

Determinisme onder de kwantummechanica

-Een inbedding en kritische interpretatie van de deterministische theorie onder de kwantummechanica van Gerard 't Hooft-



Bram Wouters
Bachelorwerkstuk
Nijmegen, augustus 2008

“If that were so then physics could only claim the interest of shopkeepers and engineers; the whole thing would be a wretched bungle”

Albert Einstein in een brief aan Erwin Schrödinger (22 december 1950)

Inhoudsopgave

INHOUDSOPGAVE.....	3
INLEIDING	4
DETERMINISME	6
LAPLACE-DETERMINISME	6
TWE VORMEN VAN LAPLACE-DETERMINISME	7
MODIFICATIE VAN LAPLACE-DETERMINISME	8
ONTOLOGISCH EN EPISTEMOLOGISCH DETERMINISME	9
DETERMINISME IN DE KLASSIEKE MECHANICA.....	10
EEN BAL OP EEN OPPERVLAK.....	10
ONEINDIG VEEL BALLEEN OP EEN LIJN.....	12
IN EINDIGE TIJD NAAR HET ONEINDIGE.....	13
DETERMINISME IN DE KWANTUMMECHANICA	16
INTRODUCTIE	16
VON NEUMANN.....	18
VERBORGEN VARIABLEN	19
GO-THEOREMA'S.....	24
NO-GO THEOREMA'S.....	26
<i>Einstein-Podolski-Rosen (EPR)</i>	26
<i>Bell</i>	27
<i>Kochen-Specker (KS)</i>	29
DETERMINISME.....	32
DETERMINISME IN DE KWANTUMMECHANICA VOLGENS GERARD 'T HOOFT ..	34
INTRODUCTIE	34
KWANTUMMECHANISCHE HARMONISCHE OSCILLATOR (1).....	35
KWANTUMMECHANISCHE HARMONISCHE OSCILLATOR (2).....	40
EEN ANDER PROBLEEM EN DE OPLOSSING.....	41
DETERMINISME.....	43
CONCLUSIE.....	46
APPENDIX.....	48
BIBLIOGRAFIE	49

Inleiding

"Alea iacta est" moet Albert Einstein hebben gedacht, toen zijn veelal jongere collega-fysici de klassiek gedetermineerde wereld verlieten, de kolkende rivier van de jaren '20 overstaken en terecht kwamen in een landschap vol onzekerheid en nieuwe fenomenen. De kwantummechanica had in 1927 met de waarschijnlijkheidsinterpretatie van Born en de onzekerheidsrelaties van Heisenberg zijn definitieve verschijningsvorm aangenomen en daarmee het determinisme uit de wereld verbannen. Maar waar velen de empirische successen van de nieuwe fysica bejubelden, bleef Einstein onverschrokken en fundamenteel afkerig van deze theorie. Onze natuur is deterministisch, en de kwantummechanica met haar waarschijnlijkheidsinterpretatie – niets meer dan het gooien van een dobbelsteen – kan daarom niet correct zijn. Voor Einstein was het een incomplete theorie en hij was naarstig op zoek naar een deterministisch alternatief.

Deze vergeefse zoektocht van Einstein is echter niet afschrikwekkend genoeg geweest voor een aantal andere fysici. Ook zij beten zich vast in het probleem van determinisme en kwantummechanica, maar geen van allen zag het uiteindelijke licht. Tegenwoordig is de Nederlandse Nobelprijswinnaar Gerard 't Hooft een van de kopstukken van deze deterministische traditie. Met zijn zoektocht naar een deterministische theorie onder¹ de kwantummechanica treedt hij in de voetsporen van Einstein. In dit werk presenteer ik mijn analyse van deze theorie.

Het doel dat ik nastreef is tweeledig. Ten eerste wil ik de theorie van 't Hooft inbedden in het grotere geheel van de discussie over determinisme en kwantummechanica. Het zal blijken dat ik vanuit deze inbedding uitspraken kan doen over de haalbaarheid en mogelijksvoorwaarden van de ideeën van 't Hooft. Ten tweede wil ik proberen een kritische beschouwing van de theorie zelf te geven: wat probeert de theorie te bewerkstelligen en in hoeverre slaagt zij daarin?

Met het oog op deze doelen is het werk als volgt opgebouwd. Om te weten waar we over praten, moeten we allereerst een notie van determinisme ontwikkelen. Daarna zal ik determinisme in de klassieke mechanica bespreken. Dit leidt tot verrassende inzichten en laat zien dat determinisme binnen de fysica met de nodige voorzichtigheid en nuance moet worden behandeld. Dan gaan we over op de kwantummechanica. Hier bespreek ik de belangrijkste deterministische aspecten en (on)mogelijkheden van de kwantummechanica. Tot slot behandel ik de deterministische theorie van 't Hooft, waarbij ik teruggrijp op het voorgaande en tevens een kritische beschouwing geef.

¹ Waarom ik consequent "onder" gebruik zal hopelijk later duidelijk worden. 't Hooft gebruikt deze term overigens zelf ook af en toe.

Voordat we werkelijk kunnen beginnen, wil ik graag opmerken dat de wijze waarop ik de theorie van 't Hooft weergeef een interpretatie is van deze theorie. Ik heb mij gericht op de elementen die mijns inziens voor dit werk van belang zijn en kan daarom niet garanderen dat dit ook de visie is van 't Hooft zelf.² Ook wil ik graag benadrukken dat ik – ook al leent het onderwerp zich er goed voor – in dit werk géén filosofische standpunten betrek of beschouw. Dit vanwege het feit dat ook 't Hooft in zijn artikelen geen blijk geeft van filosofische pretenties rondom zijn deterministische theorie.

Ik wil mijn begeleider Prof. dr. Klaas Landsman hartelijk bedanken. Regelmatig heeft hij mij een nieuw bos in gestuurd, waar ik telkens opnieuw de bomen met de heerlijkste vruchten ontdekte. Ook bedank ik Prof. dr. Sijbrand de Jong en dr. Michael Müger voor hun hulp bij specifieke problemen. Tot slot bedank ik Prof. dr. Gerard 't Hooft voor de tijd die hij nam om mijn vragen te beantwoorden tijdens het symposium *Fysica 2008*, te Nijmegen.

² Daarvoor verwijs ik naar 't Hooft (2001) en 't Hooft (2006).

Determinismeⁱ

Wegens de grote verscheidenheid aan discussies omtrent determinisme – in combinatie met bijvoorbeeld vrije wil³ en/of goddelijke voorzienigheid – is het van belang dat we ons begrip van determinisme goed afbakenen. Het doel van deze sectie is dan ook het ontwikkelen van een heldere notie van determinisme. Omdat we niet willen afdwalen van ons eigenlijke onderwerp – determinisme binnen de fysica, i.h.b. binnen de kwantummechanica – ontwikkelen we een definitie aan de hand van Laplace' begrip van determinisme.

Laplace-determinisme

Deze notie van determinisme is klassiek, i.e. onafhankelijk van kennis over relativiteitstheorie en kwantummechanica. Veronderstel dat de wereld⁴ – of een geïsoleerd⁵ deel ervan, een systeem – wordt vastgelegd door een verzameling fysische grootheden O , waarvan ieder element een welbepaalde waarde heeft op ieder tijdstip t . Laat de *geschiedenis* H een afbeelding zijn van $\mathfrak{R}$ naar de rij van waarden van fysische grootheden van O , $H : \mathfrak{R} \rightarrow (x^1, x^2, \dots)$ met x^i de waarde van de fysische grootheid $X^i \in O$. Voor ieder tijdstip $t \in \mathfrak{R}$ legt $H(t)$ nu de wereld op tijdstip t vast.

De wereld is *Laplace-deterministisch* t.o.v. O dan en slechts dan als:

voor ieder paar geschiedenissen H_1 en H_2 die gehoorzamen aan de natuurwetten en waarvoor er een $t' \in \mathfrak{R}$ is zodat $H_1(t') = H_2(t')$, tevens geldt dat voor alle $t \in \mathfrak{R}$: $H_1(t) = H_2(t)$.

Merk op dat hierbij verondersteld is dat de tijd t een globale tijd is, i.e. geldig als tijdfunctie op willekeurig welke coördinaat van de wereld. We definiëren deze notie van globale tijd zo dat hij toepasbaar is voor zowel klassieke als relativistische ruimtetijden. Een *globale tijd(functie)* is een afbeelding $t : M \rightarrow \mathfrak{R}$, waarbij M de variëteit van de ruimtetijd is en zodat er voor ieder paar punten $p, q \in M$ met $t(p) < t(q)$ een toekomstgerichte tijddachte

³ Ook Gerard 't Hooft heeft een artikel geschreven dat raakt aan discussies over de vrije wil, zie 't Hooft (2007). We gaan hier niet verder op in.

⁴ Oftewel, het universum dat wordt beschreven door de wetten van de fysica.

⁵ Binnen moderne benaderingen van de kwantummechanica, zoals decoherentie, is volledige isolatie van een systeem problematisch en niet meer mogelijk. Dit is zelfs het cruciale aspect van deze aanpak. Voor ons is de vraag naar de mogelijkheid van volledige isolatie echter geen probleem. Het is namelijk voldoende om determinisme binnen de wereld als geheel te denken, zonder te refereren aan deelsystemen. Een volledig geïsoleerd deelsysteem is dan slechts een theoretisch concept dat kan worden gebruikt in gedachte-experimenten, zonder existentiële pretenties te hebben.

wereldlijn van p naar q bestaat.⁶ In relativistische ruimtetijden ligt de globale tijd(funcție) niet vast en hangt de precisie notie van determinisme dus af van de keuze van de globale tijd(funcție).⁷

Twee vormen van Laplace-determinisme

Het zojuist beschreven Laplace-determinisme is eigenlijk een conjunctie van twee zwakkere vormen van dit determinisme: *future* en *past* Laplace-determinisme.

In het eerste geval geldt:

voor ieder paar geschiedenissen H_1 en H_2 die gehoorzamen aan de natuurwetten en waarvoor er een $t' \in \mathfrak{R}$ is zodat $H_1(t') = H_2(t')$, geldt tevens dat voor alle $t \in \mathfrak{R}$ met $t > t'$: $H_1(t) = H_2(t)$.

Er is sprake van *past* Laplace-determinisme als geldt:

voor ieder paar geschiedenissen H_1 en H_2 die gehoorzamen aan de natuurwetten en waarvoor er een $t' \in \mathfrak{R}$ is zodat $H_1(t') = H_2(t')$, geldt tevens dat voor alle $t \in \mathfrak{R}$ met $t < t'$: $H_1(t) = H_2(t)$.

Pas als de wereld zowel *past* als *future* Laplace-deterministisch is, is de wereld Laplace-deterministisch in de eerste en meeste algemene formulering.

Het is triviaal dat wanneer de natuurwetten invariant zijn onder tijdinversie, de onderscheiden vormen van Laplace-determinisme equivalent zijn. De tijdsevolutie van de geschiedenissen H_1 en H_2 wordt immers volledig vastgelegd door deze invariante natuurwetten en dus impliceert $H_1(t) = H_2(t)$ dat $H_1(-t) = H_2(-t)$ voor alle $t \in \mathfrak{R}$. In dat geval vervalt het onderscheid en is de wereld óf Laplace-deterministisch, óf niet.

Het is echter niet vanzelfsprekend dat de natuurwetten invariant zijn onder tijdinversie. Denk bijvoorbeeld aan de zwakke interactie tussen elementaire deeltjes binnen het Standaard Model.ⁱⁱ Binnen de fysica is het onderscheid dus zeker zinvol.

⁶ Merk op dat met deze definitie voor een foton – die een toekomstgericht lichtachtige wereldlijn aflegt – de globale tijd kan stilstaan, precies zoals de relativiteitstheorie voorspelt.

⁷ Alleen in pathologische gekromde ruimtetijden bestaat er geen globale tijdfuncție. Een voldoende en noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een globale tijd is stabiele causaliteit van de ruimtetijd. (zie Wald (1984, pp. 198-199))

Modificatie van Laplace-determinisme

In de praktijk blijkt Laplace' notie van determinisme te beperkt te zijn. Binnen dit formalisme is er namelijk geen sprake van determinisme als de tijdsevolutie van bepaalde fysische grootheden wordt beschreven door differentiaalvergelijkingen met een tijdvertraging⁸. Stel bijvoorbeeld dat de tijdsevolutie van een fysische grootheid X^i wordt beschreven door $\dot{x}^i(t) = x^i(t - C)$ met C een constante die niet nul is en dat $H_1(t') = H_2(t')$ voor een bepaalde $t' \in \mathfrak{R}$. Als nu $x_1^i(t' - C) \neq x_2^i(t' - C)$ - een situatie die in het laboratorium eenvoudig te creëren is -, dan is de wereld niet meer Laplace-deterministisch.⁹ Toch zou je ook in deze gevallen een notie van determinisme willen hebben, er zijn immers fysische systemen aan te wijzen die beschreven worden door dit soort differentiaalvergelijkingen¹⁰ en tegelijkertijd voldoen aan onze intuïtieve notie van determinisme. Een modificatie van het Laplace-determinisme eist dat $x^i(t)$ is gespecificeerd op het interval $t \in [t' - C, t']$. De wereld is nu deterministisch als $H_1(t) = H_2(t)$ voor alle $t \in \mathfrak{R}$ in het geval dat $H_1(t) = H_2(t)$ voor alle $t \in [t' - C, t']$. Hiermee is een zinvolle notie van determinisme voor deze eenvoudige differentiaalvergelijkingen met een tijdvertraging gecreëerd.¹¹

Voor de fysica is het van groot belang dat determinisme ook zinvol is gedefinieerd voor systemen beschreven door differentiaalvergelijkingen met tijdvertraging. Zo wordt de beweging van onderling wisselwerkende geladen deeltjes met dit soort vergelijkingen beschreven, net als de beweging van (drie of meer) massa's die een zwaartekrachtswerking op elkaar uitoefenen. Immers, deze interacties planten zich voort met een eindige lichtsnelheid c waardoor er tijdvertraging optreedt (de interactie tussen deeltje i en j wordt mede bepaald door de posities van de deeltjes op het tijdstip van uitzenden van de interactiedeeltjes - respectievelijk fotonen en gravitonen -, dat voorafgaat aan de interactie zélf).

Ondanks deze door de fysica opgelegde eisen aan de notie van determinisme, volstaat het Laplace-determinisme voor het vervolg van dit werk. Als ik vanaf nu spreek over determinisme, bedoel ik derhalve het Laplace-determinisme.

⁸ Een voorbeeld hiervan is de systeemanalyse van neurale processen, zie Van Opstal (2007).

⁹ Pathologische gevallen waarin de wereld nog wél Laplace-deterministisch is worden geëlimineerd met de eis dan fysische grootheden continu in de tijd moeten veranderen.

¹⁰ Zie noot 8.

¹¹ Bij ingewikkelder differentiaalvergelijkingen faalt overigens ook deze gemodificeerde notie van determinisme. Hiervoor verwijs ik naar Raju (1994).

Ontologisch en epistemologisch determinisme

Voordat we determinisme binnen de fysica gaan bestuderen moet er nog één onderscheid worden gemaakt, namelijk tussen ontologisch en epistemologisch determinisme. Bij de bespreking van de theorie van 't Hooft zal dit onderscheid opnieuw een rol spelen. Laten we beginnen met de laatste. Epistemologisch determinisme heeft twee aspecten die we beide kunnen verwoorden met een vraag:

1. Hoe kunnen we vaststellen of de wereld deterministisch is?ⁱⁱⁱ
2. Hoe kan ik zekere (i.e. niet-statistische) voorspellingen doen?

In het eerste geval moet je kennis hebben van alle natuurwetten in de wereld¹², deze kennis dient te zijn getoetst aan de empirie. Hier ontstaan direct twee problemen: hoe kunnen we zeker weten dat er natuurwetten bestaan en dat wij bovendien alle natuurwetten beschouwen?^{iv} We laten deze problemen voor wat ze zijn en veronderstellen dat we alle natuurwetten van de wereld – getoetst aan de empirie – kennen. Om de eerste vraag te beantwoorden moeten we nu controleren of de wereld (Laplace-)deterministisch is t.o.v. de verzameling O van alle in de natuurwetten voorkomende fysische grootheden.

