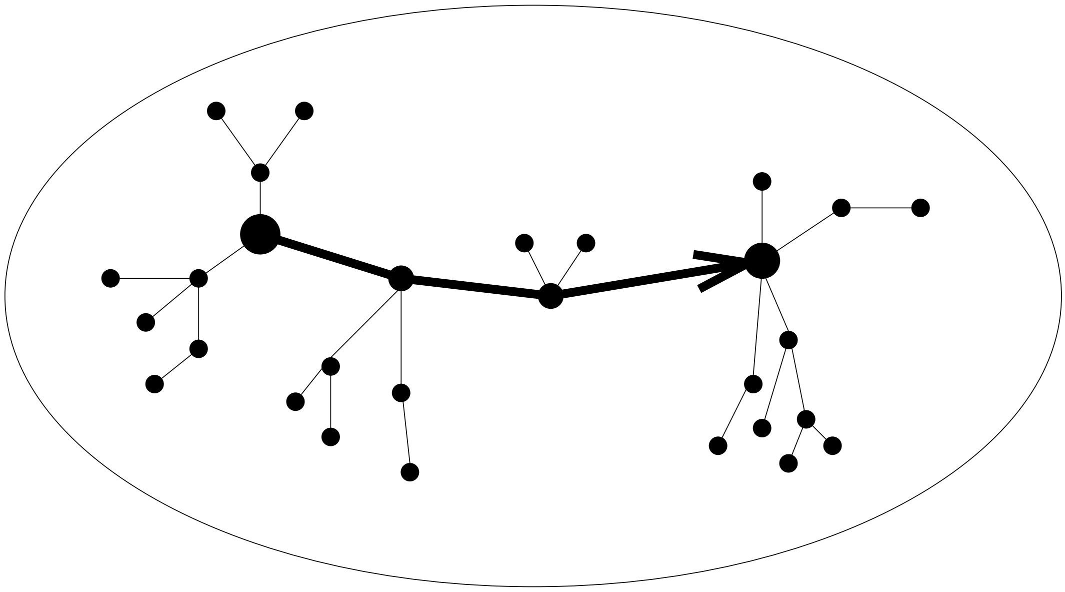
Highlights 2009:
Combinatorische Soorten

HANS MAASSEN

Radboud Universiteit Nijmegen
Afdeling Wiskunde
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen



10 maart 2009

1. Inleiding

In 1981 definieerde de Frans-Canadese wiskundige André Joyal een *combinatorische soort* als volgt.

> **Definitie.** *Een* combinatorische soort *is een endofunctor van de categorie van eindige verzamelingen met bijecties.*

Wanneer je deze definitie leest, vraag je je misschien af, waarom ik de moeite heb genomen, hem uit het oorspronkelijke Frans te vertalen. Hij wordt daar immers niet begrijpelijker door.
In deze kaleidoscoop-cursus wil ik de definitie van het begrip 'soort' dan ook *niet* als startpunt nemen, zoals in de wiskunde gebruikelijk is, maar eerder als einddoel: ik wil proberen via allerlei nuttige en leuke toepassingen te komen tot enig begrip van deze definitie.

De tijd is rijp is om dit welhaast magische instrument in handen te geven aan beginnende wiskundigen, in plaats van het bij de kleine groep algebraïsch georiënteerde combinatorici te laten die er nu het monopolie over hebben.

Ik wens jullie een smakelijke kennismaking.

Referenties

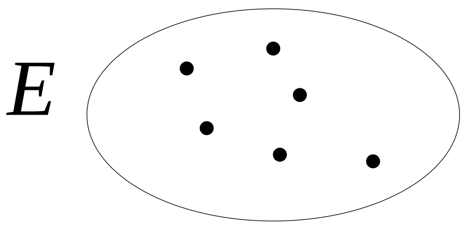
A. Joyal: Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advances in Mathematics* 42 (1981) pp. 1–82.

F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux: Combinatorial Species and Tree-like Structures. *Cambridge University Press*, 1998.

2. Soorten en hun genererende functies

In dit Hoofdstuk geven we een aantal voorbeelden van 'soorten'. Tevens berekenen we bij elke soort een bijzondere functie, de zogenaamde *genererende functie*.

2.1. De soort E: Eindige verzameling ('Ensemble')



Bekijk eens de 'soort': 'eindige verzameling'. Tussen de objecten van deze soort definiëren we een equivalentierelatie: we noemen twee eindige verzamelingen U en V *isomorf*, en we schrijven $U \sim V$, als er een bijectie $f : U \to V$ bestaat. Merk op dat dit inderdaad een equivalentierelatie is:

er bestaat een natuurlijke bijectie $U \to U$ (de identiteit); als er een bijectie $f : U \to V$ bestaat, dan bestaat er ook een bijectie van V naar U: de inverse f^{-1}; en als er een bijectie $f : U \to V$ bestaat, en een bijectie $g : V \to W$, dan is er ook een van U naar W, namelijk $g \circ f$.

De eindige verzamelingen vallen zodoende uiteen in equivalentieklassen, ofwel de *isomorfismetypen* van eindige verzamelingen. Zo hebben we de klasse 0, die alleen de lege verzameling bevat, de klasse 1 van alle singletons, de klasse 2 van alle paren, etcetera. Deze klassen of 'typen' van eindige verzamelingen staan ook wel bekend als de *natuurlijke getallen.* De verzameling van alle natuurlijke getallen duiden we aan met $\mathbb{N}$. De afbeelding die aan een eindige verzameling zijn type toevoegt, duiden we aan met $\#$. Dus $\#(U)$ is het *aantal elementen* van de verzameling U.
Als $U \sim V$, dan bestaat er meestal niet één, maar een groot aantal bijecties $U \to V$. In het bijzonder vormen de bijecties $U \to U$ een eindige verzameling, die we $\mathrm{sym}\,(U)$ zullen noemen, de verzameling van symmetrieën van U.
Je weet al wel dat, als $\#(U) = n \in \mathbb{N}$, dat dan $\#\mathrm{sym}\,(U) = n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$.

Nu maken we een grote sprong. We gebruiken de **isomorfismetypen** en **symmetrieën** van de soort E om er een complexe functie mee te definiëren, die we, in navolging van Joyal, ook E zullen noemen:

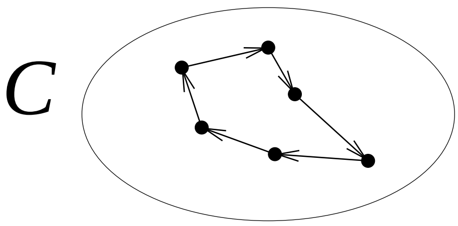
$$E(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{\#\mathrm{sym}\,(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} = e^z \ .$$

We zeggen: de e-macht is de *genererende functie* van de soort 'eindige verzameling'.

