Lineaire programmering

HANS MAASSEN

kort naar 'Inleiding Besliskunde' van J. Potters [Pot].
en 'Methods of Mathematical Economics' van J. Franklin [Fra].

Lineaire programmering is het bepalen van het maximum of het minimum van een lineaire functie op een polytoop.

INLEIDING

In veel praktijkproblemen wordt het maximum of het minimum gezocht van een functie f (kosten, weglengte, winst) op een domein D van mogelijkheden.
De aangeleerde reflex, f te differentiëren en f' gelijk te stellen aan 0 is slechts voor een beperkte klasse van — niet-lineaire — gevallen effectief, namelijk als de extreme waarde wordt aangenomen op het inwendige van D. Heel vaak echter wordt ze aangenomen op de rand, en is deze rand door een stelsel van ongelijkheden gegeven. Wanneer deze ongelijkheden nu *lineair* zijn, evenals de functie f zelf, dan geraken we in het gebied dat om historische redenen *lineaire programmering* heet, en waar een fraai oplossingsalgoritme ter beschikking staat: het *simplex-algoritme* van George Dantzig (1947). We zullen het in dit college behandelen.

1. HET PRIMAIRE PROBLEEM

Zij $m, n \in I\!N$, zij A een reële $m \times n$-matrix met ingangen a_{ij} $(i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots n)$. Laat verder $b \in \mathbb{R}^m$ en $c \in \mathbb{R}^n$. Zij D het deel van $\mathbb{R}^n$ dat wordt beschreven door de lineaire ongelijkheden $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ en:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \ , \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \ , \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \ ,
\end{aligned}$$

of kortweg

$$x \geq 0 \ ; \quad Ax \leq b \ .$$

We zoeken het maximum van de functie $f : D \to \mathbb{R}$ die wordt gegeven door

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \ ,$$

ook wel kort aangeduid als $\langle c, x\rangle$ of $c^T x$.

In het bovenstaande hebben we gekozen voor $\leq$-relaties; en een maximumprobleem. Dit is het gemakkelijkst voorstelbare geval. Andere mogelijkheden komen ook voor, maar we zullen ons hier steeds houden aan de conventie dat, als we een maximum zoeken, we D beschrijven met $\leq$-relaties, en als we een minimum zoeken, met $\geq$-relaties. (Merk op dat we hier vrij in zijn, aangzien we (A, b) kunnen vervangen door $(-A, -b)$, en het ongelijkteken omklappen zonder D te wijzigen.)

We introduceren nog de volgende terminologie: we zeggen dat dit probleem *uitvoerbaar* is als het domein D niet leeg is. We zeggen dat het probleem *begrensd* is als f op dit domein *van boven* begrensd is. Een minimalisatieprobleem noemen we *begrensd* als f op D van beneden begrensd is. Het gaat er dus om, of de gezochte extremale waarde bestaat of niet.

Als voorbeeld bekijken we het volgende stelsel in $\mathbb{R}^3_+$:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 12 \,, \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \,, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \,, \end{aligned}$$

waarop we de functie $f(x) := 3x_1 + 5x_2$ willen maximaliseren.

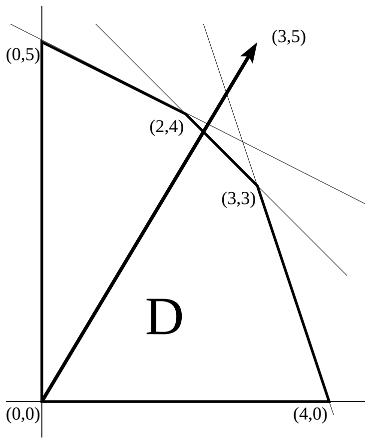

FIG. 1

In Fig. 1 is dit gebied D afgebeeld, evenals de vector $c = (3, 5)$. We zien in één oogopslag de oplossing: f neemt zijn maximum aan in het punt $(2, 4)$. De maximale waarde is ook snel gevonden: $f(2, 4) = 3 \times 2 + 5 \times 4 = 26$.