Het tweede aspect van epistemologisch determinisme – het doen van zekere voorspellingen – is alleen mogelijk binnen een deterministische wereld. Immers, met een indeterministische natuurwet – denk bijvoorbeeld aan de huidige stand van de kwantummechanica – kun je hooguit een statistische en – zoals we binnenkort zullen zien – soms zelfs helemaal geen voorspelling doen. In dat geval is aan het tweede aspect voldaan wanneer je zekere voorspellingen kunt doen door op een bepaald tijdstip $t \in \mathfrak{T}$ de geschiedenis $H(t)$ vast te leggen en vervolgens de tijdsevolutie van de natuurwetten op de fysische grootheden te laten werken.

Ontologisch determinisme is daarentegen een zuiver theoretische vorm van determinisme. Wetten worden – zonder tussenkomst van de empirie – gepostuleerd, waardoor de beantwoording van de eerste vraag al niet meer mogelijk is. Vervolgens kan worden gecontroleerd of de wereld van ontologische wetten voldoet aan het (Laplace-)determinisme. Wanneer dit het geval is, dan is er sprake van ontologisch determinisme. Deze vorm van determinisme bestaat dus louter in een gepostuleerde, niet-werkelijke wereld en kan – d.m.v. empirische waarneming – hoogstens voorafgaan aan epistemologisch determinisme.^{13,14}

¹² Ook hier is het uiteraard mogelijk om naar een geïsoleerd systeem of een model te kijken en alleen de natuurwetten binnen dit systeem te beschouwen.

¹³ Ik durf de bewering aan dat op deze wijze het grootste deel van de moderne natuurkunde is ontstaan.

¹⁴ Zoals we later zullen zien kunnen we met deze observatie een zich ontwikkelende theorie als die van Gerard 't Hooft plaatsen in een bepaalde fase van ontwikkeling.

Determinisme in de klassieke mechanica

De meeste fysici zullen de klassieke mechanica aanwijzen als de plek bij uitstek voor determinisme binnen de fysica. Velen geloven namelijk dat deze theorie volledig deterministisch is. Dit is echter niet het geval. Als opstapje tot determinisme in de kwantummechanica en ter illustratie van de niet-triviale rol van determinisme binnen de fysica wil ik drie voorbeelden van falend determinisme binnen de klassieke mechanica bespreken: (1) *een bal op een oppervlak*, (2) *oneindig veel ballen op een lijn* en (3) *in eindige tijd naar het oneindige*.

We beschouwen de klassieke mechanica als de bewegingsleer die voldoet aan de wetten van Newton.^v Daarnaast veronderstellen we absolute (Euclidische) ruimte en tijd, zoals Newton zich deze voorstelde. Niet alleen omdat de speciale en algemene relativiteitstheorie deze assumptie ontkent^{vi}, maar ook m.b.t. determinisme is dit zeker niet vanzelfsprekend. Een ruimtetijd moet namelijk voldoende structuur hebben om de mogelijkheid van zogenaamde “*determinism killing symmetries*” te elimineren.^{vii} Een Euclidische ruimte met een absolute tijd voldoet hieraan en heeft tevens alle benodigde aspecten voor onze bespreking van de drie klassieke voorbeelden.

Een bal op een oppervlak^{viii,ix}

Neem een bal met massa $m = \frac{g}{12}$, waarbij g de gravitatieversnelling is, die op $t = 0$ op een wrijvingloos oppervlak in de oorsprong van een cilindrisch coördinatenstelsel ligt. De vorm van het oppervlak wordt gegeven door de rotatiesymmetrische hoogtefunctie $h(r) = -\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}$ (fig.1).

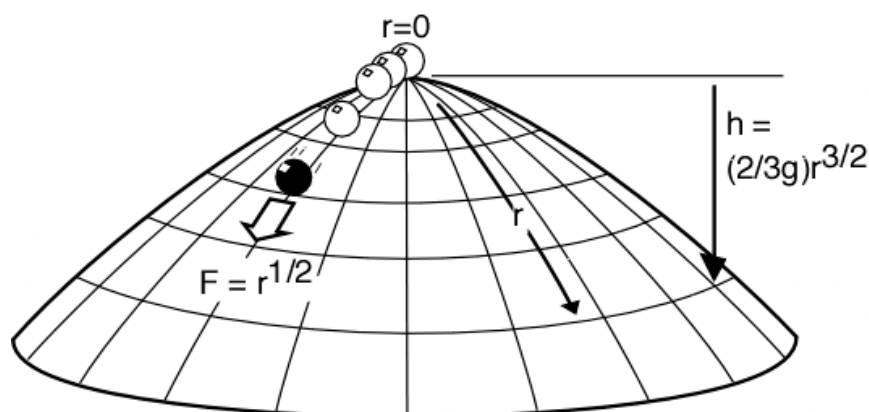


Fig. 1: een bal op een oppervlak.^x

Volgens de klassieke mechanica voldoet de bal aan de bewegingsvergelijking¹⁵

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}} = -\nabla V(\vec{x}), \quad (1)$$

die vanwege de rotatiesymmetrie van het systeem reduceert¹⁶ tot

$$F = m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}.$$

Met $V(r) = -\frac{2}{3}gr^{\frac{3}{2}}$ voor dit systeem is d.m.v. substitutie eenvoudig na te gaan dat

$$r(t) = t^4 \cdot \Theta(t - \alpha)$$

voor willekeurige $\alpha \in [0, \infty)$ een oplossing¹⁷ voor dit probleem is. Hierbij is $\Theta(t - \alpha)$ de stapfunctie.

Het is duidelijk dat deze wereld niet *future* Laplace-deterministisch is. Immers, $H_{\alpha=0}(0) = H_{\alpha=\infty}(0)$ terwijl tevens $H_{\alpha=0}(t) \neq H_{\alpha=\infty}(t)$ voor alle $t > 0$. En aangezien de tweede wet van Newton (en daarmee de gehele klassieke mechanica¹⁸) invariant is onder tijdsomkeer, is deze wereld ook niet *past* Laplace-deterministisch. We hebben hier dus een voorbeeld van indeterminisme in de klassieke mechanica: de natuurwetten (in dit geval de differentiaalvergelijking (1)) leggen immers niet vast of en wanneer de bal vanuit de oorsprong naar beneden rolt.

Eigenlijk is dit een voorbeeld van een veel algemenere situatie waarin determinisme¹⁹ in de klassieke mechanica niet automatisch gegarandeerd is als de krachtfunctie $F(x)$ niet voldoet aan de Lipschitz-conditie op het relevante interval^{xi}, wat in ons geval $[0, \infty)$ is. Eén van de eisen hiervoor is dat $\frac{dF}{dx}$ bestaat op het hele interval. In onze situatie bestaat de afgeleide van $F(x) = g\sqrt{x}$ niet in het punt $x = 0$. Daarom voldoet de krachtfunctie niet aan de Lipschitz-conditie en is determinisme niet meer gegarandeerd.

¹⁵ Omdat we werken met een wrijvingsloos oppervlak is er geen sprake van een krachtmoment en zal de bal dus niet gaan roteren. Daarom kunnen we de bewegingsvergelijking van een puntmassa gebruiken.

¹⁶ We beschrijven de beweging van de bal in termen van de radiële coördinaat r , wat wegens de rotatiesymmetrie van het systeem een volledige beschrijving is.

¹⁷ De dimensionaliteit is verdisconteerd in de stapfunctie, deze heeft dimensies *lengte*·(*tijd*)⁻⁴.

¹⁸ De tweede wet van Newton is immers de enige plek binnen de natuurwetten van de klassieke mechanica waarin de tijd een rol speelt. We veronderstellen hierbij tijdonafhankelijke potentialen, zoals in ons voorbeeld het geval is.

¹⁹ In plaats van “determinisme” moet er eigenlijk “een unieke oplossing van de bewegingsvergelijking” staan. Echter, omdat het deeltje niet binnen eindige tijd naar het oneindige verdwijnt zijn deze formuleringen in dit geval equivalent. In het derde voorbeeld *In eindige tijd naar het oneindige* gaat deze equivalentie niet meer op. De oplossing van de bewegingsvergelijking is dan weliswaar uniek, maar er is geen sprake van determinisme.

Oneindig veel ballen op een lijn^{xii,xiii}

Neem een 1-dimensionaal systeem waarbij oneindig veel identieke ballen met massa m op de x -as liggen, geïndexeerd met $n = 1, 2, \dots$ en op plaatscoördinaat $x = \frac{1}{n}$ (fig.2). We hebben hierbij aangenomen dat we de ballen oneindig klein kunnen maken. Iedere modern opgeleide fysicus zal direct allerlei kwantummechanische effecten²⁰ willen meenemen, maar we werken in de klassieke mechanica en laten die dus buiten beschouwing.

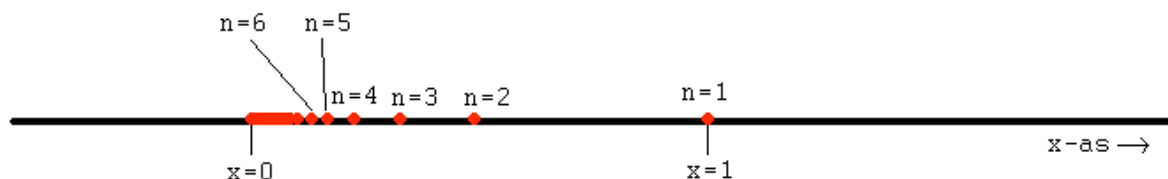


Fig. 2: oneindig veel ballen op een lijn.

Laat nu een zelfde bal met snelheid 1 van rechts naar links bewegen, zodat deze zich op tijdstip $t = -1$ op coördinaat $x = 2$ bevindt. Veronderstel tevens dat iedere botsing tussen twee ballen elastisch en instantaan is.

Dit alles heeft tot gevolg dat bij een botsing tussen twee ballen de inkomende bal stil komt te liggen en de uitgaande bal met snelheid 1 van rechts naar links doorgaat. Cruciaal is nu dat het op tijdstip $t = 1$ niet meer mogelijk is om aan te geven welke bal in beweging is, iedere bal n moet dan immers al bal $n + 1$ in beweging hebben gezet. Dit betekent dat het gehele systeem in rust is vanaf $t = 1$.²¹

Determinisme komt in het spel als we tijdsomkeer toepassen. In het voorbeeld *een bal op een oppervlak* is al aangegeven dat de klassieke mechanica invariant is onder tijdinversie. (In)determinisme in de beschreven situatie is dus equivalent aan (in)determinisme in het tijdgetransformeerde systeem met tijd $t' = -t$.

Het tijdgetransformeerde systeem is in zijn geheel in rust voor alle tijdstippen $t' \leq -1$, in de oorspronkelijke situatie zijn dit immers de tijdstippen $t \geq 1$. Na $t' = -1$ ontstaat er beweging binnen het systeem en op $t' = 1$ beweegt één bal – op dat moment in coördinaat $x = 2$ – met snelheid 1 van links naar rechts. Echter, een andere oplossing voor de tijdsevolutie van dit

²⁰ Denk hierbij in eerste instantie aan de (on)onderscheidbaarheid van de identieke ballen, de statistiek waaraan de ballen voldoen en de Heisenberg onzekerheidsrelatie voor plaats en impuls.

²¹ Dit betekent tevens een schending van impuls- en energiebehoud. Dit is de reden waarom veel fysici dit een pathologisch voorbeeld vinden en het niet serieus nemen. Echter, impuls- en energiebehoud worden alleen geschonden in de inertiaalstelsels waarin alle geïndexeerde ballen in eerste instantie in rust zijn. In ieder ander inertiaalstelsel is de impuls en energie op alle tijdstippen oneindig en zijn deze grootheden dus behouden.

klassieke systeem is dat de ballen ook voor de tijdstippen $t \geq 1$ in rust blijven. We hebben nu twee geschiedenissen $H_1(t')$ – het tijdgetransformeerde systeem – en $H_2(t')$ – het systeem dat altijd in rust is – beschreven, die beide voldoen aan de natuurwetten van deze klassieke wereld en waarvoor geldt: $H_1(-1) = H_2(-1)$. Echter, we zien ook dat $H_1(1) \neq H_2(1)$, want in $H_1(1)$ is er sprake van beweging en in $H_2(1)$ zijn alle ballen in rust. Wegens de invariantie onder tijdomkeer in de klassieke mechanica kunnen we vanuit de definitie van Laplace concluderen dat er opnieuw sprake is van indeterminisme. En zelfs met de gemodificeerde en striktere versie van het Laplace-determinisme (p. 8) moeten we d.m.v. de substituties $t' = -1$ en $C = \infty$ concluderen dat deze wereld indeterministisch is.

In eindige tijd naar het oneindige^{xiv,xv,xvi}

Veronderstel een deeltje met massa m dat parallel aan de x -as onder invloed van een potentiaal $V(x)$ beweegt door de Euclidische ruimte. Neem tevens aan dat de krachtfunctie

$F(x) = \frac{dV}{dx}$ voldoet aan de Lipschitz-conditie, zodat er een unieke oplossing van de

bewegingsvergelijking voor dit systeem bestaat. Het is op zijn minst denkbaar dat de oplossing voor een specifiek systeem het deeltje binnen een eindige tijd een oneindige snelheid geeft. In dat geval verdwijnt het deeltje binnen eindige tijd naar het oneindige (fig.3).

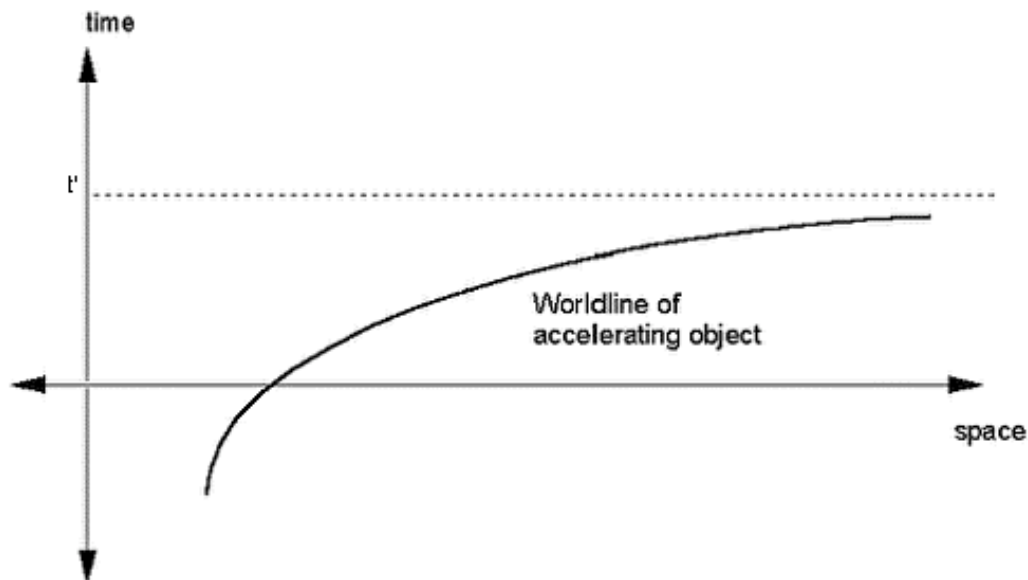


Fig. 3: Een deeltje verdwijnt in eindige tijd naar het oneindige.^{xvii}

Earman (2007) stelt nu dat *past* determinisme hiermee geschonden is. Hij zegt namelijk dat twee geschiedenissen $H_1(t)$ en $H_2(t)$ vanaf een bepaald tijdstip t' identiek kunnen zijn –

want “no particle is present at these times anywhere in space”^{xviii} – terwijl dat niet hoeft te gelden voor een tijdstip $t'' < t'$ omdat er dan deeltjes in de ruimte aanwezig zijn die van positie kunnen verschillen, waardoor $H_1(t'') \neq H_2(t'')$.

Net als in het vorige voorbeeld passen we nu tijdomkeer toe. Deze tijdgetransformeerde situatie is niet meer *future* deterministisch. Immers, op tijdstip $t = -t'$ komt er een deeltje vanuit het oneindige het eindige coördinatenstelsel binnen. Omdat er vóór dit tijdstip geen deeltje aanwezig was in onze wereld (fig.4), bestaat er een conform de natuurwetten alternatieve tijdsevolutie die de ruimte leeg laat voor alle $t \geq -t'$. Een geschiedenis van de lege ruimte tot tijdstip t' kan dus op verschillende manieren evolueren, daarmee is *future* determinisme geschonden.