In het algemeen definiëren we bij de soort F de genererende functie

$$F(z) := \sum_{\text{Typen}} \frac{z^{\text{aantal punten}}}{\text{aantal symmetrieën}} \ . \tag{1}$$

2.2. De soort C: Cykel



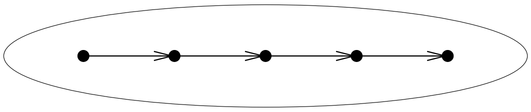
Laten we nu eens kijken naar een andere soort: de *cykel.* Het plaatje geeft aan wat we daarmee bedoelen: een niet-lege verzameling met een 'rondloopvoorschrift'. Twee cykels γ_1 en γ_2 noemen we *isomorf* als er een bijectie $f : \gamma_1 \to \gamma_2$ bestaat die het rondloopvoorschrift respecteert.

Zo'n bijectie bestaat dan en slechts dan als de cykels uit evenveel punten bestaan. Dus de isomorfisme-typen van de cykels kunnen opnieuw met de natuurlijke getallen worden aangeduid. Maar met de symmetrieën is het anders gesteld: je kunt gemakkelijk inzien dat een cykel van n punten precies n symmetrieën heeft. Zo komen we aan de genererende functie C van de soort 'cykel':

$$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z) \ .$$

2.3. De soort L: Rijtje (‘Lineaire ordening’)

L

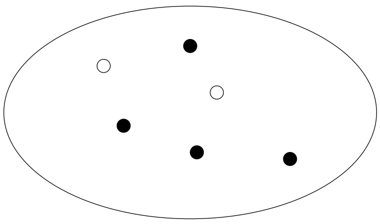


Het plaatje geeft aan wat we bedoelen. De types worden weer gelabeld met natuurlijke getallen, maar de enige symmetrie van een rijtje is de triviale: de afbeelding die elk punt op zijn plaats laat. Het aantal symmetrieën is dus steeds 1:

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ .$$

2.4. De soort K_2: ‘zwart-wit-gekleurde verzameling’

K_2



Een type van deze soort wordt met een paar (l, m) van natuurlijke getallen aangegeven: l geeft het aantal zwarte en m het aantal witte punten aan. Een symmetrie van zo’n type is een bijectie die de zwarte en de witte punten niet door elkaar gooit; hun aantal is $l!m!$. Dus is

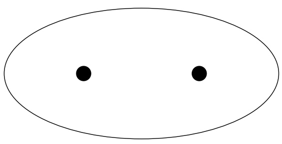
$$K_2(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{l+m}}{l!m!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \right) = e^z \cdot e^z = e^{2z} \ .$$

Ga zelf na dat analoog de soort K_k van ‘met k kleuren gekleurde verzameling’ kan worden gedefinieerd, en dat

$$K_k(z) = e^{kz} \ .$$

2.5. De soort E_k: ‘k-tallen’

E_2



De soort E_1, ‘punt’ of ‘element’ heeft maar één type, dat maar één symmetrie heeft, de triviale. Dit type heeft bovendien maar één element. Dus is

$$E_1(z) = z \ .$$

De soort E_2, ‘paar’, is een verzamelingen van twee elementen, en er zijn twee symmetrieën: de triviale en de verwisseling van de twee punten:

$$E_2(z) = \tfrac{1}{2} z^2 \ .$$

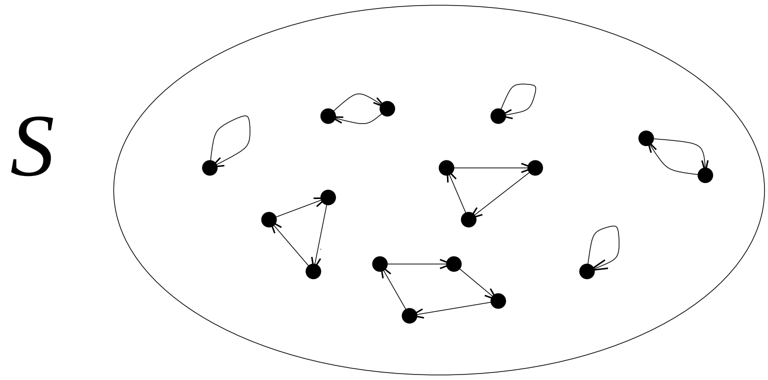
Etcetera; in het algemeen is $E_k(z) = \dfrac{z^k}{k!}$.

2.6. De soort S: 'permutatie'

Nu maken we het onszelf wat moeilijker. Een structuur van de soort S is een eindige verzameling U (zeg van n punten) met daarbij een permutatie (een bijectie) $\pi : U \to U$. We noemen twee permutaties $\pi : U \to U$ en $\rho : V \to V$ isomorf als er een bijectie $f : U \to V$ bestaat zó dat

$$\rho = f \circ \pi \circ f^{-1} .$$

Deze soort is ingewikkeld door zijn enorme typenrijkdom. We zullen echter zien dat de genererende functie toch heel eenvoudig is.

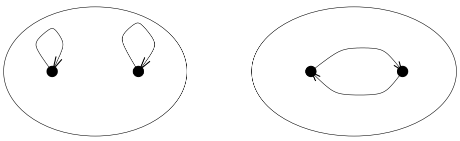


Laten we eerst eens voor een paar waarden van n kijken welke typen er zijn.

$n = 0$: 1 type: de lege verzameling met zijn (erg) triviale permutatie. Alleen triviale symmetrie. Bijdrage aan de genererende functie: $1 \cdot z^0 = 1$.

$n = 1$: 1 type: de verzameling $\{*\}$ met de triviale permutatie. Alleen triviale symmetrie. Bijgedragen term: $1 \cdot z^1 = z$.

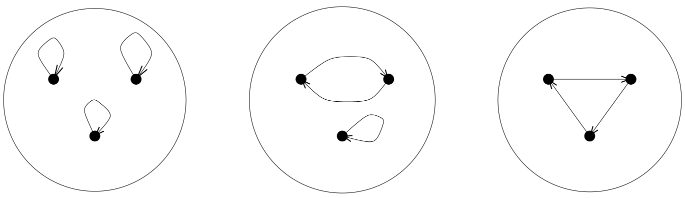
$n = 2$:



2 typen: de triviale permutatie en de verwisseling. Elk ervan heeft twee symmetrieën. Totale bijgedragen term:

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) z^2 = z^2 .$$

$n = 3$:



3 typen: de triviale permutatie, verwisseling van twee punten, en de drie-cykel. De eerste heeft 6 symmetrieën, de tweede 2, en de derde 3.

Bijdrage aan de genererende functie van deze drie typen bij elkaar:

$$\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) z^3 = z^3 .$$

$n = 4$: Vijf typen. Totale bijdrage aan de genererende functie:

$$\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) z^4 = z^4 .$$

Opgave 1. Controleer dat de soort S bij $n = 5$ zeven typen heeft, met totale bijdrage z^5.
Hier begint langzamerhand iets op te vallen:

Vermoeden. $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
Dit is dezelfde genererende functie als L, die van de rijtjes. Soorten hoeven blijkbaar niet gelijk te zijn als hun genererende functies gelijk zijn, tenminste als ons vermoeden juist is. Dat het inderdaad juist is, gaan we nu bewijzen. Onder S_n zullen we verstaan: de soort 'permutatie van n punten'. De verzameling van typen van zulke permutaties duiden we aan met Typen(S_n).

