Ein Blick in die nichtkommutative Welt

Hans Maassen, Radboud-Universität Nimwegen, Universität von Amsterdam

Darmstadt, 26. April, 2013.

Gratuliere, Burkhard!

First Conference in Quantum Probability, 1982

First Conference in Quantum Probability, 1982

Villa Mondragone, Monteporzio Catone, Italien.

Die nichtkommutative Welt war noch jung

Die nichtkommutative Welt war noch jung

Die nichtkommutative Welt war noch jung

Die nichtkommutative Welt war noch jung

Prof. Dr. Alain Connes.

Und wir auch

Und wir auch

WIESO “NICHTKOMMUTATIV”?

WIESO "NICHTKOMMUTATIV"?

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird kommutativ genannt wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt:

$$ab = ba \ .$$

WIESO "NICHTKOMMUTATIV"?

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird kommutativ genannt wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt:

$$ab = ba \ .$$

Aber was sind denn

WIESO "NICHTKOMMUTATIV"?

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird kommutativ genannt wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt:

$$ab = ba \ .$$

Aber was sind denn

- nichtkommutative Geometrie?

WIESO "NICHTKOMMUTATIV"?

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird kommutativ genannt wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt:

$$ab = ba \ .$$

Aber was sind denn

- nichtkommutative Geometrie?
- nichtkommutative Gruppentheorie ("Quantengruppen"?)

WIESO "NICHTKOMMUTATIV"?

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird kommutativ genannt wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt:

$$ab = ba \ .$$

Aber was sind denn

- nichtkommutative Geometrie?
- nichtkommutative Gruppentheorie ("Quantengruppen"?)
- nichtkommutative Integration?

WIESO "NICHTKOMMUTATIV"?

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird kommutativ genannt wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt:

$$ab = ba \ .$$

Aber was sind denn

- nichtkommutative Geometrie?
- nichtkommutative Gruppentheorie ("Quantengruppen"?)
- nichtkommutative Integration?
- nichtkommutative Wahrscheinlichkeitstheorie?

Das nichtkommutativ verallgemeinern von Mathematischen Objekten

Das nichtkommutativ verallgemeinern von Mathematischen Objekten

Das nichtkommutativ verallgemeinern von Mathematischen Objekten

A Nehme ein mathematisches Objekt.

Das nichtkommutativ verallgemeinern von Mathematischen Objekten

A Nehme ein mathematisches Objekt.

B Bilde eine Algebraische Struktur geeigneter Funktionen auf dem Objekt.

Das nichtkommutativ verallgemeinern von Mathematischen Objekten

A Nehme ein mathematisches Objekt.

B Bilde eine Algebraische Struktur geeigneter Funktionen auf dem Objekt.

C Karakterisiere diese mit Hilfe von Axiomata.

Das nichtkommutativ verallgemeinern von Mathematischen Objekten

A Nehme ein mathematisches Objekt.

B Bilde eine Algebraische Struktur geeigneter Funktionen auf dem Objekt.

C Karakterisiere diese mit Hilfe von Axiomata. Eines davon ist die Kommutativität.

Das nichtkommutativ verallgemeinern von Mathematischen Objekten

A Nehme ein mathematisches Objekt.

B Bilde eine Algebraische Struktur geeigneter Funktionen auf dem Objekt.

C Karakterisiere diese mit Hilfe von Axiomata. Eines davon ist die Kommutativität.

D Lasse das Kommutativitätsaxiom fallen.

Hauptthema: Wahrscheinlichkeit

Hauptthema: Wahrscheinlichkeit

Am besten symbolisiert von Würfeln und Münzen.

Hauptthema: Wahrscheinlichkeit

Am besten symbolisiert von Würfeln und Münzen.

Übersicht

Übersicht

Übersicht

- Definition und Konstruktion des Würfels;

Übersicht

- Definition und Konstruktion des Würfels;
- Konjugierte Würfel;

Übersicht

- Definition und Konstruktion des Würfels;
- Konjugierte Würfel;
- Verschränkte Würfel und Münzen;

Übersicht

- Definition und Konstruktion des Würfels;
- Konjugierte Würfel;
- Verschränkte Würfel und Münzen;
- Garantierte Würfel und Münzen;

Übersicht

- Definition und Konstruktion des Würfels;
- Konjugierte Würfel;
- Verschränkte Würfel und Münzen;
- Garantierte Würfel und Münzen;
- Würfelspiele;

Übersicht

- Definition und Konstruktion des Würfels;
- Konjugierte Würfel;
- Verschränkte Würfel und Münzen;
- Garantierte Würfel und Münzen;
- Würfelspiele;
- Unsere Welt.

Der Quantenwürfel

Der Quantenwürfel

A Das Objekt:

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} ;$$

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} ;$$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) , \qquad \pi_j \geq 0 , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1 ;$$

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\
\pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\
\pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;}
\end{aligned}$$

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\
\pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\
\pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;}
\end{aligned}$$

B Die Algebra:

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\
\pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\
\pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;}
\end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\
\pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\
\pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;}
\end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\ \pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\ \pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;} \end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

C Die Karakterisierung:

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\ \pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\ \pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;} \end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

C Die Karakterisierung: Ein (algebraischer) Würfel ist eine abelsche *-algebra $\mathcal{A}$ mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und mit einem normierten positiven linearen Funktional φ.

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\ \pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\ \pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;} \end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

C Die Karakterisierung: Ein (algebraischer) Würfel ist eine abelsche *-algebra $\mathcal{A}$ mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und mit einem normierten positiven linearen Funktional φ.

D Die Verallgemeinerung:

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\ \pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\ \pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;} \end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

C Die Karakterisierung: Ein (algebraischer) Würfel ist eine abelsche *-algebra $\mathcal{A}$ mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und mit einem normierten positiven linearen Funktional φ.

D Die Verallgemeinerung: Ein Quantenwürfel ist ein Paar $(\mathcal{A}, \varphi)$, wo

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\ \pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\ \pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;} \end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

C Die Karakterisierung: Ein (algebraischer) Würfel ist eine abelsche *-algebra $\mathcal{A}$ mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und mit einem normierten positiven linearen Funktional φ.

D Die Verallgemeinerung: Ein Quantenwürfel ist ein Paar $(\mathcal{A}, \varphi)$, wo

- $\mathcal{A}$ eine allgemeine *-algebra mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\ \pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\ \pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;} \end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

C Die Karakterisierung: Ein (algebraischer) Würfel ist eine abelsche *-algebra $\mathcal{A}$ mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und mit einem normierten positiven linearen Funktional φ.

D Die Verallgemeinerung: Ein Quantenwürfel ist ein Paar $(\mathcal{A}, \varphi)$, wo

- $\mathcal{A}$ eine allgemeine *-algebra mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und
- φ ein positives lineares Funktional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(\mathbb{1}) = 1$.

Der Quantenwürfel

A Das Objekt: ein Würfel.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\ ; \\ \pi &= (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)\ , \qquad \pi_j \geq 0\ , \quad \sum_{j=1}^{6} \pi(j) = 1\ ; \\ \pi &= (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}) \quad \text{Fairer Würfel;} \end{aligned}$$

B Die Algebra: $\mathcal{A} = \{\text{Funktionen } \Omega \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^6$.

$$\varphi : f \mapsto \sum_{j=1}^{6} \pi(j) f(j).$$

C Die Karakterisierung: Ein (algebraischer) Würfel ist eine abelsche *-algebra $\mathcal{A}$ mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und mit einem normierten positiven linearen Funktional φ.

