niet: alles heeft eeuwigheidswaarde!
- De disjunctie $\vee$ ("of") heeft in de natuurlijke taal vaak een exclusieve betekenis: de dood of de gladiolen. In de wiskunde is dit niet zo: volgens de waarheidstabel dat $\alpha \vee \beta$ is ook waar als α en β beide waar zijn. Zie ook opgave 2.2.

- De wiskundige implicatie $\to$ is het meest ongebruikelijk ten opzichten van de natuurlijke taal, voor het feit dat $\alpha \to \beta$ altijd waar is als α onwaar is, i.e. $v(\alpha) = 0$ geeft $v(\alpha \to \beta) = 1$, onafhankelijk van $v(\beta)$. Deze eigenschap maakt de uitspraak $\perp \to \beta$ een tautologie voor iedere β, want $v(\perp) = 0$ voor iedere valuatie v. In de natuurlijke taal hangen α en β in $\alpha \to \beta$ meestal samen: "als ik harder fiets, dan haal ik de trein." Stel dat ik niet harder fiets, dan blijft deze uitspraak waar, zoals in het wiskundige gebruik van $\to$. Maar de uitspraak "als ik harder fiets, dan kwalificeert Nederland zich voor het WK" is waar als ik *niet* harder fiets, ongeacht of Nederland zich kwalificeert, en dat is vreemd. Sterker nog, als ik *niet* harder fiets, is ook de uitspraak: "als ik harder fiets, dan kwalificeert Nederland zich *niet* voor het WK" waar! Of: "als Nederland beter gaat spelen en alle concurrenten voortaan alles verliezen, kwalificeert Nederland zich *niet* voor het WK". Deze uitspraak is wiskundig gesproken waar als Nederland juist niet beter gaat spelen, maar in de natuurlijke taal is de uitspraak nooit waar, of Nederland nu beter gaat spelen of niet. De wiskundige afspraak kan worden begrepen uit het volgende voorbeeld: "als $n < 10$, dan is $n < 100$". Deze moet waar zijn ongeacht de waarde van n. Als $n \geq 10$ is het antecedent onwaar, maar de uitspraak blijft staan, of $n < 100$ of niet. Uiteindelijk gaat het hier om een conventie, maar deze blijkt heel handig te zijn (terwijl een andere waarheidstabel voor $\to$ rampzalig zou zijn).

Inleveropgaven: 2.1a) en 2.2.

Opgave 2.1

a) Laat zien dat de uitspraak (2.12) een tautologie is.
b) Reken de waarheidstabel voor $\leftrightarrow$ na.
c) Laat zien dat een uitspraak $\alpha \leftrightarrow \beta$ een tautologie is desda voor iedere valuatie v geldt: $v(\alpha) = v(\beta)$.
d) Laat zien dat (2.25), (2.28), (2.29), (2.32), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) tautologieën zijn.

Opgave 2.2

Je kunt een "exclusieve of" invoeren, genaamd $\vee_e$, door middel van

$$a \vee_e \beta = (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta). \tag{2.44}$$

a) Bereken de waarheidstabel voor $\vee_e$ en concludeer dat dit inderdaad de "exclusieve of" is.
b) Stel nu dat $\alpha = p_1 \to p_2$ en $\beta = \neg p_1 \to p_2$, waarbij p_1 betekent: "ik heb (tussen mijn kaarten) een koning" en p_2 betekent: "ik heb een aas". Stel dat voor een bepaalde valuatie v de uitspraak $\alpha \vee_e \beta$ waar is. Heb ik een aas of niet?

Opgave 2.3

De *Sheffer stroke* $|$ (in de computerwereld vaak NAND genoemd) maakt uit twee bestaande uitspraken α en β een nieuwe uitspraak $\alpha|\beta \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$.

a) Geef de waarheidstabel van de Sheffer stroke.

b) Laat zien dat $\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha|\alpha)$ en $\alpha \vee \beta \leftrightarrow (\alpha|\alpha)|(\beta|\beta)$ tautologieën zijn.