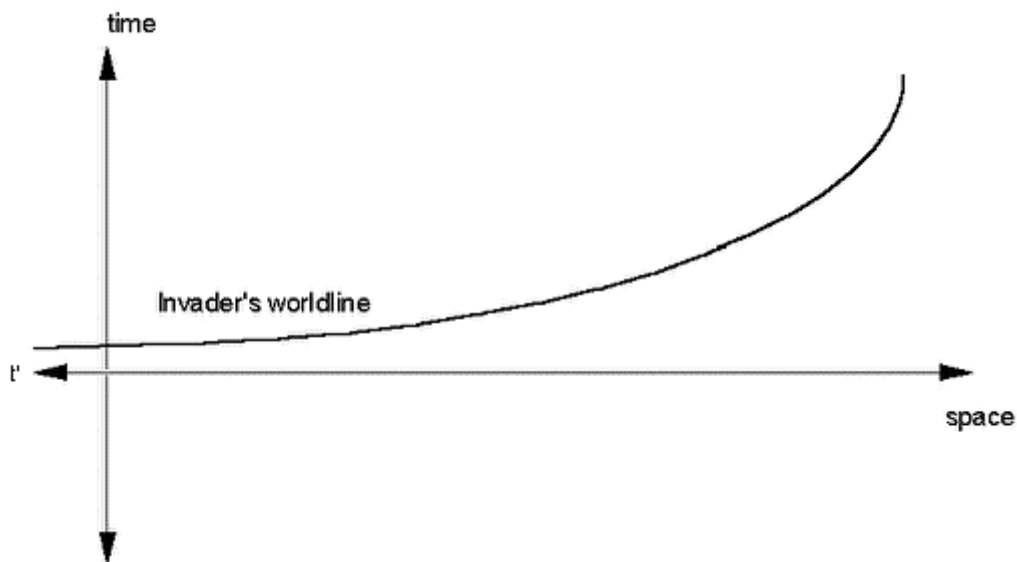


Fig. 4: tijdsomkeer toegepast op figuur 3.^{xix}

We hadden natuurlijk ook opnieuw gebruik kunnen maken van invariantie onder tijdomkeer. Want omdat de klassieke mechanica invariant is onder tijdomkeer, is *future* indeterminisme in de tijdgetransformeerde situatie equivalent aan *past* indeterminisme in de oorspronkelijke situatie. Door de tijdgetransformeerde situatie echter concreet uit te werken, hebben we gezien dat de fysische interpretatie en de argumentatie voor indeterminisme wezenlijk verschillen t.o.v. de oorspronkelijke situatie.

Hiermee sluiten we het derde voorbeeld van indeterminisme binnen de klassieke mechanica af. Vooral met het laatste voorbeeld heb ik moeite, omdat ik denk dat Earmans argument niet in ieder coördinatenstelsel geldig is. Volgens de klassieke notie van ruimte en tijd kun je

namelijk altijd een assenstelsel kiezen dat met het deeltje mee beweegt. In dat geval is er geen sprake meer van oneindigheden en is Earmans argument dus niet geldig. Het lijkt er in eerste instantie op dat we nu in een aporie terecht komen waarin determinisme afhankelijk is van het gekozen referentiestelsel. Echter, met deze coördinatentransformatie verlaten we stiekem de klassieke mechanica. Het getransformeerde coördinatenstelsel is namelijk niet-intertieel en in dat stelsel zijn de wetten van de klassieke mechanica dus niet meer geldig. Een algemeen relativistische benadering – waarin het principe van algemene covariantie zegt dat dezelfde natuurwetten in willekeurig welk coördinatenstelsel geldig moeten zijn^{xx} – zal hier uitkomst bieden.

Deze mening over de problematiek van de voorbeelden verschilt echter per auteur. Zo hebben velen moeite met het oneindige aantal ballen in het tweede voorbeeld.²² En ook het voorbeeld *Een bal op een oppervlak* is niet zonder controverse, zo is het twijfelachtig of het oppervlak als Newtoniaans systeem beschouwd kan worden.^{xxi}

Tot slot wil ik graag twee opmerkingen maken. Het is in de eerste plaats niet zo dat we nu alle voorbeelden van indeterminisme in de klassieke mechanica hebben besproken. De drie gebruikte voorbeelden (of representanten van sets van voorbeelden) worden het meest genoemd in de literatuur, maar het zijn niet de enige. Meer hierover is te vinden in John Earmans *Primer on Determinism*^{xxii}.

Ten tweede is het een misvatting dat deze voorbeelden uitspraken doen over (in)determinisme in de wereld waarin wij leven. Daarvoor is toepassing van moderne fysische theorieën zoals kwantummechanica en relativiteitstheorie noodzakelijk. Zo hebben we gezien dat het tweede en derde voorbeeld door toepassing van deze theorieën problematisch worden. En zelfs dan blijft het onmogelijk om zinvolle uitspraken te doen over (in)determinisme in onze wereld, daarvoor zijn deze moderne theorieën simpelweg nog niet goed genoeg begrepen.²³ Pas met een “theorie van alles” kan de vraag naar het (in)deterministische karakter van onze wereld definitief beantwoord worden.^{xxiii} Het doel van dit hoofdstuk was dan ook niet om tot wereldschokkende resultaten te komen over de wereld waarin wij leven, maar om aan te geven dat onze intuïties over (in)determinisme binnen de fysica niet altijd correct zijn en dat dit vraagstuk een genuanceerde behandeling behoeft.

²² Onder wie mijn begeleider prof. dr. Klaas Landsman. Desondanks heb ik er voor gekozen dit voorbeeld op te nemen in mijn werkstuk, al was het maar vanwege de schokkende gedachte dat het gehele systeem tot rust komt omdat het niet meer mogelijk is de bewegende bal aan te wijzen.

²³ In feite speelt dit werkstuk in op een onderdeel van dit probleem, namelijk (in)determinisme binnen de kwantummechanica.

Determinisme in de kwantummechanica

Introductie

De “wetenschappelijke massa” beschouwt kwantummechanica als het voorbeeld bij uitstek van een indeterministische fysische theorie. Nu zit hier een kern van waarheid in, maar het is niet zo eenduidig als de “massa” het poneert. Zo is kwantummechanica in een bepaald opzicht deterministisch, waar de klassieke mechanica indeterministisch is. Bovendien wordt het indeterminisme waar de “massa” van spreekt veroorzaakt door het ineenstorten van de golffunctie bij een kwantummechanische meting. Dit is echter een hoogst controversiële interpretatie van het meetproces binnen de kwantummechanica. Laten we – voordat we beginnen aan het werkelijke indeterminisme binnen de kwantummechanica – de eerste nuancering eens verder uitdiepen.

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben gezien, heeft de differentiaalvergelijking die de tijdsevolutie van een klassiek mechanisch systeem beschrijft (tweede wet van Newton) niet in iedere situatie een unieke oplossing of überhaupt een oplossing voor alle $t \in \mathfrak{R}$. Het analogon van de tweede wet van Newton in de kwantummechanica is de Schrödinger-vergelijking

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{x}, t),$$

die de tijdsevolutie van de toestandsfunctie $\psi(\vec{x}, t)$ van een kwantummechanisch systeem beschrijft. In tegenstelling tot de klassieke mechanica is in de kwantummechanica het bestaan van een unieke oplossing van de tijdsevolutie van een systeem eenduidig vastgelegd. Daarvoor moet de Hamiltoniaan $\hat{H}$ van het bestudeerde systeem namelijk wezenlijk zelf-geadjungeerd zijn, i.e. de domeinen $D(\hat{H}) \subset L^2(\mathfrak{R}^n)$ en $D(\hat{H}^*) \subset L^2(\mathfrak{R}^n)$ van $\hat{H}$ resp. $\hat{H}^*$ moeten dicht liggen in $L^2(\mathfrak{R}^n)$ en $\hat{H}^{**} = \hat{H}^*$. Het vinden van zo’n domein is doorgaans niet moeilijk^{xxiv}, maar het komt vaak voor dat er niet aan de tweede eis wordt voldaan^{xxv}. Echter, in een fundamentele theorie van de kwantummechanica kunnen we deze eigenschap veronderstellen. Een zelf-geadjungeerde Hamiltoniaan garandeert dus het bestaan van een unieke oplossing van de tijdsevolutie van de toestandsfunctie $\psi(\vec{x}, t)$ van een kwantummechanisch systeem. In dit opzicht heeft de kwantummechanica een deterministisch karakter t.o.v. de klassieke mechanica, waar het bestaan van zo’n gedetermineerde oplossing niet altijd eenduidig kon worden gegarandeerd.

In het geval van een zelf-geadjungeerde Hamiltoniaan wordt de tijdsevolutie van $\psi(\vec{x}, t)$ expliciet beschreven door de unitaire evolutieoperator $\hat{U}(t; t_0) = \exp(-i\hat{H}t)$.²⁴ Voor een gegeven beginoestand $\psi(\vec{x}, t_0)$ is dit namelijk $\psi(\vec{x}, t) = \hat{U}(t; t_0)\psi(\vec{x}, t_0)$. Omdat $\hat{U}(t; t_0)$ gedefinieerd is op de gehele Hilbert-ruimte $L^2(\mathfrak{R}^n)$, is de bovenstaande uitdrukking altijd geldig. Een inzichtelijk bewijs wordt gegeven in Weidmann (2000).^{xxvi} Ter illustratie komen we terug op het voorbeeld *Een bal op een oppervlak* uit het vorige hoofdstuk.^{xxvii} De Hamilton-operator van dit systeem werd gegeven door

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V(r),$$

met een potentiaal $V(r) = -\frac{2}{3}gr^{\frac{3}{2}}$. Met als Hilbert-ruimte de ruimte van kwadratisch integreerbare functies op $\mathfrak{R}^3$ ligt $D(\hat{H})$ dicht. En omdat in dit geval $\hat{H}^{**} = \hat{H}^*$ bestaat er in tegenstelling tot het klassieke analogon een unieke oplossing voor de tijdsevolutie van de toestandsfunctie van dit systeem. Hiermee hebben we een systeem geïdentificeerd waarvan de kwantummechanische variant wat betreft de tijdsevolutie van de toestandsfunctie deterministischer is dan de klassiek mechanische variant.

Zonder te verzanden in discussies over het meetprobleem en de interpretatie van de kwantummechanica wil ik bij het tweede punt van nuancering opmerken dat een interpretatie van de kwantummechanica met daarin een reductie/ineenstorting van de toestandsfunctie niet noodzakelijk indeterministisch is. Zo zijn er modellen die de ineensstorting van de toestandfunctie beschouwen als een (mogelijk deterministisch) dynamisch proces.^{xxviii} D.m.v. verborgen variabelen²⁵ en de toevoeging van een niet-lineaire term aan de Schrödinger-vergelijking op het moment van een meting geeft Pearle (1976) bijvoorbeeld een deterministische *collapse*-interpretatie van de kwantummechanica. Wegens een gebrek aan empirische verifieerbaarheid wordt dit soort theorieën tegenwoordig niet meer serieus genomen.

Het is tevens van belang dat men zich realiseert dat het kwantummechanisch formalisme als zondanig geen zinvolle uitspraken doet over (in)determinisme. De zogenaamde *no go*-theoremata²⁶ – waar we nog uitgebreid over zullen spreken – zijn immers slechts van toepassing onder additionele (natuurlijke) voorwaarden of wanneer een expliciete

²⁴ De Hamiltoniaan is hier de infinitesimale generator van de unitaire operatorgroep, zie Weidmann (2000, pp. 264-267).

²⁵ Op deze term komen we binnenkort uitgebreid terug.

²⁶ Het theorema van Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), het theorema van Bell en het theorema van Kochen en Specker. In de literatuur komt het EPR-theorema overigens voor als EPR-argument of EPR-paradox. Maar omdat ik de EPR-paradox in het vervolg behandel als een *no go*-theorema, noem ik het ook een theorema.

waardetoekenning van observabelen is gegeven.^{xxix} Een voorbeeld van zo'n waardetoekenning is de eigenwaarde-eigentoestand-link, die zegt dat een observabele O met bijbehorende operator $\hat{O}$ op een tijdstip t dan en slechts dan een welgedefinieerde waarde heeft als de toestandsfunctie een eigentoestand is van $\hat{O}$. De waarde van O is in dat geval een eigenwaarde van $\hat{O}$ behorende bij de desbetreffende eigentoestand.

Postuleer nu de zojuist besproken ineenstorting van de golffunctie bij een meting en je hebt in hoofdzaak de Kopenhaagse interpretatie van de kwantummechanica. Uiteindelijk geeft de waarschijnlijkheidsinterpretatie van de toestandsfunctie van Born het indeterministische karakter aan de kwantummechanica.^{xxx} Dit alles leidt echter tot het meetprobleem, met de Schrödinger-kat paradox als beroemde illustratie ervan. De zojuiste besproken dynamische ineenstorting van de toestandsfunctie moest een antwoord op dit probleem zijn.^{xxxi}

Von Neumann

Er is echter nog een tweede optie die het meetprobleem moet oplossen en de kwantummechanica mogelijk deterministisch maakt. Deze optie laat de eigenwaarde-eigentoestand-link als waardetoekenning varen en gebruikt in plaats daarvan verborgen variabelen als toevoeging aan de toestandsfunctie $\psi(\vec{x}, t)$.^{27,28} Een voorbeeld hiervan is de Bohm-interpretatie²⁹ die als verborgen variabelen de plaatscoördinaten van de afzonderlijke deeltjes gebruikt. De waarde van de Bohm-interpretatie hangt echter af van de vraag of een meting van een willekeurige observabele gereduceerd kan worden tot een positiemeting van de afzonderlijke deeltjes. Daarnaast bestaan er binnen deze optie varianten van de modale interpretatie van o.a. van Fraassen en Dieks en van de veel-werelden-interpretatie van Barrett.³⁰

De eerste echter die de mogelijkheid van verborgen variabelen opperde was Von Neumann. Hij zegt niet dat de kwantummechanica incompleet is zonder verborgen variabelen, hij geeft daarentegen slechts aan wat de noodzakelijke veronderstellingen zijn bij een poging om de toestandsfunctie $\psi(\vec{x}, t)$ oorzakelijk te verbinden met de meetwaarden van fysische grootheden – naar het voorbeeld van de klassieke mechanica: “In Wahrheit bestimmt ψ gar

²⁷ Het is niet zo dat dit de enige twee opties zijn. Earman (2007) geeft dit summier aan door te stellen dat de tweede optie een variant heeft zonder verborgen variabelen. (Earman (2007, p. 1406))

²⁸ Een intuïtieve notie van verborgen variabelen is hier voldoende. In het vervolg zullen we dit preciezer maken. Het is echter van belang dat men zich realiseert dat verborgen variabelen een theorie niet noodzakelijk deterministisch maken.

²⁹ Te onderscheiden van de waarschijnlijkheidsinterpretatie van de toestandsfunctie, eveneens van Bohm.

³⁰ Hier gaan we niet verder op in, te meer omdat Earman (2007) op zeer heldere wijze uiteenzet van de (serieuze) problemen met deze varianten zijn. Het is overigens niet zo dat van Fraassen, Dieks en Barrett zelf een deterministische theorie aanhingen, in tegenstelling tot Bohm. Later zijn er deterministische varianten op hun theorieën ontwikkeld.

nicht den Zustand genau, um diesen restlos zu kennen sind vielmehr noch weitere Zahlenangaben notwendig. D. h. das System hat neben ψ noch weitere Bestimmungsstücke, weitere Koordinaten”^{xxxii}. Deze notie van verborgen variabelen is sindsdien niet meer veranderd, we zullen dit zo direct met meer precisie formuleren. Overigens is volgens Von Neumann een theorie met verborgen variabelen automatisch ook een deterministische theorie, alle fysische grootheden liggen dan immers volledig vast: “Würde man diese alle kennen, so könnte man die Werte aller physikalischen Größen genau und bestimmt angeben – mit Hilfe von ψ allein sind dagegen [...] nur statistische Aussagen möglich”^{xxxiii}. Dit zien wij tegenwoordig anders, niet iedere theorie van verborgen variabelen is ook een deterministische theorie.³¹ Ook hier komen we binnenkort op terug.

