Eerste-orde logica (= Predikaatlogica)

Onderdeel van het college Logica (2017)

Klaas Landsman

1.1 Eerste-orde taal (aanvulling op §2.2 in Moerdijk & van Oosten)

De propositielogica is te eenvoudig om bijv. rekenkunde te beschrijven, laat staan verzamelingenleer, omdat in de syntax geen variabelen en geen kwantoren zoals 'er is' ($\exists$) en 'voor alle' ($\forall$) voorkomen.[1] Die zijn er wel in de *predikaatlogica*, ook genoemd *eerste-orde logica*, waar dit hoofdstuk over gaat. We bespreken zowel de rekenkunde als de verzamelingenleer als voorbeelden van een eerste-orde logische taal L waarin een bepaald gebied van de wiskunde wordt geformaliseerd. Het gebruikelijke eerste-orde systeem voor de rekenkunde heet *Peano Aritmetiek* en wordt afgekort als **PA**. Het gangbare eerste-orde systeem voor de verzamelingenleer is genoemd naar Zermelo en Fraenkel en wordt afgekort als **ZF**. We geven ook propositielogica als speciaal geval, afgekort **PL**.

- De notatie van een eerste-orde logisch systeem is opgebouwd uit *symbolen* in twee groepen.
  1. De *zuiver logische symbolen* hangen niet af van het gebied van de wiskunde dat wordt beschreven. Dit zijn de symbolen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp$ uit de propositielogica, in de meeste theorieën (maar niet in **PL**, zie onder) aangevuld met het gelijkteken $=$ en, indien er variabelen zijn (wat ook vrijwel altijd zo is behalve in **PL**) met de kwantoren $\forall$ en $\exists$, voor resp. 'voor alle' en 'er bestaat'. Ook nu bestaan er relaties tussen deze symbolen, waardoor het in principe voldoende is om bijvoorbeeld slechts, $\rightarrow$, $\perp$, $=$, en $\forall$ te gebruiken. De eliminatie van $\vee$ en $\wedge$ is hetzelfde als in de propositielogica en $\exists_x$ (zie onder) kan worden vervangen door $\neg\forall_x\neg$.
  2. De *niet-logische symbolen* hangen af van het gebied van de wiskunde dat je probeert te formaliseren door een eerste-orde taal L. Ze zijn in detail dus verschillend voor bijv. rekenkunde en verzamelingenleer, maar vrijwel alle talen L (behalve dus **PL**) bevatten:
     (a) Een aftelbare verzameling *variabelen* $\mathrm{var}(L) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (of $\{\ldots, x, y, z, \ldots\}$).

     Bij **PA** kun je bij deze variabelen denken aan de natuurlijke getallen, maar deze interpretatie is *geen* onderdeel van het logische systeem en dient slechts ter motivatie.
     In **ZF** kunnen de variabelen evenzo worden geïnterpreteerd als verzamelingen.

     PLheeft zoals gezegd geen variabelen, i.e. $\mathrm{var}(\mathbf{PL}) = \emptyset$.

     (b) Een (meestal eindige) verzameling *constanten* $\mathrm{con}(L)$, die je kunt noteren hoe je wilt.

     In **PA** is er slechts één constante, genaamd 0, later te interpreteren als het getal nul.

     Ook in **ZF** is er één constante, $\emptyset$, later te interpreteren als de lege verzameling.

     PL heeft ook al geen constanten, dus $\mathrm{con}(\mathbf{PL}) = \emptyset$.

     (c) Een (meestal eindige) verzameling *functiesymbolen* $\mathrm{fun}(L)$. Ieder functiesymbool f heeft een zogenaamde *ariteit* $a(f)$, een getal dat aangeeft hoeveel variabelen de desbetreffende functie als input heeft.[2] De ariteit is dus een afbeelding $a : \mathrm{fun}(L) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots\}$.

     In **PA** zijn er drie functiesymbolen, namelijk S, $+$, en $\times$, met ariteiten resp. $a(S) = 1$, $a(+) = 2$, en $a(\times) = 2$. Ook hier geven we alvast de latere interpretatie als resp. de successorfunctie $k \mapsto k + 1$, optelling, en vermenigvuldiging, maar opnieuw is deze interpretatie *geen* onderdeel van het formele logische systeem.
     ZF heeft (verrassenderwijs) geen functiesymbolen.[3]
     Ook **PL** heeft geen functiesymbolen.

     (d) Een (meestal eindige) verzameling *relatiesymbolen* (of *predikaatsymbolen*) $\mathrm{rel}(L)$, eveneens met bijbehorende ariteiten a, *deze keer inclusief 0*, dus $a : \mathrm{rel}(L) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots\}$. De relatiesymbolen spelen een rol bij het definiëren van formules; zie onder. Voorbeelden:

---

1. Zoals we zullen zien zijn de atomaire proposities p_i technisch gesproken geen variabelen maar zgn. relatiesymbolen.
2. Deze naam komt van het Engelse *arity*; vgl. un*ary*, bin*ary*, etc. Een functiesymbool f met $a(f) = 0$ is een constante.
3. We zullen later zien dat functies $f : X \rightarrow Y$ in de verzamelingenleer worden gedefinieerd als deelverzamelingen van $X \times Y$.

PA heeft geen relatiesymbolen.[4]
In **ZF** is het enige relatiesymbool $\in$, met ariteit 2.
De relatiesymbolen van **PL** zijn de atomaire proposities, dus $\mathrm{rel}(\mathbf{PL}) = \{p_0, p_1, \ldots\}$, alle met ariteit $a(p_i) = 0$. Deze verzameling relatiesymbolen is soms oneindig.

- Uit deze symbolen worden eerst volgens bepaalde regels *termen* gemaakt, die op hun beurt aanleiding geven tot *formules*, meestal genoteerd als φ of ψ, etc. Speciale formules zijn vervolgens *uitspraken* (*sentences*), die kandidaten zijn voor stellingen (dus al dan niet bewijsbaar zijn). Het verschil tussen formules en uitspraken blijkt uit een eenvoudig voorbeeld: je kunt niet eisen dat een uitdrukking als $x^2 = 1$ wel of niet bewijsbaar is; dat is dan ook 'slechts' een formule. Dat kun je wel eisen van $\exists_x(x^2 = 1)$ of $\forall_x(x^2 = 1)$; dat zijn dan ook uitspraken. We geven nu de algemene formatieregels voor termen en formules, en de regel die bepaalt welke formules uitspraken zijn.

  1. De iteratieve procedure om *termen* te produceren is als volgt:
     (a) iedere variabele $x_i \in \mathrm{var}(L)$ is een term;
     (b) iedere constante $c \in \mathrm{con}(L)$ is een term;
     (c) een functiesymbool f en $a(f) = k$ termen $(t_1, \ldots, t_k)$ geven een term $f(t_1, \ldots, t_k)$.

     In **PA** betekent dit dat $S(t)$ een term is en dat $t_1 + t_2 \equiv +(t_1, t_2)$ en $t_1 \times t_2 \equiv \times(t_1, t_2)$ termen zijn, tenminste als t, t_1, en t_2 dat zijn. Dit is niet zo ingewikkeld als het lijkt! De constante **0** is bijvoorbeeld een term, zodat $S(\mathbf{0})$ dat ook is. Voor deze term voeren we de naam **1** in. Dit kunnen we herhalen: $S^n(\mathbf{0})$ is een term, die we afkorten als $\mathbf{n}$ (waarbij bijv. $S^2(\mathbf{0}) \equiv S(S(\mathbf{0}))$, etc.). Daaruit kunnen we de term $\mathbf{n} + \mathbf{m}$ maken, of $\mathbf{n} \times x_i$, en vervolgens $(\mathbf{n} + \mathbf{m}) \times (\mathbf{n} \times x_i)$, enz. Dit soort dingen doe je in de wiskunde de hele dag! Wat je niet als term kunt maken is iets als $S(+)$ of $\mathbf{n}\times$ en dergelijke onzin.
     In **ZF** zijn de enige termen $\emptyset$ en de variabelen (er zijn immers geen functiesymbolen).
     PL heeft geen termen.

  2. Uit de termen en $\perp$ maken we als volgt *atomaire formules* m.b.v. $=$ en de relatiesymbolen:
     (a) $\perp$ is en atomaire formule.
     (b) Als t_1 en t_2 termen zijn, is $t_1 = t_2$ een atomaire formule.
     (c) Een relatiesymbool R met ariteit $a(R) = k$ en k termen $(t_1, \ldots, t_k)$ bepalen samen een atomaire formule $R(t_1, \ldots, t_k)$.

     In **PA** is $t_1 = t_2$ een atomaire formule, als t_1 en t_2 termen zijn (en verder niets).
     In **ZF** zijn $t_1 \in t_2$ en $t_1 = t_2$ atomaire formules, als t_1 en t_2 termen zijn (en verder niets).
     In **PL** zijn de atomaire proposities p_i atomaire formules (en verder niets).

  3. Nu komen de andere zuiver logische symbolen aan bod en maken we (algemene) formules:
     (a) Net als in de propositielogica geldt dat als φ en ψ formules zijn, de uitdrukkingen $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, en $\varphi \to \psi$ dat ook zijn (in eerste instantie toegepast op atomaire formules).
     (b) Bovendien zijn nu ook $\exists_x\varphi$ en $\forall_x\varphi$ formules, voor een willekeurige variabele x.

     De variabele x hoeft niet in φ voor te komen om $\exists_x\varphi$ en $\forall_x\varphi$ correct te kunnen opschrijven. Zo is de uitspraak $\exists_x S(\mathbf{0}) + S(\mathbf{0}) = S(S(\mathbf{0}))$ grammaticaal correct (en ook nog eens waar!).

- In de volgende sectie definiëren we precies de vrije (i.e. niet gebonden) variabelen in een term t of formule φ. Kort: een variabele x in φ heet *gebonden* als er deelformules $\forall_x\psi_i(x)$ of $\exists\psi_i(x)$ van φ bestaan met de eigenschap dat x uitsluitend in deze deelformules voorkomt.[5] Een variabele x φ heet *vrij* als deze niet gebonden is. Om aan te geven dat t of φ de variabele x vrij bevat schrijven we soms $t(x)$ resp. $\varphi(x)$ i.p.v. t of φ, en $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ als φ tenminste de variabelen $(x_1, \ldots, x_n)$ vrij bevat, etc. In een *open formule* komt minstens één vrije variabele voor. In een *gesloten formule* zijn alle variabelen gebonden, of zijn er geen variabelen. Een gesloten formule heet een *uitspraak*.