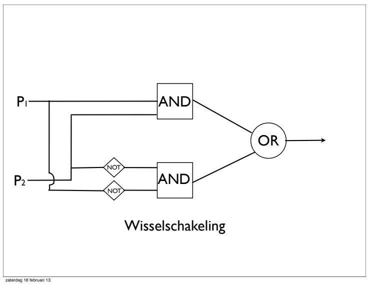
Opgave 2.4

Er bestaat een voor de hand liggend maar interessant verband tussen propositielogica en elektronische circuits (ontdekt door Claude Shannon, volgens velen de grondlegger van het informatietijdperk). Zo'n circuit heeft ruw gezegd als doel om bij iedere mogelijke stand van n aan/uit schakelaars een lamp wel of niet te doen branden. Het circuit bestaat uit drie soorten poorten, genaamd OR, AND, en NOT, verbonden door draden: de OR en AND poorten hebben twee ingangen en één uitgang, en de NOT part heeft één ingang en één uitgang.[1] Het circuit als geheel heeft n ingangen p_1 t/m p_n, dat zijn de aan/uit schakelaars, en één uitgang, die de lamp voedt. Door alle draden gaat wel of geen stroom, aangegeven met 1 resp. 0.; als p_i aan staat geeft die stroom 1, en als hij uit staat stroom 0, aangegeven met $p_i = 0$ of $p_i = 1$.
Een draad kan vertakken (opsplitsen) en bij vertakking houden alle takken dan dezelfde waarde van de stroom. De schakelingen gedragen zich volgens de waarheidstabellen van de bijbehorende logische symbolen: $\vee$ bij OR, $\wedge$ bij AND, and $\neg$ bij NOT (voorbeelden: als 1 in NOT gaat komt er 0 uit, als 1 en 0 in OR gaat komt er 1 uit, enzovoort).
Er zijn nu twee soorten problemen. Het ene is om een circuit te bouwen dat bij iedere mogelijke stand van de schakelaars een gegeven uitgangsstroom heeft. Een klassiek voorbeeld is de wisselschakeling: deze verbindt twee schakelaars ('beneden' en 'boven') met een lamp, die brandt als beide schakelaars aan staan of beide uit staan, maar niet brandt als een van de twee aan staat en de ander uit.
Het andere probleem is om bij een gegeven circuit te bepalen of er stroom uit het circuit komt, als functie van de waarden van de p_i. Om dergelijke problemen op te lossen identificeren we iedere schakelaar met een atomaire propositie, iedere poort met het bijbehorende logische symbool (het symbool $\rightarrow$ wordt hier dus niet gebruikt), en het circuit C met een uitspraak γ uit de propositielogica. Bij gegeven waarden van de p_i komt er stroom uit C desda $\gamma = 1$. De wisselschakeling correspondeert bijvoorbeeld met de uitspraak

$$\gamma \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2), \tag{2.45}$$

en het bijbehorende circuit is

1. In diagrammen kun je de poorten desgewenst met een cirkel, vierkant, e.d. aangeven



a) Geef de waarheidstabel voor de uitspraak (2.45) en ga na dat dit circuit inderdaad de wisselschakeling realiseert.

b) Geef een uitspraak en een circuit dat de volgende schakeling realiseert: er zijn opnieuw twee schakelaars, maar nu brandt de lamp als één van de twee aan is en de andere uit (en brandt niet als ze beide aan of beide uit staan).

2.3 Tautologieën en overbodigheid van logische symbolen

We beginnen dit intermezzo af met twee eenvoudige opmerkingen over tautologieën:

Stelling 2.2 *1. Als* $\models \alpha$ *en* $\models \alpha \to \beta$*, dan* $\models \beta$ *(semantische* modus ponens*).*

2. Als $\models \alpha \leftrightarrow \beta$*, dan geldt:* $\models \alpha$ *desda* $\models \beta$ *(interpretatie van het symbool* $\leftrightarrow$*).*

Dit volgt uit de waarheidstabellen van $\to$ resp. $\leftrightarrow$. De aanname in het eerste lid is $v(\alpha) = 1$ en $v(\alpha \to \beta) = 1$ voor iedere valuatie v, en volgens de tabel voor $\to$ is dit alleen mogelijk als $v(\beta) = 1$, voor alle v. Daarmee is β dus per definitie een tautologie. Voor het tweede lid geeft $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ slechts de twee mogelijkheden: $v(\alpha) = v(\beta) = 0$ en $v(\alpha) = v(\beta) = 1$. De informatie $v(\alpha) = 1$ dwingt dus $v(\beta) = 1$ af, en omgekeerd.