Verborgen variabelen^{xxxiv}

De door Von Neumann aangedragen optie van een theorie met verborgen variabelen kent een breed scala aan varianten, die worden onderscheiden via extra condities op de meest primitieve verborgen variabelen theorie zoals Von Neumann die al beschreef. Het doel van een theorie met verborgen variabelen is om een model te construeren dat empirisch equivalent is aan een oorspronkelijk model³², i.e. beide modellen geven in dezelfde fysische situaties dezelfde voorspellingen. De haalbaarheid van dit doel is afhankelijk van de extra condities op de primitieve verborgen variabelen theorie en wordt in een aantal gevallen ontkracht door de zogenaamde *no go*-theoremata’s. Om een goed beeld te krijgen van wat wel en niet mogelijk is met een theorie van verborgen variabelen en van wat de *no go*-theoremata’s precies zeggen, moet er eerst een beperkt formalisme³³ worden ingevoerd.

We kijken naar de eindige³⁴ kansruimte

$$\Phi \equiv \{A, A' \dots\} \times \{B, B' \dots\} \times \{C, C' \dots\} \times \dots \{a, a' \dots\} \times \{b, b' \dots\} \times \{c, c' \dots\} \times \dots$$

van metingen $a, b, c, \dots$ en meetuitkomsten $A, B, C, \dots$. Op deze ruimte leggen we een kansverdeling $q: \Phi \rightarrow [0,1]$ zodanig dat bijvoorbeeld $q(A, B | a, b)$ de waarschijnlijkheid geeft op meetuitkomsten A en B wanneer er de metingen a respectievelijk b worden uitgevoerd.³⁵ Laat Λ de eindige ruimte zijn met daarin de verborgen variabele(n) λ . We

³¹ Ik beschuldig hier Von Neumann geenszins van een verkeerde redenering. Ik geef slechts aan dat zijn notie van een theorie met verborgen variabelen verschilt van de onze.

³² In ons geval is dit natuurlijk de kwantummechanica met de waarschijnlijkheidsinterpretatie van Bohm.

³³ Voor een volledig formalisme verwijs ik naar Brandenburger & Yanofsky (2007). Voor ons is het voldoende om vanuit het formalisme een fysisch beeld te scheppen over de problematiek rond verborgen variabelen theorieën.

³⁴ De oorspronkelijke theoremata’s zijn gedefinieerd met oneindige kansruimten. Maar om het maattheoretische formalisme te kunnen negeren werken wij met eindige kansruimten. De theoremata’s zelf worden hiermee weliswaar minder krachtig, maar de betekenis en zeggingskracht ervan zeker niet.

³⁵ De oriëntatie van twee metingen a en b t.o.v. elkaar in de ruimtetijd is verdisconteerd in de metingen a en b zelf. Aan iedere meting is dus een ruimtetijd coördinaat toegevoegd.

definiëren nu een tweede eindige kansruimte $\Omega \equiv \Phi \times \Lambda$ met daarop een kansverdeling $p : \Omega \rightarrow [0,1]$ zodanig dat $p(A, B | a, b, \lambda)$ de waarschijnlijkheid geeft op meetuitkomsten A en B wanneer er de metingen a respectievelijk b worden uitgevoerd in de situatie van verborgen variabele(n) $\lambda \in \Lambda$. Als laatste nemen we aan dat metingen elkaar onderling niet uitsluiten (op bijvoorbeeld fysische gronden), i.e. $q(a, b, c, \dots) > 0$ en $p(a, b, c, \dots) > 0$ voor alle metingen $a, b, c, \dots$.

Definitie 1 Een empirisch model is een paar (Φ, q) .

Definitie 2 Een verborgen variabelen model is een paar (Ω, p) .

Definitie 3 (Φ, q) en (Ω, p) zijn empirisch equivalent als voor alle $A, B, C, \dots$ en $a, b, c, \dots$ geldt:

$$q(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots) = p(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots).$$

Vervolgens definiëren we een zestal extra condities die aan het primitieve verborgen variabelen model kunnen worden opgelegd.

Definitie 4 (Ω, p) voldoet aan éénwaardigheid als Λ precies één element bevat.

Definitie 5 (Ω, p) is $\square$ -onafhankelijk als voor alle $a, b, c, \dots$ en λ ,

$$p(a, b, c, \dots, \lambda) = p(a, b, c, \dots)p(\lambda). \quad (2)$$

Dit betekent dat de waarde(n) van de verborgen variabele(n) λ en de tijdsevolutie van λ onafhankelijk zijn van welke metingen er worden uitgevoerd. Het is van belang om op te merken dat dit ook andersom geldt: de verborgen variabele(n) λ kunnen – op wat voor een manier dan ook – de metingen beïnvloeden.³⁶

Definitie 6 (Ω, p) voldoet aan sterk determinisme³⁷ als er voor alle paren (a, λ) een A bestaat zodat $p(A | a, \lambda) = 1$, net als voor alle (b, λ) etc.

Definitie 7 (Ω, p) voldoet aan zwak determinisme als voor alle $a, b, c, \dots, \square$ er meetuitkomsten $A, B, C, \dots$ bestaan zodanig dat $p(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots, \lambda) = 1$.

³⁶ Dit bestaat onder de noemer “samenzweringstheorie”.

³⁷ Vanaf nu is determinisme niet meer vanzelfsprekend Laplace-determinisme, maar wordt er weer onderscheid gemaakt tussen verschillende noties van determinisme.

Beide vormen van determinisme zeggen dat de verborgen variabelen de meetuitkomsten vastleggen. Voor zwak determinisme geldt dit echter alleen als gegeven is welke metingen er nog meer worden uitgevoerd, terwijl dit voor sterk determinisme voor iedere meting afzonderlijk geldt. Merk op dat alleen een sterk deterministisch model mogelijk ook Laplace-deterministisch is, want in een Laplace-deterministische wereld worden fysische grootheden niet beïnvloed door welke metingen er worden uitgevoerd. Tevens moet een Laplace-deterministisch model dan $\square$ -onafhankelijk zijn, anders kan de waarde van een fysische grootheid alsnog afhangen van de uitgevoerde metingen omdat *Definitie 6* zegt dat in een sterk deterministisch model de meetuitkomst mede door de verborgen variabele(n) wordt bepaald.³⁸

Definitie 8 (Ω, p) is uitkomstonafhankelijk als voor alle $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots, \square$,

$$p(A | a, b, c, \dots, B, C, \dots, \lambda) = p(A | a, b, c, \dots, \lambda), \text{ net als voor } B, C, \text{ etc.} \quad (3)$$

De meetuitkomst van een meting is in zo'n model onafhankelijk van andere meetuitkomsten.

Definitie 9 (Ω, p) is parameteronafhankelijk als voor alle $A, a, b, c, \dots, \square$,

$$p(A | a, b, c, \dots, \lambda) = p(A | a, \lambda), \text{ net als voor alle } B, a, b, c, \dots, \square \text{ etc.} \quad (4)$$

In een parameteronafhankelijk verborgen variabele model hangt de meetuitkomst (eventueel met een waarschijnlijkheidsverdeling) dus niet direct³⁹ af van andere uitgevoerde metingen. Vanuit deze definities is het mogelijk om een Vendiagram van verborgen variabelen modellen op te stellen (fig.5)⁴⁰. Dit diagram wordt geconstrueerd d.m.v. een aantal elementaire resultaten uit de kansrekening.⁴¹

³⁸ Merk op dat ik hier stiekem onderscheid maak tussen de deterministische tijdsevolutie van een wereld en de vrije keuze daarin over de uit te voeren meting(en). Ik neem hier impliciet een vrije wil aan. Misschien is het daarom beter om hier van systeem i.p.v. wereld te spreken en het systeem vervolgens als geïsoleerd van de menselijke vrije wil te beschouwen.

Het is bovendien beter om van systeem te spreken omdat het uitvoeren van een meting in een wereld tot de geschiedenis van die wereld behoort. Laplace-determinisme m.b.t. welke metingen er worden uitgevoerd is dan een lege notie geworden. Wanneer een fysisch systeem wordt onderscheiden van de metingen die niet tot dit systeem behoren, dan is dit niet het geval.

³⁹ De meetuitkomst kan nog wel indirect afhangen van de uitgevoerde metingen, omdat er in de verborgen variabele(n) $\square$ een mogelijke afhankelijkheid zit.

⁴⁰ De terminologie is in het Engels, want de figuur komt uit Brandenburger & Yanofsky (2007). Mijn Nederlandse vertalingen spreken voor zich.

⁴¹ Zie Brandenburger & Yanofsky (2007) voor alle bewijzen.

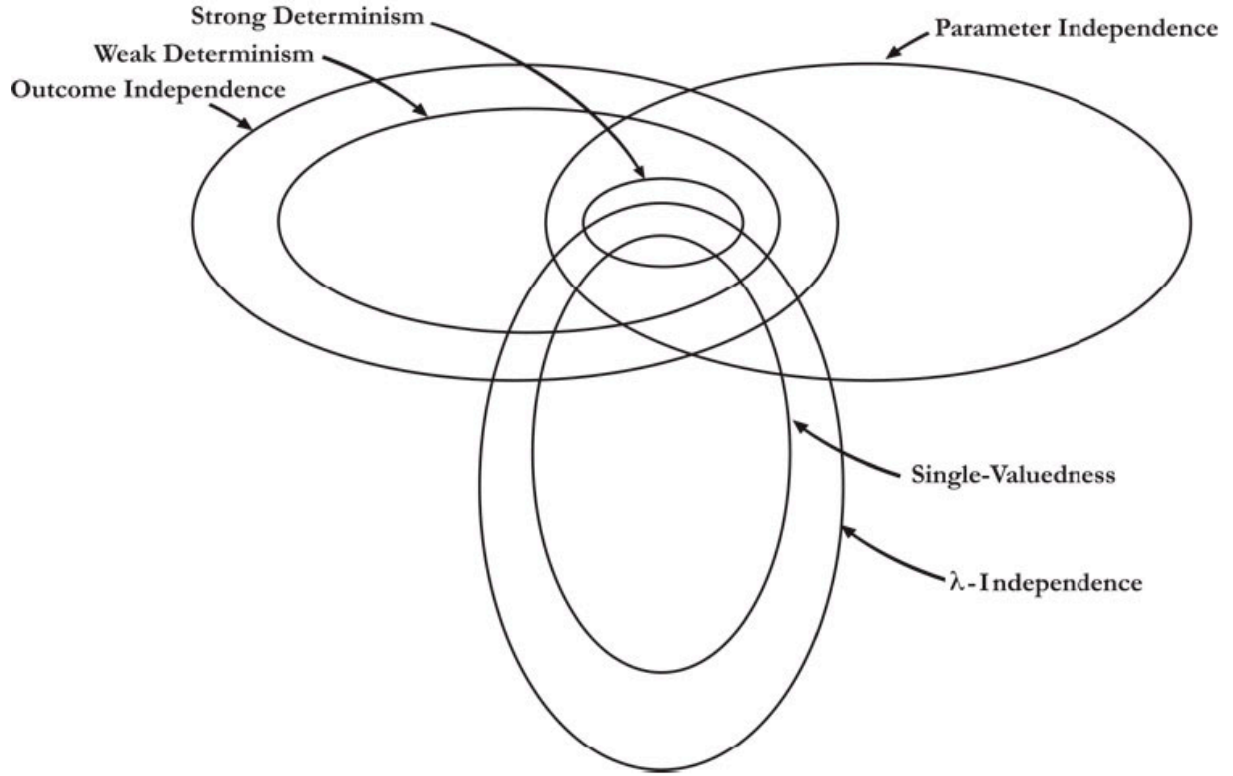


Fig. 5: een Vendiagram van zes condities op verborgen variabelen modellen.^{xxxv}

Ter illustratie tonen we aan dat ieder zwak deterministisch model een uitkomstonafhankelijk model is, zoals het Vendiagram aangeeft.

Propositie 1 Als (Ω, p) zwak deterministisch is, dan is (Ω, p) uitkomstonafhankelijk.

Bewijs Vanwege het zwak determinisme kunnen we bij iedere reeks metingen $a, b, c, \dots$ meetuitkomsten $A, B, C, \dots$ vinden zodat $p(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots, \lambda) = 1$. Maar omdat iedere kans kleiner of gelijk aan 1 is, moet dan ook gelden dat $p(A | a, b, c, \dots, \lambda) = 1$, $p(B | a, b, c, \dots, \lambda) = 1$, $p(C | a, b, c, \dots, \lambda) = 1, \dots$, we weten immers altijd:

$p(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots, \lambda) \leq p(A | a, b, c, \dots, \lambda) p(B | a, b, c, \dots, \lambda) p(C | a, b, c, \dots, \lambda) \cdot \dots$. Omdat we tevens weten dat $1 \geq p(A | a, b, c, \dots, B, C, \dots, \lambda) \geq p(A | a, b, c, \dots, \lambda)$, moet nu gelden: $p(A | a, b, c, \dots, B, C, \dots, \lambda) = 1 = p(A | a, b, c, \dots, \lambda)$, net als voor B, C , etc. Het model is dus uitkomstonafhankelijk. *QED*

Als laatste definiëren we de twee condities *lokaal* en *non-contextueel* die zijn samengesteld uit een aantal zojuist geformuleerde eigenschappen. Het belang van deze condities is dat ze fysisch interpreteerbaar zijn en dat voorkomen in de *no go*-theoremata's.

Definitie 10 (Ω, p) is lokaal als voor alle $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots, \lambda$ geldt dat

$$p(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots, \lambda) = p(A | a, \lambda) p(B | b, \lambda) p(C | c, \lambda) \cdot \dots \quad (5)$$

Dit betekent dat de meetuitkomstwaarschijnlijkheden noch van de gekozen set metingen, noch van andere meetuitkomsten afhangen. Lokaal betekent hier dus dat meetexperimenten volledig geïsoleerd van de wereld buiten het experiment kunnen worden uitgevoerd. De volgende propositie reduceert lokaliteit tot de eerdere zes primitieve condities die kunnen worden opgelegd aan een verborgen variabele model.

Propositie 2 (Ω, p) is lokaal dan en slechts dan als (Ω, p) uitkomst- en parameteronafhankelijk is.

Bewijs

$\Leftarrow$: De eerste identiteit is een bekend resultaat uit de kansrekening, de tweede en derde zijn simpele substituties.

$$\begin{aligned} p(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots, \lambda) &= \\ p(A | a, b, c, \dots, B, C, \dots, \lambda) p(B | a, b, c, \dots, A, C, \dots, \lambda) p(C | a, b, c, \dots, A, B, \dots, \lambda) \cdot \dots & \quad (3) \\ p(A | a, b, c, \dots, \lambda) p(B | a, b, c, \dots, \lambda) p(C | a, b, c, \dots, \lambda) \cdot \dots & \quad (4) \\ p(A | a, \lambda) p(B | b, \lambda) p(C | c, \lambda) \cdot \dots & \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Wanneer je (5) over alle mogelijke meetuitkomsten van $B, C, \dots$ sommeert levert je dit (4) op, volgens ons model is een meting immers altijd gepaard aan een meetuitkomst. Substitutie van (4) en de analoga van (4) in (5) levert:

$$p(A, B, C, \dots | a, b, c, \dots, \lambda) = p(A | a, b, c, \dots, \lambda) p(B | a, b, c, \dots, \lambda) p(C | a, b, c, \dots, \lambda) \cdot \dots$$

Door opnieuw gebruik te maken van de bekende identiteit wordt dit:

$$\begin{aligned} p(A | a, b, c, \dots, B, C, \dots, \lambda) p(B | a, b, c, \dots, A, C, \dots, \lambda) p(C | a, b, c, \dots, A, B, \dots, \lambda) \cdot \dots &= \\ p(A | a, b, c, \dots, \lambda) p(B | a, b, c, \dots, \lambda) p(C | a, b, c, \dots, \lambda) \cdot \dots & \end{aligned}$$

Dit levert (3). *QED*

Het begrip non-contextualiteit wordt gedefinieerd voor empirische modellen. Aangezien ieder empirisch model op triviale wijze kan worden uitgebreid tot een primitieve verborgen variabelen model – neem voor Λ de lege verzameling en definieer als kansverdeling $p(\alpha) \equiv q(\alpha)$ voor ieder argument α – heeft deze definitie ook betrekking op de laatste soort modellen. Non-contextualiteit betekent dat de meetuitkomstwaarschijnlijkheden op geen enkele wijze afhangt van de overige uitgevoerde metingen.

Definitie 11 Een empirisch model (Φ, q) is non-contextueel als voor alle $A, a, b, b', c, c', \dots$ geldt dat: $q(A | a, b, c, \dots) = q(A | a, b', c', \dots)$.