D Die Verallgemeinerung: Ein Quantenwürfel ist ein Paar $(\mathcal{A}, \varphi)$, wo

- $\mathcal{A}$ eine allgemeine *-algebra mit maximal 6 gegenseitig orthogonalen Projektionen, und
- φ ein positives lineares Funktional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(\mathbb{1}) = 1$.

Konstruktion des Würfels

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Grundstufe: Ω und π.

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Grundstufe: Ω und π.

Erste Stufe: Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ von Funktionen auf Ω: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$.

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Grundstufe: Ω und π.

Erste Stufe: Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ von Funktionen auf Ω: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$.
(Teilmengen von Ω bekommen jetzt Unterräume.)

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Grundstufe: Ω und π.

Erste Stufe: Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ von Funktionen auf Ω: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$.
(Teilmengen von Ω bekommen jetzt Unterräume.)

Zweite Stufe: Die Algebra

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \sim M_6$$

von allen Operatoren auf $\mathcal{H}$.

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Grundstufe: Ω und π.

Erste Stufe: Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ von Funktionen auf Ω: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$.
(Teilmengen von Ω bekommen jetzt Unterräume.)

Zweite Stufe: Die Algebra

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \sim M_6$$

von allen Operatoren auf $\mathcal{H}$.
Teilmengen von Ω sind jetzt Projektionen, also Elemente von $\mathcal{A}$!

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Grundstufe: Ω und π.

Erste Stufe: Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ von Funktionen auf Ω: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$.
(Teilmengen von Ω bekommen jetzt Unterräume.)

Zweite Stufe: Die Algebra

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \sim M_6$$

von allen Operatoren auf $\mathcal{H}$.
Teilmengen von Ω sind jetzt Projektionen, also Elemente von $\mathcal{A}$!
Elemente von Ω sind minimale Projektionen geworden.

Konstruktion des Würfels

In der Mathematik ist es, um eine Verallgemeinerung zu konstruieren, oft nützlich zwei Schritte hochzugehen.
Auf der zweiten Stufe findet man oft das alte Objekt zurück, und noch mehr.

Grundstufe: Ω und π.

Erste Stufe: Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ von Funktionen auf Ω: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$.
(Teilmengen von Ω bekommen jetzt Unterräume.)

Zweite Stufe: Die Algebra

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \sim M_6$$

von allen Operatoren auf $\mathcal{H}$.
Teilmengen von Ω sind jetzt Projektionen, also Elemente von $\mathcal{A}$!
Elemente von Ω sind minimale Projektionen geworden.

Die abelsche Algebra $\mathcal{A}$ ist auch noch da: sie ist aufgebaut aus den diagonalen Matrizen.

Interpretation

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.
Allgemeiner nennen wir alle Projektionen in $\mathcal{A}$: Ereignisse.

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.
Allgemeiner nennen wir alle Projektionen in $\mathcal{A}$: Ereignisse.

Wenn

$$p = \text{[ich werfe eine gerade Zahl von Augen]} \ ,$$

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.
Allgemeiner nennen wir alle Projektionen in $\mathcal{A}$: Ereignisse.

Wenn

$$p = \text{[ich werfe eine gerade Zahl von Augen]} \ ,$$

$$q = \text{[ich werfe mehr als 3 Augen]} \ ,$$

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.
Allgemeiner nennen wir alle Projektionen in $\mathcal{A}$: Ereignisse.

Wenn

$$p = \text{[ich werfe eine gerade Zahl von Augen]} \ ,$$

$$q = \text{[ich werfe mehr als 3 Augen]} \ ,$$

dann ist $p = 1_{\{2,4,6\}}$ und $q = 1_{\{4,5,6\}}$. Somit ist

$$pq = qp = 1_{\{4,6\}} = \text{[ich werfe 4 oder 6 Augen]} \ .$$

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.
Allgemeiner nennen wir alle Projektionen in $\mathcal{A}$: Ereignisse.

Wenn

$$p = \text{[ich werfe eine gerade Zahl von Augen]} \ ,$$

$$q = \text{[ich werfe mehr als 3 Augen]} \ ,$$

dann ist $p = 1_{\{2,4,6\}}$ und $q = 1_{\{4,5,6\}}$. Somit ist

$$pq = qp = 1_{\{4,6\}} = \text{[ich werfe 4 oder 6 Augen]} \ .$$

Wenn aber p und q nicht vertauschende Projektionen sind, dann ist

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.
Allgemeiner nennen wir alle Projektionen in $\mathcal{A}$: Ereignisse.

Wenn

$$p = \text{[ich werfe eine gerade Zahl von Augen]} \ ,$$

$$q = \text{[ich werfe mehr als 3 Augen]} \ ,$$

dann ist $p = 1_{\{2,4,6\}}$ und $q = 1_{\{4,5,6\}}$. Somit ist

$$pq = qp = 1_{\{4,6\}} = \text{[ich werfe 4 oder 6 Augen]} \ .$$

Wenn aber p und q nicht vertauschende Projektionen sind, dann ist

$$(pq)^* = q^* p^* = qp \neq pq \ ,$$

Interpretation

Die Teilmengen $A \subset \Omega$ gehen unter Algebraisierung über in Projektionen $1_A \in \mathcal{A}$.
Allgemeiner nennen wir alle Projektionen in $\mathcal{A}$: Ereignisse.

Wenn

$$p = \text{[ich werfe eine gerade Zahl von Augen]} \ ,$$

$$q = \text{[ich werfe mehr als 3 Augen]} \ ,$$

dann ist $p = 1_{\{2,4,6\}}$ und $q = 1_{\{4,5,6\}}$. Somit ist

$$pq = qp = 1_{\{4,6\}} = \text{[ich werfe 4 oder 6 Augen]} \ .$$

Wenn aber p und q nicht vertauschende Projektionen sind, dann ist

$$(pq)^* = q^* p^* = qp \neq pq \ ,$$

also pq ist keine Projektion und stellt kein Ereignis dar.

Erzeuger einer Würfel-Algebra

Erzeuger einer Würfel-Algebra

Man kann eine abelsche Würfel-Algebra eventuell mit einem einzigen Erzeuger andeuten.

Erzeuger einer Würfel-Algebra

Man kann eine abelsche Würfel-Algebra eventuell mit einem einzigen Erzeuger andeuten.
So einen Erzeuger nennen wir dann auch mal einen Würfel.

Erzeuger einer Würfel-Algebra

Man kann eine abelsche Würfel-Algebra eventuell mit einem einzigen Erzeuger andeuten.
So einen Erzeuger nennen wir dann auch mal einen Würfel.

Definition

Ein Element w einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir einen Würfel falls

$$w^* w = w w^* = w^6 = \mathbb{1} \, .$$

Erzeuger einer Würfel-Algebra

Man kann eine abelsche Würfel-Algebra eventuell mit einem einzigen Erzeuger andeuten.
So einen Erzeuger nennen wir dann auch mal einen Würfel.

Definition

Ein Element w einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir einen Würfel falls

$$w^* w = w w^* = w^6 = \mathbb{1} \, .$$

Zum Beispiel, wenn $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die Anzahl der Augen andeutet, so kann man $w := \omega^X$ wählen, wo

$$\omega := \sqrt[3]{-1} = (e^{i\pi})^{1/3} := e^{\frac{i\pi}{3}} = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \, .$$

Erzeuger einer Würfel-Algebra

Man kann eine abelsche Würfel-Algebra eventuell mit einem einzigen Erzeuger andeuten.
So einen Erzeuger nennen wir dann auch mal einen Würfel.

