

Noodzakelijke Onzekerheid

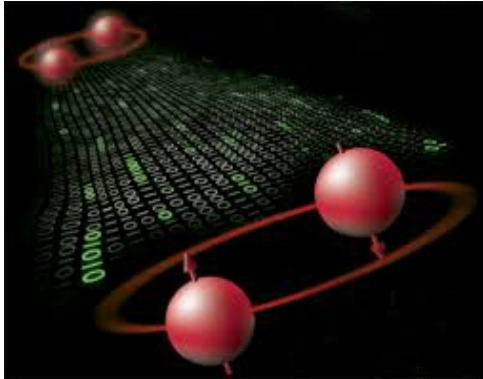
Hans Maassen, Universiteit van Amsterdam

Amsterdam, 15 januari, 2014.

Quantum-materie en quantum-informatie



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



Onderzoekszwaartepunt natuurkunde/informatica/wiskunde

Quantum-...?

Quantum-...?

≈1925: **Quantummechanica**: moleculen, atomen, licht;



Quantum-...?

≈1925: **Quantummechanica**: moleculen, atomen, licht;



≈1975: **Quantum-kansrekening**: kansrekening voor de quantummechanica;



Quantum-...?

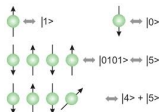
≈1925: **Quantummechanica**: moleculen, atomen, licht;



≈1975: **Quantum-kansrekening**: kansrekening voor de quantummechanica;



≈1985: **Quantum-informatietheorie**: informatieverwerking, cryptografie, 'quantum-computing'.



De rol van wiskunde: verheldering

De rol van wiskunde: verheldering



De rol van wiskunde: verheldering



..... krijgen oplettende studenten gemakkelijk de indruk dat quantum-onzekerheid overslaat op hun docenten in de vorm van een zekere conceptuele vaagheid.

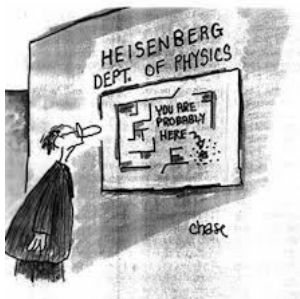
Reinhard Werner

De rol van wiskunde: verheldering



..... krijgen oplettende studenten gemakkelijk de indruk dat quantum-onzekerheid overslaat op hun docenten in de vorm van een zekere conceptuele vaagheid.

Reinhard Werner



Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Tractatus logico-philosophicus (Ludwig Wittgenstein, 1918):

Logica

Tractatus logico-philosophicus (Ludwig Wittgenstein, 1918):

1. **Die Welt ist alles was der Fall ist.**

Tractatus logico-philosophicus (Ludwig Wittgenstein, 1918):

- 1. **Die Welt ist alles was der Fall ist.**
- 1.1 **Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen, nicht der Dinge.**

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Logica

Boole'se algebra

Logica

Boole'se algebra

$$A = (A \text{ en } B) \text{ of } (A \text{ en } \textit{niet-}B).$$

Logica

Boole'se algebra

$$A = (A \text{ en } B) \text{ of } (A \text{ en } \textit{niet-B}).$$

Modellering met verzamelingen, door middel van de vertaalregels:

Logica

Boole'se algebra

$$A = (A \text{ en } B) \text{ of } (A \text{ en niet-}B).$$

Modellering met verzamelingen, door middel van de vertaalregels:

$$A \text{ en } B \quad \longleftrightarrow \quad \text{de doorsnede van } A \text{ en } B \text{ ;}$$

Logica

Boole'se algebra

$$A = (A \text{ en } B) \text{ of } (A \text{ en niet-}B).$$

Modellering met verzamelingen, door middel van de vertaalregels:

$$\begin{array}{ll} A \text{ en } B & \longleftrightarrow \text{ de doorsnede van } A \text{ en } B ; \\ A \text{ of } B & \longleftrightarrow \text{ de vereniging van } A \text{ en } B ; \end{array}$$

Logica

Boole'se algebra

$$A = (A \text{ en } B) \text{ of } (A \text{ en niet-}B).$$

Modellering met verzamelingen, door middel van de vertaalregels:

$A \text{ en } B$	$\longleftrightarrow$	de doorsnede van A en B ;
$A \text{ of } B$	$\longleftrightarrow$	de vereniging van A en B ;
$\text{niet-}A$	$\longleftrightarrow$	het complement van A .

Pixels van de werkelijkheid

Pixels van de werkelijkheid

Bewering op hoog niveau:

Amsterdam is een toeristische stad.

Pixels van de werkelijkheid

Bewering op hoog niveau:

Amsterdam is een toeristische stad.

Een van de componenten:

Mr. Brown uit Australië wandelt 's avonds over de wallen.

Pixels van de werkelijkheid

Bewering op hoog niveau:

Amsterdam is een toeristische stad.

Een van de componenten:

Mr. Brown uit Australië wandelt 's avonds over de wallen.

Een onderdeel dáárvan:

Mr. Brown ziet om elf uur een rode lamp.

Pixels van de werkelijkheid

Bewering op hoog niveau:

Amsterdam is een toeristische stad.

Een van de componenten:

Mr. Brown uit Australië wandelt 's avonds over de wallen.

Een onderdeel dáárvan:

Mr. Brown ziet om elf uur een rode lamp.

Opgebouwd uit vele kleintjes, waaronder

Tussen elf uur en 3 nanoseconden over elf uur wordt een retinacel van Mr. Brown getroffen door een foton met een golflengte tussen 600 en 605 nanometer.