Uit het voorgaande valt nu op te maken dat als een model $\square$ - en parameteronafhankelijk is, het model ook non-contextueel is.

Propositie 3 (Ω, p) is non-contextueel als (Ω, p) $\square$ - en parameteronafhankelijk is.

Voor het bewijs verwijzen we naar Brandenburger & Yanofsky (2007, p.9).

Go-theorema's

Met het gegeven formalisme kunnen we nu de mogelijkhedenvoorwaarden van verschillende verborgen variabelen modellen onderzoeken, i.e. bestaat er voor ieder empirisch model een empirisch equivalent verborgen variabelen model dat voldoet aan de condities...? Het voordeel van deze abstracte behandeling is tweeledig. Wanneer we één of meerdere condities op een concrete verborgen variabelen theorie van de kwantummechanica kunnen identificeren, is het direct mogelijk om uitspraken te doen over de levensvatbaarheid van zo'n theorie. Daarnaast weten we zo in welke gebieden van het Vendiagram het zinvol is te zoeken naar nieuwe verborgen variabele theorieën van de kwantummechanica.

Brandenburger & Yanofsky (2007) bewijzen dat *er voor ieder empirisch model een empirisch equivalent verborgen variabelen model bestaat dat:*

- E1: *sterk deterministisch is.*
- E2: *zwak deterministisch en $\square$ -onafhankelijk is.*

Deze twee go-theorema's⁴² zeggen dus dat het voor iedere fysische theorie mogelijk is om een equivalente verborgen variabelen theorie te vinden die sterk deterministisch, dan wel zwak deterministisch en $\square$ -onafhankelijk is. Omdat een sterkere conditie een zwakkere⁴³ impliceert, bestaat er volgens Brandenburger & Yanofsky (2007) nu bijvoorbeeld m.b.v. E1 voor ieder empirisch model een fysisch equivalent parameteronafhankelijk verborgen variabelen model. Dit leidt volgens hen tot het Vendiagram in figuur 6. Voor ieder empirisch model bestaat er een equivalent verborgen variabelen model uit een groen domein in het diagram. In elk domein staat aangegeven welk theorema daarvoor zorgt.⁴⁴

⁴² In de literatuur bestaan alleen *no go*-theorema's. De *go*-theorema's kunnen worden beschouwd als de tegenhangers van de *no go*-theorema's.

⁴³ Dit heeft niets met sterk en zwak determinisme te maken.

⁴⁴ Een soortgelijke stelling geldt voor éénwaardigheid, vandaar het vinkje. Dit is triviaal, vul het empirische model aan met een constante $\square$ in ieder argument van de waarschijnlijkheidsfunctie p en je hebt een empirisch equivalent éénwaardig model.

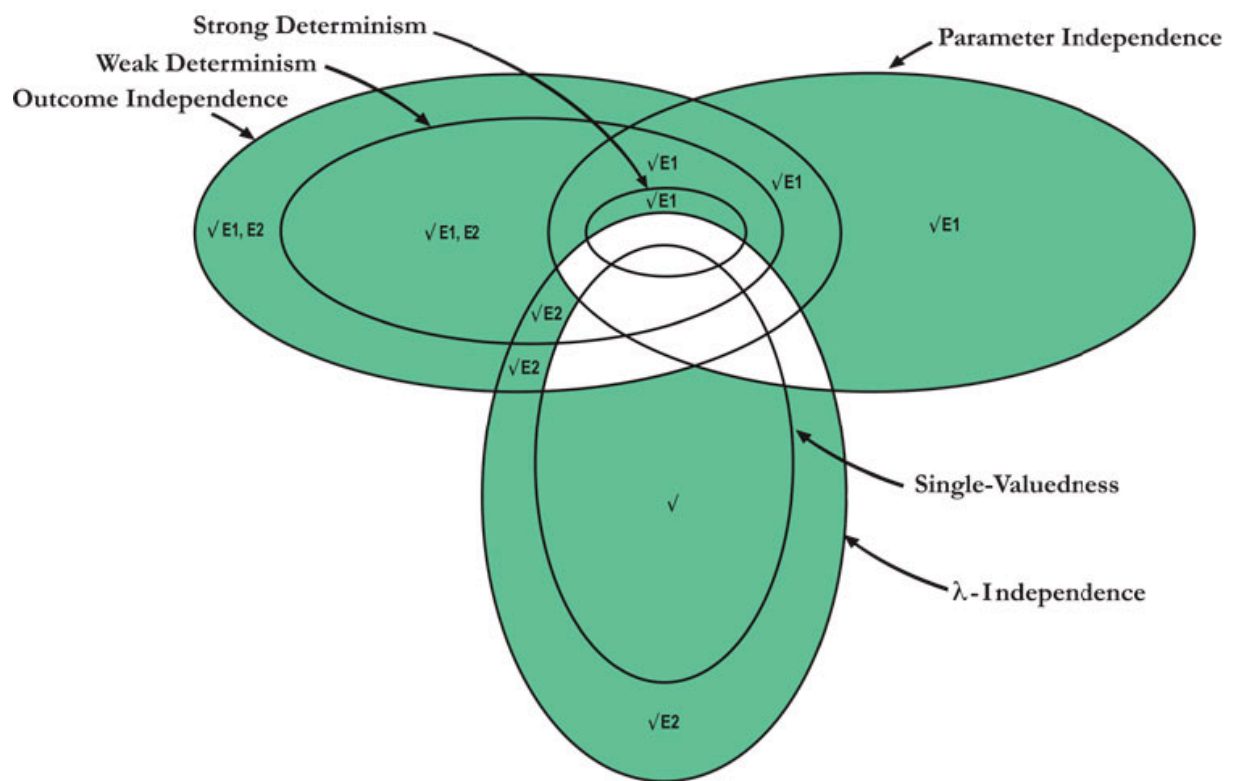


Fig. 6: de *go*-theorem's hebben betrekking op modellen uit de groene domeinen.^{xxxvi}

Ik denk overigens dat Brandenburger & Yanofsky (2007) hier een ommissie maken, ze hebben bijvoorbeeld geen *go*-theorem voor parameteronafhankelijke modellen die niet sterk deterministisch zijn terwijl ze dit domein wél donker kleuren. De bewijzen zijn echter eenvoudig uit te breiden tot deze domeinen, waardoor de figuur als zodanig correct is.

No-go theorema's

Desondanks zijn we over het algemeen niet tevreden met louter de groene domeinen in figuur 6. Zo willen we bijvoorbeeld graag dat een fysische theorie intrinsiek⁴⁵ lokaal is, omdat non-lokaliteit tegen onze fysische intuïties in gaat.⁴⁶ Wat derhalve overblijft om te onderzoeken zijn de lichte domeinen in de figuur. Er blijken drie zogenaamde *no go*-theorema's te bestaan die zeggen dat er in deze domeinen niet voor ieder fysisch model een empirisch equivalent verborgen variabelen model bestaat.⁴⁷ We zullen deze theorema's nu bespreken.

Einstein-Podolski-Rosen (EPR)

We geven hier een kort bewijs van het EPR-theorema in termen van ons formalisme. Daarna zullen we kort terugkomen op de oorspronkelijk fysische formulering, die analoog is aan de onze.

EPR-theorema *Er is een empirisch model (Φ, q) waarvoor er geen empirisch equivalent verborgen variabelen model (Ω, p) bestaat dat zowel éénwaardig als uitkomstafhankelijk is.*

Bewijs We bewijzen deze stelling door een empirisch model te construeren waarvoor dit geldt. Laat

$$\Phi \equiv \{+_{A}, -_{A}\} \times \{+_{B}, -_{B}\} \times \{a\} \times \{b\} \quad (6)$$

en neem als kansverdeling:

$$q(+_{A}, +_{B} \mid a, b) = q(-_{A}, -_{B} \mid a, b) = 0 \text{ en } q(+_{A}, -_{B} \mid a, b) = q(-_{A}, +_{B} \mid a, b) = \frac{1}{2}.$$

Veronderstel nu dat er wél zo'n equivalent verborgen variabelen model bestaat met vanwege de éénwaardigheid $\Lambda = \{\lambda\}$. Vanwege de empirische equivalentie moet nu gelden dat

$$p(+_{A}, +_{B} \mid a, b, \lambda) = p(-_{A}, -_{B} \mid a, b, \lambda) = 0 \text{ en } p(+_{A}, -_{B} \mid a, b, \lambda) = p(-_{A}, +_{B} \mid a, b, \lambda) = \frac{1}{2},$$

waardoor

$$p(+_{A} \mid a, b, \lambda) = p(+_{A}, +_{B} \mid a, b, \lambda) + p(+_{A}, -_{B} \mid a, b, \lambda) = \frac{1}{2}$$

en

⁴⁵ I.e. dat de structuur van de theorie het toelaat om een empirisch equivalent lokaal verborgen variabelen model te construeren.

⁴⁶ Non-lokaliteit impliceert namelijk instantane werking op afstand, wat in tegenspraak is met het tweede postulaat van de speciale relativiteitstheorie, dat zegt dat er niets sneller gaat dan licht.

⁴⁷ Een misvatting is dat *no go*-theorema's het bestaan van bepaalde consistente verborgen variabelen modellen uitsluiten. De theorema's zeggen daarentegen slechts dat dit soort modellen niet noodzakelijk voor elk empirisch model bestaat.

$$p(+_A | a, b, -_B, \lambda) = \frac{p(+_A, -_B | a, b, \lambda)}{p(-_B | a, b, \lambda)} = \frac{1/2}{1/2} = 1 \neq p(+_A | a, b, \lambda) . \quad (7)$$

Dit is in contradictie met de uitkomstafhankelijkheid van het model (Ω, p) , dus bestaat er geen empirisch equivalent model (Ω, p) dat éénwaardig en uitkomstafhankelijk is. *QED*

Tot zover is er nog geen fysica aan te pas gekomen. Als we nu echter kunnen aantonen dat de kwantummechanica zo'n empirisch model representeert⁴⁸, dan weten we dat er geen empirisch equivalente verborgen variabelen theorie van de kwantummechanica bestaat die zowel éénwaardig is als uitkomstafhankelijk.

Met een voorbeeld is dit eenvoudig aangetoond. Neem twee ruimtelijk onderscheidbare spin- $\frac{1}{2}$ deeltjes met antiparallelle spin in de z-richting. Isaac en Gottfried meten ieder aan een apart deeltje de spin in de z-richting. Laat nu a de meting van Isaac representeren en b de meting van Gottfried. Hiermee is een kwantummechanisch voorbeeld van het empirische model uit het bewijs gegeven. Er bestaat dus geen verborgen variabelen theorie van de kwantummechanica die zowel éénwaardig is als uitkomstafhankelijk.⁴⁹

Bell

Omdat de Bell-ongelijkheid – het analogon van het Bell-theorema – voor veel fysici bekend is en omdat het laatste *no go*-theorema algemener is dan het Bell-theorema, laat ik het bij een formulering van het Bell-theorema. Voor het bewijs verwijs ik naar Brandenburger & Yanofsky (2007, pp. 18-21), een inzichtelijk bewijs voor de Bell-ongelijkheid is te vinden in Bell (1987, pp. 36-38).

Bell-theorema *Er is een empirisch model (Φ, q) waarvoor er geen empirisch equivalent verborgen variabelen model (Ω, p) bestaat dat $\square$ -, parameter- en uitkomstafhankelijk is.*

Een equivalente formulering is dat er geen equivalent model bestaat dat $\square$ -onafhankelijk en lokaal is.

Door Isaac en Gottfried onafhankelijk van elkaar te laten kiezen in welke richting zij de spin meten, hebben we een kwantummechanische situatie gevonden die het empirische model uit

⁴⁸ Of dat een onderdeel van de kwantummechanica zo'n model representeert, wat voldoende is voor onze bewering.

⁴⁹ Schokkender is dat ook de klassieke mechanica zo'n empirisch model representeert. Zie bijvoorbeeld Von Neumann (2005).

het bewijs van Brandenburger & Yanofsky (2007, pp. 18-21) representeert. Oftewel, de kwantummechanica kan niet worden beschreven door een verborgen variabelen theorie die zowel $\square$ -onafhankelijk als lokaal is. Bell concludeerde uit zijn ongelijkheid dat de kwantummechanica fundamenteel non-lokaal is, ondanks onze fysische intuïtie. Griffiths (2005, pp. 423-428) beschrijft hoe we non-lokaliteit desondanks kunnen accepteren. De instantane werking op afstand is slechts schijn, omdat er geen informatie wordt overgedragen. We kunnen nu dus de non-lokaliteit van de kwantummechanica voor waar aannemen, zonder dat dit een tegenspraak met de speciale relativiteitstheorie oplevert.

Merk overigens op dat Bells conclusie over de non-lokaliteit van de kwantummechanica impliciet veronderstelt dat de kwantummechanica $\square$ -onafhankelijk is. Dit komt o.a. tot uiting in Bell (1987, pp.36-38), waar $\square$ op geen enkele wijze wordt beïnvloed door het uitgevoerde experiment. Deze veronderstelling is echter niet algemeen geldig. Zo zijn er verborgen variabelen theorieën die de fase van de toestandsfunctie als verborgen variabele nemen.⁵⁰ Wanneer we nu een meting opvatten als een interactie met het systeem, kan de fase wel degelijk worden beïnvloed door de uitgevoerde metingen. Een interactie kan immers een faseverschuiving opleveren, denk bijvoorbeeld aan het Aharonov-Bohm effect.^{xxxvii} Dit betekent dat Bells conclusie afhankelijk is van de eisen die je stelt aan een eventuele verborgen variabelen theorie en is de kwantummechanica dus niet noodzakelijk non-lokaal.⁵¹

⁵⁰ Een voorbeeld is Pearle (1976).

⁵¹ Dit neemt niet weg dat voor veel fysici $\square$ -onafhankelijkheid een vanzelfsprekende eis is, hetgeen nu non-lokaliteit van de kwantummechanica impliceert.

Kochen-Specker (KS)

Dit laatste *no go*-theorem kan qua uitspraak worden beschouwd als een uitbreiding van het Bell-theorema, we laten namelijk alleen de eis van uitkomstafhankelijkheid vallen. Wanneer het Bell-theorema toepasbaar is op een verborgen variabelen model, dan is het KS-theorema dat ook. We kunnen echter niet stellen dat het Bell-theorema volledig te reduceren is tot het KS-theorema. Kochen en Specker doen namelijk een controversiële algebraïsche aanname die Bell niet nodig heeft.⁵²

KS-theorema *Er is een empirisch model (Φ, q) waarvoor er geen empirisch equivalent verborgen variabelen model (Ω, p) bestaat dat $\square$ - en parameteronafhankelijk is.*

Bewijs. We construeren een empirisch model waarvoor de bewering geldt. Neem negen sets van metingen a, b, c, d , die worden gerepresenteerd door vier basisvectoren. Ieder basisvector komt in twee verschillende sets voor, in totaal zijn er dus $9 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 18$ basisvectoren.⁵³ Dit levert tabel 1 op, waarin e_i een van de achttien basisvectoren representeert.

Tabel 1: negen verschillende bases op een vierdimensionale vectorruimte.^{xxxviii}

a	e_1	e_1	e_8	e_8	e_2	e_9	e_{16}	e_{16}	e_{17}
b	e_2	e_5	e_9	e_{11}	e_5	e_{11}	e_{17}	e_{18}	e_{18}
c	e_3	e_6	e_3	e_7	e_{13}	e_{14}	e_4	e_6	e_{13}
d	e_4	e_7	e_{10}	e_{12}	e_{14}	e_{15}	e_{10}	e_{12}	e_{15}

Neem vervolgens aan dat iedere meting meetuitkomsten 0 en 1 kan hebben.⁵⁴ De kansverdeling $q(A, B, C, D | e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, e_{i_4})$ ⁵⁵ wordt nu zó geconstrueerd, dat bij een set van metingen a, b, c, d , precies één meting 1 als uitkomst heeft en de andere drie metingen 0 als uitkomst hebben.

Nu veronderstellen we dat er een equivalent $\square$ - en parameteronafhankelijk verborgen variabelen model bestaat. Bekijk de eerste kolom van de tabel en neem⁵⁶

⁵² Ik heb een sterk vermoeden dat deze aanname te identificeren met de eis van *exchangeability* in ons bewijs van het KS-theorema.