Stelling 1. *Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$\sum_{t \in \text{Typen}\,(S_n)} \frac{1}{\#\text{sym}\,(t)} = 1\ .$$

Het bewijs is een beetje abstract. Toch komt het gewoon neer op tellen. Let op:

Bewijs. Kies een vaste permutatie π van $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Het *type* van π is de verzameling van alle permutaties die isomorf zijn met π:

$$\text{type}\,(\pi) = \left\{\, f \circ \pi \circ f^{-1} \;\middle|\; f \text{ bijectie } \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, n-1\} \,\right\}\ .$$

(Notatie: type$(\pi) \in$ Typen(S_n).) Nu kunnen we alle bijecties van $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ naar zichzelf opdelen in equivalentieklassen onder de relatie

$$f \sim g \quad \text{als} \quad f \circ \pi \circ f^{-1} = g \circ \pi \circ g^{-1} \quad \text{oftewel} \quad \left(g^{-1} \circ f\right) \circ \pi = \pi \circ \left(g^{-1} \circ f\right)\ .$$

Deze equivalentieklassen zijn even groot, in formule:

$$\forall_{g,h} : \quad \#\{\, f \mid f \sim g \,\} = \#\{\, f \mid f \sim h \,\}\ ,$$

want de afbeelding $f \mapsto h^{-1} \circ g \circ f$ is een bijectie tussen de verzamelingen links en rechts. Nu is sym(π) één van die klassen, namelijk de klasse waar de indentiteit in zit, en het aantal klassen is precies $\#$type(π). Dus geldt:

$$\#\text{type}\,(\pi) \cdot \#\text{sym}\,(\pi) = n!$$

Alle permutaties van één type t hebben hetzelfde aantal symmetrieën. In plaats van $\#$sym(π) mogen we dus ook spreken van $\#$sym(t). Tenslotte weten we dat alle types bij elkaar de hele verzameling $S[n]$ vormen:

$$\sum_{t \in \text{Typen}\,(S_n)} \#(t) = n!$$

Uit deze en de voorgaande relatie volgt nu onze stelling:

$$\sum_{t \in \text{Typen}\,(S_n)} \frac{1}{\#\text{sym}\,(t)} = \sum_{t \in \text{Typen}\,(S_n)} \frac{\#(t)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

□

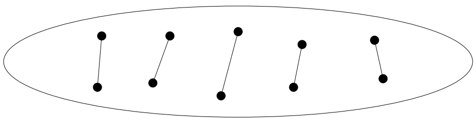
3. Operaties op soorten

Tot zover hebben we nog niet veel bereikt. We hebben bij allerlei soorten de genererende functie bepaald, maar daar kunnen we nog niet zoveel mee doen.
Dat komt nu. Het zal blijken dat operaties en combinaties van soorten op een verrassende manier met operaties en combinaties van hun genererende functies overeenkomen. Daarvan weer eerst wat voorbeelden.

3.1. Samenstelling van soorten

Laten we eens de volgende soort beschouwen:

H



Dit is de soort H: 'verzameling van paren'. Bij elk natuurlijk getal n kunnen we één type van deze soort maken; het heeft $2^n \times n!$ symmetrieën en $2n$ elementen.

De genererende functie van deze soort is dus

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{1}{2}z^2} \ .$$

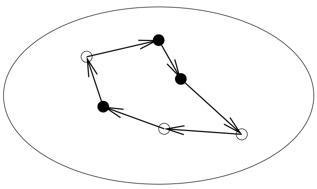
Dit is een interessante uitdrukking! We zien dat

$$H(z) = E \circ E_2(z) \ .$$

Dus de soort 'verzameling van paren' of 'E van E_2' heeft als genererende functie $E \circ E_2$. Dit is geen toeval. Een ander voorbeeld is de soort 'permutatie': een permutatie is opgebouwd uit een verzameling cykels. Inderdaad geldt:

$$E \circ C(z) = e^{-\log(1-z)} = \frac{1}{1-z} = S(z) \ .$$

C



Nog één. De soort 'zwart of wit gekleurd punt' heeft genererende functie $2z$. (Twee realisaties bij $n = 1$; alleen triviale symmetrie.) De soort 'cykel van zwart of wit gekleurde punten' is dan ook

$$C(2z) = -\log(1-2z) \ .$$

Opgave 2. Laat zien dat de soort 'zwart-wit gekleurde cykel' bij $n = 4$ zes typen heeft, en bepaal van elk van deze typen de symmetrie. Vergelijk het resultaat met de coëfficiënt van z^4 in $C(2z)$, zoals deze boven is berekend.

Definitie. Als F en G combinatorische soorten zijn, dan verstaan we onder de compositie $F \circ G$ de soort 'F-structuur van G-structuren'.

Stelling 2. *De genererende functie van de soort $F \circ G$ is de functie*

$$F \circ G : z \mapsto F(G(z)) \ .$$

In het Hoofdstuk 6 zullen we dit bewijzen. Eerst behandelen we nog wat meer operaties en combinaties van soorten, met hun toepassingen.

3.2. Optelling van soorten

Als F en G soorten zijn,dan verstaan we onder $F+G$ de soort 'F-structuur **òf** G-structuur', met dien verstande dat het steeds te zien moet zijn, wèlke van de twee structuren we hebben.

Stelling 3. *De genererende functie van de soort $F + G$ is de functie*

$$F + G : z \mapsto F(z) + G(z) \ .$$

Bewijs: hoofdstuk 6.
Voorbeelden:

- 'Een zwart punt òf een wit punt' heeft als genererende functie: $z + z = 2z$.
- De soort 'lege verzameling' heeft als genererende functie: 1. (Ga na.) Zij E_+ de soort 'niet-lege verzameling'. Een verzameling is leeg òf niet leeg. Dit impliceert:

$$E(z) = 1 + E_+(z) \ ; \quad \text{dus} \quad E_+(z) = E(z) - 1 = e^z - 1 \ . \tag{2}$$

- Een permutatie van 3 elementen ziet eruit als een een drie-cykel òf als een paar-met-een-punt òf als een los drietal. In termen van genererende functies:

$$z^3 = \tfrac{1}{3}z^3 + (\tfrac{1}{2}z^2) \cdot z + \tfrac{1}{6}z^3 \ .$$

  (Zie ook Paragraaf 2.6.)