2. Het duale probleem

Het was von Neumann (steeds weer dezelfde, inderdaad), die opmerkte dat elk probleem van bovenstaand type op een natuurlijke manier gekoppeld kan worden aan een *duaal probleem*: Zij D^* het gebied in $\mathbb{R}^m$ gegeven door de lineaire ongelijkgeheden $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$ en:

$$\begin{aligned}
&y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \ldots + y_m a_{m1} \geq c_1 \ , \\
&y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \ldots + y_m a_{m2} \geq c_2 \ , \\
&\vdots \\
&y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \ldots + y_m a_{mn} \geq c_n \ ,
\end{aligned}$$

of weer kortweg

$$y \geq 0 \ , \quad A^* y \geq c \ .$$

Op dit gebied zoeken we het *minimum* van de functie $f^* : D^* \to \mathbb{R}$, gegeven door $f^*(y) := y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m = \langle y, b \rangle = y^T b$.
Bij dit *duale probleem* zijn A, b en c dezelfde als die van het primaire probleem. Merk echter op dat de rollen van de restrictievector b en de doelfunctie-vector c zijn omgewisseld!
In ons voorbeeld vinden we het volgende duale probleem: D^* is het gebied in $[0, \infty)^3$, gegeven door de ongelijkheden

$$\begin{aligned}
&3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \ , \\
&y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5 \ ,
\end{aligned}$$

Gezocht wordt het minimum van de functie $f^* : D^* \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f^*(y_1, y_2, y_3) := 12y_1 + 6y_2 + 10y_3 \ .$$

Ook dit probleem is niet moeilijk op te lossen: het minimum wordt aangenomen in het punt $y = (0, 1, 2)$ en de functiewaarde is

$$f^*(0, 1, 2) = 0 \times 12 + 1 \times 6 + 2 \times 10 = 26 \text{ !!!}$$

Precies dezelfde waarde! Dit is geen toeval, maar ook niet zo heel vanzelfsprekend. Het is de belangrijkste boodschap van de volgende elegante stelling.

Dualiteistsstelling. *Als van het primaire en het duale probleem er slechts één uitvoerbaar is, dan is het onbegrensd (en bestaan de gezochte extreme waarden dus niet). Als beide uitvoerbaar zijn, dan liggen alle waarden van f onder die van f^*, (dus zijn beide begrensd), en geldt:*

$$\max_{x \in D} f(x) = \min_{y \in D^*} f^*(y) \ .$$

Les extrêmes se touchent!

Voor het bewijs van de dualiteitsstelling is eerst een andere bijzonder fraaie stelling nodig, die in de lineaire programmering dezelfde plaats inneemt als het Fredholm-alternatief in de lineaire algebra.

Alternatief van Farkas. *Zij A een reële $m \times n$-matrix, en zij $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt precies één van de volgende alternatieven.*
(i) Er is een $x \in \mathbb{R}^n_+$ zó dat $Ax = b$;
(ii) Er is een $y \in \mathbb{R}^m$ zó dat $A^*y \geq 0$ en $\langle y, b\rangle < 0$.

Bewijs. De alternatieven sluiten elkaar uit, want als $Ax = b$ en $A^*y \geq 0$, dan moet

$$\langle y, b\rangle = \langle y, Ax\rangle = \langle A^*y, x\rangle \geq 0 .$$

Om te zien dat minstens één van beide moet gelden, beschouwen we de positieve kegel $K \subset \mathbb{R}^m$, opgespannen door de kolommen van A:

$$K := \{\, Ax \mid x \in \mathbb{R}^n_+ \,\} .$$

K is een gesloten en convex gebied in $\mathbb{R}^m$. Conditie (i) zegt dat $b \in K$. Stel nu dat dit niet het geval is. Op grond van de scheidingsstelling, die we hier niet bewijzen, moet er dan een hypervlak in $\mathbb{R}^m$ bestaan, zó dat K geheel aan één kant ervan ligt, en b aan de andere kant. (Zie Fig. 2.)