Definition

Ein Element w einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir einen Würfel falls

$$w^* w = w w^* = w^6 = \mathbb{1} \, .$$

Zum Beispiel, wenn $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die Anzahl der Augen andeutet, so kann man $w := \omega^X$ wählen, wo

$$\omega := \sqrt[3]{-1} = (e^{i\pi})^{1/3} := e^{\frac{i\pi}{3}} = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \, .$$

Unser ursprüngliche Würfel enthält dann in M_6 die Form

Erzeuger einer Würfel-Algebra

Man kann eine abelsche Würfel-Algebra eventuell mit einem einzigen Erzeuger andeuten.
So einen Erzeuger nennen wir dann auch mal einen Würfel.

Definition

Ein Element w einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir einen Würfel falls

$$w^* w = w w^* = w^6 = \mathbb{1} \, .$$

Zum Beispiel, wenn $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die Anzahl der Augen andeutet, so kann man $w := \omega^X$ wählen, wo

$$\omega := \sqrt[3]{-1} = (e^{i\pi})^{1/3} := e^{\frac{i\pi}{3}} = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \, .$$

Unser ursprüngliche Würfel enthält dann in M_6 die Form

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \, .$$

Die Münze

Die Münze

Definition

Die Münze

Definition

Ein Element m einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir eine Münze falls

Die Münze

Definition

Ein Element m einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir eine Münze falls

$$m^* m = m m^* = m^2 = \mathbb{1} \, .$$

Die Münze

Definition

Ein Element m einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir eine Münze falls

$$m^* m = m m^* = m^2 = \mathbb{1} \, .$$

Die Münze

Definition

Ein Element m einer *-Algebra $\mathcal{A}$ nennen wir eine Münze falls

$$m^* m = m m^* = m^2 = \mathbb{1} \, .$$

Bemerkungen:

- Jede Münze ist ein (entarteter) Würfel, denn

$$m^2 = \mathbb{1} \implies m^6 = \mathbb{1}^3 = \mathbb{1} \, .$$

- Wenn w ein Würfel ist, dann ist w^3 eine Münze.

Der konjugierte Würfel

Der konjugierte Würfel

In dem Quantenwürfel M_6 taucht auf natürlicher Weise ein zweiter, "kanonisch konjugierter" Würfel auf:

Der konjugierte Würfel

In dem Quantenwürfel M_6 taucht auf natürlicher Weise ein zweiter, "kanonisch konjugierter" Würfel auf:

$$\widehat{w} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Der konjugierte Würfel

In dem Quantenwürfel M_6 taucht auf natürlicher Weise ein zweiter, "kanonisch konjugierter" Würfel auf:

$$\widehat{w} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Lemma

$\widehat{w}$ ist ein Würfel.

Der konjugierte Würfel

In dem Quantenwürfel M_6 taucht auf natürlicher Weise ein zweiter, "kanonisch konjugierter" Würfel auf:

$$\widehat{w} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Lemma

$\widehat{w}$ ist ein Würfel.

Beweis.

Es ist klar daß $\widehat{w}$ unitär ist, und daß $\widehat{w}^6 = \mathbb{1}$. $\square$

Der konjugierte Würfel

In dem Quantenwürfel M_6 taucht auf natürlicher Weise ein zweiter, "kanonisch konjugierter" Würfel auf:

$$\widehat{w} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Lemma

$\widehat{w}$ ist ein Würfel.

Beweis.

Es ist klar daß $\widehat{w}$ unitär ist, und daß $\widehat{w}^6 = \mathbb{1}$. $\square$

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk}\widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk}\widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Schreiben wir $\pi_j := \varphi(p_j)$ und $\widehat{\pi}_j := \varphi(\widehat{p}_j)$.

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk}\widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Schreiben wir $\pi_j := \varphi(p_j)$ und $\widehat{\pi}_j := \varphi(\widehat{p}_j)$.

Satz (H.M., Jos Uffink, 1988)

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk}\widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Schreiben wir $\pi_j := \varphi(p_j)$ und $\widehat{\pi}_j := \varphi(\widehat{p}_j)$.

Satz (H.M., Jos Uffink, 1988)

Für jedes positive lineare Funktional φ auf M_6 gilt:

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk}\widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Schreiben wir $\pi_j := \varphi(p_j)$ und $\widehat{\pi}_j := \varphi(\widehat{p}_j)$.

Satz (H.M., Jos Uffink, 1988)

Für jedes positive lineare Funktional φ auf M_6 gilt:

$$\sum_{j=1}^{6} \pi_j \log \frac{1}{\pi_j} + \sum_{j=1}^{6} \widehat{\pi}_j \log \frac{1}{\widehat{\pi}_j} \quad \geq \quad \log 6.$$

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk}\widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Schreiben wir $\pi_j := \varphi(p_j)$ und $\widehat{\pi}_j := \varphi(\widehat{p}_j)$.

Satz (H.M., Jos Uffink, 1988)

Für jedes positive lineare Funktional φ auf M_6 gilt:

$$\sum_{j=1}^{6} \pi_j \log \frac{1}{\pi_j} + \sum_{j=1}^{6} \widehat{\pi}_j \log \frac{1}{\widehat{\pi}_j} \quad \geq \quad \log 6.$$

Beweis.

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega\widehat{w}w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk}\widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Schreiben wir $\pi_j := \varphi(p_j)$ und $\widehat{\pi}_j := \varphi(\widehat{p}_j)$.

Satz (H.M., Jos Uffink, 1988)

Für jedes positive lineare Funktional φ auf M_6 gilt:

$$\sum_{j=1}^{6} \pi_j \log \frac{1}{\pi_j} + \sum_{j=1}^{6} \widehat{\pi}_j \log \frac{1}{\widehat{\pi}_j} \quad \geq \quad \log 6.$$

Beweis.

1988: M.+U. mit Hilfe von Interpolation.

Beziehungen zwischen w und $\widehat{w}$

Wir haben

$$w\widehat{w} = \omega \widehat{w} w \ .$$

(Beziehung zum Nichtkommutativen Torus!)
Die von $\widehat{w}$ erzeugte Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ besitzt auch 6 minimale Projektionen:

$$\widehat{p}_j := \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{5} \omega^{-jk} \widehat{w}^k \ , \quad (j = 0, \ldots, 5).$$

Schreiben wir $\pi_j := \varphi(p_j)$ und $\widehat{\pi}_j := \varphi(\widehat{p}_j)$.

Satz (H.M., Jos Uffink, 1988)

Für jedes positive lineare Funktional φ auf M_6 gilt:

$$\sum_{j=1}^{6} \pi_j \log \frac{1}{\pi_j} + \sum_{j=1}^{6} \widehat{\pi}_j \log \frac{1}{\widehat{\pi}_j} \quad \geq \quad \log 6.$$

Beweis.

1988: M.+U. mit Hilfe von Interpolation.
2011: Frank+Lieb mit Hilfe der Golden-Thompson Ungleichung. $\square$

Verschränkte Würfel

Verschränkte Würfel

Betrachte jetzt die Algebra $M_6 \otimes M_6$ von zwei Würfeln.