Uit de lange lijst van tautologieën boven nemen we de volgende drie gevallen apart:

$$\models \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \to \neg\beta); \tag{2.46}$$

$$\models \alpha \vee \beta \leftrightarrow (\neg\alpha \to \beta); \tag{2.47}$$

$$\models \neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \to \bot). \tag{2.48}$$

Dit stelt ons in staat om de symbolen $\wedge$, $\vee$, and $\neg$ te elimineren en in principe dus alleen met $\to$ en $\bot$ te werken. Uit opgave 2.1 (c) volgt namelijk dat een uitspraak $\alpha \leftrightarrow \beta$ een tautologie is desda voor iedere valuatie v geldt: $v(\alpha) = v(\beta)$. Stel nu dat je $v(\varphi)$ wilt bepalen via de rekenmethode die uitgaat van (2.2) t/m (2.10). Uit (2.46) volgt dat als je $v(\alpha \wedge \beta)$ tegenkomt, je hetzelfde getal (0 of 1) krijgt als wanneer er $\neg(\alpha \to \neg\beta)$ had gestaan in plaats van $\alpha \wedge \beta$. Analoog voor (2.47) en (2.48). Voor het berekenen van de (on)waarheid van een uitspraak maakt het dus niets uit of er $\alpha \wedge \beta$ staat of $\neg(\alpha \to \neg\beta)$, en analoog voor de andere twee gevallen. Aangezien (in de propositielogica) de betekenis van een uitspraak volledig ligt in haar (on)waarheid, te beginnen met de atomaire proposities p_i, kunnen we dus overal $\alpha \wedge \beta$ vervangen door $\neg(\alpha \to \neg\beta)$, enzovoort. Hetzelfde zal straks gelden voor bewijzen. Daarmee kun je in principe propositielogica doen met als logische symbolen uitsluitend $\to$ en $\bot$, en als dat handig is zullen we dat ook vaak doen! Als er toch $\alpha \wedge \beta$ staat, wordt dat als een *afkorting* beschouwd voor $\neg(\alpha \to \neg\beta)$, waarbij $\neg\beta$ dan weer een afkorting is voor $\beta \to \bot$ (en analoog $\alpha \vee \beta$), net zoals we $\leftrightarrow$ direct als afkorting hebben ingevoerd door middel van (2.23). Het symbool $\leftrightarrow$ in (2.46) wordt dus de *definitie* van $\wedge$, en analoog met $\vee$ en $\neg$:

$$\alpha \wedge \beta = \neg(\alpha \to \neg\beta); \tag{2.49}$$

$$\alpha \vee \beta = (\neg\alpha \to \beta); \tag{2.50}$$

$$\neg\alpha = (\alpha \to \bot). \tag{2.51}$$

Dit zul je in het dagelijks leven niet zo snel doen (probeer maar eens een gesprek te voeren zonder "en", "of", en "niet"!), maar vooral in de theorie van formeel bewijzen straks is het handig.

2.4 Formeel bewijzen

Formeel bewijzen (wat Euclides en Newton e.a. dus enigszins halfhartig deden, maar wat sinds ongeveer 1900 dankzij het werk van Russell, Hilbert, en andere grote wiskundigen goed begrepen is), behoort tot de essentie van de moderne wiskunde. De regels daarvoor, die we nu gaan geven voor het eenvoudige geval van propositielogica, kunnen als onderdeel van de 'definitie' van wiskunde worden gezien. We hebben al opgemerkt dat de wiskunde een soort spel met spelregels is, en daar zijn de regels voor formeel bewijzen onderdeel van. Deze regels zijn echter niet (zoals bij veel andere spellen) willekeurig. We hebben al opgemerkt dat formeel bewijzen geen gebruik mag maken van de betekenis van de symbolen (dit was in feite het grote inzicht van Boole, Hilbert, en anderen). De opzet van een bewijs heeft in principe dus niets te maken met de valuaties v. Maar het volgende moet beslist vermeden worden: Stel dat een uitspraak φ bewezen kan worden (we noteren dan: $\vdash \varphi$) en dat er een valuatie v is met $v(\varphi) = 0$. Dan zouden we een stelling hebben bewezen die in een bepaalde interpretatie onwaar is! De wiskunde kan de tent dan wel sluiten, niemand vertrouwt ons dan nog. Om dit te voorkomen moet een bewijsbare uitspraak dus een tautologie zijn:[2]