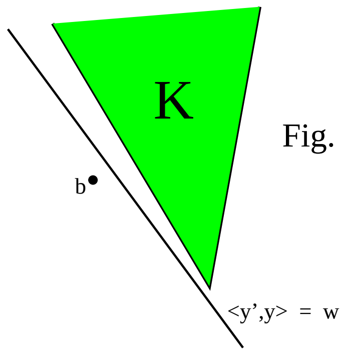

Fig. 2

Dat wil zeggen, er bestaan $y' \in \mathbb{R}^m$ en $w \in \mathbb{R}$ zó dat

$$\forall_{x \geq 0}: \quad \langle y', Ax\rangle \geq w ,$$
$$\text{en} \quad \langle y', b\rangle < w .$$

Door in de eerste ongelijkheid $x = tx'$ te stellen met $x' \in K$ en $t > 0$, vinden we dat

$$\forall_{t>0}\forall_{x' \geq 0} : \langle y', Ax'\rangle \geq t^{-1}w .$$

Dus is $A^*y' \geq 0$. Door anderzijds $x = 0$ te stellen vinden we dat $w \leq 0$. De tweede ongelijkheid zegt nu:

$$\langle y', b\rangle < w \leq 0 .$$

□

4. Het bewijs van de dualiteitsstelling

Stel eerst eens dat $D = \phi$ en $D^* \neq \phi$. We willen laten zien dat dan f^* niet naar beneden begrensd is.
Omdat in ons primaire probleem het gebied D door de *ongelijkheid* $Ax \leq b$ wordt gegeven, terwijl het alternatief van Farkas handelt over de *vergelijking* $Ax = b$, voeren we zogenaamde *slack-variabelen* $z_1, z_2, \ldots, z_m$ in: we introduceren de *vergelijking*

$$Ax + z = b, \qquad x \geq 0, \quad z \geq 0 \;.$$

Het bestaan van zulke x en z is de eerste conditie van Farkas, met A vervangen door $(A, \mathbb{1})$. Als $D = \phi$, dan is hier *niet* aan voldaan. Op grond van de stelling van Farkas moet er dus een $y \in \mathbb{R}_+^m$ bestaan zó dat

$$\begin{pmatrix} A^* \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} y \geq 0 \quad \text{en} \quad \langle y, b \rangle < 0 \;.$$

Kies nu $y_0 \in D^*$. Dan is voor alle $t > 0$: $y_0 + ty \geq 0$ en $A^*(y_0 + ty) \geq c$, zodat $y_0 + ty \in D^*$. Het duale probleem is nu onbegrensd, want:

$$f^*(y_0 + ty) = \langle y_0, b \rangle + t\langle y, b \rangle \longrightarrow -\infty \quad \text{als} \quad t \to \infty \;.$$

De omgekeerde situatie, $D \neq \phi$ en $D^* = \phi$ gaat net zo.

Opgave. Bewijs dit zelf.
Laat tenslotte D en D^* beide niet leeg zijn. (Beide stelsels zijn uitvoerbaar.) Dan geldt voor alle $x \in D$ en $y \in D^*$:

$$f(x) = \langle c, x \rangle \leq \langle A^* y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \leq \langle y, b \rangle = f^*(y) \;.$$

Dus alle waarden van f liggen onder die van f^*. In het bijzonder zijn beide problemen begrensd.

Het pièce de résistance: les extrèmes se touchent. Rest ons nog, aan te tonen dat er een $x_0 \in D$ en een $y_0 \in D^*$ bestaan, zo dat

$$f(x_0) = \langle c, x_0 \rangle \geq \langle y_0, b \rangle = f^*(y_0) \;.$$

In dat geval zijn immers deze twee functiewaarden gelijk aan elkaar en aan de gezochte extreme waarden van het primaire en het duale probleem.
Neem daartoe aan dat dit *niet* het geval is. Dan is het stelsel

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad Ax \leq b, \quad A^* y \geq c, \qquad \langle y, b \rangle - \langle c, x \rangle \leq 0$$

niet oplosbaar. Anders gezegd, het gebied in $\mathbb{R}^{m+n}$, gegeven door

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \\ -c^T & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{met} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

is leeg. Op grond van het Farkas-alternatief moet er nu een $u \in \mathbb{R}^m$, een $v \in \mathbb{R}^n$ en een $w \in \mathbb{R}$ bestaan, zó dat

$$\begin{pmatrix} A^* & 0 & -c \\ 0 & -A & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{en} \quad \big(u, v, w\big) \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} < 0 \, .$$