Verschränkte Würfel

Betrachte jetzt die Algebra $M_6 \otimes M_6$ von zwei Würfeln.
Der Vektor $\psi \in \mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$ gegeben durch

Verschränkte Würfel

Betrachte jetzt die Algebra $M_6 \otimes M_6$ von zwei Würfeln.
Der Vektor $\psi \in \mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$ gegeben durch

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{6} e_i \otimes e_i \ ,$$

Verschränkte Würfel

Betrachte jetzt die Algebra $M_6 \otimes M_6$ von zwei Würfeln.
Der Vektor $\psi \in \mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$ gegeben durch

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{6} e_i \otimes e_i \ ,$$

bestimmt ein Funktional φ auf $M_6 \otimes M_6$

Verschränkte Würfel

Betrachte jetzt die Algebra $M_6 \otimes M_6$ von zwei Würfeln.
Der Vektor $\psi \in \mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$ gegeben durch

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{6} e_i \otimes e_i \ ,$$

bestimmt ein Funktional φ auf $M_6 \otimes M_6$

$$\varphi : x \otimes y \mapsto \langle \psi, (x \otimes y)\psi \rangle = \frac{1}{6} \mathrm{tr}(x^T y)$$

Verschränkte Würfel

Betrachte jetzt die Algebra $M_6 \otimes M_6$ von zwei Würfeln.
Der Vektor $\psi \in \mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$ gegeben durch

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{6} e_i \otimes e_i \ ,$$

bestimmt ein Funktional φ auf $M_6 \otimes M_6$

$$\varphi : x \otimes y \mapsto \langle \psi, (x \otimes y)\psi \rangle = \frac{1}{6} \mathrm{tr}(x^T y)$$

mit den Eigenschaften

Verschränkte Würfel

Betrachte jetzt die Algebra $M_6 \otimes M_6$ von zwei Würfeln.
Der Vektor $\psi \in \mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$ gegeben durch

$$\psi := \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{6} e_i \otimes e_i \ ,$$

bestimmt ein Funktional φ auf $M_6 \otimes M_6$

$$\varphi : x \otimes y \mapsto \langle \psi, (x \otimes y)\psi \rangle = \frac{1}{6} \mathrm{tr}(x^T y)$$

mit den Eigenschaften

$$\varphi(p_i \otimes p_j) = \tfrac{1}{6}\delta_{ij} \quad \text{und} \quad \varphi(\widehat{p}_i \otimes \widehat{p}_j) = \tfrac{1}{6}\delta_{i,6-j} \ .$$

Bell-Ungleichung für Würfel

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*
Für alle Quadrupel w_1, w_2, v_1, v_2 von Würfeln in $\mathcal{A}$ gilt

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*
Für alle Quadrupel w_1, w_2, v_1, v_2 von Würfeln in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\big(w_1^*(v_1 - v_2) - w_2^*(v_1 + v_2)\big)\right) \leq \frac{5}{2}\ .$$

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*
Für alle Quadrupel w_1, w_2, v_1, v_2 von Würfeln in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\big(w_1^*(v_1 - v_2) - w_2^*(v_1 + v_2)\big)\right) \leq \frac{5}{2}\ .$$

Beweis.

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*
Für alle Quadrupel w_1, w_2, v_1, v_2 von Würfeln in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\big(w_1^*(v_1 - v_2) - w_2^*(v_1 + v_2)\big)\right) \leq \frac{5}{2}\ .$$

Beweis.

Punktweise. Für Zahlen w_1, w_2, v_1, v_2, alle Potenze von ω, gilt ja

$$\mathrm{Re}\left(\overline{w}_1(v_1 - v_2) - \overline{w}_2(v_1 + v_2)\right) \leq \frac{5}{2}\ .$$

$\square$

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*
Für alle Quadrupel w_1, w_2, v_1, v_2 von Würfeln in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\big(w_1^*(v_1 - v_2) - w_2^*(v_1 + v_2)\big)\right) \leq \frac{5}{2}\,.$$

Beweis.

Punktweise. Für Zahlen w_1, w_2, v_1, v_2, alle Potenze von ω, gilt ja

$$\mathrm{Re}\left(\overline{w}_1(v_1 - v_2) - \overline{w}_2(v_1 + v_2)\right) \leq \frac{5}{2}\,.$$

$\square$

Aber: Für die kanonische Würfel und ihre konjugierte gilt dagegen:

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*
Für alle Quadrupel w_1, w_2, v_1, v_2 von Würfeln in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\big(w_1^*(v_1 - v_2) - w_2^*(v_1 + v_2)\big)\right) \leq \frac{5}{2}\,.$$

Beweis.

Punktweise. Für Zahlen w_1, w_2, v_1, v_2, alle Potenze von ω, gilt ja

$$\mathrm{Re}\left(\overline{w}_1(v_1 - v_2) - \overline{w}_2(v_1 + v_2)\right) \leq \frac{5}{2}\,.$$

$\square$

Aber: Für die kanonische Würfel und ihre konjugierte gilt dagegen:

$$\mathrm{Re}\left(\beta\big(w^* \otimes (w - \widehat{w}) - \widehat{w}^* \otimes (w + \widehat{w})\big)\right) > \frac{5}{2}\,.$$

Bell-Ungleichung für Würfel

Satz

*Es sei $\mathcal{C}$ eine abelsche *-Algebra, und φ ein Zustand auf $\mathcal{C}$.*
Für alle Quadrupel w_1, w_2, v_1, v_2 von Würfeln in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\big(w_1^*(v_1 - v_2) - w_2^*(v_1 + v_2)\big)\right) \leq \frac{5}{2}\,.$$

Beweis.

Punktweise. Für Zahlen w_1, w_2, v_1, v_2, alle Potenze von ω, gilt ja

$$\mathrm{Re}\left(\overline{w}_1(v_1 - v_2) - \overline{w}_2(v_1 + v_2)\right) \leq \frac{5}{2}\,.$$

$\square$

Aber: Für die kanonische Würfel und ihre konjugierte gilt dagegen:

$$\mathrm{Re}\left(\beta\big(w^* \otimes (w - \widehat{w}) - \widehat{w}^* \otimes (w + \widehat{w})\big)\right) > \frac{5}{2}\,.$$

Hier ist $\beta(x \otimes y) := \langle \psi, (x \otimes u^* y u)\psi \rangle$ eine geeignete lokal gedrehte Version des obigen Verschränkten Zustandes auf $M_6 \otimes M_6$.

Bell-Ungleichung für Münzen

Die viel bekanntere Bell-Ungleichung für Münzen lautet:

$$\varphi\big(m_1^*(n_1 - n_2) - m_2^*(n_1 + n_2)\big) \leq 2 \; .$$

Die optimale Verletzung der Bell-Ungleichung ist hier:

$$\beta\big(m \otimes (m - \widehat{m}) - \widehat{m}(m + \widehat{m})\big) = 2\sqrt{2} \; ,$$

wo $\beta(x \otimes y) := \langle \psi, (x \otimes u^* y u)\psi \rangle$ und

$$u = \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{8} & \cos\frac{\pi}{8} \\ \cos\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} \; .$$

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Der nächste Satz von von Neumann ist eigentlich interessanter als der Kontext von *verborgenen Variabelen* in dem er heute ausschließlich ganannt wird.

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Der nächste Satz von von Neumann ist eigentlich interessanter als der Kontext von *verborgenen Variabelen* in dem er heute ausschließlich ganannt wird.

Ein Element $a \in A$ heißt zentral wenn es mit allen Elementen in $\mathcal{A}$ vertauscht.

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Der nächste Satz von von Neumann ist eigentlich interessanter als der Kontext von *verborgenen Variabelen* in dem er heute ausschließlich ganannt wird.

Ein Element $a \in A$ heißt zentral wenn es mit allen Elementen in $\mathcal{A}$ vertauscht.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird ein Faktor genannt wenn sie, außer den Konstanten, keine zentrale Elemente enthält.