Merk op dat een paar-met-een-punt hier als het *product* van $\frac{1}{2}z^2$ (een paar) en z (een punt) wordt beschreven. Dit loopt vooruit op de volgende operatie:

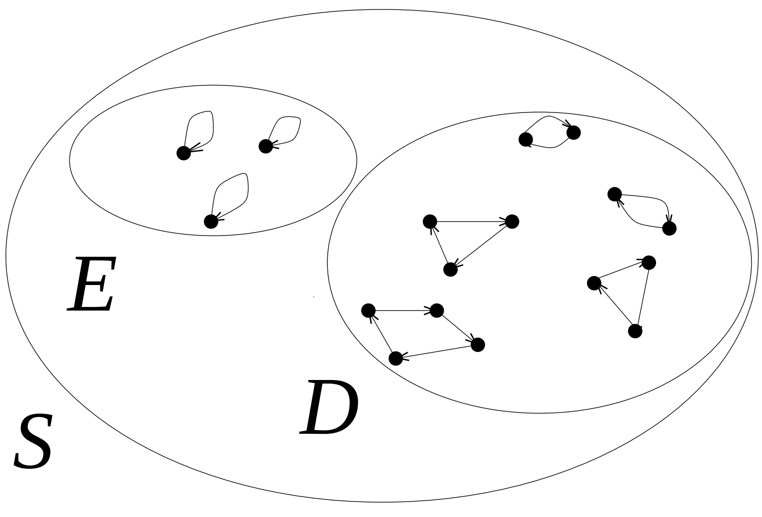
3.3. Vermenigvuldiging van soorten

Als F en G soorten zijn, dan verstaan we onder $F \cdot G$ de soort 'een F-structuur **met** een G structuur'. Opnieuw moet dit worden voorzien van de voorwaarde, dat het F-gedeelte en het G-gedeelte onderscheidbaar zijn.

Stelling 4. *De genererende functie van de soort $F \cdot G$ is de functie*

$$F \cdot G : z \mapsto F(z)G(z) \ .$$

Bewijs: Hoofdstuk 6.
Voorbeelden: Onder een *derangement* verstaan we een permutatie zonder vaste punten.

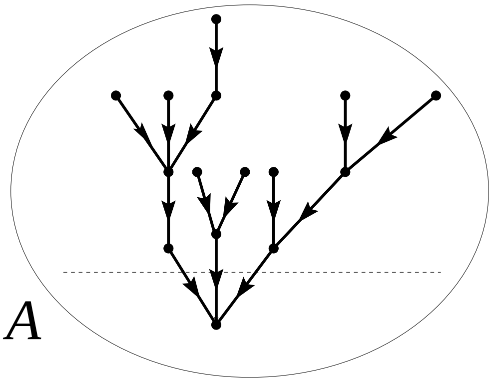


Aan het plaatje zien we: Een permutatie is een verzameling (vaste punten) met een derangement.

$$S = E \cdot D \ .$$

Hieruit berekenen we $D(z)$:

$$D(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{e^{-z}}{1-z} \ . \tag{3}$$



A

Onder een *gewortelde boom* verstaan we een structuur als hiernaast is afgebeeld. Aan het plaatje zien we: Een gewortelde boom is een punt met een verzameling van gewortelde bomen.

$$A = E_1 \cdot (E \circ A) \ .$$

Vertaald naar genererende functies:

$$A(z) = ze^{A(z)} \ , \quad \text{dus} \quad A(z)e^{-A(z)} = z \ ;$$

dat wil zeggen: A is de inverse van de complexe functie

$$w \mapsto we^{-w} \ . \tag{4}$$

Deze resultaten zullen we mooi kunnen gebruiken om meer over gewortelde bomen en over derangementen te weten te komen. Zie Hoofdstuk 5.

3.4. Differentiatie van soorten

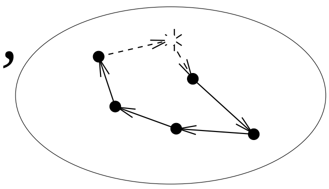
Als F een soort is, dan verstaan we onder F' de soort 'een F-structuur waaruit één punt verwijderd is'.

Stelling 5. *De genererende functie van de soort F' is de afgeleide van de functie F.*

Bewijs: Hoofdstuk 6.
Voorbeelden:

- Als we uit een cykel een punt verwijderen, wordt het een rijtje: $C' = L$. Inderdaad is

C'



$$C'(z) = \frac{d}{dz}\left(-\log(1-z)\right)) = \frac{1}{1-z} = L(z) \ .$$

- Als we uit een rijtje een punt verwijderen, wordt het een geordend paar van (eventueel lege) rijtjes: $L' = L_2 \circ L = L^2$. Inderdaad is

$$L'(z) = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2} = L(z)^2 \ .$$

- Als we uit een verzameling paren één punt verwijderen, krijgen we een verzameling paren met een los punt: $(E \circ E_2)' = E_1 \cdot (E \circ E_2)$. Inderdaad is

$$(E \circ E_2)'(z) = \frac{d}{dz} e^{\frac{1}{2}z^2} = ze^{\frac{1}{2}z^2} = E_1(z) \cdot E(X_2(z)) \ .$$

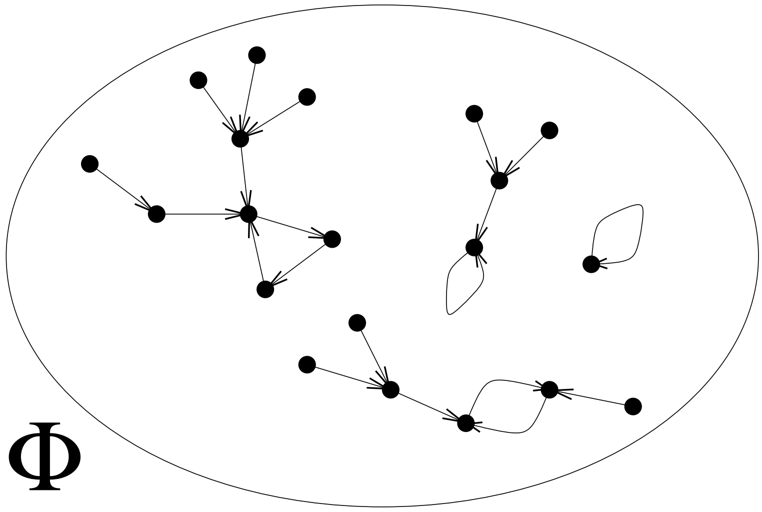
En natuurlijk niet te vergeten:

- Als we uit een verzameling een punt weghalen, blijft deze een (eventueel lege) verzameling:

$$E' = E \; .$$

Opgave 3. Hoe ziet de soort H' eruit? Laat zien dat de genererende functie inderdaad de afgeleide is van die van H.

Tot slot voeren we nog één belangrijke soort in: de soort Φ: een functie. Een functie is een afbeelding φ van een eindige verzameling U naar deze verzameling zelf. We kunnen van zo'n structuur het volgende plaatje tekenen.



Uit het plaatje lezen we af: Een functie is een permutatie van gewortelde bomen. Hieruit volgt met de (nog onbewezen) Stelling 2:

$$\Phi = S \circ A \; . \tag{5}$$

4. Soorten 'van onderaf'

We hebben nu een stel soorten de revue laten passeren, maar nog niet gezegd, wat een 'soort' nou precies is. Dat zullen we nu gaan doen.