Dit levert ons drie ongelijkheden op:

$$A^* u \geq wc \qquad (1)$$

$$Av \leq wb \qquad (2)$$

$$\langle u, b \rangle < \langle v, c \rangle \qquad (3)$$

Stel eerst dat $w > 0$. Op grond van (1) is dan $w^{-1}u \in D^*$, en op grond van (2) is $w^{-1}v \in D$. Maar (3) zegt dat

$$f\big(w^{-1}v\big) > f^*\big(w^{-1}u\big) \, .$$

Dit is in tegenspraak met onze conclusie dat $f(D) \leq f^*(D^*)$. Stel nu dat $w = 0$. Kies willekeurig $x \in D$ en $y \in D^*$. Dan moet, op grond van (1),

$$\langle u, b \rangle \geq \langle u, Ax \rangle = \langle A^* u, x \rangle \geq wcx = 0 \, ,$$

en op grond van (2):

$$\langle c, v \rangle \leq \langle A^* y, v \rangle = \langle y, Av \rangle \leq \langle y, wb \rangle = 0 \, .$$

Dus is $\langle u, b \rangle \geq \langle c, v \rangle$. Maar dit is in strijd met (3).
We concluderen dat er wèl x_0 en y_0 bestaan met

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0) = f^*(y_0) = \min_{y \in D^*} f^*(y) \, .$$

□

5. Het simplex-algoritme

In de praktijk willen we ook een methode hebben om de punten x_0 en y_0, waar het maximum van f, respectievelijk het minimum van f^*, worden aangenomen, te vinden. In het voorbeeld van §1 zagen we het zó liggen, maar naarmate de dimensies m en n oplopen wordt dit steeds moeilijker. Daarom is het prettig dat er systematische methoden voor bestaan. De oudste en nog steeds meest populaire daarvan is het simplex-algoritme van George Dantzig uit 1947. Het is een soort Gauss-eliminatie met bewaking van ongelijkheids-tekens.

Gauss-eliminatie werkt met vergelijkingen, niet met ongelijkheden. Daarom voeren we weer slack-variabelen in: We willen weten voor welke waarde van $\lambda \in \mathbb{R}$ het stelsel

$$\begin{pmatrix} A & \mathbb{1} \\ c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad x, z \geq 0 \tag{4}$$

een oplossing heeft. In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in de grootste waarde van λ waarvoor dit het geval is.
We starten met het tableau:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

In dit tableau vermenigvuldigen we alle rijen i waarvoor $b_i < 0$ met -1, zodat voor alle i geldt: $b_i \geq 0$. Vervolgens gaan we 'vegen'. Dat wil zeggen: kolommen vullen met enkel nullen en één 1 door veelvouden van rijen van elkaar af te trekken. Hierbij nemen we de volgende regels in acht:

(a) We laten $b \geq 0$.
(b) We 'pivotteren' niet op de onderste regel.
(c) We laten λ alleen maar dalen.

We streven naar een eindtableau

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{E} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

met de eigenschap dat $\bar{c}, \bar{d} \leq 0$. Uit het eindtableau lezen we een vector (x_0, z_0) af door alleen daar componenten $\neq 0$ te stellen waar de kanonieke basisvectoren staan, en dan op te lossen:

$$(\bar{A} \quad \bar{E}) \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \bar{b}\,.$$

Zo vinden we het punt x_0, waar f maximaal is. Het punt y_0, waar f^* zijn minimum aanneemt, vinden we als $y_0 = -\bar{d}$.

We kunnen deze beweringen begrijpen als we ons realiseren dat de veegprocedure het effect heeft van linksvermenigvuldiging van beide leden van de vergelijking (4) met dezelfde inverteerbare $(m+1) \times (m+1)$-matrix.