$$\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi. \tag{2.52}$$

N.B. Dit is een uitspraak *over* propositielogica, niet *in* propositielogica, en wat er staat is niets dan een afkorting voor: als een uitspraak φ (volgens de nog op te stellen regels) bewezen kan worden, moet φ een tautologie zijn, i.e. waar zijn onder alle valuaties v. Deze eigenschap heet de *gezondheid* van de propositielogica. Het zou natuurlijk ook mooi zijn als de regels voor bewijzen krachtig genoeg zijn om omgekeerd ook iedere tautologie te kunnen bewijzen:

$$\vDash \varphi \Rightarrow \vdash \varphi. \tag{2.53}$$

Deze eigenschap heet de *volledigheid* van de propositielogica. Als (2.52) en (2.53) beide gelden, volgt dus dat een uitspraak bewijsbaar is desda deze een tautologie is:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi. \tag{2.54}$$

Dit zal inderdaad het geval zijn, zodat de bewijsmethode van de propositielogica feitelijk perfect is. Let op: (2.54) wordt straks een stelling *over* propositielogica!
Formele bewijzen worden opgeschreven door gebruikte resultaten en aannamen naast elkaar boven een streep te zetten, en de daaruit getrokken conclusie onder de streep te zetten. Dit is puur een notatie, die je ook door een verhaal in woorden zou kunnen vervangen. Het lastigste onderdeel is het invoeren van *aannamen*, die later in het bewijs weer moeten worden opgeheven. Als bovenaan de streep α staat, betekent dit dat we α al hadden bewezen, bijvoorbeeld in een ander (deel van het) bewijs; we mogen deze uitspraak dan steeds blijven gebruiken. Als er echter $[\alpha]$ staat, is α een *aanname*, die later moet worden opgeheven. De regels voor formeel bewijzen zijn dan als volgt.[3]

---

2. Voorlopig hebben we nog geen axioma's; we zullen (2.52) later aanpassen met axioma's.
3. Filosofische opmerking: uit deze regels *volgt* dat de pijl $\rightarrow$ zich gedraagt als een implicatie, i.e. als een "als ... dan" operatie. Ludwig Wittgenstein zie zelfs over natuurlijke taal: "*meaning is use*".

We werken voorlopig alleen met $\to$ en $\bot$, waarbij $\neg\alpha$ een afkorting is voor $\alpha \to \bot$.

1. $\dfrac{\alpha}{\alpha}$ (i.e. uit α volgt α: als je α eenmaal hebt, mag je die steeds blijven gebruiken).

2. $\dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$ (genaamd $\to$-*Eliminatie* of $\to$E of (syntactische) *modus ponens*).

3. $\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \cdots \\ \cdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}$ ($\to$-*Introductie* of $\to$I), met als speciaal geval: $\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta.}$

   Hier is α niet een al bewezen uitspraak, maar een aanname. Zodra daaruit β is bewezen, dient α weer te worden opgeheven (door deze bijvoorbeeld door te strepen of uit te gummen). De puntjes staan dus voor een bewijs van β uit α en de conclusie $\alpha \to \beta$ kan verder in het bewijs steeds gebruikt worden; de aanname α mag echter niet meer worden gebruikt zodra deze door de conclusie $\alpha \to \beta$ is opgeheven! Het speciale geval volgt als de aanname α niet eens nodig is om $\alpha \to \beta$ te bewijzen (en dan ook niet achteraf hoeft te worden opgeheven).

4. $\dfrac{\bot}{\alpha}$ ($\bot$-*Eliminatie* of $\bot$E, geleerd: *ex falso sequitur quod libet*).

5. $\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\alpha]\\ \cdots \\ \cdots \\ \bot\end{array}}{\alpha}$ (*RAA* = *Reductio Ad Absurdum* = bewijs uit het ongerijmde).