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Der nächste Satz von von Neumann ist eigentlich interessanter als der Kontext von *verborgenen Variabelen* in dem er heute ausschließlich ganannt wird.

Ein Element $a \in A$ heißt zentral wenn es mit allen Elementen in $\mathcal{A}$ vertauscht.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird ein Faktor genannt wenn sie, außer den Konstanten, keine zentrale Elemente enthält.

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Der nächste Satz von von Neumann ist eigentlich interessanter als der Kontext von *verborgenen Variabelen* in dem er heute ausschließlich ganannt wird.

Ein Element $a \in A$ heißt zentral wenn es mit allen Elementen in $\mathcal{A}$ vertauscht.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird ein Faktor genannt wenn sie, außer den Konstanten, keine zentrale Elemente enthält.

Wir nennen einen Zustand dispersionsfrei falls für alle Projektionen $p \in \mathcal{A}$ gilt:

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Der nächste Satz von von Neumann ist eigentlich interessanter als der Kontext von *verborgenen Variabelen* in dem er heute ausschließlich ganannt wird.

Ein Element $a \in A$ heißt zentral wenn es mit allen Elementen in $\mathcal{A}$ vertauscht.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird ein Faktor genannt wenn sie, außer den Konstanten, keine zentrale Elemente enthält.

Wir nennen einen Zustand dispersionsfrei falls für alle Projektionen $p \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\varphi(p) = 0 \text{ oder } 1 \ .$$

Von Neumann: dispersionsfreie Zustände

Der nächste Satz von von Neumann ist eigentlich interessanter als der Kontext von *verborgenen Variabelen* in dem er heute ausschließlich ganannt wird.

Ein Element $a \in A$ heißt zentral wenn es mit allen Elementen in $\mathcal{A}$ vertauscht.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ wird ein Faktor genannt wenn sie, außer den Konstanten, keine zentrale Elemente enthält.

Wir nennen einen Zustand dispersionsfrei falls für alle Projektionen $p \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\varphi(p) = 0 \text{ oder } 1 \ .$$

Der Träger eines Zustandes ist definiert durch

$$\mathrm{Supp}(\varphi) := \inf \{ \, p \in \mathcal{A} \, | \, \varphi(p) = 1 \, \} \ .$$

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.
Das heißt: z ist zentral.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.
Das heißt: z ist zentral.
(b)$\Longrightarrow$(a):

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.
Das heißt: z ist zentral.
(b)$\Longrightarrow$(a):
Sei $p \in \mathcal{A}$.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.
Das heißt: z ist zentral.
(b)$\Longrightarrow$(a):
Sei $p \in \mathcal{A}$.Wegen Zentralität von z ist zpz eine Projektion.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.
Das heißt: z ist zentral.
(b)$\Longrightarrow$(a):
Sei $p \in \mathcal{A}$.Wegen Zentralität von z ist zpz eine Projektion.
Wegen Minimalität von z ist zpz entweder 0 oder z.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.
Das heißt: z ist zentral.
(b)$\Longrightarrow$(a):
Sei $p \in \mathcal{A}$.Wegen Zentralität von z ist zpz eine Projektion.
Wegen Minimalität von z ist zpz entweder 0 oder z.
Im ersten Fall ist $\varphi(p) = \varphi(zpz) = 0$.

Satz

Sei φ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

(a) *φ ist dispersionsfrei.*

(b) $\mathrm{Supp}(\varphi)$ *ist minimal und zentral in $\mathcal{A}$.*

Beweis.

Sei $z := Supp(\varphi)$. (a)$\Longrightarrow$(b):

Der Träger z kann keine Projektionen p mit $\varphi(p) = 1$ unter sich haben,und daher auch keine mit $\varphi(p) = 0$;
also überhaupt keine: z ist minimal.

Sei p irgendeine Projektion in $\mathcal{A}$.
Falls $\varphi(p) = 1$, dann ist $p \geq z$, also $pz = zp$.
Falls $\varphi(p) = 0$, dann ist $\varphi(\mathbb{1} - p) = 1$, also $\mathbb{1} - p \geq z$, und wieder $pz = zp$.
Das heißt: z ist zentral.
(b)$\Longrightarrow$(a):
Sei $p \in \mathcal{A}$.Wegen Zentralität von z ist zpz eine Projektion.
Wegen Minimalität von z ist zpz entweder 0 oder z.
Im ersten Fall ist $\varphi(p) = \varphi(zpz) = 0$.
Im zweiten Fall ist $\varphi(p) = \varphi(zpz) = \varphi(z) = 1$. $\square$

Garantierte Würfel und Münzen

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Satz

Sei φ ein Zustand auf der C-Algebra $\mathcal{A}$.*

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Satz

Sei φ ein Zustand auf der C-Algebra $\mathcal{A}$.*
Folgende sind äquivalent:

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Satz

Sei φ ein Zustand auf der C-Algebra $\mathcal{A}$.*
Folgende sind äquivalent:

(a) *φ ist extremal.*

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Satz

Sei φ ein Zustand auf der C-Algebra $\mathcal{A}$.*
Folgende sind äquivalent:

(a) *φ ist extremal.*

(b) *Für alle C*-Algebren $\mathcal{B}$ und alle Zustände ϑ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt:*

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Satz

Sei φ ein Zustand auf der C-Algebra $\mathcal{A}$.*
Folgende sind äquivalent:

(a) *φ ist extremal.*

(b) *Für alle C*-Algebren $\mathcal{B}$ und alle Zustände ϑ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt:*

$$\vartheta(\cdot \otimes \mathbb{1}) = \varphi \quad \Longrightarrow \quad \exists_{\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{B})} : \vartheta = \varphi \otimes \psi \ .$$

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Satz

Sei φ ein Zustand auf der C-Algebra $\mathcal{A}$.*
Folgende sind äquivalent:

(a) *φ ist extremal.*

(b) *Für alle C*-Algebren $\mathcal{B}$ und alle Zustände ϑ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt:*

$$\vartheta(\cdot \otimes \mathbb{1}) = \varphi \quad \Longrightarrow \quad \exists_{\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{B})} : \vartheta = \varphi \otimes \psi \ .$$

In Worten:

Garantierte Würfel und Münzen

Wie kann man einem Stochastischen Objekt ansehen ob es von allem in der Welt unabhängig ist?
In der klassischen (kommutativen) Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es dazu keine Möglichkeit.

In der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeit schon.

Satz

Sei φ ein Zustand auf der C-Algebra $\mathcal{A}$.*
Folgende sind äquivalent:

(a) *φ ist extremal.*

(b) *Für alle C*-Algebren $\mathcal{B}$ und alle Zustände ϑ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt:*

$$\vartheta(\cdot \otimes \mathbb{1}) = \varphi \quad \Longrightarrow \quad \exists_{\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{B})} : \vartheta = \varphi \otimes \psi \ .$$

In Worten:

Ein System in einem reinen Zustand ist von allem in der Welt unabhängig.

Beweis.