---

4. Soms wordt in **PA** echter $<$ als predikaat met ariteit 2 gebruikt. Sommige auteurs rekenen $=$ tot de relatiesymbolen.
5. Een *deelformule* van een formule φ is een (ook op zichzelf zinvolle) term of formule die in φ voorkomt (inclusief φ zelf).

1.2 Variabelen en substituties (aanvulling op §2.2 in Moerdijk & van Oosten)

Definitie 1.1 *1. De verzameling $FV(t)$ van vrije variabelen in een term t is recursief gedefinieerd:*

$$FV(x) = \{x\} \quad (x \in \mathrm{var}(L)); \tag{1.1}$$
$$FV(c) = \emptyset \quad (c \in \mathrm{con}(L)); \tag{1.2}$$
$$FV(f(t_1, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n) \quad (f \in \mathrm{fun}(L), a(f) = n). \tag{1.3}$$

2. De verzameling $FV(\varphi)$ van vrije variabelen in een formule φ is recursief gedefinieerd:

$$FV(\bot) = \emptyset; \tag{1.4}$$
$$FV(R) = \emptyset \quad (R \in \mathrm{rel}(L), a(R) = 0); \tag{1.5}$$
$$FV(R(t_1, \dots, t_n) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n) \quad (R \in \mathrm{rel}(L), a(R) = n > 0); \tag{1.6}$$
$$FV(t_1 = t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2); \tag{1.7}$$
$$FV(\neg\psi) = FV(\psi); \tag{1.8}$$
$$FV(\psi \to \varphi) = FV(\psi) \cup FV(\varphi); \tag{1.9}$$
$$FV(\psi \vee \varphi) = FV(\psi) \cup FV(\varphi); \tag{1.10}$$
$$FV(\psi \wedge \varphi) = FV(\psi) \cup FV(\varphi); \tag{1.11}$$
$$FV(\forall_x \psi) = FV(\psi) - \{x\} \quad (x \in FV(\psi)); \tag{1.12}$$
$$FV(\exists_x \psi) = FV(\psi) - \{x\} \quad (x \in FV(\psi)). \tag{1.13}$$

Een formule φ heet gesloten *als $FV(\varphi) = \emptyset$. Een gesloten formule heet ook wel een* uitspraak.

Definitie 1.2 *1. Voor iedere term t en formule φ is de* substitutie *$\varphi[t/x]$ toegestaan als:*

(a) $x \in FV(\varphi)$, en:

(b) "t vrij is voor x in φ", waarbij dit begrip als volgt recursief is gedefinieerd. t is vrij voor x:

i. in iedere atomaire formule;[6]

ii. in formules $\varphi = \neg\psi$ waarbij t vrij is voor x in ψ;

iii. in formules $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ waarbij t vrij is voor x in zowel ψ_1 als ψ_2 (analoog met $\vee, \wedge$);

iv. in formules $\varphi = \forall_y \psi$ of $\varphi = \exists_y \psi$ waarbij $y \notin FV(t)$ en $y \neq x$ en t is vrij voor x in ψ.

Informeel: t vrij is voor x in φ desda geen van de vrije variabelen y in t binnen het bereik van een kwantor $\forall_y$ of $\exists_y$ in φ komen te staan.[7]

2. Als de substitutie $\varphi[t/x]$ is toegestaan, dan is de formule $\varphi[t/x]$ recursief gedefinieerd door:

(a) als $y \in \mathrm{var}(L)$ dan $y[t/x] = y$ als $y \neq x$ en $y[t/x] = t$ als $y = x$;

(b) als $c \in \mathrm{con}(L)$ dan $c[t/x] = c$, en analoog $\bot[t/x] = \bot$ en $R[t/x] = R$ als $R \in \mathrm{rel}(L)$, $a(R) = 0$.

(c) als $f \in \mathrm{fun}(L)$ met $a(f) = n$ en $t_1, \dots, t_n$ zijn termen, dan is $f(t_1, \dots, t_n)[t/x]$ gelijk aan $f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$. Analoog met R i.p.v. f, met $R \in \mathrm{rel}(L)$, $a(R) = n > 0$;

(d) Voor termen t_1, t_2 is $(t_1 = t_2)[t/x]$ gelijk aan $t_1[t/x] = t_2[t/x]$.

(e) $(\neg\psi)[t/x]$ is gelijk aan $\neg(\psi[t/x])$, analoog is $(\psi \to \varphi)[t/x]$ gelijk aan $\psi[t/x] \to \varphi[t/x]$ etc.

(f) $(\forall_y \psi)[t/x]$ is gelijk aan $\forall_y(\psi[t/x])$ als $y \neq x$ (analoog met $\exists_y$); als $y = x$ dan is x niet vrij en is $\forall_x \psi[t/x]$ niet gedefinieerd (en is dan gelijk aan $\forall_x \psi$ zelf).

Informeel: in $\varphi[t/x]$ wordt de vrije variabele x overal vervangen door de term t (zie voetnoot 2).

---

6. Dit begrip komt niet voor in Moerdijk & van Oosten. Atomaire formules zijn van de vorm $\bot$, of $s = t$ met s en t termen, of R met $R \in \mathrm{rel}(L)$ en $a(R) = 0$, of $R(t_1, \dots, t_n)$ met $R \in \mathrm{rel}(L)$ en $a(R) = n > 0$.

7. Dit is exact als de CONVENTION ON VARIABLES onderaan p. 45 van Moerdijk & van Oosten wordt aangehouden: variabelen komen ofwel gebonden ofwel vrij ofwel niet voor in een formule, en als ze gebonden zijn gebeurt dat slecht één keer.

1.3 Natuurlijke deductie (aanvulling op §3.1 in Moerdijk & van Oosten)

Naast de regels van ND voor propositielogica (die onverkort blijven gelden) komen er bij:[8]

1. *Substitutie*: $\dfrac{\varphi[t/x] \qquad t = s}{\varphi[s/x]}$, mits $x \in FV(\varphi)$ en de substituties $\varphi[t/x]$ en $\varphi[s/x]$ zijn toegestaan;

2. $\forall$-Introductie: $\dfrac{\varphi[y/x]}{\forall_x \varphi(x)}$, onder de voorwaarden dat:
   (a) $x \in FV(\varphi)$ en de substitutie $\varphi[y/x]$ is toegestaan;
   (b) y niet voorkomt in $\varphi(x)$;
   (c) y niet voorkomt in enige open (i.e. nog niet opgeheven) aanname $[\psi]$ die is gebruikt in de afleiding van φ.

3. $\forall$-*Eliminatie*: $\dfrac{\forall_x \varphi(x)}{\varphi[t/x]}$, voor een term t, mits $x \in FV(\varphi)$ en de substitutie $\varphi[t/x]$ is toegestaan.

We nemen hierbij aan dat de tweede kwantor $\exists$ is gedefinieerd via $\exists_x \varphi \equiv \neg\forall_x \neg\varphi$; zie opgave. Als we $\exists$ apart gebruiken gelden daarvoor in ND de volgende regels:

1. $\exists$-*Introductie*: $\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists_x \varphi(x)}$, mits $x \in FV(\varphi)$ en de substitutie $\varphi[t/x]$ is toegestaan;

2. $\exists$-*Eliminatie*:[9] $\dfrac{\exists_x \varphi(x) \qquad \dfrac{[\varphi[y/x]]}{\psi}}{\psi}$, mits:
   (a) $x \in FV(\varphi)$ en de substitutie $\varphi[y/x]$ is toegestaan;
   (b) de variabele y niet voorkomt in φ of ψ;
   (c) de open aannames in de afleiding van ψ waarin y voorkomt de vorm $\varphi[y/x]$ hebben;
   (d) de formule $\exists_x \varphi(x)$ niet uit de aanname $\varphi[y/x]$ is afgeleid.
   Deze regel is dus equivalent met de mogelijk duidelijkere versie (waar $\varphi(y) \equiv \varphi[y/x]$):

$$\frac{\varphi(y) \to \psi \qquad \exists_x \varphi(x)}{\psi}$$

Als $\exists_x \varphi(x)$ als aanname is ingevoerd, i.e.$[\exists_x \varphi(x)]$, dan hebben we via $\to$-Introductie dus

$$\frac{\varphi(y) \to \psi}{\exists_x \varphi(x) \to \psi}$$

Met $\psi \equiv \perp$ geeft dit het speciale geval $\dfrac{\neg\varphi(y)}{\neg\exists_x \varphi(x)}$. Met $\varphi \rightsquigarrow \varphi$, RAA, en $\forall_x \equiv \neg\exists_x\neg$ geeft dit $\forall$-Introductie terug. Als illustratie bewijzen we $\vdash \exists_x \varphi(x) \to \exists_y \varphi(y)$, waar (zoals altijd) $\varphi(y) \equiv \varphi[y/x]$:

$$\cfrac{\cfrac{[\exists_x \varphi(x)] \qquad \cfrac{[\varphi(y)]}{\exists_y \varphi_y}}{\exists_y \varphi_y}}{\exists_x \varphi(x) \to \exists_y \varphi(y)}$$

Uitleg: uit de aanname $[\varphi(y)]$ volgt met $\exists$-Introductie met $x \rightsquigarrow y$ de formule $\exists_y \varphi_y$ op de volgende regel. De derde regel volgt uit $\exists$-Eliminatie met $\psi \equiv \exists_y \varphi_y$, waardoor de aanname $[\varphi(y)]$ vervalt. De laatste regel is $\to$-Introductie, waardoor ook de aanname $[\exists_x \varphi(x)]$ vervalt.

Op soortgelijke wijze bewijs je $\vdash \forall_x \varphi(x) \to \forall_x \varphi(y)$: eerst $\forall$-Introductie, dan $\forall$-Eliminatie (opgave).

---

8. De regels voor = komen volgende week!
9. Dit ziet er circulair uit, maar de eerste ψ is afgeleid uit de *aanname* $[\varphi[y/x]]$ en mogelijke andere onderdelen van het bewijs. De conclusie ψ heft deze aanname dan op.