⁵³ In kwantummechanische termen kies je negen bases op een vierdimensionale Hilbert-ruimte, zodanig dat iedere basisvector in twee verschillende bases voorkomt.

⁵⁴ Een meting is nu feitelijk een propositie met een waarheidswaarde.

⁵⁵ Waarbij A, B, C en D dus de waarden 0 en 1 kunnen aannemen.

⁵⁶ Dit is vrij te kiezen.

$$p(0,1,0,0 | e_1, e_2, e_3, e_4, \lambda) = 1, \quad (8)$$

wat per constructie impliceert dat

$$p(1,0,0,0 | e_1, e_2, e_3, e_4, \lambda) = 0, \quad p(0,0,1,0 | e_1, e_2, e_3, e_4, \lambda) = 0 \text{ en } p(0,0,0,1 | e_1, e_2, e_3, e_4, \lambda) = 0.$$

In dit geval geldt dus zeker dat $p(B = 1 | e_1, e_2, e_3, e_4, \lambda) = 1$. Vanwege $\square$ - en parameteronafhankelijkheid geldt nu ook dat $p(B = 1 | e_3, e_2, e_{13}, e_{14}, \lambda) = 1$. In bepaalde situaties zegt de kansrekening dat wanneer je metingen en bijbehorende meetuitkomsten op dezelfde manier verwisselt, de waarschijnlijkheid onveranderd blijft.⁵⁷ Laten we dit nu aannemen.⁵⁸ Er volgt dan direct dat $p(A = 1 | e_2, e_3, e_{13}, e_{14}, \lambda) = 1$ en dus dat $p(1,0,0,0 | e_2, e_3, e_{13}, e_{14}, \lambda) = 1$ en dat de overige metingen in de vijfde kolom een 0 als meetuitkomst hebben.

Onder de aannamen van $\square$ - en parameteronafhankelijkheid zien we dus dat de basisvector – in dit geval e_2 – die in een bepaalde set van metingen meetuitkomst 1 heeft, dezelfde meetuitkomst heeft in de andere set waar deze basisvector deel van uit maakt. Dit levert echter een contradictie op. Iedere meetuitkomst 1 is nu namelijk uniek gepaard aan een andere meetuitkomst 1, wat een even aantal enen in de tabel impliceert. Echter, omdat per constructie iedere kolom één 1 telt en het aantal kolommen oneven is, is het aantal enen in de tabel dat ook. We hebben dus een empirisch model geconstrueerd waarvoor geen equivalent $\square$ - en parameteronafhankelijk verborgen variabelen model bestaat zonder dat dit contradicties oplevert. *QED*

Merk op dat de oorspronkelijke formulering van het KS-theorema niet over $\square$ - en parameteronafhankelijk spreekt, maar over non-contextueel. Er bestaat dus niet voor ieder empirisch model een non-contextueel verborgen variabelen model.

Een kwantummechanisch voorbeeld van het empirische model in het bewijs is een spin- $\frac{3}{2}$ deeltje⁵⁹, waarvan het spindeel van de toestandsfunctie een vierdimensionale Hilbert-ruimte opspant. Meting van de spincomponent in de z-richting geeft vier mogelijke meetuitkomsten: $-\frac{3}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar$. We definiëren nu meting a als volgt: a heeft als

meetuitkomst 1 als de spincomponent $-\frac{3}{2}\hbar$ is en anders is de meetuitkomst 0. Definieer b, c

⁵⁷ In de kansrekening heet dit *exchangeability*.

⁵⁸ Waar de meeste fysici deze aanname als triviaal beschouwen, is hij cruciaal voor het KS-theorema en zeker niet oncontroversieel. Zo ontkent Von Neumann een equivalente formulering in operatortaal.

⁵⁹ Dit is het enige *no go*-theorema waarbij niet aan meerdere deeltjes gemeten wordt. Daarom kunnen discussies over non-lokaliteit en instantane werking op afstand achterwege worden gelaten.

en d op analoge wijze voor de overige spincomponenten. Merk op dat bij een volledige set metingen a, b, c en d er één meetuitkomst 1 oplevert en de andere drie meetuitkomsten 0 opleveren. Analoog aan de constructie van tabel 1 kunnen we willekeurige bases op de vierdimensionale Hilbert-ruimte kiezen. Hiermee is een kwantummechanisch empirisch model geconstrueerd dat overeenkomt met het model in het bewijs. Onder de aanname van *exchangeability* concluderen we daarom dat de kwantummechanica intrinsiek contextueel is, i.e. er bestaat geen kwantummechanisch verborgen variabelen model dat non-contextueel is. Dit is de belangrijkste fysische conclusie van het KS-theorema. Er zijn dus altijd kwantummechanische metingen waarvan de meetuitkomstwaarschijnlijkheid afhangt van de overige uitgevoerde metingen, dit is intrinsiek aan de kwantummechanica en kan niet worden geëlimineerd met enig verborgen variabelen model.

Determinisme

Het resultaat van de analyse van de *go*- en *no go*-theorema's is te zien in figuur 7. Een kwantummechanisch verborgen variabelen theorie is slechts dan mogelijk als het model in een groen domein valt. Dit legt ernstige restricties op aan deterministische verborgen variabelen theorieën van de kwantummechanica.

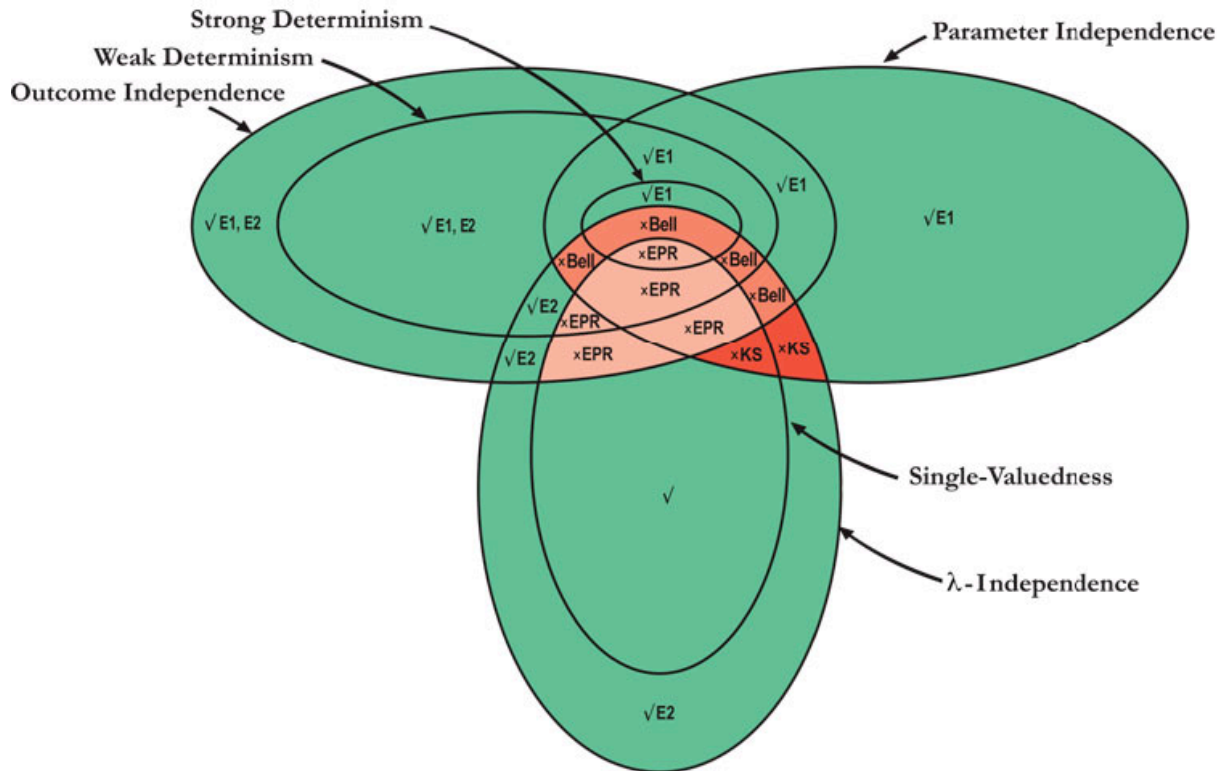


Fig. 7: het Vendiagram met de werking van alle *go*- en *no go*-theorema's.^{xxxix}

Sterk determinisme is nu alleen mogelijk als de theorie niet $\square$ -onafhankelijk is. Wil zo'n theorie sterk deterministisch zijn, dan moet de theorie beschrijven hoe de verborgen variabele(n) $\square$ worden beïnvloed door de uitgevoerde metingen zodat (2) niet meer altijd geldig is.

Bovendien moeten we concluderen dat kwantummechanica als wetenschappelijke theorie niet Laplace-deterministisch kan zijn. We hadden immers gezien dat Laplace-determinisme equivalent is aan een sterk deterministische $\square$ -onafhankelijke verborgen variabelen theorie. Uit figuur 7 blijkt echter dat een kwantummechanische verborgen variabelen theorie niet aan beide eisen tegelijk kan voldoen. De meest oorspronkelijke notie van determinisme is dus uitgesloten voor de kwantummechanica.

Het is van belang dat men hier onderscheid maakt tussen het kwantummechanisch formalisme en de kwantummechanica als wetenschappelijke theorie. Zoals we hebben

gezien is het formalisme fundamenteel Laplace-deterministisch. Wanneer we zeggen dat kwantummechanica niet Laplace-deterministisch kan zijn, bedoelen we dit m.b.t. metingen. Door de bril van een observator kan kwantummechanica dus niet Laplace-deterministisch zijn, terwijl het formalisme dat wel is.

Een alternatief voor louter sterk determinisme is zwak determinisme. Maar ook zo'n theorie kent de nodige restricties, zo kan een zwak deterministische verborgen variabelen theorie niet tegelijk $\square$ - en parameteronafhankelijk zijn. Oftewel, wil je enige vorm van determinisme behouden, dan moet de kwantummechanica contextueel zijn.

Nu we goed bekend zijn met de mogelijkheden en onmogelijkheden van determinisme in de kwantummechanica, kunnen we een concrete deterministische theorie onder de kwantummechanica bestuderen: die van Gerard 't Hooft.

Determinisme in de kwantummechanica volgens Gerard 't Hooft

Introductie

In mijn bestudering van 't Hoofts deterministische theorie van de kwantummechanica heb ik mij gericht op twee artikelen van zijn hand, te weten *Determinism in free bosons* uit 2001 en *The mathematical basis for deterministic quantum mechanics* uit 2006. De centrale gedachte in deze theorie is dat toestanden van een kwantummechanisch systeem één-op-één zijn te identificeren met een set van toestanden van een volledig⁶⁰ deterministisch model. Deze set van toestanden is een equivalentieklasse op een klassieke faseruimte. Hiermee krijgt ook de waarschijnlijkheidsinterpretatie een plaats binnen de nieuwe theorie, want vanwege informatieverlies over de precieze toestand binnen een equivalentieklasse is het niet meer mogelijk om zekere voorspellingen te doen. Dit alles zou betekenen dat kwantummechanica is te reduceren tot een deterministische onderlaag, waaruit zij als het ware emergeert.

De deterministische onderlaag beschouwt 't Hooft als opgebouwd uit verschillende klassieke, of “ontologische”, systemen. Klassiek betekent hier niet “gehoorzamend aan de wetten van de klassieke mechanica”. Het heeft een algemenere betekenis, namelijk dat ieder systeem wordt vastgelegd door een aantal grootheden $\vec{q}(t)$ en dat de tijdsevolutie van het systeem wordt vastgelegd door de 1^{ste} orde differentiaalvergelijking $\frac{d}{dt}\vec{q}(t) = \vec{f}(\vec{q}(t))$ in combinatie met de beginvoorwaarden $\vec{q}(t_0)$ en $\dot{\vec{q}}(t_0)$.

De meeste opzetten van de kwantummechanica proberen vervolgens zo'n klassiek systeem te modificeren, zodat er een gekwantiseerd systeem ontstaat met als kwantisatieconstante de constante van Planck. 't Hooft echter laat het klassieke systeem als zodanig intact binnen zijn theorie. Hij herformuleert dit systeem slechts in een taal die geschikt is voor kwantummechanica en laat vervolgens zien dat dit de gebruikelijke kwantummechanica oplevert. Deze methode noemt hij pre-kwantisatie.

Ik denk dat dit alles moet worden gezien in het licht van een groter plan dat moet leiden tot een deterministische kwantumveldentheorie en er als volgt uit ziet:

1. Aantonen dat een herformulering van een volledig deterministisch, klassiek systeem de fysica van een kwantummechanische harmonische oscillator (KHO)

⁶⁰ Het centrale voorbeeld in zijn artikelen – de kwantummechanische harmonische oscillator – impliceert dat 't Hooft hier Laplace-determinisme in gedachten heeft.

oplevert, i.e. de eigentoestanden van een KHO zijn één-op-één te identificeren met een set van toestanden van het klassieke systeem.

2. Een manier vinden om op dezelfde wijze meerdere KHO's te beschrijven.
3. Het toevoegen van interacties aan de theorie.
4. Een theorie ontwikkelen waarin overaftelbaar veel KHO's, inclusief interacties, deterministisch kunnen worden beschreven. Dit is dan een deterministische kwantumveldentheorie⁶¹, aangezien kwantumveldentheorie niets anders is dan de beschrijving van overaftelbaar veel KHO's in de ruimtetijd.⁶²

Het is hierbij van belang dat men zich realiseert dat 't Hooft de kwantummechanica – die haar waarde als wetenschappelijke theorie ruimschoots heeft bewezen – niet afkeurt. Hij wil slechts laten zien dat er een deterministisch beschrijvingskader bestaat waaruit de kwantummechanica emergeert, hetgeen impliceert dat kwantummechanica intrinsiek deterministisch is.

Ik heb mij voornamelijk gericht op de eerste twee punten van het grotere plan, deze wil ik hier dan ook presenteren. We zullen gaan kijken naar het centrale voorbeeld in zijn theorie, de kwantummechanische harmonische oscillator. Daarna behandelen we kort punt 2 van het grotere plan en bestuderen we een probleem waar 't Hooft tegenaan loopt: het feit dat de verkregen Hamiltoniaan niet vanonder begrensd is.

Kwantummechanische harmonische oscillator (1)

Als centraal voorbeeld van zijn theorie laat 't Hooft zien hoe een herformulering van een bepaald klassiek systeem de fysica van een kwantummechanische harmonische oscillator oplevert.

Het deterministische klassieke systeem bestaat uit N toestanden die genoteerd worden met $(0), (1), \dots, (N-1)$. In eerste instantie veronderstellen we dat het systeem evolueert met discrete tijdstapjes τ . We construeren de tijdsevolutie van de klassieke toestanden als volgt:

$$t \rightarrow t + \tau : (v) \rightarrow ((v + 1) \bmod N). \quad (9)^{63}$$

In figuur 8 is een representatie van deze tijdsevolutie te zien voor $N = 10$.

⁶¹ Eigenlijk zou mijn werkstuk daarom "Determinisme onder de kwantumveldentheorie" moeten heten. Maar omdat wij ons beperken tot de kwantummechanica, heb ik gekozen voor de alternatieve titel.

⁶² Het idee van deze laatste stap komt van prof. dr. Sijbrand de Jong, zelf weet ik nog niets af van kwantumveldentheorie.

⁶³ "mod" betekent modulo. We noteren $\square$ alleen met getallen tussen 0 en $N-1$.

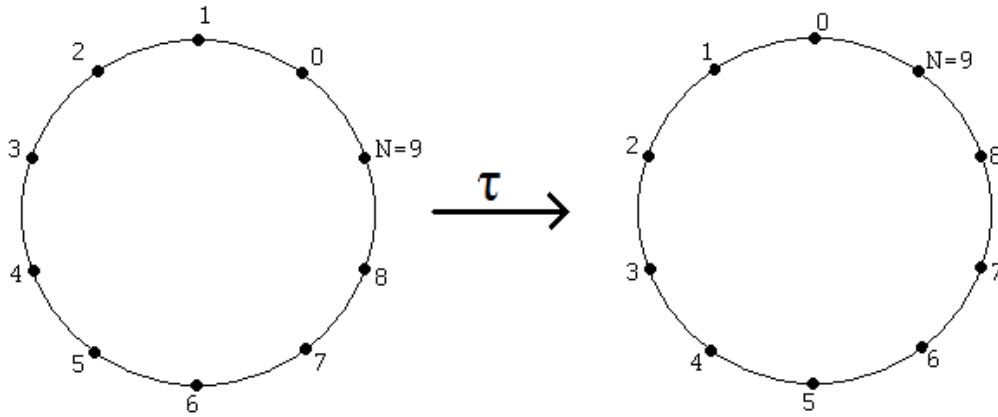


Fig. 8: illustratie van de tijdsevolutie van het klassieke systeem voor $N=9$.