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b):

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei:

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{array} \right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{matrix} \right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{array} \right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{cases}\right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)}$$

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{array} \right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{cases}\right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$;

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{array} \right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$; also wegen Extremalität von φ:

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{cases}\right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$; also wegen Extremalität von φ:

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) = \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\psi(q)} \ . \quad \text{, das heißt:}$$

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{array} \right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$; also wegen Extremalität von φ:

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) = \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\psi(q)} \ . \quad \text{, das heißt:} \quad \vartheta(a \otimes q) = \varphi(a)\psi(q) \ .$$

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{cases}\right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$; also wegen Extremalität von φ:

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) = \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\psi(q)} \ . \quad \text{, das heißt:} \quad \vartheta(a \otimes q) = \varphi(a)\psi(q) \ .$$

(b)$\Longrightarrow$(a):

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{cases}\right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$; also wegen Extremalität von φ:

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) = \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\psi(q)} \ . \quad \text{, das heißt:} \quad \vartheta(a \otimes q) = \varphi(a)\psi(q) \ .$$

(b)$\Longrightarrow$(a):

Sei $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\varphi_2$ mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{cases}\right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$; also wegen Extremalität von φ:

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) = \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\psi(q)} \ . \quad \text{, das heißt:} \quad \vartheta(a \otimes q) = \varphi(a)\psi(q) \ .$$

(b)$\Longrightarrow$(a):

Sei $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\varphi_2$ mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Sei $\mathcal{B} := \mathbb{C}^2$ mit Verteilung $(\lambda, 1 - \lambda)$ (Münze!).

Beweis.

(a)$\Longrightarrow$(b): Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{B}$ durch $\psi(b) := \vartheta(\mathbb{1} \otimes b)$ ..

- ψ dispersionsfrei: Laut Satz 1 ist der Träger minimal und zentral:

$$\vartheta(p \otimes q) = \vartheta(p \otimes zq) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{falls } q \perp z \\ \vartheta(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) & \text{falls } q \geq z \end{matrix} \right\} = \varphi(p)\psi(q) \ .$$

- Sonst gibt es $q \in \mathcal{B}$ mit $0 < \psi(q) < 1$.

  Betrachte die Zustände φ_1 und φ_2 auf $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\varphi_1(a) := \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes q)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(a) := \frac{\vartheta(a \otimes (\mathbb{1} - q))}{\vartheta(\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - q))} \ .$$

  Dann gilt: $\varphi(a) = \psi(q)\varphi_1(a) + (1 - \psi(q))\varphi_2(a)$; also wegen Extremalität von φ:

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) = \frac{\vartheta(a \otimes q)}{\psi(q)} \ . \quad \text{, das heißt:} \quad \vartheta(a \otimes q) = \varphi(a)\psi(q) \ .$$

(b)$\Longrightarrow$(a):
Sei $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\varphi_2$ mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$.
Sei $\mathcal{B} := \mathbb{C}^2$ mit Verteilung $(\lambda, 1 - \lambda)$ (Münze!). Dann ist

$$\vartheta(a \otimes b) := \lambda\varphi_1(a)b(1) + (1 - \lambda)\varphi_2(a)b(2)$$

kein Produktzustand, und liefert $\varphi(a)$ bei der Einschränkung $b = \mathbb{1}$. $\square$

Garantierte Unsicherheit

Garantierte Unsicherheit

Laut unserer nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie hat man also universelle Unsicherheit sobald man ein reines Quantensystem (beschrieben von einem Faktor) in reinem (d.h. extremalen) Zustand vor sich hat.

Garantierte Unsicherheit

Laut unserer nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie hat man also universelle Unsicherheit sobald man ein reines Quantensystem (beschrieben von einem Faktor) in reinem (d.h. extremalen) Zustand vor sich hat.

In 2007 hat Colbeck voorgeschlagen dies zu garantieren durch verletzung der Bell-Ungleichung.

Garantierte Unsicherheit

Laut unserer nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie hat man also universelle Unsicherheit sobald man ein reines Quantensystem (beschrieben von einem Faktor) in reinem (d.h. extremalen) Zustand vor sich hat.

In 2007 hat Colbeck voorgeschlagen dies zu garantieren durch verletzung der Bell-Ungleichung.

In 2010 wurde dies im Labor tatsächlich durchgeführt von Pironio, Massar et al.

Garantierte Unsicherheit

Laut unserer nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie hat man also universelle Unsicherheit sobald man ein reines Quantensystem (beschrieben von einem Faktor) in reinem (d.h. extremalen) Zustand vor sich hat.

In 2007 hat Colbeck voorgeschlagen dies zu garantieren durch verletzung der Bell-Ungleichung.

In 2010 wurde dies im Labor tatsächlich durchgeführt von Pironio, Massar et al.

Sie haben in dieser Weise 42 neue Münzwurfe produziert mit 99% Sicherheit.

Nichtkommutative Markovketten

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

$\tau : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend und invertierbar: $X_k = X_0 \circ \tau^k$.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

$\tau : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend und invertierbar: $X_k = X_0 \circ \tau^k$.

$T = \big(t(x,y)\big)_{x,y \in S}$ Übergangsmatrix.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

$\tau : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend und invertierbar: $X_k = X_0 \circ \tau^k$.

$T = \big(t(x,y)\big)_{x,y \in S}$ Übergangsmatrix. Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m$:

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

$\tau : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend und invertierbar: $X_k = X_0 \circ \tau^k$.

$T = \big(t(x,y)\big)_{x,y \in S}$ Übergangsmatrix. Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m$:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_m = x_m, \ldots, X_n = x_n] = t(x_n, y) \ .$$

B Algebraische Struktur:

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

$\tau : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend und invertierbar: $X_k = X_0 \circ \tau^k$.

$T = \big(t(x,y)\big)_{x,y \in S}$ Übergangsmatrix. Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m$:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_m = x_m, \ldots, X_n = x_n] = t(x_n, y) \ .$$

B Algebraische Struktur:

Aus S wird die Algebra $\mathcal{A}$ der Funktionen $S \to \mathbb{C}$.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

$\tau : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend und invertierbar: $X_k = X_0 \circ \tau^k$.

$T = \big(t(x,y)\big)_{x,y \in S}$ Übergangsmatrix. Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m$:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_m = x_m, \ldots, X_n = x_n] = t(x_n, y) \ .$$

B Algebraische Struktur:

Aus S wird die Algebra $\mathcal{A}$ der Funktionen $S \to \mathbb{C}$.

Aus $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ wird $\widehat{\mathcal{A}} := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

Nichtkommutative Markovketten

Die heutige Theorie ist von Burkhard erfunden worden.Wir wollen diese Entdeckung jetzt mit unser Rezept der nichtkommutativen Verallgemeinerung illustrieren.

A Mathematisches Objekt: stationäre Markovkette

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

S endliche Menge von Zuständen.

$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ Reihe von Stochastischen Variabelen $X_k : \Omega \to S$.

$\tau : \Omega \to \Omega$ maßerhaltend und invertierbar: $X_k = X_0 \circ \tau^k$.

$T = \big(t(x,y)\big)_{x,y \in S}$ Übergangsmatrix. Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m$:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_m = x_m, \ldots, X_n = x_n] = t(x_n, y) \ .$$

B Algebraische Struktur:

Aus S wird die Algebra $\mathcal{A}$ der Funktionen $S \to \mathbb{C}$.

Aus $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ wird $\widehat{\mathcal{A}} := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

Aus X_k wird der *-Homomorphismus $j_k : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} : f \mapsto f \circ X_k$.