Maar eerst iets over de natuurlijke getallen en over de kreten 'van onderaf' en 'van bovenaf': In Hoofstuk 2 hebben we de natuurlijke getallen 'van bovenaf' beschreven als equivalentieklassen van eindige verzamelingen. Dat is een nuttige manier om tegen de natuurlijke getallen aan te kijken, die bijvoorbeeld wordt gebruikt als basis van de hele wiskunde in de *Principia Mathematica* van Russell en Whitehead uit 1910. Maar het is niet de enige manier. In 1923 heeft von Neumann laten zien dat je de natuurlijke getallen ook 'van onderaf' kunt opbouwen. Hij definieerde het getal 0 als de lege verzameling: $0 := \emptyset$. Verder definieerde hij één voor één elk hoger natuurlijk getal als de verzameling van zijn voorgangers. Dus:

$$
\begin{aligned}
&1 := \{0\} = \{\emptyset\}\ ;\\
&2 := \{0,1\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\ ;\\
&3 := \{0,1,2\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\ ;\\
&4 := \{0,1,2,3\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}\ ;\\
&\ \text{enzovoort.}
\end{aligned}
$$

Zo kun je heel wat maken met als enige grondstof de lege verzameling. Het resultaat is dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$
\begin{aligned}
&n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}\ ,\\
&\#(n) = n\ ,\\
&n+1 = n \cup \{n\}\ .
\end{aligned}
$$

Deze handige conventies zullen we bij onze constructie gebruiken.

4.1. De constructie

Een soort F is een voorschrift dat het volgende doet.

1. Aan elke eindige verzameling U wordt een andere eindige verzameling $F[U]$ toegevoegd, die we beschouwen als de verzameling van 'F-structuren op U'. Zo is bijvoorbeeld $S[U]$ de verzameling van permutaties $\pi : U \to U$, en $S[n]$ is de verzameling van permutaties $\pi : \{0,1,\ldots,n-1\} \to \{0,1,\ldots,n-1\}$. Ook kunnen we $C[U]$ construeren als de verzameling van cyclische permutaties $U \to U$, en $L[U]$ als de verzameling van bijecties $\lambda : \{0,1,\ldots,n-1\} \to U$ ('nummeringen').
2. Aan elke bijectie $f : U \to V$ wordt een bijectie $F[f]$ toegevoegd van $F[U]$ naar $F[V]$, die vertelt hoe de F-structuren op U worden overgeplant naar F-structuren op V. Hierbij moet natuurlijk gelden dat

$$F[\mathrm{id}\,] = \mathrm{id} \quad \text{en} \quad F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]\ .$$

   Bijvoorbeeld:

$$
\begin{aligned}
&S[f] : S[U] \to S[V] : \pi \mapsto f \circ \pi \circ f^{-1}\ ;\\
&C[f] : C[U] \to C[V] : \gamma \mapsto f \circ \gamma \circ f^{-1}\ ;\\
&L[f] : L[U] \to L[U] : \lambda \mapsto f \circ \lambda\ .
\end{aligned}
$$

   Als we ons nu beperken tot verzamelingen van het type $\{0,1,\ldots,n-1\}$, dan krijgen we een mooie constructie van soorten 'van onderaf'.

Opgave 4. Beschrijf $H[U]$ voor een eindige verzameling U, en $H[f]$ voor een afbeelding $f : U \to V$. Bereken $\#H[n]$ op drie manieren:

(i) door tellen;

(ii) uit het verband $\#H[n] = \dfrac{n!}{\#\mathrm{sym}\,(t_n)}$, waarbij t_n het type is van H bij n punten;

(iii) uit de relatie $H(z) = E \circ E_2$.

Genererende functies van soorten hebben eveneens een eenvoudige beschrijving 'van onderaf'.

Stelling 6. *Voor elke combinatorische soort F geldt*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \#(F[n]) \cdot \frac{z^n}{n!} \ .$$

Bijvoorbeeld: omdat $\#(S[n]) = n!$, geldt dat

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ .$$

Dit hebben we al bewezen in Hoofdstuk 2, Stelling 1. Bovenstaande Stelling 6 is daar dan ook een generalisatie van. Het bewijs gaat eigenlijk net zó.

Bewijs. Kies een vaste F-structuur $\varphi \in F[n]$. Het *type* van φ is de verzameling van alle F-structuren die isomorf zijn met φ:

$$\text{type}\,(\varphi) = \left\{ \, F[f](\varphi) \,\middle|\, f \text{ bijectie } \{0,1,\ldots,n-1\} \to \{0,1,\ldots,n-1\} \, \right\} \ .$$

(Notatie: $\text{type}\,(\varphi) \in \text{Typen}\,(F_n)$.) Nu kunnen we alle bijecties $\{0,1,\ldots,n-1\} \to \{0,1,\ldots,n-1\}$ opdelen in equivalentieklassen onder de relatie

$$f \sim g \quad \text{als} \quad F[f](\varphi) = F[g](\varphi) \ .$$

Deze equivalentieklassen zijn even groot, in formule:

$$\forall_{g,h} : \quad \#\{ \, f \mid f \sim g \, \} = \#\{ \, f \mid f \sim h \, \} \ ,$$

want de afbeelding $f \mapsto g \circ h^{-1} \circ f$ is een bijectie tussen de verzamelingen links en rechts. Nu is $\text{sym}\,(\varphi)$ één van die klassen, namelijk de klasse waar de indentiteit in zit, en het aantal klassen is precies $\#\text{type}\,(\varphi)$. Dus geldt:

$$\#\text{type}\,(\varphi) \cdot \#\text{sym}\,(\varphi) = n!$$

Nu is het aantal symmetrieën hetzelfde voor alle φ van hetzelfde type t, dus we kunnen ook spreken van $\#\text{sym}\,(t)$. Tenslotte weten we dat alle types bij elkaar de hele verzameling $F[n]$ vormen:

$$\sum_{t \in \text{Typen}\,(F_n)} \#(t) = \#(F[n])$$

Uit deze en de voorgaande relatie volgt nu dat:

$$\sum_{t \in \text{Typen}\,(F_n)} \frac{1}{\#\text{sym}\,(t)} = \sum_{t \in \text{Typen}\,(F_n)} \frac{\#(t)}{n!} = \frac{\#(F[n])}{n!} \ ,$$

en

$$F(z) = \sum_{t \in \text{Typen}\,(F)} \frac{z^{\text{aantal punten van } t}}{\#\text{sym}\,(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#(F[n]) z^n}{n!} \ .$$

$\square$

5. Toepassingen

Met de vier operaties uit Hoofdstuk 3 kunnen we nu gaan rekenen. We zullen zien dat allerlei telproblemen door het gebruik van combinatorische soorten een stuk gemakkelijker worden.