Ten slotte zijn er drie (voor de hand liggende) regels voor $=$, met $t(y) \equiv t[y/x]$ en $\varphi(y) \equiv \varphi[y/x]$:

$$\frac{\cdots}{x = x} \qquad \frac{x = y \qquad\qquad y = z}{x = z} \qquad \frac{x = y}{t(x) = t(y)}$$

Met behulp van de substitutieregel volgen hieruit soortgelijke regels voor termen s, r, t:

$$\frac{\cdots}{t = t} \qquad \frac{r = s \qquad\qquad s = t}{r = t}$$

De eerste volgt bijvoorbeeld uit $\forall$-Introductie gevolgd door $\forall$-Eliminatie (vul de details zelf aan):

$$\cfrac{\cfrac{x = x}{\forall_x(x = x)}}{t = t}$$

Hieruit volgt $\vdash (t = s) \to (s = t)$ oftewel, bij gebruik in ND, $\dfrac{t = s}{s = t.}$ Bewijs:

$$\cfrac{\cfrac{t = t \qquad\qquad [\text{t=s}]}{s = t}}{(t = s) \to (s = t)}$$

Let op: hier wordt $t = t$ gelezen als $(x = t)[t/x]$ en dan pas je Substitutie toe op $\varphi(x) \equiv (x = t)$, zodat $\varphi[t/x] \equiv (t = t)$ en $\varphi[s/x] \equiv (s = t)$. De laatste regel volgt uit $\to$-Introductie, waarbij de aanname $[t = s]$ wordt opgeheven. Nog een voorbeeld: we bewijzen de stelling

$$\vdash (\forall_x(\varphi(x) \to \psi)) \to ((\exists_x \varphi(x)) \to \psi). \tag{1.14}$$

oftewel in ND: $\dfrac{\forall_x(\varphi(x) \to \psi)}{(\exists_x \varphi(x)) \to \psi}$. We bewijzen deze laatste versie; voor de eerste begin je met de aanname $[\forall_x(\varphi(x) \to \psi)]$ en hef je die in de laatste regel op middels $\to$-Introductie.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall_x(\varphi(x) \to \psi)}{\varphi(x) \to \psi \qquad [\varphi(x)]}}{\psi \qquad [\exists_x \varphi(x)]}}{\psi}}{(\exists_x \varphi(x)) \to \psi}$$

1. $\forall$-Eliminatie en invoering aanname $[\varphi(x)]$.
2. $\to$-Eliminatie (Modus Ponens) en invoering aanname $[\exists_x \varphi(x)]$.
3. $\exists$-Eliminatie en opheffing van aanname $[\varphi(x)]$.
4. $\to$-Introductie en opheffing van aanname $[\exists_x \varphi(x)]$

Nu komt een lastiger bewijs, en wel van de later belangrijke stelling

$$\vdash \exists_x \forall_y (\neg\varphi(y) \vee \varphi(x)). \tag{1.15}$$

Hierbij maken we gebruik van de $\vee$-Introductieregel; voor de volledigheid geven we alle regels voor $\vee$ en $\wedge$ (die wij in principe niet nodig hebben omdat ze afgeleide tekens zijn uit $\to$ en $\perp$):

1. $\wedge$-*Introductie*: $\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$ $\wedge$-*Eliminatie*: $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ $\wedge$-*Symmetrie*: $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi \wedge \varphi}$

2. $\vee$-*Introductie*: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ $\vee$-*Eliminatie*: $\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \neg\psi}{\varphi}$ $\vee$-*Symmetrie*: $\dfrac{\varphi \vee \psi}{\psi \vee \varphi}$

Nu komt het bewijs van (1.15), wat op het eerste gezicht een nogal vreemde indruk maakt!

$$
\begin{array}{cc}
[\varphi(x)] & \\
\hline
\neg\varphi(y) \vee \varphi(x) & \\
\hline
\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x)) & \\
\hline
\exists_x\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x)) & [\neg\exists_x\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x))] \\
\hline
\bot & \\
\hline
\varphi(x) \to \bot & \\
\hline
\neg\varphi(x) & \\
\hline
\neg\varphi(x) \vee \varphi(y) & \\
\hline
\forall_x(\neg\varphi(x) \vee \varphi(y)) & \\
\hline
\exists_y\forall_x(\neg\varphi(x) \vee \varphi(y)) & \\
\hline
\exists_x\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x)) & \neg\exists_x\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x)) \\
\hline
\bot & \\
\hline
\exists_x\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x)) &
\end{array}
$$

Hier moet de stap van $\exists_y\forall_x(\neg\varphi(x) \vee \varphi(y))$ naar $\exists_x\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x))$ ook worden bewezen, maar dit soort verandering van variabelen mag je verder zonder bewijs uitvoeren (als je het maar duidelijk opschrijft). Het is een goede oefening om per stap na te gaan wat de rechtvaardiging is: de laatste is bijvoorbeeld RAA op de aanname $[\neg\exists_x\forall_y(\neg\varphi(y) \vee \varphi(x))]$.

1.4 Peano Arithmetic (Rekenkunde)

Als voorbeeld van een wiskundige theorie bekijken we nu PA. Deze eenvoudige theorie (bekend van de lagere school) is van niet te overschatten belang voor de logica, met name omdat de Onvolledigheidsstelling van Gödel (die we helaas in dit college niet kunnen behandelen) er op is gebaseerd. We weten al dat: $\mathrm{fun}(PA) = \{+, \times, S\}$ met $a(+) = a(\times) = 2$ en $a(S) = 1$, en dat : $\mathrm{rel}(PA) = \emptyset$. Hier zijn de axioma's:

PA1 $\forall_x(\neg(S(x) = 0))$;

PA2 $\forall_x\forall_y(S(x) = S(y) \to x = y)$;

PA3 $\forall_x(x + 0 = x)$;

PA4 $\forall_x\forall_y(x + S(y) = S(x + y))$;

PA5 $\forall_x(x \times 0 = 0)$;

PA6 $\forall_x\forall_y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$;

PA7 $(\varphi(0) \wedge (\forall_x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))))) \to \forall_x\varphi(x)$.

Axioma PA7 geldt voor alle formules $\varphi(x)$ met vrije variabele (tenminste) x. Dit axioma is het inductie-axioma; het is eigenlijk een zogenaamd *axioma-schema*, omdat het voor willekeurige formules $\varphi(x)$ geldt. De axioma's **PA1** t/m **PA6** zijn dan wel echte axioma's. We korten af $S(0) \equiv 1$, $S(S(0)) \equiv 2$, etc.

Als we een uitspraak φ bewijzen uit deze axioma's en de algemene regels van ND schrijven we $PA \vdash \varphi$. De eenvoudigste stelling uit PA is

$$PA \vdash 0 + 0 = 0. \tag{1.16}$$

Deze volgt uit PA3 door $\forall$-Eliminatie met $t \equiv 0$ (ga na). Iets lastiger is al $1 + 1 = 2$, oftewel

$$PA \vdash 1 + S(0) = S(1). \tag{1.17}$$

$$
\begin{array}{cc}
\forall_x\forall_y(x + S(y) = S(x + y)) & \\
\hline
\forall_y(1 + S(y) = S(1 + y)) & \\
\hline
1 + S(0) = S(1 + 0) & \forall_x(x + 0 = x) \\
\hline
 & 1 + 0 = 1 \\
\hline
1 + S(0) = S(1) & \forall_x\forall_y(x + S(y) = S(x + y))
\end{array}
$$

In de voorlaatste stap gebruiken we Substitutie op $\varphi(x) \equiv (1 + S(0) = S(x))$, $t \equiv 1 + 0$ en $s \equiv 1$.

Ten slotte bewijzen we om PA7 te illustreren,

$$PA \vdash \forall_x(0 + x = x). \tag{1.18}$$

Neem $\varphi(x) \equiv (0 + x = x)$. Dan volgt $PA \vdash \varphi(0)$ direct uit PA3 met $\forall$-Eliminatie naar $t \equiv 0$. Vervolgens bewijzen we $PA \vdash \forall_x(\varphi(x) \to \varphi(S(x)))$. In ND volgt dit door $\forall$-Introductie uit $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(S(x))}$ oftewel $\dfrac{0 + x = x}{0 + S(x) = S(x)}$. Bewijs

$$\cfrac{\cfrac{0 + x = x}{0 + y = y} \qquad \cfrac{\forall_x\forall_y(x + S(y) = S(x + y))}{0 + S(y) = S(0 + y)}}{0 + S(y) = S(y)}$$

De eerste regel is PA4. De tweede regel ontstaat door de aanname te $0 + x = x$ vervangen door $0 + y = y$ (via $\forall$-Introductie en daarna $\forall$-Eliminatie), en op de tweede formule twee keer $\forall$-Eliminatie toe te passen. De laatste regel volgt foor Substitutie op de formule $\varphi(x) \equiv (0 + S(y) = S(x))$, met $t \equiv 0 + y$ en $s \equiv y$.

Opgaven voor Week 8 (Inleveropgaven: 1, 3, 4)

1. De theorie van de reële getallen heeft constanten 0 en 1, functiesymbolen $+$ en $\times$ beiden van ariteit $a(+) = a(\times) = 2$, daarnaast een functiesymbool $-$ van ariteit $a(-) = 1$, en een relatiesymbool $<$ van ariteit $a(<) = 2$. Je kunt dan eigenschappen die individuele reële getallen mogelijk hebben uitdrukken door open formules, bijvoorbeeld: $(0 < x) \vee (x = 0)$ betekent "x is positief". Algemene eigenschappen worden gegeven door gesloten formules, bijvoorbeeld: $\forall_x((0 < x \times x) \vee (0 = x \times x))$ betekent: ieder kwadraat is positief. Geef formules voor de eigenschappen:
   (a) Het polynoom $x^2 + x + 1$ heeft een wortel;
   (b) Ieder derdegraads polynoom heeft een wortel.
2. Welke stap(pen) is (zijn) fout in het volgende bewijs (zeg in PA = Peano Rekenkunde) en waarom?