Nu we het klassieke systeem en zijn tijdsevolutie hebben beschreven, herformuleren we het in termen die beter geschikt zijn voor kwantummechanica. We representeren de toestanden van het systeem met kolomvectoren van lengte N , zodat een toestand (v) op plaats $v + 1$ heeft staan⁶⁴ en op de overige plekken 0. In deze representatie wordt de tijdsevolutie beschreven door een $N \times N$ – matrix⁶⁵

$$\hat{U}(\Delta t = \tau) \equiv e^{-\frac{i\pi}{N}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

zodat $\hat{U}(\tau)(v) = (v + 1 \bmod N)$.

Feitelijk gebruikt 't Hooft hier het Koopmanformalisme, dat zegt dat zo'n unitaire evolutie-operator van een klassiek systeem altijd bestaat.⁶⁶ Veronderstel nu dat er een zelfgeadjungeerde lineaire operator $\hat{H}$ bestaat zodanig dat $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau} = \hat{U}(\Delta t = \tau)$. Deze operator werkt op de N -dimensionale vectorruimte van toestanden, die we nu kunnen beschouwen als een Hilbert-ruimte. Merk op dat we tot nu toe nog geen schokkende resultaten hebben geboekt. Alles wat we hier hebben gebruik is klassiek en reeds bekend.

't Hooft stelt nu dat $\hat{H}$ eigentoestanden $|n\rangle$ heeft, waarbij $n = 0, 1, \dots, N-1$ en waarvoor de volgende eigenwaardevergelijking geldt:

$$\hat{H}|n\rangle = \frac{2\pi\hbar(n+1/2)}{N\tau}|n\rangle. \quad (10)$$

⁶⁴ Op een fasefactor na. Deze fasefactor is voor iedere toestand overigens hetzelfde.

⁶⁵ Oftewel, als een lineaire operator op de N -dimensionale vectorruimte waarvan de toestanden een basis vormen.

⁶⁶ Dit is het lemma van Koopman en onderdeel van ergodentheorie, zie Reed & Simon (1972, p. 57-58).

Ik heb het bewijs hiervan uitgewerkt.

Laat $\hat{H}|n\rangle = \alpha(n)|n\rangle$, zodat

$$\hat{U}(\Delta t = \tau)|n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}|n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha(n)\tau}|n\rangle. \quad (11)$$

$|n\rangle$ is dus ook een eigenfunctie van de evolutie-operator $\hat{U}(\Delta t = \tau)$.

Lemma De eigenwaarden λ van $\hat{U}(\Delta t = \tau)$ voldoen aan de vergelijking $\lambda^N - 1 = 0$.

Bewijs We noteren met $\lambda^{(i)}$ de eigenwaarde λ op de i -de plek in een rij van dezelfde eigenwaarden. De eigenwaarden voldoen dan aan

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \lambda^{(1)} & -1 & & & \\ & \lambda^{(2)} & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda^{(N-1)} & -1 \\ -1 & & & & \lambda^{(N)} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^{(1)} \begin{vmatrix} \lambda^{(2)} & -1 & & & \\ & \lambda^{(3)} & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda^{(N-1)} & -1 \\ & & & & \lambda^{(N)} \end{vmatrix} + (-1)^N \begin{vmatrix} -1 & & & & \\ \lambda^{(2)} & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda^{(N-2)} & -1 & \\ & & & \lambda^{(N-1)} & -1 \end{vmatrix} = \lambda^N + (-1)^N (-1)^{N-1} \\ &= \lambda^N + (-1)^{2N} (-1)^{-1} = \lambda^N - 1. \end{aligned}$$

Bij de derde gelijkheid is gebruikt dat de determinant van een boven- of onderdriehoeksmatrix het product van de diagonaalelementen is. Hiermee is het lemma bewezen. *QED*

De N eigenwaarden van $\hat{U}(\Delta t = \tau)$ liggen dus equidistant op de eenheidscirkel in het complexe vlak, waarbij $\lambda = 1$ één eigenwaarde is. De eigenwaarden zijn

$$\lambda_n = \exp\left(i \left\{ \frac{2\pi}{N} (-1 - n) \right\}\right) \text{ met } n = 0, 2, \dots, N-1. \text{ }^{67}$$

⁶⁷ De nummering van de eigenwaarden is vrij te kiezen. De hier aangehouden nummering levert (10) op. Een andere nummering zorgt voor een altijd toegestane translatie op de energieschaap in (10).

Uit (11) volgt nu dat

$$\exp\left(i\left\{\frac{\pi}{N} - \frac{\alpha(n)\tau}{\hbar}\right\}\right) = \exp\left(i\left\{\frac{2\pi}{N}(-1-n)\right\}\right) \quad (12)$$

oftewel

$$\frac{\pi}{N} - \frac{\alpha(n)\tau}{\hbar} = \frac{2\pi}{N}(-1-n). \quad (13)$$

Oplossen voor $\alpha(n)$ geeft inderdaad (10).

Om de verkregen Hamiltoniaan in de gewenste vorm te krijgen, definiëren we een aantal nieuwe parameters. Hierbij nemen we N oneven, maar analoge definities gelden voor N even.

$$l \equiv \frac{N-1}{2} \quad (14)$$

$$m \equiv n - l \quad (15)$$

Omdat $n = 0, 1, \dots, N-1$, nu $m = -l, -l+1, \dots, l$. We moeten het getal l beschouwen als een maat voor het aantal toestanden van het klassieke systeem (op de cirkel in figuur 8), terwijl het getal m nu een index is voor een specifieke toestand. Wanneer we het getal l nu interpreteren als het azimuthale kwantumgetal en m als het magnetische kwantumgetal, dan kunnen we gebruik maken van kennis over de algebra van de operatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$.⁶⁸ We vervangen de set eigentoestand $\{|n\rangle\}$ door de set $\{|m\rangle\}$. Omdat $\hat{L}_z|m\rangle = \hbar m|m\rangle$, is de Hamiltoniaan te schrijven als

$$\hat{H}|m\rangle = \frac{2\pi\hbar}{(2l+1)\tau} (m+l+1/2)|m\rangle, \quad (16)$$

$$\text{of } \hat{H} = \frac{2\pi}{(2l+1)\tau} (\hat{L}_z + \hbar l + \hbar/2). \quad (17)$$

⁶⁸ Dit zijn de generatoren van de symmetriegroep $SU(2)$.

Vervolgens kunnen we een plaats- en impulsoperator definiëren. Met deze plaats en impuls identificeren we een deeltje met massa $M \equiv 1$, andere massa's kunnen later in de vergelijkingen verdisconteerd worden als constante.⁶⁹

$$\hat{x} \equiv \sqrt{\frac{\tau}{\hbar\pi}} \hat{L}_x \quad \text{en} \quad \hat{p} \equiv \frac{-2}{2l+1} \sqrt{\frac{\pi}{\hbar\tau}} \hat{L}_y \quad (18)$$

Als laatste definiëren we een hoekfrequentie

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{(2l+1)\tau}, \quad (19)$$

die een maat is voor de snelheid waarmee de klassieke toestanden evolueren in de tijd (ronddraaien op de cirkel). M.b.v. bekende identiteiten van de $SU(2)$ -generatoren - zoals $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = l(l+1)$ - verkrijgen we na flink wat schrijfwerk de volgende twee vergelijkingen:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \left(\hbar - \frac{\tau}{2\pi} \hat{H} \right) \quad (20)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{\tau}{2\pi} \left(\frac{\hbar\omega^2}{4} + \frac{\hat{H}^2}{\hbar} \right). \quad (21)$$

't Hooft neemt nu de continuümlimiet van $\ell \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0$, waarbij ω constant blijft. De hoekfrequentie is immers een eigenschap van het klassieke systeem (en het toekomstige kwantumsysteem). Het klassieke systeem is nu een continuüm van toestanden geworden die periodiek evolueren in de tijd met hoekfrequentie ω en waar een toestand is te identificeren met een coördinaat $y \in [0, 2\pi]$ op de eenheidscirkel. Bovendien is ook de tijd nu continu. In deze limiet reduceren (20) en (21) tot:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad ; \quad (22)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} \hat{p}^2. \quad (23)$$

Waarachtig een spectaculair resultaat, want dit zijn precies de vergelijkingen waar een ééndimensionale kwantummechanische harmonische oscillator met eigenfrequentie ω aan voldoet! We verkrijgen namelijk de kanonieke kwantummechanische commutatierelatie voor plaats en impuls en de Hamiltoniaan van de KHO. Hiermee geeft 't Hooft een prachtig voorbeeld van een bekend kwantumsysteem dat emergeert uit een klassiek systeem. Bovendien is punt 1 in het plan hiermee volbracht. Uit (16) volgt namelijk dat de energie van een kwantumtoestand van de KHO het kwantumgetal m bepaalt. En aangezien een klassieke

⁶⁹Dimensionale analyse leert waar de eenheidsmassaterm zich in de volgende vergelijkingen bevindt.

toestand (v) ontbonden kan worden in een discrete Fourier-reeks van toestanden van $|m\rangle$, kunnen we de kwantumtoestanden van de KHO identificeren met een equivalentieklasse op de toestanden van het klassieke systeem.⁷⁰ De KHO is daarmee volledig te reduceren tot een deterministisch klassiek systeem.

Het belang van de deterministische KHO van Gerard 't Hooft is mijns inziens tweeledig. In de eerste plaats is het een belangrijke stap in het grotere plan van een deterministische theorie onder de kwantumveldentheorie. Ten tweede is het een duidelijke aanwijzing dat zo'n theorie wel eens zou kunnen kloppen.⁷¹

Merk overigens op dat we nergens het klassieke systeem hebben gekwantiseerd, we hebben het klassieke systeem slechts in een andere taal geformuleerd. Dit is in overeenstemming met 't Hoofts idee van pre-kwantisatie. Ook worden de plaats- en impulsoperator in de limiet continu, precies wat we willen voor een KHO.

Kwantummechanische harmonische oscillator (2)

Ik denk echter dat in de herformulering de inzichtelijkheid van de continuümlimiet verdwijnt en dat we hierdoor verkeerde conclusies trekken. Dit vermoeden ontstaat vooral door (16) en (17), want omdat $(2l+1)\tau$ constant is in de limiet, blazen de eigenwaarden van $\hat{H}$ lineair in l op. Hoe is het dan mogelijk dat in de herformulering (21) de Hamiltoniaan netjes eindig blijft in de continuümlimiet? Het antwoord is dat dit niet het geval is, ook in (21) blaast de Hamiltoniaan op.

De tijdstap τ gaat weliswaar naar nul in de continuümlimiet, maar m.b.v. (16) vinden we dat in de limiet $\tau \hat{H}^2 \propto l$. Daarom heeft ook (21) geen eindige limiet. We moeten concluderen dat de continuümlimiet niet de Hamiltoniaan van de KHO oplevert. In plaats daarvan hebben alle kwantumtoestanden m een oneindige energie⁷², wat het onmogelijk maakt om een bekend kwantumsysteem met deze Hamiltoniaan te identificeren.

Maar ook (20) levert in de limiet niet de kanonieke commutatierelatie (22) op. In de limiet immers gaat $\tau \hat{H} \rightarrow 2\pi\hbar$, met als gevolg dat $[\hat{x}, \hat{p}] \rightarrow 0$. Dit is een commutatierelatie van een klassiek systeem, waarin plaats en impuls met elkaar commuteren. Het is dus niet alleen onmogelijk gebleken om een bekend kwantumsysteem te identificeren met ons klassieke systeem, het is überhaupt niet mogelijk dat op deze wijze kwantummechanica emergeert uit

⁷⁰Oftewel, een set van toestanden op de cirkel.

⁷¹'t Hooft geeft in zijn twee artikelen helaas geen andere voorbeelden waarin een bekend kwantumsysteem emergeert uit een klassiek systeem.

⁷²Bij eindige m .

een deterministisch klassiek systeem. Ondanks de herformuleringen behouden we immers de oorspronkelijke klassieke commutatierelatie van plaats en impuls.

Met deze klassieke commutatierelatie als resultaat ben je snel geneigd te denken dat de continuümlimiet eigenlijk niets anders is dan de klassieke limiet van de kwantummechanica. Ik denk echter dat dit niet zo is. Immers, in de klassieke limiet van de KHO laat je niet het aantal mogelijke eigentoestanden l naar oneindig gaan (dit aantal is in de KHO al oneindig), maar de actuele eigentoestand m gaat naar oneindig.^{xl} Bovendien gaat in deze limiet de constante van Planck naar nul, terwijl daar bij ons geen sprake van is. Dit is dus wel degelijk een andere limiet en het probleem van de klassieke commutatierelatie is niet weg te redeneren door te verwijzen naar de klassieke limiet.

Een ander probleem en de oplossing

Ik zou nu in principe graag 't Hoofts theorie bespreken over hoe twee (of meerdere) KHO's te identificeren zijn met een klassiek systeem (dat nu bestaat uit twee cirkels). Het is een mooie theorie die de golffunctie interpreteert als een equivalentieklasse op de tweedimensionale gedetermineerde klassieke faseruimte en op deze wijze de waarschijnlijkheid in dit voorbeeld een plaats geeft. Maar voordat we over meerdere KHO's kunnen spreken, is het mijns inziens noodzakelijk om eerst één KHO goed te begrijpen. Daarvoor moeten de zojuist genoemde problemen worden opgelost. En als dit niet mogelijk blijkt te zijn, dan is het zinloos om de theorie verder te ontwikkelen tot meerdere KHO's. Daarom bespreek ik twee (of meerdere) KHO's niet en wacht ik op een oplossing voor de zojuist genoemde problemen.

Een heel ander probleem is het feit dat de verkregen Hamiltoniaan niet van onder begrensd is. Dit is goed zichtbaar in (16), waar in de continuümlimiet $m = -\infty, \dots, +\infty$. Daarom is het niet mogelijk om een nulpuntsenergie aan te wijzen⁷³, terwijl dit in kwantummechanische systemen wél aanwezig moet zijn. 't Hooft lost dit probleem op door zich te beperken tot de positieve energie eigenfuncties. Hij beargumenteert dit met de volgende stelling, die zegt dat deze beperking geen verlies van algemeenheid tot gevolg heeft.

⁷³ Dit is eigenlijk enigszins ambigu, want je werkt met twee oneindigheden die je van elkaar aftrekt. Maar het idee dat er géén nulpuntenergie is aan te wijzen, is duidelijk.

Propositie^{xli} Consider any probability distribution $W(q)$ that is not strictly vanishing for any value of q , that is, a strictly positive, real function of q . Then a complex wave function $\psi(q)$ can be found such that $W(q) = \psi(q)^* \psi(q)$, and $\psi(q)$ is a convergent linear composition of eigenstates of $\hat{H}$ with nonnegative eigenvalues only.

Dit is namelijk $\psi(q) = \exp(\alpha(q) + i\beta(q))$ met $z = e^{iq}$ en met $\alpha(q) + i\beta(q)$ een functie gedefinieerd op de gehele eenheidscirkel van z .

Bewijs Het bewijs heb ik te danken aan dr. Michael Müger en is te vinden in de appendix. Er wordt gebruik gemaakt van een zogenaamde Hilbert-transformatie.

Ik denk dat 't Hooft hiermee een goede oplossing geeft voor zijn probleem, maar ik zie niet in hoe dit in de praktijk kan worden gebracht (bijv. in de KHO). Hiervoor is meer en specifiek onderzoek nodig.

Determinisme

Tot slot wil ik het determinisme binnen de theorie van 't Hooft op twee manieren belichten. In de eerste plaats kunnen we stellen dat er binnen zijn theorie sprake is van ontologisch determinisme en niet van epistemologisch determinisme. Op de twee vragen die gezamenlijk het epistemologisch determinisme representeerden heeft de theorie namelijk geen antwoord. Zoals gezegd accepteert 't Hooft de kwantummechanica als wetenschappelijke theorie. Zijn gepostuleerde deterministische onderlaag biedt echter geen nieuwe voorspellingen die de kwantummechanica niet doet. Daarom kunnen we op empirische grond niet het onderscheid maken tussen de kwantummechanica en de theorie van 't Hooft en is het niet mogelijk om vast te stellen of de wereld werkelijk deterministisch is.