5.1. Het Sinterklaasprobleem

Een gezelschap van n personen viert Sinterklaas. Om te bepalen wie er voor wie een surprise zal maken, schrijft ieder zijn naam op een papiertje en gooit dat in een hoed. De hoed wordt geschud, en elk trekt er weer een papiertje uit.

(a) Het is niet de bedoeling dat iemand zijn eigen naam trekt. Hoe groot is de kans hierop?

(b) Hoe groot is de kans dat er twee personen in het gezelschap *elkaars* naam trekken?

(c) Wat zijn de limieten van de uitkomsten van (a) en (b) voor zeer grote gezelschappen?

Dit is helemaal niet zo'n eenvoudig probleem. In het tweedejaars college kansrekening wordt (a) opgelost met behulp van het 'principe van inclusie en exclusie', en kost behoorlijk wat denkwerk. Probleem (b) is nog veel lastiger. Met ons geheime wapen kunnen we het op de volgende manier oplossen.

(a) De vraag is, welke fractie van de permutaties ven de n personen een derangement is (zie Hoofdstuk 3). We moeten dus uitrekenen:

$$\frac{\#(D[n])}{\#(S[n])} .$$

Hier is natuurlijk $\#S[n] = n!$. Als we nu Stelling 6 combineren met (3) in Hoofdstuk 3, dan vinden we:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#D[n]}{n!} z^n = D(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{e^{-z}}{1-z} = \left(1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right) .$$

De gevraagde kans is dus de coëfficiënt van z^n in het rechterlid:

$$\frac{\#D[n]}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots \pm \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} .$$

Voor hele grote gezelschappen wordt de kans dat niemand zijn eigen naam trekt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#D[n]}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} .$$

(b) We berekenen maar direct de kans op een permutatie zonder k-cykels. Daartoe maken we eerste de soort D_k: 'permutatie zonder k-cykels'. Elke permutatie is nu een verzameling van k-cykels, samen met zo'n D_k-structuur: $S = (E \circ C_k) \cdot D_k$. Dus is

$$D_k(z) = \frac{S(z)}{E(C_k(z))} = \frac{e^{-z^k/k}}{1-z} = \left(1 - \frac{z^k}{k} + \frac{z^{2k}}{2k^2} - \frac{z^{3k}}{3! \cdot k^3} + \cdots\right) \left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right) .$$

De gevraagde kans is de coëfficiënt van z^n in deze uitdrukking:

$$\frac{\#D_k[n]}{n!} = \sum_{l=0}^{[n/k]} \frac{(-1)^l}{k^l} \cdot \frac{1}{l!} \ ,$$

waarbij $[x]$ het entier van het reële getal x aanduidt. Voor zeer grote gezelschappen wordt de kans op geen enkele k-cykel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#D_k[n]}{n!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{-1}{k}\right)^l = e^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{e}} \ .$$

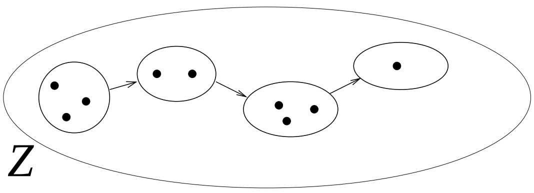
Opgave 5. Bereken de kans dat een willekeurig gekozen permutatie van n objecten geheel uit even cykels bestaat. Wat kun je zeggen van de limiet van deze kans voor $n \to \infty$?

5.2. Zwakke ordeningen

De leden van een benoemingscommissie moeten n kandidaten in een rangorde neerzetten. Zij hebben daarbij de mogelijkheid verschillende kandidaten gelijke rang te geven. Zo komen zij tot een rijtje van clusters van kandidaten. Zij Z_n het aantal van dit soort 'zwakke ordeningen' waarin n kandidaten geplaatst kunnen worden.
Hoeveel keer zo hard groeit dit aantal met n als het aantal sterke ordeningen? Oftewel: hoeveel is

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Z_n/n!} \quad ? \tag{6}$$

Oplossing.



Een zwakke ordening is een lineaire ordening van niet-lege verzamelingen. Met het resultaat van Paragraaf 3.2 kunnen we hieruit concluderen dat de soort Z: 'zwakke ordening' voldoet aan: $Z = L \circ E_+$.

Zijn genererende functie is dus

$$Z(z) = L(E_+(z)) = \frac{1}{1-(e^z-1)} = \frac{1}{2-e^z} \ .$$

De singulariteit van deze functie die het dichtst bij de oorsprong ligt is $z = \log 2$. Dit is dus de convergentiestraal van de reeks

$$Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n}{n!} z^n \ .$$

De convergentiestraal geeft informatie over hoe snel de coëfficieënten van de reeks aangroeien. Zo is er een stelling in de analyse (van d'Alembert) die zegt dat als de limiet (6) bestaat, hij gelijk is aan het omgekeerde van de convergentiestraal van de reeks.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Z_n/n!} = \frac{1}{\log 2} \ , \quad \text{informeel:} \quad Z_n \sim \frac{n!}{(\log 2)^n} \ .$$

gesteld dat de limiet bestaat.

Opgave 6. Laat zien dat

$$Z_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} .$$

5.3. Bomen tellen

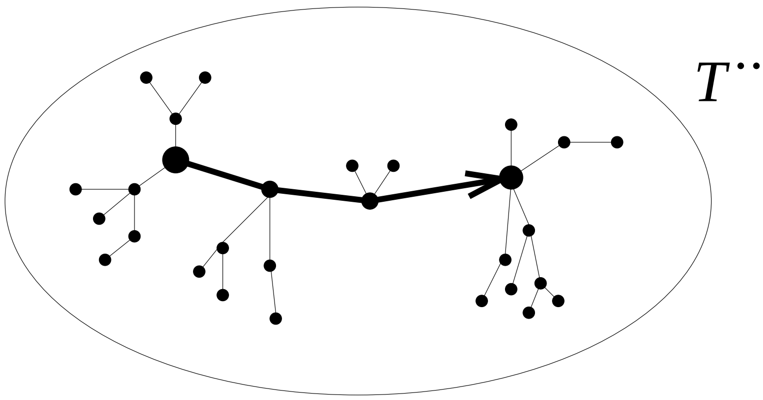
Drie punten kun je met elkaar verbinden door twee verbindingslijnstukjes, telkens tussen twee van die punten, te tekenen. Dat kan op 3 manieren. Voor het verbinden van vier punten heb je drie lijnstukjes nodig; in dit geval heb je 16 mogelijkheden. In het algemeen: je kunt n punten met elkaar verbinden door $n-1$ lijnstukjes te trekken. Op hoeveel manieren kan dit?
Dit is een moeilijk combinatorisch probleem met een verrassend eenvoudige uitkomst: in 1897 heeft Cayley in een lang en moeilijk artikel bewezen dat dit aantal n^{n-2} bedraagt.
Met behulp van combinatorische soorten gaat het veel gemakkelijker: in 1981 gaf Joyal een bewijs dat maar een paar regels in beslag neemt. We zullen dit bewijs nu geven. Daarvoor zijn wel enkele begrippen nodig, die we eerst invoeren.