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[y = 0]}{\forall_x(x = 0)}}{(x = 0) \to \forall_x(x = 0)}}{\forall_x((x = 0) \to \forall_x(x = 0))}}{(0 = 0) \to \forall_x(x = 0)}$$

3. Leid de eerste ($\exists$-Introductie) af uit de definitie $\exists_x\varphi \equiv \neg\forall_x\neg\varphi$ en de eerste drie regels in §1.2.
4. Omgekeerd: bewijs (met ND) uit de regels voor $\exists$ en de regels voor $\forall$ dat $\forall_x\neg\varphi(x) \vdash \neg\exists_x\varphi(x)$, waarbij $x \in FV(\varphi)$.

Opgaven voor Week 9 (Inleveropgaven: 3, 6)

1. Bewijs (met ND) dat $\vdash \forall_x\varphi(x) \to \forall_x\varphi(y)$, waarbij $x \in FV(\varphi)$.
2. Bewijs (met ND) dat $\vdash \forall_x\forall_y\varphi(x, y) \to \forall_y\forall_x\varphi(x, y)$, waarbij $\{x, y\} \subset FV(\varphi)$.
3. Bewijs (met ND) dat $\vdash \forall_x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall_x\psi(x))$, waarbij $x \in FV(\psi)$.
4. We kunnen PA ook opzetten zonder de functie S maar met een extra constante 1, dus $\mathrm{con}(PA) = \{0, 1\}$ en $\mathrm{fun}(PA) = \{+, \times\}$. Herschrijf de axioma's van PA met deze symbolen.
5. Schrijf het bewijs van (1.18) netjes uit.
6. (a) Bewijs in PA dat voor alle termen s, t geldt $PA \vdash S(t) + s = S(t + s)$.
   (b) Bewijs daaruit (en uit $PA \vdash 0 + x = x$) dat $PA \vdash t + s = s + t$.

1.5 Semantiek en waarheid (aanvulling op §2.3 in Moerdijk & van Oosten)

In de propositielogica was een interpretatie van een taal L, die in dat geval wordt bepaald door de verzameling van atomaire proposities (oftewel relatiesymbolen van ariteit nul) $S \equiv \mathrm{rel}(L) = \{p_1, p_2, \ldots\}$, hetzelfde als een afbeelding $v : \mathrm{rel}(L) \to \{0,1\}$, die vervolgens werd opgewaardeerd tot een *valuatie* $V : BT(S) \to \{0,1\}$. Hierbij is $BT(S)$ de verzameling van alle formules over S (die in **PL** samenvallen met de uitspraken). We zeggen dan dat een uitspraak *waar is ten opzichte van een gegeven valuatie* V als $V(\varphi) = 1$, notatie $V \vDash \varphi$, en (in absolute zin) *waar* als $V \vDash \varphi$ voor alle valuaties V. De absoluut ware uitspraken van de propositielogica zijn dus de tautologieën, en die vallen volgens de Volledigheidsstelling van de propositielogica precies samen met de bewijsbare uitspraken. Als we uitgaan van een theorie $\Sigma \subset BT(S)$, dan heet een valuatie V een *model* van Σ als $V(\sigma) = 1$ voor alle $\sigma \in \Sigma$, en geldt volgens de Volledigheidsstelling $\Sigma \vdash \varphi$, i.e. φ is afleidbaar uit Σ desda φ waar is in alle modellen van Σ.

Dit verhaal willen we nu uitbreiden tot predikaatlogica. Deze uitbreiding gaat er helaas van uit dat de verzamelingen al gedefinieerd zijn; in een strict logische opbouw zouden we dus moeten beginnen met axiomatische verzamelingenleer, maar dit is didactisch geen goed idee. Hoe dan ook wordt de ene afbeelding $v : \mathrm{rel}(L) \to \{0,1\}$ uit de propositielogica vervangen door een L*-structuur*, bestaande uit:

- Een niet-lege verzameling M (genaamd de *drager* van de L-structuur);
- Een afbeelding $\mathrm{con}(L) \to M$, genoteerd $c \mapsto c^M$ (soms $[[c]]_L$), dus $c^M \in M$;
- Een afbeelding $f \mapsto f^M$ (etc.) die $f \in \mathrm{fun}(L)$ afbeeldt op een 'echte' functie $f^M : M^{a(f)} \to f$;
- Een afbeelding $R \mapsto R^M$ (etc.) die $R \in \mathrm{rel}(L)$ afbeeldt op een deelverzameling $R^M \subset M^{a(R)}$.

Als $a(R) = 0$, dan interpreteren we M^0 als een singleton $\{*\}$, en hebben we dus $R^M \subset \{*\}$. De enige twee deelverzamelingen van $\{*\}$ zijn $\{*\}$ zelf en de lege verzameling $\emptyset$. Als $R^M = \emptyset$ noteren we $R^M = 0$, en als $R^M = \{*\}$ schrijven we $R^M = 1$. In dat geval is de afbeelding $R \mapsto R^M$ dus feitelijk een valuatie v, zodat in **PL** (waarin $\mathrm{con}(L) = \mathrm{fun}(L) = \emptyset$) een L-structuur niets anders is dan een valuatie. Het eenvoudigste voorbeeld voor **PA** is uiteraard $M = \mathbb{N}$, $0^{\mathbb{N}} = 0$, en $+$ en $\times$ worden geïnterpreteerd als optelling en vermenigvuldiging (er zijn echter andere, 'niet-standaard' interpretaties van **PA**!).

We moeten nu de stap van v naar V in **PL** generaliseren, i.e., een interpretatie geven van willekeurige formules. Het resultaat zal zijn dat uitspraken ook nu de waarde 0 of 1 krijgen. We beginnen met termen:

1. De interpretatie c^M van een constante $c \in \mathrm{con}(L)$ is $c^M \in M$, zie boven.
2. De interpretatie x^M van iedere variabele $x \in \mathrm{var}(L)$ is de identiteit $\mathrm{id} : M \to M$.
3. Uit deze twee regels en de volgende volgt dat de interpretatie t^M van een term t een functie $t^M : M^l \to M$ is, waarbij l het aantal (verschillende) vrije variabelen in t is (voor $t \equiv c$ is dat dus $l = 0$ en voor $t \equiv x$ is het $l = 1$). Voor $l = 0$ lezen we $t^M : M^0 \to M$ als $t^M \in M$ (dit klopt qua notatie, omdat $M^0 = \{*\}$ en $t^M : \{*\} \to M$ kan worden geïdentificeerd met het beeld $t^M(*) \in M$).
4. De interpretatie van een term $f(t_1, \ldots, t_n)$, waar $f \in \mathrm{fun}(L)$ en $a(f) = n$, hangt af van het aantal vrije variabelen in $f(t_1, \ldots, t_n)$; we weten uit (1.3) dat $FV(f(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$. Als $FV(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{x_1, \ldots, x_l\}$, dan geldt dus $FV(t_i) \subset \{x_1, \ldots, x_l\}$.

   We herinterpreteren nu iedere term t_i als een functie $\tilde{t}_i^M : M^l \to M$ (terwijl i.h.a. $t_i^M : M^{l_i} \to M$ met $l_i \leq l$) door $\tilde{t}_i^M$ onafhankelijk te maken van de variabelen waar t^M niet van afhangt. Stel bijvoorbeeld dat $FV(t_1) = \{x_2, x_3\}$ en $FV(t_2) = \{x_1, x_2\}$, met interpretaties $t_1^M : M^2 \to M$ en $t_2^M : M^2 \to M$, dan is $\tilde{t}_1^M : M^3 \to M$ met $\tilde{t}_1^M(m_1, m_2, m_3) = t_1^M(m_2, m_3)$ en $\tilde{t}_2^M : M^3 \to M$ met $\tilde{t}_2^M(m_1, m_2, m_3) = t_1^M(m_1, m_2)$. Als toevallig $FV(t_1) = \cdots = FV(t_n)$, dan geldt uiteraard $\tilde{t}_i^M = t_i^M$, ook als $FV(t_i) = \emptyset$ voor alle i, in welk geval $t_i^M \in M$.

   Ten slotte is de interpretatie $f(t_1, \ldots, t_n)^M : M^l \to M$ gedefinieerd als de compositie

$$M^l \xrightarrow{(\tilde{t}_1^M, \ldots, \tilde{t}_n^M)} M^n \xrightarrow{f^M} M; \tag{1.19}$$

$$f(t_1, \ldots, t_n)^M = f^M \circ (\tilde{t}_1^M, \ldots, \tilde{t}_n^M), \tag{1.20}$$

   waarbij $(\tilde{t}_1^M, \ldots, \tilde{t}_n^M) : M^l \to M^n$ de functie is die $\vec{m} \in M^l$ afbeeldt op $(\tilde{t}_1^M(\vec{m}), \ldots, \tilde{t}_n^M(\vec{m})) \in M^n$.

   Een speciaal geval is $t_i \equiv x_i$; dan is $n = l$ en is $\tilde{x}_i^M : M^n \to M$ de projectie op de i'de coördinaat, zodat $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) : M^n \to M^n$ de identiteit is. Er volgt dus dat $f(x_1, \ldots, x_n)^M : M^n \to M$ gelijk is aan f^M. Of neem $n = 1$ (zodat $f^M : M \to M$) en $t_1 = c$; dan is $f(c)^M \in M$ gelijk aan

$f^M(c^M)$. Als gemengd voorbeeld: de interpretatie $f(c,x)^M$ is de functie $M \to M$ gegeven door $f(c,x)^M(m) = f^M(c^M, m)$, ga na.

We interpreteren nu *formules*. Een formule $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ met l vrije variabelen $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_l\}$ heeft als interpretatie een deelverzameling $\varphi^M \subset M^l$; als $l = 0$, en φ dus een uitspraak is, beschouwen we net als eerder $\varphi^M \subset M^0$ als het getal 0 of 1; als $\varphi^M = 0$ (i.e. $\varphi = \emptyset$), dan is φ *onwaar* in de gegeven interpretatie en noteren we $M \nvDash \varphi$, en als $\varphi^M = 1$ (i.e. $\varphi = M^0$), dan is φ *waar* in de gegeven interpretatie en noteren we $M \vDash \varphi$ (waarbij M staat voor de hele interpretatie, niet slechts voor de drager M).