Bovendien biedt de theorie geen methode om zekere, niet-statistische voorspellingen te doen. Vanuit de eigentoestand van de KHO kan 't Hooft weliswaar afleiden wat de toestand van het klassieke systeem is, maar deze kennis over de klassieke toestand leidt niet tot zekere voorspellingen over het kwantumsysteem (bijv. over waar het deeltje zich in de potentiaalput bevindt).⁷⁴

We kunnen dus concluderen dat 't Hoofts determinisme niet epistemologisch, maar ontologisch is. Hij postuleert een deterministisch klassiek systeem en probeert aannemelijk te maken dat de kwantummechanica uit dit systeem emergeert, zodat we de kwantummechanica als intrinsiek deterministisch kunnen beschouwen. Omdat het determinisme van het klassieke systeem Laplace-determinisme is⁷⁵, hebben we nu inderdaad te maken met ontologisch determinisme.

Een belangrijke stap die 't Hooft zal moeten zetten in de ontwikkeling van zijn theorie is deze overgang van ontologisch naar epistemologisch determinisme. Om beide vragen van het epistemologisch determinisme te kunnen beantwoorden is kennis van de geschiedenis $H(t)$ op een bepaald tijdstip $t \in \mathfrak{R}$ nodig. Dit betekent dat de klassieke onderliggende toestanden empirisch waarneembaar moeten zijn. Echter, in de experimentele fysica is er op dit moment geen enkele aanwijzing voor het bestaan van die soort klassieke toestanden en de theorie geeft ook niet aan of en hoe deze klassieke toestanden waarneembaar zijn. Wil 't Hooft de stap naar epistemologisch determinisme maken en daarmee tegelijkertijd een werkelijk wetenschappelijke⁷⁶ theorie creëren, dan moet dit probleem worden opgelost.

In de tweede plaats kunnen we bestuderen hoe het determinisme van 't Hooft zich verhoudt tot de vormen van determinisme in onze analyse van het scala van verborgen variabelen

⁷⁴ Informatieverlies over de onderliggende deterministische toestanden speelt ook een belangrijke rol wanneer interacties bij de theorie worden betrokken. Dit maakt zekere voorspellingen opnieuw onmogelijk.

⁷⁵ Dit is in ieder geval zo bij de KHO. Tevens blijkt nergens uit dat 't Hooft een andere vorm van determinisme voor ogen heeft.

⁷⁶ Met "wetenschappelijk" bedoel ik hier empirisch verifieerbaar, dan wel empirische falsificeerbaar.

theorieën. Eenmaal impliceert 't Hooft dat we zijn theorie kunnen beschouwen als een verborgen variabelen theorie.^{xlii} Ik ben het hiermee eens. De verborgen variabelen zijn hier namelijk de coördinaten van de toestanden van het klassieke systeem. Hiermee is op zijn minst een primitieve verborgen variabelen theorie geconstrueerd.

Ik denk dat wij zijn theorie zelfs kunnen beschouwen als een meerwaardige, $\square$ -onafhankelijke, sterk deterministische verborgen variabelen theorie. De toestanden van het systeem veranderen namelijk in de tijd en hun tijdsevolutie is gegeven zonder de kwantummechanische eigenschappen van de KHO en eventuele metingen aan het systeem erbij te betrekken. Dat de theorie sterk deterministisch is wordt nergens expliciet gesteld. Maar aangezien de theorie geen belang hecht aan welke metingen worden uitgevoerd, kunnen we aannemen dat 't Hooft een sterk deterministische theorie voor ogen heeft.

Het probleem is nu dat de theorie van 't Hooft vanwege het Bell-theorema alleen kan bestaan als minstens één van de aannamen in deze stelling wordt verworpen (fig. 7). Tegen het algemenere KS-theorema kan een ontkenning van *exchangeability* worden ingebracht, maar daarmee blijft het Bell-theorema overeind. Wil de theorie kans van slagen hebben, dan moet dit *no go*-theorema op de een of andere manier worden omzeild.

Wat betreft het omzeilen zijn er twee opties (fig. 9). In beide gevallen moet de theorie een conditie laten vallen. Je kunt vasthouden aan sterk determinisme en de conditie van $\square$ -onafhankelijkheid laten varen. De klassieke toestanden moeten dan afhankelijk worden gemaakt van welke metingen er worden uitgevoerd, of de klassieke toestanden moeten op de een of andere wijze de metingen beïnvloeden. De tweede optie is om $\square$ -onafhankelijkheid te behouden en te eisen dat de theorie niet sterk, maar zwak deterministisch is. In dat geval zal moeten worden verklaard hoe overige uitgevoerde metingen een zekere, niet-statistische meetuitkomst kunnen beïnvloeden. In beide gevallen moet binnen de theorie de invloed van welke metingen er worden uitgevoerd vergroot worden. Op *Fysica 2008*⁷⁷ gaf 't Hooft te kennen dat zijn voorkeur uitgaat naar de eerste optie in de tweede variant: hij denkt dat het Bell-theorema omzeild kan worden omdat verborgen variabelen de meting zélf beïnvloeden.

⁷⁷ Een symposium georganiseerd door de Nederlandse Natuurkunde Vereniging, gehouden op 18 april 2008 te Nijmegen.

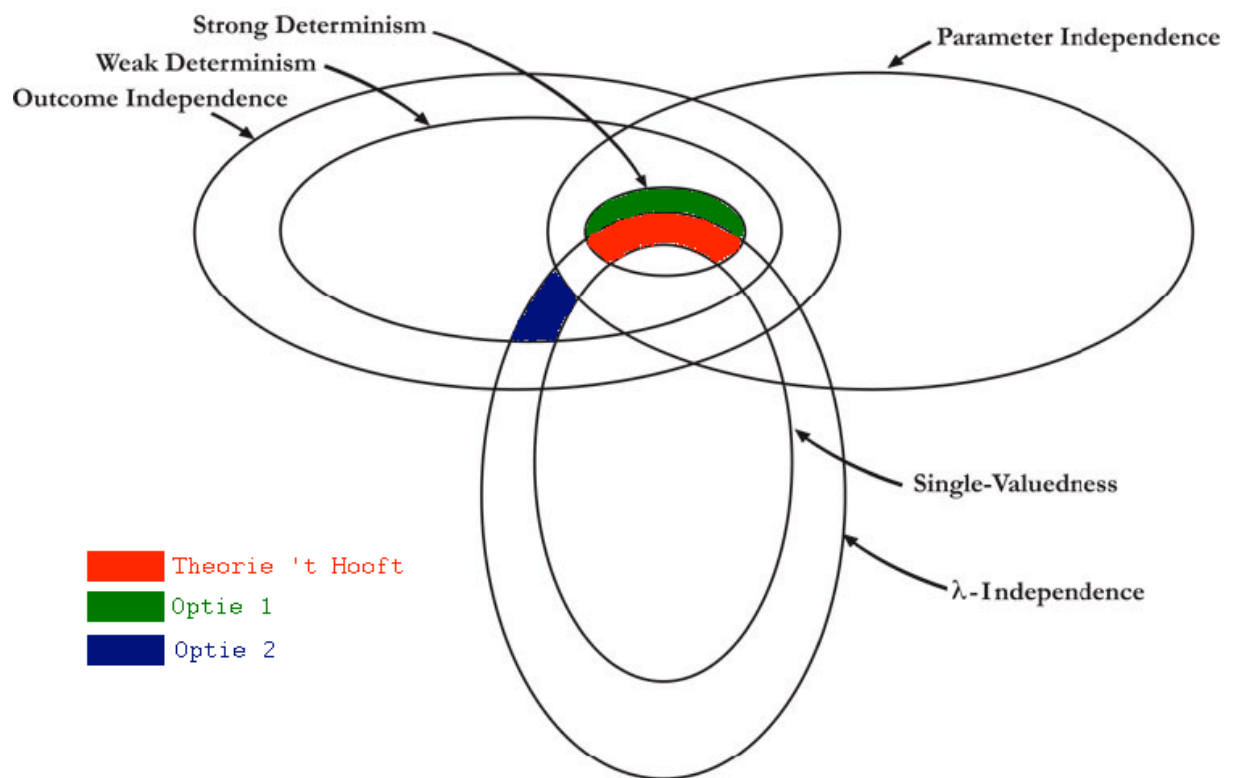


Fig. 9: positie van huidige theorie 't Hooft en van de twee opties om het Bell-theorema te omzeilen.

Conclusie

Wil een nieuwe en controversiële theorie weerstand bieden aan het kwantummechanische paradigma van de afgelopen tachtig jaar, dan moet zij op zijn minst óf met cruciale empirische fenomenen komen die de kwantummechanica tegenspreken óf een goede aanwijzing hebben die de uitspraken van de theorie bevestigen. Zoals gezegd is er in de theorie van 't Hooft van het eerste geval geen sprake; de kwantummechanica als zondanig is volgens hem correct, maar onvolledig. De goede aanwijzing voor de uitspraak dat de kwantummechanica emergeert uit klassiek gedetermineerde systemen is daarentegen volgens 't Hooft wél aanwezig, namelijk de kwantummechanische harmonische oscillator. Ik heb echter laten zien dat de problemen met de continuümlimiet deze uitspraak ondermijnen, uit het klassieke systeem dat 't Hooft beschouwt emergeert noch de KHO, noch enig ander bekend kwantummechanisch systeem. Voordat de theorie verder ontwikkeld kan worden is het mijns inziens daarom noodzakelijk dat de problemen met de KHO worden opgelost, of dat er een ander kwantummechanisch systeem wordt gevonden dat gerepresenteerd kan worden door een klassiek systeem en daarmee de theorie onderbouwt. Dit laatste is niet noodzakelijkerwijs uitgesloten. We hebben echter gezien dat ons klassieke systeem na de kwantummechanische herformulering haar klassieke commutatierelatie van plaats en impuls had behouden. Dit lijkt een fundamenteel probleem te zijn en dient te worden opgelost met het oog op alternatieve kwantummechanische systemen die exemplarisch zijn voor de theorie.

Daarnaast hebben we gezien dat een levensvatbare deterministische theorie een aantal aanpassingen behoeft: om de stap naar epistemologisch determinisme en daarmee empirisch verifieerbare/falsifieerbare uitspraken te maken, moet er een mechanisme beschreven worden dat waarneming van onderliggende klassieke toestanden mogelijk maakt. Tevens moet de theorie antwoord geven op het Bell-theorema, óf door het te ontkennen, óf door het te omzeilen. We hebben gezien dat in het tweede geval de theorie zich meer rekenschap dient te geven van de invloed van overige uitgevoerde metingen en van het verband tussen de verborgen variabelen en een meting. Het lijkt erop dat dit aspect – de eerder besproken contextualiteit – onlosmakelijk verbonden is aan de kwantummechanica.

Ondanks de problemen en benodigde aanpassingen denk ik dat de ideeën van 't Hooft zeker kans van slagen hebben. De problemen met de interpretatie van de kwantummechanica zijn te groot om kwantummechanica als een volledige theorie te beschouwen. Bovendien wordt er nog steeds veel onderzoek gedaan op het grensvlak van klassieke en kwantummechanische systemen, mogelijk kunnen de ideeën van 't Hooft op nieuwe ontwikkelingen binnen dit vakgebied inhaken.

Appendix

Bibliografie

- [1] J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge 1994 (Cambridge University Press, 7).
- [2] A. Brandenburger, N. Yanofsky, "A Classification of Hidden-Variable Properties", 2007, arXiv:quant-ph/0711.4650v1.
- [3] J. Bub, *Interpreting the Quantum World*, Cambridge 1999 (Cambridge University Press, 2).
- [4] J. Earman, *A primer on determinism*, Dordrecht 1986 (D. Reidel Publishing Company).
- [5] J. Earman, "Aspects of determinism in modern physics", in: *Philosophy of Physics, part B*, ed. J. Butterfield en J. Earman, Amsterdam 2007 (Elsevier, 1).
- [6] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, London 2005 (Pearson education international, 2).
- [7] C. Hoefer, "Causal Determinism", in: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008, <http://www.science.uva.nl/~seop/entries/determinism-causal/>.
- [8] G. 't Hooft, "Determinism in free bosons", 2001, arXiv:hep-th/0104080v2.
- [9] G. 't Hooft, "Determinism beneath quantum mechanics", 2002, arXiv:quant-ph/0212095v1.
- [10] G. 't Hooft, "The mathematical basis for deterministic quantum mechanics", 2006, arXiv:quant-ph/0604008v2.
- [11] G. 't Hooft, "On the free-will postulate in quantum mechanics", 2001, arXiv:quant-ph/0701097v1.
- [12] N. P. Landsman, *ERC Advanced Grant – Research Proposal*, Nijmegen 2008.
- [13] B. R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, West Sussex 2007 (Wiley, 1).
- [14] J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin 1968 (Springer-Verlag).
- [15] J. v. Neumann, brief aan Erwin Schrödinger, in: M. Rédei, *John von Neumann: Selected Letters*, History of Mathematics 2005, Vol. 27.
- [16] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, vert. I. B. Cohen en A. Whitman, London 1999 (University of California Press, 1).
- [17] A. J. van Opstal, *Inleiding Biofysica, Deel II: lineaire systeemtheorie en oogbewegingen*, Nijmegen 2007.
- [18] P. Pearle, "Reduction of the state vector by a nonlinear Schrödinger equation", in: *Physical Review D*, 1976, Vol. 13, No. 4.
- [19] C. K. Raju, *Time : towards a consistent theory*, Dordrecht 1994 (Kluwer).
- [20] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, I: functional analysis*, London 1972 (Academis Press).
- [21] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Reading 1994 (Addison-Wesley Publishing Company, 2).
- [22] R. W. Spekkens, "Negativity and contextuality are equivalent notions of nonclassicality", arXiv:quant-ph/0710.5549v2.
- [23] A. Truman, H. Z. Zhao, "Semi-Classical Limit of Wave Equations", in: *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2000, Vol. 128, No. 4, pp. 1003-1009.
- [24] R. M. Wald, *General Relativity*, London 1984 (The University of Chicago Press).
- [25] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil I: Grundlagen*, Stuttgart 2000 (B. G. Teubner Stuttgart, 1).

-
- i Gebasseerd op Earman (2007)
ii Martin (2007), hoofdstuk 6
iii Stanford (2008) , hoofdstuk 3
iv Stanford (2008), hoofdstuk 3
v Newton (1999), pp. 416-417
vi Wald (1984), pp. 3-10
vii Earman (2007), pp. 1375-1378
viii Stanford (2008), pp. 15-16
ix Earman (2007), pp. 1385
x Stanford (2008), p. 16
xi Earman (2007), p. 1385, noot 31
xii Earman (2007), pp. 1386-1387
xiii Stanford (2008), p.15
xiv Stanford (2008), pp. 13-15
xv Earman (2007), pp. 1385-1386
xvi Landsman (2008)
xvii Stanford (2008), p. 14
xviii Earman (2007), p. 1385
xix Stanford (2008), p. 14
xx Wald (1984), pp. 40-49
xxi Malament (2007)
xxii Earman (1986)
xxiii Stanford (2008), p. 13
xxiv Earman (2007), p. 1400
xxv Voor een voorbeeld zie Earman (2007), p. 1402
xxvi Weidmann (2000), pp. 271-272
xxvii Dit is een variant op het voorbeeld in Earman (2007), p. 1400
xxviii Earman (2007), p. 1403
xxix Earman (2007), p. 1405
xxx Griffiths (2005), p. 2
xxxi Earman (2007), p. 1406
xxxii Von Neumann (1932), p. 108
xxxiii Von Neumann (1932), p. 108
xxxiv Gebasseerd op Brandenburger & Yanofsky (2007)
xxxv Uit Brandenburger & Yanofsky (2007)
xxxvi Uit Brandenburger & Yanofsky (2007)
xxxvii Sakurai (1994), pp. 136-139
xxxviii Uit Brandenburger & Yanofsky (2007)
xxxix Uit Brandenburger & Yanofsky (2007)
xl Truman & Zhao (2000)
xli 't Hooft (2006), p. 6
xlii 't Hooft (2006), pp. 1-2