Onder een *boom* verstaat men een samenhangende graaf zonder lussen. Dit is hetzelfde als een manier om een stel punten met een minimaal aantal verbindingslijntjes aan elkaar te klinken. We noemen de soort 'boom': T. Ons probleem luidt nu: bereken $\#T[n]$.

Als F een soort is, verstaan we onder $F^\bullet$ de soort 'F-structuur waarbij één punt gemarkeerd is'. Omdat er n punten zijn die gemarkeerd zouden kunnen worden, geldt dat $\#F^\bullet[n] = n\#F[n]$. Zo geldt bijvoorbeeld voor de soort A van 'gewortelde bomen':

$$A = T^\bullet, \quad \text{en} \quad \#A[n] = n\#T[n] .$$

Laten we nu eens kijken naar de soort $T^{\bullet\bullet}$. (Zie plaatje).



Een vertebraat

Laten we de twee gemarkeerde punten de 'kop' en de 'staart' noemen. (Deze punten mogen eventueel gelijk zijn.) Omdat het beest samenhangend is, bestaat er een verbinding van kop naar staart, en omdat er geen lussen zijn, is er niet meer dan één zo'n verbinding. Deze noemde Joyal de 'ruggegraat' van het exemplaar van de soort $T^{\bullet\bullet}$, en het hele beest noemde hij een *vertebraat*. In het plaatje zien we dat in elk punt van de ruggegraat een gewortelde boom staat: een vertebraat is een niet-leeg rijtje van gewortelde bomen:

$$T^{\bullet\bullet} = L_+ \circ A .$$

In Hoofdstuk 3 hebben we gezien (zie (5)) dat

$$\Phi = S \circ A \; .$$

Nu zijn L en S wel totaal verschillende soorten, maar we hebben gezien dat ze dezelfde genererende functie hebben! Dus geldt:

$$T^{\bullet\bullet}(z) = L_+(A(z)) = L(A(z)) - 1 = S(A(z)) - 1 = \Phi(z) - 1 \; ,$$

en dus ook, tenminste voor $n \geq 1$:

$$n^2 \# T[n] = \# \Phi[n] \; .$$

Maar $\Phi[n]$ is gemakkelijk te tellen: er zijn precies n^n functies van $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ naar $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Hiermee is de formule van Cayley bewezen.

En passant habben we nu ook de coëfficiënten van $A(z)$ gevonden, en daarmee hebben we een machtreeks voor de inverse van de functie $w \mapsto we^{-w}$:

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n$$

Opgave 7. Controleer de coëfficiënten van z^3 en van z^4 in $A(z)$ door de typen gewortelde bomen met drie en met vier punten op een rijtje te zetten, en elk een gewicht te geven omgekeerd evenredig aan $\mathrm{sym}\,(t)!$. Controleer ook de relatie (5) uit Hoofdstuk 3 tot op vierde orde.

Opgave 8. Onder een *binaire gewortelde boom* verstaan we een gewortelde boom, waarvan elke vertex nul of twee vertakkingen heeft. Bedenk een relatie waar de genererende functie B van deze soort een moet voldoen, en bereken deze functie. Controleer de eerste vier coëfficiënten. Hoe hard groeit het aantal binaire gewortelde bomen met n vertices aan met n?

6. Bewijzen

Voor de bewijzen van de rekenregels in Hoofdstuk 3 hebben we precieze definities 'van onderaf' nodig van de operaties die met soorten mogelijk zijn. We behandelen de operaties beurtelings. De gemakkelijkste eerst.

6.1. Optelling

Definitie. Als F en G combinatorische soorten zijn, dan definiëren we $F + G$ als volgt. Voor eindige verzamelingen U en V en voor een bijectie $f : U \to V$ is

$$(F+G)[U] := F[U] \cup G[U] \; ;$$

$$(F+G)[f] : F[U] \to F[V] : \varphi \mapsto \begin{cases} F[f](\varphi) & \text{als } \varphi \in F[U], \\ G[f](\varphi) & \text{als } \varphi \in G[U]. \end{cases}$$

Hierbij mogen de verzamelingen $F[U]$ en $G[U]$ geen overlap hebben.

Bewijs van Stelling 3. Omdat $F[n] \cap G[n] = \emptyset$, is $\#\big((F+G)[n]\big) = \#(F[n] \cup G[n]) = \#F[n] + \#G[n]$. Dus is ook

$$(F+G)(z) = F(z) + G(z) \ .$$

□

6.2. Vermenigvuldiging

Definitie. $F \cdot G$ is de volgende soort:

$$(F \cdot G)[U] := \bigcup_{W \subset U} F[W] \times G[U \setminus W] \ ,$$

$$(F \cdot G)[f] : (\varphi, \psi) \mapsto \big(F[f|_W](\varphi), G[f|_{U \setminus W}](\psi)\big) \ .$$

Bewijs van Stelling 4.

$$\begin{aligned}
(F \cdot G)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#(F \cdot G)[n]}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{W \subset n} \frac{\#F[W] \cdot \#G[n \setminus W]}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\#F[k] \cdot \#G[n-k]}{n!} z^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\#F[k]}{k!} \cdot \frac{\#G[m]}{m!} z^{k+m} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\#F[k]}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\#G[m]}{m!} \right) \\
&= F(z) \cdot G(z)
\end{aligned}$$

□

6.3. Differentiatie

Definitie. Als F een soort is, definiëren we een soort F' door te stellen:

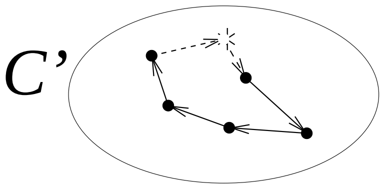
$$F'[U] := F[U \cup \{*\}] \ ;$$

$$F'[f] : \varphi \mapsto F[f^*](\varphi) \ , \quad \text{waarbij} \quad f^* : U \cup \{*\} \to V \cup \{+\} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in U, \\ + & \text{als } x = *. \end{cases}$$

Hierbij is $*$ een punt dat niet in U ligt, $+$ een punt dat niet in V ligt. Formeel zouden we hiervoor het 'punt' U zelf kunnen nemen, en V voor $+$. Als $U = V = n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, dan zullen we dat ook doen. Dan is immers $n \cup \{n\} = n+1$, wat handig uit blijkt te komen.

Het is misschien niet meteen duidelijk dat bovenstaande differentiatie hetzelfde is als het *verwijderen* van een punt uit de F-structuur, zoals we in Paragraaf 3.4 informeel hebben gedefiniëerd.
Toch is het zo! We maken dit aan een voorbeeld duidelijk: $C' = L$. We laten zien dat inderdaad geldt:

$$L[U] = C[U \cup \{*\}] ,$$
$$L[f] = C[f^*] ,$$



Dus we moeten laten zien dat U op een rijtje zetten hetzelfde is als $U \cup \{*\}$ in een kringetje zetten. Dat is inderdaad het geval. Zie het plaatje.