We beginnen met de atomaire formules:

- De interpretatie van $\perp$ (als formule zonder vrije variabelen i.e. uitspraak) is 0, dus
$$M \nvDash \perp. \tag{1.21}$$
- De interpretatie $(s = t)^M \subset M^n$ van $s = t$ (met $FV(s = t) = FV(s) \cup FV(t)$) is de verzameling
$$(s = t)^M = \{\vec{m} \in M^n \mid \tilde{s}^M(\vec{m}) = \tilde{t}^M(\vec{m})\}. \tag{1.22}$$
Als $n = 0$, i.e. $FV(s) = FV(t) = \emptyset$, geldt (als elementen van M):
$$M \vDash (s = t) \text{ desda } s^M = t^M. \tag{1.23}$$
- De interpretatie van $R(t_1, \ldots, t_n)$, met $FV(R(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$, is
$$R(t_1, \ldots, t_n)^M = \{\vec{m} \in M^l \mid (\tilde{t}_1^M(\vec{m}), \ldots, \tilde{t}_n^M(\vec{m})) \in R^M\}, \tag{1.24}$$
waarbij $R^M \subset M^n$ en we dezelfde notatie als boven gebruiken. Als $l = 0$ en dus $t_i^M \in M$, dan is
$$M \vDash R(t_1, \ldots, t_n) \text{ desda } (t_1^M, \ldots, t_n^M) \in R^M. \tag{1.25}$$

Nu de algemene formules:

- De interpretatie van $\varphi \to \psi$ berust op een soortgelijke notatie als voor termen: we weten dat $FV(\varphi \to \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$. Als $\varphi^M \in M^{l_1}$ en $\psi^M \in M^{l_2}$, en $FV(\varphi \to \psi) = \{x_1, \ldots, x_l\}$, dan definiëren we $\tilde{\varphi}^M \subset M^l = M^{l_1} \times M^{l-l_2}$ als $\varphi^M \times M^{l-l_1}$, en analoog $\tilde{\psi}^M \subset M^l$.
Als bijvoorbeeld $\varphi = \varphi(x_1)$ en $\psi = \psi(x_1, x_2)$, zodat $FV(\varphi \to \psi) = \{x_1, x_2\}$, dan is $\tilde{\varphi}^M \subset M^2$ gelijk aan $\tilde{\varphi}^M = \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 \in \varphi^M\}$ terwijl $\tilde{\psi}^M = \psi^M \subset M^2$. Dit is letterlijk dezelfde notatie als voor termen als we in plaats van deelverzamelingen $\varphi^M \subset M^{l_1}$ werken met de bijbehorende karakteristieke functies $1_{\varphi^M} : M^{l_1} \to \{0,1\}$ (i.e. $1_{\varphi^M}(\vec{m}) = 1$ desda $\vec{m} \in \varphi^M$). In dat geval is $1_{\tilde{\varphi}^M} : M^n \to \{0,1\}$ de uitbreiding van 1_{φ^M} van M^{l_1} naar M^l die niet van de $l - l_1$ variabelen afhangt waar 1_{φ^M} niet van afhing (dus in het voorbeeld is $1_{\tilde{\varphi}^M}(m_1, m_2) = 1_{\varphi^M}(m_1)$).
De verzameling $(\varphi \to \psi)^M \subset M^l$ is dan gedefinieerd als
$$(\varphi \to \psi)^M = \{\vec{m} \in M^l \mid \vec{m} \in \tilde{\varphi}^M \Rightarrow \vec{m} \in \tilde{\psi}^M\} = (M^l \backslash \tilde{\varphi}^M) \cup \tilde{\psi}^M. \tag{1.26}$$
Voor $l = 0$ hebben we dus
$$M \vDash (\varphi \to \psi) \text{ desda } (M \vDash \varphi) \Rightarrow (M \vDash \psi), \tag{1.27}$$
aangezien het rechterlid is: $\varphi^M = 1 \Rightarrow \psi^M = 1$ en dit is precies het middendeel van (1.26).
- Met $\psi \equiv \perp$ en dus $\varphi \to \perp \equiv \neg\varphi$ volgt uit (1.26)
$$(\neg\varphi)^M = M^l \backslash \varphi^M, \tag{1.28}$$
met opnieuw als speciaal geval $l = 0$, dat ook direct uit (1.27) volgt:
$$M \vDash \neg\varphi \text{ desda } M \nvDash \varphi, \tag{1.29}$$
aangezien de implicatie "$(M \vDash \varphi) \Rightarrow$ onwaar" alleen juist is als $M \vDash \varphi$ onwaar is. Analoog:
$$M \vDash (\varphi \vee \psi) \text{ desda } (M \vDash \varphi) \text{ of } (M \vDash \psi); \tag{1.30}$$
$$M \vDash (\varphi \wedge \psi) \text{ desda } (M \vDash \varphi) \text{ en } (M \vDash \psi). \tag{1.31}$$

- De interpretatie van $\forall_x \varphi(x)$ en $\exists_x \varphi(x)$: stel dat $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_l\}$, dan is

$$(\forall_{x_1} \varphi)^M = \{(m_2, \ldots, m_l) \in M^{l-1} \mid \forall_{m_1} \in M : (m_1, m_2, \ldots, m_l) \in \varphi^M\}; \tag{1.32}$$
$$(\exists_{x_1} \varphi)^M = \{(m_2, \ldots, m_l) \in M^{l-1} \mid \exists m_1 \in M : (m_1, m_2, \ldots, m_l) \in \varphi^M\}. \tag{1.33}$$

  Als $FV(\varphi) = \{x\}$, dan geldt dus $M \vDash \forall_x \varphi(x)$ desda $\forall_{m \in M} : m \in \varphi^M$, en analoog $M \vDash \exists \varphi(x)$ desda $\exists_{m \in M} : m \in \varphi^M$, zodat

$$M \vDash \forall_x \varphi(x) \text{ desda } \varphi^M = M; \tag{1.34}$$
$$M \vDash \exists_x \varphi(x) \text{ desda } \varphi^M \neq \emptyset. \tag{1.35}$$

  Dit kan ook meer fancy worden opgeschreven als (zie syllabus)

$$M \vDash \forall_x \varphi(x) \text{ desda voor alle } m \in M \text{ geldt } M \vDash \varphi[m/x]; \tag{1.36}$$
$$M \vDash \exists_x \varphi(x) \text{ desda er bestaat } m \in M \text{ geldt } M \vDash \varphi[m/x], \tag{1.37}$$

  waarbij $m \in M$ formeel als een constante wordt beschouwd die aan $\mathrm{con}(L)$ is toegevoegd (met als interpretatie $m^M = m$), zodat de substitutie $\varphi[m/x]$ is gedefinieerd (N.B. $FV(\varphi[m/x]) = \emptyset$).

Stel nu dat we, net als in de propositielogica, een theorie Σ hebben in de taal L, i.e., een verzameling uitspraken (denk aan de lijst axioma's van **PA**). Dan heet de gegeven L-structuur op M een *model* van Σ als $M \vDash \sigma$ voor alle $\sigma \in \Sigma$, i.e. alle axioma's van Σ zijn waar in de gegeven interpretatie. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de gebruikelijke interpretatie van **PA** in $\mathbb{N}$, waarin $M = \mathbb{N}$, $0^{\mathbb{N}} = 0$, $S^{\mathbb{N}}(m) = m + 1$, $+^{\mathbb{N}}(n, m) = n + m$, en $\times^{\mathbb{N}}(n, m) = n \times m$. Er bestaan ook andere modellen van **PA**, maar die kom je in de praktijk niet tegen, en dit is een groot verschil met bijvoorbeeld groepentheorie: een model van de axioma's van een groep is niets anders dan een groep in de gebruikelijke zin van het woord, i.e. een verzameling met een groepsstructuur (en daar zijn in de praktijk vele voorbeelden van).

Als $M \vDash \varphi$ in alle modellen M van een gegeven theorie Σ, dan noteren we $\Sigma \vDash \varphi$; we zullen later zien dat $\Sigma \vDash \varphi$ desda $\Sigma \vdash \varphi$. Met $\Sigma = \emptyset$ hebben we als speciaal geval $\vDash \varphi$; dit zijn als het ware de tauologieën van de eerste-orde logica, die in alle L-structuren (i.e. interpretaties van een gegeven taal L) gelden.

Opgaven voor Week 10 (Inleveropgaven: 1, 3)

1. Voor willekeurige L-structuren M en N definiëren we een *homomorfisme* tussen deze structuren als een functie $\alpha : M \to N$ die voldoet aan $\alpha(c^M) = c^N$ en $\alpha(f^M(\vec{m})) = f^N(\alpha^n(\vec{m}))$, met $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, en $\alpha^n : M^n \to N^n$ is gedefinieerd als $\alpha^n(m_1, \ldots, m_n) = (\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_n))$; als er relatiesymbolen zijn, moet tevens gelden $\alpha^n(R^M) \subset R^N$.

   Stel dat $\mathrm{rel}(L) = \emptyset$ (in welk geval L een *algebraïsche theorie* heet). Dan heeft L een canonieke L-structuur waarin M bestaat uit alle termen van L. Bedenk wat deze is. Deze L-structuur komt met een gratis afbeelding $\iota : \mathrm{var}(L) \to M$ (welke?). Laat zien dat deze L-structuur universeel is in de zin dat voor iedere L-structuur op een verzameling N met een afbeelding $\alpha : \mathrm{var}(L) \to N$, er een uniek homomorfisme $\alpha' : M \to N$ bestaat met de eigenschap $\alpha' \circ \iota = \alpha$.
2. Bekijk de volgende vreemde interpretatie van **PA**: $M = \mathbb{Q}^+$ (i.e. de positieve rationale getallen inclusief nul): $0^{\mathbb{Q}^+} = 0$, $S^{\mathbb{Q}^+}(m) = m + 1$, $+^{\mathbb{Q}^+}(n, m) = n + m$, en $\times^{\mathbb{Q}^+}(n, m) = n \times m$. Is dit een model van **PA**? Zo nee, waarom niet?
3. Laat voor atomaire formules φ van de vorm $s = t$ en $R(t_1, \ldots, t_n)$ met één vrije variabele x zien dat $\varphi^M = M$ desda voor alle $m \in M$ geldt $M \vDash \varphi[m/x]$ (zie uitleg onder (1.37)). Begin met de eenvoudigste termen en bouw het bewijs zo op. Bewijs onderweg zaken als $t[m/x]^M = t^M(m)$.
4. Stel $FV(\varphi) = \{x\}$, dus $\varphi \equiv \varphi(x)$. Laat zien dat $\vDash \neg\forall_x \varphi(x)$ desda $\vDash \exists_x \neg\varphi(x)$.
5. Laat zien dat $\vDash \forall_x \exists_y (x = y)$.