Stelling. (Eindsituatie simplex-algoritme). *Zij A een $m \times n$-matrix, zij $b \in \mathbb{R}^m$ en $c \in \mathbb{R}^n$. Als er een inverteerbare $m \times m$-matrix E, een vector $d \in \mathbb{R}^m$, en vectoren $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ en $z_0 \in \mathbb{R}^m_+$ bestaan, zó dat*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ d^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbb{1} & b \\ c^T & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{E} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} & 0 \end{pmatrix}$$

en als

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{E} \\ \bar{c}^T & \bar{d}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

terwijl $\bar{c}, \bar{d} \leq 0$, *dan is* $x_0 \in D$, $y_0 := -\bar{d} \in D^*$ *en* $f(x_0) = f^*(y_0)$.

Bewijs. Merk op dat $\bar{c} = A^* d + c$ en $\bar{d} = d$. Dus als $\bar{c}$ en $\bar{d}$ beide niet-positief zijn, dan is $y_0 := -\bar{d} \in D^*$.
Verder is $\langle d, b \rangle + \lambda = 0$, dus $\lambda = -\langle d, b \rangle = \langle y_0, b \rangle$. Uit de inverteerbaarheid van $\begin{pmatrix} E & 0 \\ d^T & 1 \end{pmatrix}$ en (5) volgt dat

$$\begin{pmatrix} A & \mathbb{1} \\ c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -\langle d, b \rangle \end{pmatrix} .$$

Hieruit lezen we af dat $Ax_0 + z_0 = b$, dus $x_0 \in D$, en dat $\langle c, x_0 \rangle = \langle y_0, b \rangle$. $\square$

6. Het voorbeeld

Tenslotte illustreren we de werking van het simplex-algoritme aan ons voorbeeld. Het kan worden gezien als een wandeling van hoekpunt naar hoekpunt in de veelhoek D. Bij elke stap moet er een 'pivot' gekozen worden, wat overeenkomt met de keuze van een buur-hoekpunt. Soms zijn er verschillende mogelijkheden. We geven hieronder twee wegen aan die naar Rome leiden.
Starttableau:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2^* & 0 & 0 & 1 & 10 \\ \hline 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} x = (0,0) \in D , \\ z = (10, 6, 12) . \end{array}$$

De * geeft de pivot aan voor de eerste stap. Deze is zó gekozen: We kiezen een kolom j waarvan de c-waarde positief is: zeg $j = 2$. ($j = 1$ is ook mogelijk, zie hieronder.) Dan kiezen we een $i \leq 3$ zó dat b_i / a_{ij} zo klein mogelijk is, zodat b positief blijft. Met de pivot gaan we vegen. Dan zoeken we een nieuwe kolom waar een positieve c in staat. Enzovoort, totdat de onderste rij niet-positief is. In dit voorbeeld komen we in twee stappen in het optimum uit:

Stap 1:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} \frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 7 \\ \frac{1}{2}* & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \lambda - 25 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} x = (0,5) \in D , \\ z = (7, 1, 0) . \end{array}$$

Stap 2:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & \lambda - 26 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} x_0 = (2,4) \in D \ , \\ z = (2,0,0) \ , \\ y_0 = (0,1,2) \ , \\ \lambda = 26 \ . \end{array}$$

Klaar! Maar bij de eerste stap hadden we ook kunnen kiezen voor een 'pivot' in de eerste kolom. Dit wordt dan de 3 op positie $(3,1)$:

Stap 1:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{2}{3}^* & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & \lambda - 12 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} x = (4,0) \in D \ , \\ z = (0,2,6) \ . \end{array}$$

Stap 2:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}^* & -\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & \lambda - 24 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} x = (3,3) \in D \ , \\ z = (0,0,1) \ . \end{array}$$

Ditmaal zijn we niet in twee stappen klaar: we maken een omweg (zie Fig. 1). Er staat immers nog een positief getal in de onderste rij.

Stap 3:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & \lambda - 26 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} x_0 = (2,4) \in D \ , \\ z = (2,0,0) \ , \\ y_0 = (0,1,2) \ , \\ \lambda = 26 \ . \end{array}$$

Langs een omweg komen we in hetzelfde punt uit.

Referenties

[Fra] J. Franklin: Methods of Mathematical Economics; Linear and Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1980.

[Pot] J. Potters: Inleiding Besliskunde; Theorie van lineaire ongelijkheden. Dictaat Katholieke Universiteit Nijmegen, augustus 1999.