C Karakterisierung:

C Karakterisierung:

Die Axiomata werden in einem einzelnen Diagramm ausgedrückt:

C Karakterisierung:

Die Axiomata werden in einem einzelnen Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A}, \varphi) \arrow[r, "T^n"] \arrow[d, "j"'] & (\mathcal{A}, \varphi) \\ (\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{T}^n"'] & (\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\varphi}) \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} .$$

C Karakterisierung:

Die Axiomata werden in einem einzelnen Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A}, \varphi) \arrow[r, "T^n"] \arrow[d, "j"'] & (\mathcal{A}, \varphi) \\ (\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{T}^n"'] & (\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\varphi}) \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} .$$

wobei noch die Markov-Eigenschaft genommen werden muß:

C Karakterisierung:

Die Axiomata werden in einem einzelnen Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A},\varphi) \arrow[r, "T^n"] \arrow[d, "j"'] & (\mathcal{A},\varphi) \\ (\widehat{\mathcal{A}},\widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{T}^n"'] & (\widehat{\mathcal{A}},\widehat{\varphi}) \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} .$$

wobei noch die Markov-Eigenschaft genommen werden muß:

$$P_{(-\infty,0]}\mathcal{A}_{[0,\infty)} = j_0(\mathcal{A}) \ .$$

C Karakterisierung:

Die Axiomata werden in einem einzelnen Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A}, \varphi) \arrow[r, "T^n"] \arrow[d, "j"'] & (\mathcal{A}, \varphi) \\ (\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{T}^n"'] & (\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\varphi}) \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} .$$

wobei noch die Markov-Eigenschaft genommen werden muß:

$$P_{(-\infty,0]}\mathcal{A}_{[0,\infty)} = j_0(\mathcal{A}) \ .$$

D Die Verallgemeinerung:

C Karakterisierung:

Die Axiomata werden in einem einzelnen Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A},\varphi) \arrow[r, "T^n"] \arrow[d, "j"'] & (\mathcal{A},\varphi) \\ (\widehat{\mathcal{A}},\widehat{\varphi}) \arrow[r, "\widehat{T}^n"'] & (\widehat{\mathcal{A}},\widehat{\varphi}) \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} .$$

wobei noch die Markov-Eigenschaft genommen werden muß:

$$P_{(-\infty,0]}\mathcal{A}_{[0,\infty)} = j_0(\mathcal{A}) \ .$$

D Die Verallgemeinerung:

Lasse die Kommutativität fallen.

Konstruktion

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen. Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n;$

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n$;
$\omega \in \Omega$ ist erlaubt falls für jedes $n \in \mathbb{N}$:

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n$;
$\omega \in \Omega$ ist erlaubt falls für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq 6 \ .$$

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n$;
$\omega \in \Omega$ ist erlaubt falls für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq 6 \ .$$

Alle erlaubte Pfade haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n$;
$\omega \in \Omega$ ist erlaubt falls für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq 6 \ .$$

Alle erlaubte Pfade haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

2. Ein Maß auf den Würfeln:

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n$;
$\omega \in \Omega$ ist erlaubt falls für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq 6 \ .$$

Alle erlaubte Pfade haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

2. Ein Maß auf den Würfeln:

$$\Omega := \ldots \times W \times W \times W \times S \times W \times W \times W \times \ldots$$

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n$;
$\omega \in \Omega$ ist erlaubt falls für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq 6 \ .$$

Alle erlaubte Pfade haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

2. Ein Maß auf den Würfeln:

$$\Omega := \ldots \times W \times W \times W \times S \times W \times W \times W \times \ldots$$

$$\mathbb{P} := \ldots \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \pi_S \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \ldots$$

Konstruktion

Im kommutativen Bereich kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.
Als Beispiel wählen wir *Mensch Ärgre dich nicht*:

1. Ein Maß auf den Pfaden:

$$S := \{0, 2, 3, \ldots, 54, 55\} \ .$$

$$\Omega := \ldots \times S \times S \times S \times S \times \ldots$$

$X_n(\omega) := \omega_n$;
$\omega \in \Omega$ ist erlaubt falls für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq 6 \ .$$

Alle erlaubte Pfade haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

2. Ein Maß auf den Würfeln:

$$\Omega := \ldots \times W \times W \times W \times S \times W \times W \times W \times \ldots$$

$$\mathbb{P} := \ldots \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \pi_S \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \pi_W \otimes \ldots$$

$$X_n(\omega) := \begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n & \text{falls } n > 0 \ ; \\ \omega_0 - \omega_{-1} - \omega_{-2} + \ldots + \omega_{-n} & \text{falls } n < 0 \ ; \end{cases}$$

Die Kümmerer'sche These

Die Kümmerer'sche These

Quanten-Markovketten sind Würfelspiele.

Die Kümmerer'sche These

Quanten-Markovketten sind Würfelspiele.

Das heißt: die erste Möglichkeit ist im nichtkommutativen unmöglich.

Die Kümmerer'sche These

Quanten-Markovketten sind Würfelspiele.

Das heißt: die erste Möglichkeit ist im nichtkommutativen unmöglich.

Die zweite aber funktioniert in den meisten Fällen schon.

Begründung der These

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der ‘Pfadenweisen’ Konstruktion, die etwa so aussieht:

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der 'Pfadenweisen' Konstruktion, die etwa so aussieht:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots$$

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der 'Pfadenweisen' Konstruktion, die etwa so aussieht:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots$$

und die 'Würfelspiel-Konstruktion', die wir so angeben können:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \cdots$$

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der 'Pfadenweisen' Konstruktion, die etwa so aussieht:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots$$

und die 'Würfelspiel-Konstruktion', die wir so angeben können:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \cdots$$

Im ersten Fall ist $\widehat{T}$ ein einfacher Shift, und muß der Zustand $\widehat{\varphi}$ alle Information tragen.

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der 'Pfadenweisen' Konstruktion, die etwa so aussieht:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots$$

und die 'Würfelspiel-Konstruktion', die wir so angeben können:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \cdots$$

Im ersten Fall ist $\widehat{T}$ ein einfacher Shift, und muß der Zustand $\widehat{\varphi}$ alle Information tragen.
Im zweiten Fall kann $\widehat{T}$ von einem Shift und einer Wechselwirkung zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{W}$ aufgebaut werden.

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der 'Pfadenweisen' Konstruktion, die etwa so aussieht:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots$$

und die 'Würfelspiel-Konstruktion', die wir so angeben können:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \cdots$$

Im ersten Fall ist $\widehat{T}$ ein einfacher Shift, und muß der Zustand $\widehat{\varphi}$ alle Information tragen.
Im zweiten Fall kann $\widehat{T}$ von einem Shift und einer Wechselwirkung zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{W}$ aufgebaut werden.

Satz (Kümmerer)

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der 'Pfadenweisen' Konstruktion, die etwa so aussieht:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots$$

und die 'Würfelspiel-Konstruktion', die wir so angeben können:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \cdots$$

Im ersten Fall ist $\widehat{T}$ ein einfacher Shift, und muß der Zustand $\widehat{\varphi}$ alle Information tragen.
Im zweiten Fall kann $\widehat{T}$ von einem Shift und einer Wechselwirkung zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{W}$ aufgebaut werden.

Satz (Kümmerer)

Wenn $\mathcal{A} = M_n$ und $j : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ erlaubt eine bedingte Erwartung $P : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$, verträglich mit den Zuständen φ auf $\mathcal{A}$ und $\widehat{\varphi}$ auf $\widehat{\mathcal{A}}$, dann muß $\widehat{\mathcal{A}}$ der Form $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ sein, und $\widehat{\varphi}$ der Form

$$\widehat{\varphi} = \varphi \otimes \psi, \quad \textit{wobei} \quad j(a) = a \otimes \mathbb{1}\,.$$

Begründung der These

Es geht um die Wahl zwischen der 'Pfadenweisen' Konstruktion, die etwa so aussieht:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots$$

und die 'Würfelspiel-Konstruktion', die wir so angeben können:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \cdots \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \otimes \cdots$$

Im ersten Fall ist $\widehat{T}$ ein einfacher Shift, und muß der Zustand $\widehat{\varphi}$ alle Information tragen.
Im zweiten Fall kann $\widehat{T}$ von einem Shift und einer Wechselwirkung zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{W}$ aufgebaut werden.