1.6 Volledigheidsstelling van Gödel

Eerste-orde logica is net als propositielogica zowel gezond als volledig, i.e. voor alle uitspraken φ geldt

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ desda } \Sigma \vDash \varphi \tag{1.38}$$

De implicatie van links naar rechts, i.e. de gezondheid van de logica, kan op analoge wijze worden bewezen als voor propositielogica,[10] met de volgende nieuwe ingrediënten. Er zijn vier nieuwe axioma's:

EOL1: $(\forall_x \varphi(x)) \to \varphi[t/x]$ voor een willekeurige term t als $x \in FV(\varphi)$ (en de substitutie is toegestaan);
EOL2: $(\forall_x(\varphi \to \psi(x))) \to (\varphi \to \forall_x \psi(x))$ als $x \notin FV(\varphi)$ en $x \in FV(\psi)$;
EOL3: $\forall_x(x = x)$;
EOL4: $\forall_x \forall_y((x = y) \to (\varphi(x) \to \varphi[y/x]))$ als $x \in FV(\varphi)$ (en de substitutie is toegestaan).

Daarnaast gelden de drie axioma's van de propositielogica, i.e., voor alle (ook open) formules $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

PL1: $\beta \to (\alpha \to \beta)$;
PL2: $(\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta))$;
PL3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$.

De deductieregels voor formules φ, ψ zijn (de eerste herken je uit de propositielogica):

1. *modus ponens*: uit $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ en $\Gamma \vdash \varphi$ volgt $\Gamma \vdash \psi$, waar Γ een verzameling uitspraken is;
2. *generalisatie*: uit $\Gamma \vdash \varphi(x)$ volgt $\Gamma \vdash \forall_x \varphi(x)$ als $x \in FV(\varphi)$ en de uitspraken in Γ die zijn gebruikt in het bewijs van φ geen enkele aanname over de vrije variabele x bevatten.

De deductiestelling uit de propositielogica, i.e. $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ desda $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, geldt nu onder de voorwaarde dat β open of α gesloten is. Om deze voorwaarde te illustreren nemen we een voorbeeld waarin hier niet aan voldaan is, namelijk $\alpha \equiv \varphi(x)$ en $\beta \equiv \forall_x \varphi(x)$. Dan geldt $\varphi \vdash \forall_x \varphi(x)$, dit is immers de generalisatieregel, maar niet $\vdash (\varphi(x) \to \forall_x \varphi(x))$. Stel dat dit altijd waar zou zijn, dan volgt uit (de nog te bewijzen) eigenschap gezondheid dat $M \vDash (\varphi(x) \to \forall_x \varphi(x))$, hetgeen niet altijd waar is (zie opgave).

Om gezondheid te bewijzen moeten we net als in de propositielogica eerst laten zien dat de axioma's in iedere interpretatie van een willekeurige taal L gelden. Voor **PL1** vinden we voor $l > 0$:

$$(\beta \to (\alpha \to \beta))^M = (M^l \backslash \tilde{\beta}^M) \cup (\alpha \to \beta)^M = (M^l \backslash \tilde{\beta}^M) \cup (M^l \backslash \tilde{\alpha}^M) \cup \tilde{\beta}^M = M^l, \tag{1.39}$$

zodat $M \vDash \beta \to (\alpha \to \beta)$. Voor $l = 0$ is het bewijs nog eenvoudiger. De andere twee **PL2** en **PL3** gaan net zo. Axioma's **EOL1** en **EOL2** zijn opgaven, en **EOL3** en **EOL4** doen we nu (de eerste is al in het college van vorige week voorgedaan). We hebben $x^M = \mathrm{id} : M \to M$ en volgens (1.22) dus

$$(x = x)^M = \{m \in M \mid m = m\} = M, \tag{1.40}$$

zodat volgens (1.34) geldt $M \vDash \forall_x(x = x)$. Vervolgens berekenen we uit (1.22) en (1.26):

$$\begin{aligned} (x = y)^M &= \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid \tilde{x}^M(m_1, m_2) = \tilde{y}^M(m_1, m_2)\} \\ &= \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 = m_2\} \equiv \Delta_M; \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned} (\varphi(x) \to \varphi[y/x])^M &= (M^2 \backslash \tilde{\varphi}^M) \cup \widetilde{\varphi[y/x]}^M \\ &= (M^2 \backslash (\varphi^M \times M)) \cup (M \times \varphi^M), \end{aligned} \tag{1.42}$$

waarbij voor het gemak aannemen dat $FV(\varphi) = \{x\}$, zodat $\varphi^M \subset M$ (i.e. de interpretatie van $\varphi(x)$). Met opnieuw (1.26) volgt hieruit

$$\begin{aligned} ((x = y) \to (\varphi(x) \to \varphi[y/x]))^M &= (M^2 \backslash \Delta_M) \cup (M^2 \backslash (\varphi^M \times M)) \cup (M \times \varphi^M) \\ &= M^2. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Om het laatste gelijkteken te begrijpen merken we op dat als $(m_1, m_2) \in M^2$ voldoet aan $m_1 \neq m_2$, volgt $(m_1, m_2) \in M^2 \backslash \Delta_M$. Als (m, m) met $m \notin \varphi^M$, dan geldt $(m, m) \in M^2 \backslash (\varphi^M \times M)$. Als ten slotte (m, m) met $m \in \varphi^M$, dan geldt $(m, m) \in M \times \varphi^M$. Altijd raak. Uit (1.34) volgt dan uiteindelijk dat

$$M \vDash \forall_x \forall_y((x = y) \to (\varphi(x) \to \varphi[y/x])). \tag{1.44}$$

10. In de syllabus van Moerdijk en van Oosten wordt dit bewezen vanuit ND, zie §3.2. ND is equivalent met **EOL1** t/m **PL3**.

Vervolgens moeten we aantonen dat de twee deductieregels behouden zijn in ieder model van Σ, dus:

- Als $M \vDash \varphi$ en $M \vDash \varphi \to \psi$, dan volgt $M \vDash \psi$. Dat klopt, zie (1.26) - (1.27). Voor gesloten formules volgt dit onmiddellijk uit (1.27), terwijl voor open formules geldt dat $M \vDash \varphi$ desda $\tilde{\varphi}^M = M^l$ en $M \vDash \varphi \to \psi$ desda $(M^l \backslash \tilde{\varphi}^M) \cup \tilde{\psi}^M = M^l$. Als we beiden hebben volgt $\tilde{\psi}^M = M^l$ en dus $M \vDash \psi$.
- Als $M \vDash \varphi(x)$, dan volgt $M \vDash \forall_x \varphi(x)$. We hadden het symbool $M \vDash \varphi$ eerder alleen voor gesloten formules φ gedefinieerd, en breiden deze definitie nu als volgt uit tot open formules: $M \vDash \varphi(x)$ desda voor alle $m \in M$ geldt dat $M \vDash \varphi[m/x]$, oftewel (zie opgave 3 van vorige week) $\varphi^M = M$.

De gezondheid van eerste-orde logica volgt dan op dezelfde manier als voor propositielogica (inductief).

Opgaven voor Week 11 (Inleveropgaven: 1, 6)

1. Bewijs de deductiestelling: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ desda $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ (als β open of α gesloten is).
2. Toon met behulp van de interpretatieregels aan dat $M \vDash (\varphi(x) \to \forall_x \varphi(x))$ desda $\varphi^M = M$ of $\varphi^M = \emptyset$ (zodat het in andere gevallen niet geldt en een tegenvoorbeeld tegen $\vdash \varphi \to \forall_x \varphi(x)$ is).
3. Laat zien dat $M \vDash (\beta \to (\gamma \to \delta)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \delta))$.
4. Laat zien dat $M \vDash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$.
5. Laat zien dat $M \vDash (\forall_x \varphi(x)) \to \varphi[t/x]$ voor een willekeurige term t als $x \in FV(\varphi)$.
6. Laat zien dat $M \vDash (\forall_x(\varphi \to \psi(x))) \to (\varphi \to \forall_x \psi(x))$ als $x \notin FV(\varphi)$ en $x \in FV(\psi)$.

1.7 Bewijs volledigheid (aanvulling op §3.2 in Moerdijk & van Oosten)

Nu de moeilijke richting: $\Sigma \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash \varphi$, i.e. volledigheid. Precies als in de propositielogica volgt dit uit het speciale geval $\varphi \equiv \bot$, hetgeen equivalent is met: Σ is consistent (i.e. $\Sigma \nvdash \bot$) $\Rightarrow \Sigma$ heeft een model.

In het vervolg is Σ een theorie over een taal L. We werken onder de aanname dat L een aftelbare taal is, in de zin dat $\mathrm{var}(L)$ aftelbaar is en $\mathrm{con}(L)$, $\mathrm{fun}(L)$ en $\mathrm{rel}(L)$ eindige of aftelbare verzamelingen zijn.

Lemma 1.1 *Iedere consistente theorie Σ over L kan worden uitgebreid tot een theorie Σ_W (over een taal $L_W \supset L$) met* getuigen *(witnesses), in de zin dat als $\Sigma_W \vdash \exists_x \varphi(x)$ voor een open formule φ met $\{x\} = FV(\varphi)$, er dan een constante $c \in \mathrm{con}(L_W)$ is zodat $\Sigma_W \vdash (\exists_x \varphi(x)) \to \varphi[c/x]$, en dus $\Sigma_W \vdash \varphi[c/x]$.*

Bewijs. Definieer L_W als L met aftelbaar veel extra constanten $(c_1, \ldots)$ die niet al in $\mathrm{con}(L)$ voorkomen, zodat $\mathrm{con}(L_W) = \mathrm{con}(L) \cup \{c_1, \ldots\}$. Nu maken we een theorie Σ_0 die formeel dezelfde axioma's heeft als Σ (i.e. $\Sigma_0 = \Sigma$), maar voor zover deze axioma's willekeurige formules bevatten mogen die formules nu ook de nieuwe constanten bevatten, zodat de nieuwe (= de oude) axioma's nu wel meer inhoud hebben.