Voor de volledigheid geven we ook de regels voor de andere logische symbolen, indien deze onafhankelijk worden gebruikt; dan heb je alle regels op één pagina. Deze regels volgen uit de voorgaande en de definities (2.49) - (2.51), zie uitleg laten en opgaven.

6. $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$ ($\wedge$-*Introductie*) , $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ en $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$ ($\wedge$-*Eliminatie*);

7. $\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ en $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$ ($\vee$-*Introductie*), $\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\alpha}{\beta}$ ($\vee$-*Eliminatie*);

8. $\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \cdots \\ \cdots \\ \bot\end{array}}{\neg\alpha}$ ($\neg$-*Introductie*);

9. $\dfrac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot}$ ($\neg$-*Eliminatie*).

De gang van zaken wordt hopelijk duidelijk uit voorbeelden. Een typisch bewijs bevat meerdere aannamen (die allemaal op het eind opgeheven moeten worden!).

1. $\vdash \alpha \to \alpha$. Bewijs: $$\begin{array}{c}[\alpha]\\ \hline \alpha \\ \hline \alpha \to \alpha.\end{array}$$

   Stap 1: regel 1;
   Stap 2: regel 3. In deze stap wordt de aanname $[\alpha]$ opgeheven.

2. $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$. Bewijs: $$\begin{array}{c}[\beta]\\ \hline \alpha \to \beta \\ \hline \beta \to (\alpha \to \beta)\end{array}.$$

   Stap 1: regel 3 (speciaal geval rechts);
   Stap 2: regel 3 (geval links). In deze stap wordt de aanname $[\beta]$ opgeheven.

3. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$. Bewijs: $$\begin{array}{c}[\alpha] \qquad [\alpha \to \bot]\\ \hline \bot \\ \hline (\alpha \to \bot) \to \bot \\ \hline \alpha \to ((\alpha \to \bot) \to \bot)\end{array}$$

   Stap 1: $\to$-Eliminatie op de bovenste rij (modus ponens);
   Stap 2: $\to$-Introductie op de aanname $[\alpha \to \bot]$ (nu opgeheven) en $\bot$;
   Stap 3: $\to$-Introductie op de aanname $[\alpha]$ (nu opgeheven) en $(\alpha \to \bot) \to \bot$.

4. $\vdash (\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta))$. *Here we go:*

$$\begin{array}{lr}
[\beta] & [\beta \to \gamma] \\ \hline
\gamma & [\beta \to (\gamma \to \delta)] \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\gamma \to \delta} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\delta} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\beta \to \delta} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{(\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta)} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{(\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta))}
\end{array}$$

   Stap 1: $\to$-Eliminatie op $[\beta]$ en $[\beta \to \gamma]$.
   Stap 2: $\to$-Eliminatie op $[\beta]$ en $[\beta \to (\gamma \to \delta)]$.
   Stap 3: $\to$-Eliminatie op γ en $\gamma \to \delta$.
   Stap 4: $\to$-Introductie op $[\beta]$ (nu opgeheven) en δ.
   Stap 5: $\to$-Introductie op $[\beta \to \gamma]$ (nu opgeheven) en $\beta \to \delta$.
   Stap 6: $\to$-Introductie op $[\beta \to (\gamma \to \delta)]$ (nu opgeheven) en $(\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta)$.

5. $\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$. Dit is een leerzaam voorbeeld met RAA:

$$\begin{array}{ccc}
[\neg\beta] & [\neg\beta \to \neg\alpha] & [\alpha] \\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\alpha \to \bot} \\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\bot} \\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\beta} \\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\alpha \to \beta} \\ \hline
\multicolumn{3}{c}{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)}
\end{array}$$

Stap 1: $\to$-Eliminatie op $[\neg\beta]$ en $[\neg\beta \to \neg\alpha]$ (N.B. $\neg\alpha = \alpha \to \bot$).
Stap 2: $\to$-Eliminatie op $[\alpha]$ en $\bot$.
Stap 3: RAA op $[\neg\beta]$ (nu opgeheven) en $\bot$.
Stap 4: $\to$-Eliminatie op $[\alpha]$ (nu opgeheven) en β.
Stap 5: $\to$-Eliminatie op $[\neg\beta \to \neg\alpha]$ (nu opgeheven) en $\alpha \to \beta$.