Bewijs van Stelling 5. Zij F' de genererende functie van de soort F'. Dan is binnen de convergentieschijf van F:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#F'[n]}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#F[n \cup \{n\}]}{n!} z^n \\ &= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\#F[n+1]}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{d}{dz} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#F[m]}{m!} z^m \\ &= \frac{d}{dz} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\#F[m]}{m!} z^m = \frac{d}{dz} F(z) . \end{aligned}$$

□

6.4. Compositie

De moeilijkste stelling uit Hoofdstuk 3 is Stelling 2 over de samenstelling van soorten. Om deze te kunnen bewijzen is wat voorwerk nodig.

Onder een *partitie* van een eindige verzameling U verstaan we een opdeling van U in niet-lege, niet-overlappende verzamelingen, die we de *blokken* van die partitie zullen noemen. Merk op dat ‘partitie’ ook weer een soort is: de soort $P := E \circ E_+$. Voor het bewijs van Stelling 2 zullen we partities van $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ moeten tellen. Hierbij is het handig, te bedenken dat elke partitie van $n+1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n-1, n\}$ verkregen kan worden uit een partitie van $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ door òfwel een nieuw blok $\{n\}$ bij te maken, ofwel het nieuwe punt n toe te voegen aan één van de bestaande blokken.

Lemma 7. *Laten F en G complexe functies zijn met machtreeksen die convergeren in een schijfje rond 0. Laat $G(0) = 0$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ en voor alle z zó dat $G(z)$ in het genoemde schijfje ligt:*

$$(F \circ G)^{(n)}(z) = \sum_{\pi \in P[n]} F^{(\#\pi)}(G(z)) \prod_{B \in \pi} G^{(\#B)}(z) . \tag{7}$$

Bewijs. Voor $n = 0$ staat links en rechts $F(G(z))$; immers $P[0] = P[\emptyset] = \{\emptyset\}$. Stel nu dat de bewering geldt voor zekere n. We differentiëren nog een keer en passen de productregel en de kettingregel toe:

$$(F \circ G)^{(n+1)}(z) = \sum_{\pi \in P[n]} \left(F^{(\#\pi+1)}(G(z))G'(z) \prod_{B \in \pi} G^{(\#B)}(z) \right.$$
$$\left. + F^{(\#\pi)}(G(z)) \sum_{C \in \pi} G^{(\#C+1)}(z) \prod_{B \in \pi \setminus \{C\}} G^{(\#B)}(z) \right).$$

Maar dit is precies de som over $P[n+1]$ van $F^{(\#\pi)}(G(z))$ maal het product over de nieuwe blokken, vanwege de opmerking hierboven over partities van $n+1$. De bewering volgt nu met inductie naar n. □

Definitie. $F \circ G$ is de volgende soort:

$$(F \circ G)[U] := \bigcup_{\pi \in P[U]} F[\pi] \times \left(\prod_{B \in \pi} G[B] \right). \tag{8}$$

(Het productteken moet hier als *Cartesisch* product worden gelezen.) Hier staat dat een structuur van de soort $F \circ G$ op een eindige verzameling U bestaat uit een verdeling van U in blokken, met op de blokkenverzameling een F-structuur, en een G-structuur op elk blok apart. Zie bijvoorbeeld de soort $Z = L \circ E_+$ in Paragraaf 5.2, waar de Z-structuur een L-structuur is van blokken, die elk op zich een E_+-structuur hebben.

Bewijs van Stelling 2. Als we in (8) voor U de verzameling $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ invullen, en we nemen links en rechts het aantal elementen, dan staat er hetzelfde als in (7) voor $z = 0$. Bedenk hierbij dat voor de genererende functies F, G en $F \circ G$ geldt:

$$\#F[n] = F^{(n)}(0) \quad \text{etcetera.}$$

□

7. Soorten zijn functoren

Tot slot willen we de definitie van een 'soort' door Joyal, die we in Hoofdstuk 1 hebben gezien, kort bespreken.

Een *categorie* bestaat uit *objecten* waartussen *pijlen* of *morfismen* zijn gedefinieerd. Meestal zijn de obecten bepaalde wiskundige structuren en de morfismen afbeeldingen daartussen die de structuren respecteren. De pijlen moeten kunnen worden samengesteld, en op elk object U is er een bijzondere pijl (de *identiteit* id_U) die onder samenstelling met andere pijlen neutraal is. Een morfisme $f : U \to V$ heet een *isomorfisme* als er ook een pijl $g : V \to U$ bestaat, zó dat $g \circ f = \mathrm{id}_U$ en $f \circ g = \mathrm{id}_V$.

Zo heb je de categorie van eindige verzamelingen met bijecties, de categorie van lineaire ruimten met lineaire afbeeldingen, van groepen met homomorfismen, van topologische ruimten met homeomorfismen, en vele andere.

Hier hebben we alleen te maken gehad met de eerstgenoemde categorie.

Een *functor* F is een afbeelding van een categorie naar een categorie, die niet alleen objecten overvoert in objecten, maar ook nog pijlen in pijlen: als $f : U \to V$ dan $F[f] : F[U] \to F[V]$, en wel op zo'n manier dat voor alle U, f, g:

$$F[\mathrm{id}_U] = \mathrm{id}_{F[U]} ,$$
$$F[f \circ g] = F[f] \circ F[g] .$$

Een functor wordt een *endofunctor* genoemd als hij werkt van een zekere categorie naar diezelfde categorie.
Nu zijn we rijp voor de definitie van Joyal:

> *Een* combinatorische soort *is een endofunctor van de categorie van eindige verzamelingen met bijecties.*

Je ziet wel dat de soorten, gedefinieerd in Hoofdstuk 4, inderdaad zulke endofunctoren zijn. Het briljante van deze abstracte definitie is, dat afgezien wordt van de manier waarop de verzameling van structuren $F[U]$ nou precies tot stand komt, en hoe de transformatieregel $F[f]$ eruit moet zien. Louter het geven van een verzameling $F[U]$ bij elke U en een transformatieregel $F[f]$ bij elke $f : U \to V$ legt de soort vast. Dit geeft je de vrijheid ontzettend veel soorten te bedenken. Bovendien wordt er geen essentieel onderscheid gemaakt tussen de soort L, die bij elke U een nummering $\{0, 1, \ldots, n-1\} \to U$ maakt, en de soort, zeg $\widetilde{L}$, die op U een geworteld boompje plaatst met op elke vertex hoogstens één tak:

$$\widetilde{L}[U] := \left\{\mu : U \to U \middle| \exists_{w \in U} : \left(\forall_{x \in U} \exists_{k \in \mathbb{N}} : \mu^k(x) = w, \quad \forall_{x \in U \setminus \{w\}} : \#\mu^{-1}(\{x\}) = 0 \text{ of } 1\right)\right\} .$$

Waar het om gaat is dat ze op dezelfde manier transformeren.