De nieuwe theorie (Σ_0, L_W) is nog steeds consistent. Stel van niet, dan hebben we $\Sigma_0 \vdash \bot$ en dus $\Sigma_0 \vdash (\beta \wedge \neg\beta)$ voor een willekeurige formule β; iedere propositie volgt namelijk uit $\bot$. Dan bevat β eindig veel nieuwe constanten c_i (zo niet, dan was $\beta \wedge \neg\beta$ al afleidbaar in (Σ, L) maar die was per aanname consistent). Vervang deze constanten door variabelen y_i die niet voorkomen in een bepaald bewijs van $\beta \wedge \neg\beta$ en gebruik Gen: dan krijg je $\forall_{y_1} \cdots \forall_{y_n} \beta[y_i/c_i] \wedge \neg\beta[y_i/c_i]$. Dan is dat bewijs nog steeds geldig: in de regels om termen en formules te maken spelen variabelen en constanten precies dezelfde rol, en in de regels voor bewijzen ligt het enige verschil in het gebruik van $\forall_x$. Het bewijs (met de c_i) bevatte echter nergens $\forall_{y_i}$ en blijft dus geldig als $c_i \rightsquigarrow y_i$. De formule $\forall_{y_1} \cdots \forall_{y_n} \beta[y_i/c_i] \wedge \neg\beta[y_i/c_i]$ is dus bewijsbaar in (Σ, L), maar die theorie was consistent. Tegenspraak. Dus (Σ_0, L_W) is consistent.

Omdat L en daarmee ook L_W aftelbaar is, is de verzameling van alle formules in L_W aftelbaar (ga na) en kunnen we deze opsommen. Dit geldt ook voor de formules met één vrije variabele: $(\varphi_1(x_{i_1}), \varphi_2(x_{i_2}), \ldots)$. We nemen aan dat x_{i_n} niet ook nog ergens gebonden voorkomt in φ_i. Hernummer nu de nieuwe constanten als $(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots)$, zodanig dat c_{j_k} niet voorkomt in de formules φ_1 t/m φ_k. Dan maken we

$$\sigma_k \equiv (\exists_{x_{i_k}} \varphi(x_{i_k})) \to \varphi_k[c_{j_k}/x_{i_k}]. \tag{1.45}$$

Definieer nu $\Sigma_n = \Sigma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ and $\Sigma_W = \cup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$. Het is duidelijk dat Σ_W getuigen heeft en we bewijzen nu dat iedere Σ_n consistent is, waaruit volgt dat ook Σ_W consistent is. Waarom? Omdat een bewijs van inconsistentie $\Sigma_W \vdash \bot$ slechts eindig veel stappen heeft, daarmee eindig veel σ_i bevat, en dus feitelijk een bewijs van $\Sigma_n \vdash \bot$ is. Maar Σ_n was consistent, zoals we nu gaan bewijzen met inductie in n. Het geval $n = 0$ is net gedaan. De inductiestap gaat met tegenspraak. Stel Σ_{n-1} is consistent maar Σ_n is dat niet. Dan is er een bewijs van $\Sigma_n \vdash \bot$ en dus van iedere formule β, dus ook van $\Sigma_n \vdash \neg\sigma_n$. Maar $\Sigma = \Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_n\}$ en σ_n is gesloten, zodat we de deductiestelling mogen toepassen:

$$\Sigma_{n-1} \cup \{\sigma_n\} \vdash \neg\sigma_n \;\Rightarrow\; \Sigma_{n-1} \vdash (\sigma_n \to \neg\sigma_n). \tag{1.46}$$

In propositielogica en daarmee in predikaatlogica geldt de tautologie (opgave)

$$\vdash (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha. \tag{1.47}$$

MP op (1.46) en (1.47) geeft $\Sigma_{n-1} \vdash \neg\sigma_n$. Met de definitie (1.45) is dit:

$$\Sigma_{n-1} \vdash \neg((\exists_{x_{i_n}} \varphi_n(x_{i_n})) \to \varphi_n[c_{j_n}/x_{i_n}]). \tag{1.48}$$

Nu volgt uit $\Sigma \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ zowel $\Sigma \vdash \alpha$ als $\Sigma \vdash \neg\beta$ (opgave), zodat

$$\Sigma_{n-1} \vdash \exists_{x_{i_n}} \varphi(x_{i_n}); \tag{1.49}$$

$$\Sigma_{n-1} \vdash \neg\varphi_n[c_{j_n}/x_{i_n}]. \tag{1.50}$$

Merk nu op dat Σ_{n-1} de variabele c_{j_n} niet bevat (omdat noch Σ, noch σ_1 t/m σ_{n-1} deze bevat). Door overal c_{j_n} door een variabele y_n te vervangen die nergens in het bewijs van $\neg\varphi_n[c_{j_n}/x_{i_n}]$ uit Σ_{n-1} voorkwam, wordt dit bewijs een bewijs van $\neg\varphi_n[y_n/x_{i_n}]$ uit Σ_{n-1}, zodat

$$\Sigma_{n-1} \vdash \neg\varphi_n[y_n/x_{i_n}]. \tag{1.51}$$

Generalisatie geeft $\Sigma_{n-1} \vdash \forall_{y_n} \neg\varphi_n[y_n/x_{i_n}]$, en omdat x_{i_n} alleen open voorkomt (zie boven) geeft dat

$$\Sigma_{n-1} \vdash \forall_{x_{i_n}} \neg\varphi_n(x_{i_n}). \tag{1.52}$$

Met $\exists \equiv \neg\forall\neg$ impliceert (1.49) - (1.50) dus de tegenspraak

$$\Sigma_{n-1} \vdash \neg\forall_{x_{i_n}} \neg\varphi_n(x_{i_n}); \tag{1.53}$$
$$\Sigma_{n-1} \vdash \forall_{x_{i_n}} \neg\varphi_n(x_{i_n}). \tag{1.54}$$

Hieruit volgt dat de aanname dat Σ_n inconsistent is tot een tegenspraak leidt, zodat Σ_n consistent is. Daarmee is Lemma 1.1 bewezen. Q.E.D.

Vervolgens kan iedere consistente theorie worden uitgebreid tot een *complete* theorie Σ_C, die per definitie de eigenschap heeft dat voor iedere uitspraak φ geldt dat ofwel $\Sigma_C \vdash \varphi$ ofwel $\Sigma_C \vdash \neg\varphi$. Het bewijs hiervan is precies hetzelfde als in propositielogica (zie bewijs Lemma 1.2 op p. 8). Kort samengevat: we zetten $\Sigma_0 = \Sigma$. Als α_1 consistent is met Σ_0, dan is $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\alpha_1\}$. Zo niet, dan is $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\neg\alpha_1\}$. Als α_2 consistent is met Σ_1, dan is $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\alpha_2\}$. Zo niet, dan is $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\neg\alpha_2\}$. Enzovoort: we gaan alle α_i af, en krijgen een theorie $\Sigma_\infty = \cup_n \Sigma_n \subset BT(S)$ die Σ bevat. De theorie Σ_∞ is consistent.

Hierbij blijft de taal L van Σ hetzelfde. Als we deze twee uitbreidingsconstructies in de juiste volgorde combineren, namelijk door eerst Σ uit te breiden tot Σ_W en vervolgens tot $(\Sigma_W)_C \equiv \Sigma_{WC}$, volgt dat iedere consistente theorie Σ een uitbreiding Σ_{WC} heeft die zowel getuigen heeft als volledig is.

Lemma 1.2 *Iedere complete consistente theorie Σ_{WC} met getuigen heeft een model.*

Het bewijs is eenvoudiger en beter te begrijpen als we eerst een eerste-orde theorie zonder gelijkteken = bekijken. Daarna zullen we de constructie aanpassen om ook formules van de soort $s = t$ mee te nemen.

We nemen als drager M van het model de verzameling van alle *gesloten* termen over L (i.e. termen zonder vrije variabelen). De interpretatie is dan

$$c^M = c \quad (c \in \mathrm{con}(L)); \tag{1.55}$$
$$x^M = \mathrm{id} : M \to M \quad (x \in \mathrm{var}(L)); \tag{1.56}$$
$$f^M(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n) \quad (f \in \mathrm{fun}(L), n = a(f)); \tag{1.57}$$
$$(t_1, \dots, t_n) \in R^M \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash R(t_1, \dots, t_n) \quad (R \in \mathrm{rel}(L), n = a(R) > 0); \tag{1.58}$$
$$M \vDash R \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash R \quad (R \in \mathrm{rel}(L), a(R) = 0). \tag{1.59}$$

waarbij we in herinnering brengen dat c zelf een gesloten term is, (1.56) waar is in ieder model, en in (1.57) geldt dat als $(t_1, \dots, t_n)$ (gesloten) termen zijn, dan ook $f(t_1, \dots, t_n)$ weer een (gesloten) term is.

Om enig gevoel voor dit model te krijgen merken we op dat voor alle $t \in M$ geldt:

$$t^M = t. \tag{1.60}$$

Let op: als een term t gesloten is, is de interpretatie t^M per definitie een element van M. Vgl. (1.60) volgt uit (1.55) - (1.57) en inductie in het aantal (N) functiesymbolen in t. Voor $N = 0$ is (1.60) duidelijk uit (1.55) - (1.57), en voor $N > 0$ hebben we, met $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$f(t_1, \dots, t_n)^M = f^M(t_1^M, \dots, t_n^M) = f^M(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n), \tag{1.61}$$

Hier is het eerste = teken een speciaal geval van (1.20), waarbij $\tilde{t}_i = t_i \in M$ (omdat de t_i geen vrije variabelen bevatten), is de tweede = de inductiehypothese, en volgt de derde = uit (1.57).

De cruciale eigenschap van dit model is, voor alle uitspraken φ:

$$M \vDash \varphi \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash \varphi. \tag{1.62}$$

Hieruit volgt de volledigheidsstelling, want als $\sigma \in \Sigma \subset \Sigma_{WC}$, dan triviaal $\Sigma_{WC} \vdash \sigma$ en volgens (1.62) dus $M \vDash \sigma$. Daarmee is M per definitie een model van Σ.