Satz (Kümmerer)

Wenn $\mathcal{A} = M_n$ und $j : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ erlaubt eine bedingte Erwartung $P : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$, verträglich mit den Zuständen φ auf $\mathcal{A}$ und $\widehat{\varphi}$ auf $\widehat{\mathcal{A}}$, dann muß $\widehat{\mathcal{A}}$ der Form $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ sein, und $\widehat{\varphi}$ der Form

$$\widehat{\varphi} = \varphi \otimes \psi, \quad \textit{wobei} \quad j(a) = a \otimes \mathbb{1}\,.$$

Also: Shift ist trivial!

Beweis.

Die Unteralgebra $j(\mathcal{A}) = j(M_n)$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu M_n.

Beweis.

Die Unteralgebra $j(\mathcal{A}) = j(M_n)$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu M_n.
Darum spaltet sich $\widehat{\mathcal{A}}$ kanonisch in ein Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, wo $\mathcal{C}$ die relative Kommutante von $j(\mathcal{A})$ in $\widehat{\mathcal{A}}$ andeutet.

Beweis.

Die Unteralgebra $j(\mathcal{A}) = j(M_n)$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu M_n.
Darum spaltet sich $\widehat{\mathcal{A}}$ kanonisch in ein Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, wo $\mathcal{C}$ die relative Kommutante von $j(\mathcal{A})$ in $\widehat{\mathcal{A}}$ andeutet.
Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{C}$ als $\psi(c) := \widehat{\varphi}(\mathbb{1} \otimes c)$.

Beweis.

Die Unteralgebra $j(\mathcal{A}) = j(M_n)$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu M_n.
Darum spaltet sich $\widehat{\mathcal{A}}$ kanonisch in ein Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, wo $\mathcal{C}$ die relative Kommutante von $j(\mathcal{A})$ in $\widehat{\mathcal{A}}$ andeutet.
Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{C}$ als $\psi(c) := \widehat{\varphi}(\mathbb{1} \otimes c)$.
Wegen der Modul-Eigenschaft einer bedingten Erwartung muß jetzt $P(\mathbb{1} \otimes c)$ zentral sein in M_n für jedes $c \in \mathcal{C}$:

Beweis.

Die Unteralgebra $j(\mathcal{A}) = j(M_n)$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu M_n.
Darum spaltet sich $\widehat{\mathcal{A}}$ kanonisch in ein Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, wo $\mathcal{C}$ die relative Kommutante von $j(\mathcal{A})$ in $\widehat{\mathcal{A}}$ andeutet.
Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{C}$ als $\psi(c) := \widehat{\varphi}(\mathbb{1} \otimes c)$.
Wegen der Modul-Eigenschaft einer bedingten Erwartung muß jetzt $P(\mathbb{1} \otimes c)$ zentral sein in M_n für jedes $c \in \mathcal{C}$:

$$a \otimes \mathbb{1} \cdot P(\mathbb{1} \otimes c) = P(a \otimes \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} \otimes c) = P(\mathbb{1} \otimes c \cdot a \otimes \mathbb{1}) = P(\mathbb{1} \otimes c) \cdot a \otimes \mathbb{1}\,.$$

Beweis.

Die Unteralgebra $j(\mathcal{A}) = j(M_n)$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu M_n.
Darum spaltet sich $\widehat{\mathcal{A}}$ kanonisch in ein Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, wo $\mathcal{C}$ die relative Kommutante von $j(\mathcal{A})$ in $\widehat{\mathcal{A}}$ andeutet.
Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{C}$ als $\psi(c) := \widehat{\varphi}(\mathbb{1} \otimes c)$.
Wegen der Modul-Eigenschaft einer bedingten Erwartung muß jetzt $P(\mathbb{1} \otimes c)$ zentral sein in M_n für jedes $c \in \mathcal{C}$:

$$a \otimes \mathbb{1} \cdot P(\mathbb{1} \otimes c) = P(a \otimes \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} \otimes c) = P(\mathbb{1} \otimes c \cdot a \otimes \mathbb{1}) = P(\mathbb{1} \otimes c) \cdot a \otimes \mathbb{1} \,.$$

Also $P(\mathbb{1} \otimes c)$ ist eine Konstante, und diese muß $\psi(c)$ sein weil $\widehat{\varphi} = \varphi \circ P$.

Beweis.

Die Unteralgebra $j(\mathcal{A}) = j(M_n)$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu M_n.
Darum spaltet sich $\widehat{\mathcal{A}}$ kanonisch in ein Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, wo $\mathcal{C}$ die relative Kommutante von $j(\mathcal{A})$ in $\widehat{\mathcal{A}}$ andeutet.
Definiere den Zustand ψ auf $\mathcal{C}$ als $\psi(c) := \widehat{\varphi}(\mathbb{1} \otimes c)$.
Wegen der Modul-Eigenschaft einer bedingten Erwartung muß jetzt $P(\mathbb{1} \otimes c)$ zentral sein in M_n für jedes $c \in \mathcal{C}$:

$$a \otimes \mathbb{1} \cdot P(\mathbb{1} \otimes c) = P(a \otimes \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} \otimes c) = P(\mathbb{1} \otimes c \cdot a \otimes \mathbb{1}) = P(\mathbb{1} \otimes c) \cdot a \otimes \mathbb{1} \,.$$

Also $P(\mathbb{1} \otimes c)$ ist eine Konstante, und diese muß $\psi(c)$ sein weil $\widehat{\varphi} = \varphi \circ P$.
Also

$$\widehat{\varphi}(a \otimes c) = \varphi\big(P(a \otimes c)\big) = \varphi\big(a \otimes \mathbb{1} \cdot \psi(c)\big) = \varphi(a) \cdot \psi(c) \,.$$

$\square$

Unsere Welt

Unsere Welt

Dr Erfolg der Quantentheorie, und die Verletzung der Bell-Ungleichungen legen es nahe, zu vermuten daß die nichtkommutative Welt die unsere ist.

Unsere Welt

Dr Erfolg der Quantentheorie, und die Verletzung der Bell-Ungleichungen legen es nahe, zu vermuten daß die nichtkommutative Welt die unsere ist.

Daß würde heißen das es inkompatibele Tatsächen gibt:

Unsere Welt

Dr Erfolg der Quantentheorie, und die Verletzung der Bell-Ungleichungen legen es nahe, zu vermuten daß die nichtkommutative Welt die unsere ist.

Daß würde heißen das es inkompatibele Tatsächen gibt:

Jede Frage hat zwar eine Antwort, aber nicht alle zusammen.

Unsere Welt

Dr Erfolg der Quantentheorie, und die Verletzung der Bell-Ungleichungen legen es nahe, zu vermuten daß die nichtkommutative Welt die unsere ist.

Daß würde heißen das es inkompatibele Tatsächen gibt:

Jede Frage hat zwar eine Antwort, aber nicht alle zusammen.

Unserer Meinung nach sollen wir darüber nicht trauern, sondern die Idee gerade in unserem Vorteil anwenden.

Die Welt ist die Gesammtheit der Tatsachen,
nicht der Dinge.

Ludwig Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus.

Noch ganz viele Jahre zusammen!

Noch ganz viele Jahre zusammen!

Noch ganz viele Jahre zusammen!