Om de bewijsregels voor $\wedge$ en $\vee$ en $\neg$ af te leiden (uit die voor $\to$ en $\bot$) is een nieuwe notatie nodig. Stel $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ is een eindige lijst van uitspraken, en φ is een uitspraak. We noteren $\Gamma \vdash \varphi$ als φ kan worden bewezen uit de aannamen α_1 t/m α_n en de bovenstaande regels. Deze aannamen spelen de rol van *axioma's*; we gaan daar volgende week nader op in. De bewijsregel $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$ staat dus voor $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$, oftewel: $\{\alpha, \beta\} \vdash ((\alpha \to \neg\beta) \to \bot)$. Bewijs (ga zelf na welke regels zijn gebruikt!):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad \beta \qquad [\alpha \to \neg\beta]}{\neg\beta}}{\bot}}{(\alpha \to \neg\beta) \to \bot}$$

Ten slotte merken we op dat de hier gegeven bewijsregels ook gelden voor de metataal, i.e. het bewijzen *over* propositielogica wordt door dezelfde regels geregeerd als het bewijzen *binnen* propositielogica! Met andere woorden, de metataal waarmee we (tot nu toe) over de logische taal spreken, te weten propositielogica, is zelf eigenlijk ook propositielogica, zij het niet geformaliseerd (hetgeen zoals eerder opgemerkt wel kan).

Opgave 2.5

Bewijs de volgende uitspraken:

$$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha; \tag{2.55}$$
$$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)); \tag{2.56}$$
$$\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta); \tag{2.57}$$
$$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha). \tag{2.58}$$

Opgave 2.6

De notatie $\Gamma \cup \{\alpha\}$ staat voor de lijst/verzameling $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\}$ (met $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$). Leid uit de bewijsregels de volgende *Deductiestelling* af:

Stelling 2.3 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ *desda* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Antwoorden (2.58) graag zelf doen, geen tijd meer):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha] \qquad [\neg\alpha \to \bot]}{\bot}}{\alpha}}{\neg\neg\alpha \to \alpha}$$ RAA in tweede stap en opheffing van aanname $\neg\alpha$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha] \qquad [\alpha \to \beta]}{\beta \qquad [\beta \to \gamma]}}{\gamma}}{\alpha \to \gamma}}{(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)}}{(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))}$$

1. $\to$-Eliminatie op $[\alpha]$ en $[\alpha \to \beta]$ en opschrijven aanname $[\beta \to \gamma]$.
2. $\to$-Eliminatie op β en $[\beta \to \gamma]$.
3. $\to$-Introductie op $[\alpha]$ (nu opgeheven) en $\alpha \to \gamma$.
4. $\to$-Introductie op $[\beta \to \gamma]$ (nu opgeheven) en δ.
5. $\to$-Introductie op $[\alpha \to \beta]$ (nu opgeheven) en $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha] \qquad [\alpha \to \bot]}{\bot}}{\beta}}{\alpha \to \beta}}{\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)}$$

1. $\to$-Eliminatie op de bovenste rij.
2. $\bot$-Eliminatie.
3. $\to$-Introductie op de aanname $[\alpha]$ (nu opgeheven) en β.
4. $\to$-Introductie op de aanname $[\neg\alpha]$ (nu opgeheven) en $\alpha \to \beta$).

Bewijs Stelling 2.3: VLNR ($\Rightarrow$): gegeven bewijs $\dfrac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\begin{array}{c}\cdots\\ \cdots\end{array}} \atop \alpha \to \beta$ voeg α toe en concludeer uit α en $\alpha \to \beta$ dat β (modus ponens).

VRNL ($\Leftarrow$): gegeven bewijs $\dfrac{\dfrac{\alpha_1 \cdots \alpha_n \;\; \alpha}{\begin{array}{c}\cdots\\ \cdots\end{array}}}{\beta}$ heb je dus ook $\dfrac{\dfrac{\alpha_1 \cdots \alpha_n \;\; [\alpha]}{\begin{array}{c}\cdots\\ \cdots\end{array}}}{\beta}$ en daarmee met $\to$I de conclusie $\alpha \to \beta$ (onder opheffing van de aanname $[\alpha]$).