Het bewijs van (1.62) gaat met inductie in het aantal (N) logische symbolen van de vorm $\to$ en $\forall$. Voor $N = 0$ stellen we het geval $s = t$ zoals gezegd uit (het is dan ook niet waar in dit model), en is $\varphi \equiv \perp$ triviaal (contrapositief van (1.62)). We hoeven dus alleen te laten zien dat

$$M \vDash R(t_1, \ldots, t_n) \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash R(t_1, \ldots, t_n). \tag{1.63}$$

In een willekeurige interpretatie betekent het linkerlid per definitie: $(t_1^M, \ldots, t_n^M) \in R^M$. Dit klopt in het huidige model vanwege (1.60) en (1.58). Voor $n = 0$ volgt (1.63) natuurlijk direct uit (1.59).

Neem nu $N > 0$. We moeten om de inductiestap te bewijzen aantonen dat:

1. Aangenomen dat (1.62) geldt voor $\varphi \rightsquigarrow \alpha$ en $\varphi \rightsquigarrow \beta$, dan ook geldt

$$M \vDash (\alpha \to \beta) \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash (\alpha \to \beta). \tag{1.64}$$

2. Aangenomen dat (1.62) geldt voor $\varphi \rightsquigarrow \psi$ (zie onder voor de precieze versie), dan ook geldt

$$M \vDash \forall_x \psi(x) \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash \forall_x \psi(x). \tag{1.65}$$

We behandelen de tweede en geven de eerste als (inlever) opgave.

Stel $M \vDash \forall_x \psi(x)$. Dan volgt uit opgave 5 van vorige week dat $M \vDash \psi[t/x]$ voor iedere gesloten term t. We willen $M \vdash \forall_x \psi(x)$; stel dat dit niet zo is. Omdat Σ_{WC} volledig is, geldt dan $M \vdash \neg\forall_x \psi(x)$ en dus $M \vdash \exists_x \neg\psi(x)$. Omdat Σ_{WC} getuigen heeft, geldt dan ook $M \vdash \neg\psi[c/x]$ voor een zekere constante c. Neem boven $t \rightsquigarrow c$ en we hebben een tegenspraak (N.B. we weten dat Σ_{WC} consistent is).

De andere kant op: stel $M \vdash \forall_x \psi(x)$. Dan geeft axioma **EOL1** $M \vdash \psi[t/x]$ voor een willekeurige gesloten term t. De inductiehypothese geeft $M \vDash \psi[t/x]$ oftewel $t^M \in \psi^M \subset M$ voor alle gesloten termen t. In het huidige model geldt (1.60) en bestaat M uit alle gesloten termen t, zodat $t^M \in \psi^M \subset M$ voor alle t impliceert $\psi^M = M$. Dit is precies $M \vDash \forall_x \psi(x)$, zie (1.34).

Voor formules $\varphi \equiv (s = t)$ gaat (1.62) echter fout: de eigenschap $M \vDash (s = t)$ is vanwege (1.60) en (1.23) hetzelfde als $s = t$, maar dat is een veel sterkere eigenschap dan $\Sigma_{WC}(s = t)$. Dit is echter makkelijk op te lossen: vervang M door $\tilde{M} = M/\sim$, waarbij $s \sim t$ desda $\Sigma_{WC}(s = t)$. De interpretatie (1.55) - (1.59) wordt dan vervangen door

$$c^{\tilde{M}} = [c] \quad (c \in \mathrm{con}(L)); \tag{1.66}$$

$$x^{\tilde{M}} = \mathrm{id} : \tilde{M} \to \tilde{M} \quad (x \in \mathrm{var}(L)); \tag{1.67}$$

$$f^{\tilde{M}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)] \quad (f \in \mathrm{fun}(L), n = a(f)); \tag{1.68}$$

$$([t_1], \ldots, [t_n]) \in R^{\tilde{M}} \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash R(t_1, \ldots, t_n) \quad (R \in \mathrm{rel}(L), n = a(R) > 0); \tag{1.69}$$

$$\tilde{M} \vDash R \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash R \quad (R \in \mathrm{rel}(L), a(R) = 0). \tag{1.70}$$

Dit is allemaal welgedefinieerd. Nu geldt

$$\tilde{M} \vDash \varphi \text{ desda } \Sigma_{WC} \vdash \varphi. \tag{1.71}$$

per constructie voor $\varphi \equiv (s = t)$ en ook het vorige bewijs gaat helemaal door: $\tilde{M}$ geeft een model van Σ_{WC} en daarmee ook van de oorspronkelijke theorie Σ.

Opgaven voor Week 12 (Inleveropgave: 3)

1. Bewijs (1.47).
2. Bewijs dat uit $\Sigma \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ zowel $\Sigma \vdash \alpha$ als $\Sigma \vdash \neg\beta$ volgt.
3. Bewijs (1.64).
4. Laat zien dat (1.66) - (1.70) welgedefinieerd zijn.

Uitwerkingen:

Uitwerkingen week 10:

1. Neem $c^M = c$ en $f^M = f$, met $\iota(x) = x$. Dan is de functie $\alpha' : M \to N$ inductief gedefinieerd door $\alpha'(x) = \alpha(x)$, $\alpha'(c) = c^N$, en $\alpha'(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^N(\alpha'(t_1), \ldots, \alpha'(t_n))$. Uniek per constructie.
2. Geen model van **PA**, alleen het laatste axioma **PA**7 geldt niet in deze interpretatie.
3. Eerst bewijs dat $t[m/x]^M = t^M(m)$. Voor $t \equiv c$ is $t[m/x]$ gelijk aan c omdat x niet voorkomt, dan staat er dus $c^M = c^M$. Voor $t \equiv x$ staat er $m^M = \mathrm{id}(m)$ i.e. $m = m$ en klopt het dus ook. Stel nu dat $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$; voor iedere t_i is de gevraagde eigenschap al bewezen (inductie). Omdat per aanname $FV(t) = \{x\}$, hangt iedere t_i van x af of heeft geen vrije variabele en geldt dus $\tilde{t}_i : M \to M$. Volgens de regels voor substitutie (zie mijn eigen syllabus) geldt dan voor $m \in M$,

$$t^M(m) = f(t_1, \ldots, t_n)^M(m) = f^M(\tilde{t}_1^M(m), \tilde{t}_n^M(m));$$
$$t[m/x]^M = f(t_1, \ldots, t_n)[m/x]^M = f(t_1[m/x], \ldots, t_n[m/x])^M.$$

   Er zijn nu twee gevallen. Als t_i de vrije variabele x bevat, gebruiken we de inductiehypothese $t_i[m/x]^M = t_i^M(m)$. In dat geval geldt tevens $\tilde{t}_i^M = t_i^M$. Zo niet, dan is er geen substitutie en is $t_i[m/x]$ gelijk aan $t_i \in M$. Dan hangt $\tilde{t}_i^M(m)$ niet van m af (dit is precies de tilde-notatie) en is eveneens gelijk aan $t_i \in M$. In beide gevallen is dus $f^M(\tilde{t}_1^M(m), \tilde{t}_n^M(m)) = f(t_1[m/x], \ldots, t_n[m/x])^M$.

   Stel nu dat $\varphi \equiv (s = t)$. Dan geldt volgens (1.22) dat $\varphi^M = M$ desda $\tilde{s}^M(m) = \tilde{t}^M(m)$ voor alle $m \in M$, terwijl $M \vDash (s = t)[m/x]$ hetzelfde is als $M \vDash (s[m/x] = t[m/x])$, i.e., $s[m/x]^M = t[m/x]^M$ (NB dit is een gelijkheid van elementen van M). Volgens de vorige stap van het bewijs is dit zo desda $s^M(m) = t^M(m)$ indien s en t beide x bevatten, in welk geval tevens $\tilde{s}^M = s^M$ en $\tilde{t}^M = t^M$ en zijn we klaar; de andere twee mogelijkheden (i.e. s hangt niet van x af maar t wel en omgekeerd) gaan net als in de vorige stap.

   Stel ten slotte dat $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$ voor een relatiesymbool R met ariteit $a(R) = n > 0$ (voor $n = 0$ kan R geen vrije variabelen bevatten). We laten de tildes voor het gemak weg, de gevalsonderscheidingen zijn hetzelfde als boven. De conditie $\varphi^M = M$ betekent nu $R(t_1, \ldots, t_n)^M = M$ en dus volgens (1.24): $(t_1^M(m), \ldots t_n^M(m)) \in R^M \subset M^n$ voor alle $m \in M$. De conditie $M \vDash R(t_1, \ldots, t_n)[m/x]$ is per definitie van de substitutie hetzelfde als $M \vDash R(t_1[m/x], \ldots, t_n[m/x])$ en betekent volgens (1.25): $(t_1[m/x]^M, \ldots, t_n[m/x]^M) \in R^M$. Volgens het eerste deel van het bewijs is dit hetzelfde als $(t_1^M(m), \ldots, t_n^M(m)) \in R^M$. Het bewijs is dus rond.
4. We hebben per definitie $\vDash \neg\forall_x\varphi(x)$ desda voor alle M geldt $M \vDash \neg\forall_x\varphi(x)$; uit (1.29) volgt dat dit zo is desda voor alle M geldt $M \nvDash \forall_x\varphi(x)$; volgens (1.34) is dat het geval desda voor alle M geldt $\varphi^M \neq M$. Aan de andere kant: volgens (1.35) geldt $\vDash \exists_x\neg\varphi(x)$ desda voor alle M geldt $(\neg\varphi)^M \neq \emptyset$, volgens (1.28) met $l = 1$ is dit zo desda voor alle M geldt $M \backslash \varphi^M \neq \emptyset$ i.e. $\varphi^M \neq M$.
5. Neem willekeurige interpretatie M. Op college behandeld: de interpretatie van de formule $x = y$ is de diagonaal in M^2, i.e.

$$(x = y)^M = \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 = m_2\} = \{(m, m) \mid m \in M\} \equiv \Delta_M \subset M^2.$$

   Volgens (1.33) is $(\exists_y(x = y))^M \subset M$ gelijk aan de verzameling van alle $m_2 \in M$ waarvoor er $m_1 \in M$ bestaat zodat $(m_1, m_2) \in \Delta_M$, zodat $(\exists_y(x = y))^M = M$. Met $\varphi \rightsquigarrow (\exists_y(x = y))$ in (1.34) volgt dus direct dat $M \vDash \forall_x\exists_y(x = y)$. Hier is M willekeurig, zodat $\vDash \forall_x\exists_y(x = y)$.