De toestand van de wereld

De toestand van de wereld

Een waarheidsfunctie φ :

De toestand van de wereld

Een **waarheidsfunctie** φ :

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1 & \text{als de uitspraak } A \text{ waar is,} \\ 0 & \text{als de uitspraak } A \text{ onwaar is.} \end{cases}$$

Geloof vóór 20'er, 30'er jaren

Geloof vóór 20'er, 30'er jaren

Verwoord door Wittgenstein:

Geloof vóór 20'er, 30'er jaren

Verwoord door Wittgenstein:

De toestand van een natuurkundig systeem wordt bepaald door een waarheidsfunctie φ op de Boole'se algebra van de natuurkundige beweringen over dat systeem.

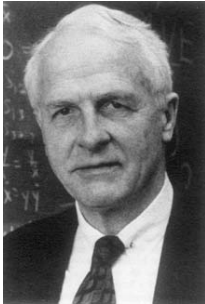
Een verrassing:

Een verrassing:

De beweringen over een natuurkundig systeem vormen geen Boole'se algebra, maar gedragen zich als deelruimten van een Hilbertruimte.

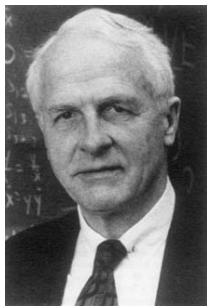
Een verrassing:

De beweringen over een natuurkundig systeem vormen geen Boole'se algebra, maar gedragen zich als deelruimten van een Hilbertruimte.



Een verrassing:

De beweringen over een natuurkundig systeem vormen geen Boole'se algebra, maar gedragen zich als deelruimten van een Hilbertruimte.



Garrett Birkhoff en John von Neumann (1936)

Een heel klein systeem

Een heel klein systeem

$$\Omega = \{1, 2, 3\}.$$

Een heel klein systeem

$$\Omega = \{1, 2, 3\}.$$

$\phi \iff$ de altijd onware bewering

Een heel klein systeem

$$\Omega = \{1, 2, 3\}.$$

ϕ	$\longleftrightarrow$	de altijd onware bewering
$\{1\}$	$\longleftrightarrow$	'De stand is 1.'

Een heel klein systeem

$$\Omega = \{1, 2, 3\}.$$

ϕ	$\longleftrightarrow$	de altijd onware bewering
$\{1\}$	$\longleftrightarrow$	'De stand is 1.'
$\{2, 3\}$	$\longleftrightarrow$	'De stand is niet 1.'

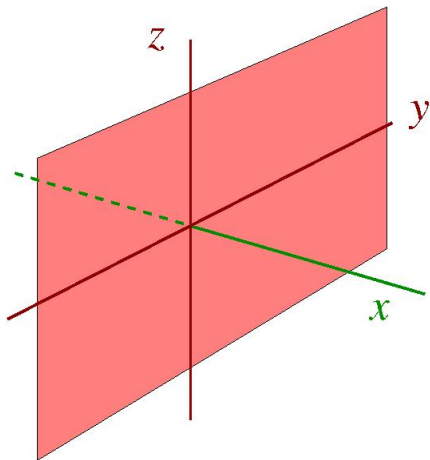
Een heel klein systeem

$$\Omega = \{1, 2, 3\}.$$

$\emptyset$	$\longleftrightarrow$	de altijd onware bewering
$\{1\}$	$\longleftrightarrow$	'De stand is 1.'
$\{2, 3\}$	$\longleftrightarrow$	'De stand is niet 1.'
$\{1, 2, 3\}$	$\longleftrightarrow$	de altijd ware bewering

Ruimtelijke afbeelding

Ruimtelijke afbeelding



Commuterende projecties

Commuterende projecties

Als alle hoeken recht zijn:

Commuterende projecties

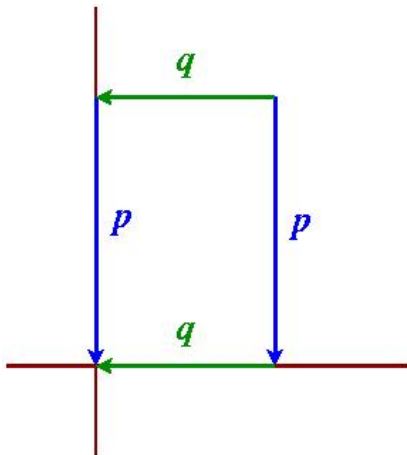
Als alle hoeken recht zijn:

$$pq = qp$$

Commuterende projecties

Als alle hoeken recht zijn:

$$pq = qp$$



Niet-commuterende projecties

Niet-commuterende projecties

Als de hoeken niet recht zijn:

Niet-commuterende projecties

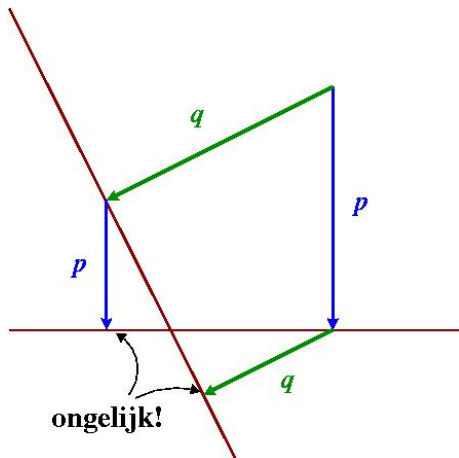
Als de hoeken niet recht zijn:

$$pq \neq qp$$

Niet-commuterende projecties

Als de hoeken niet recht zijn:

$$pq \neq qp$$



Definitie waarheidsfunctie

Definitie waarheidsfunctie

- (*Waarheidswaarden:*)

Definitie waarheidsfunctie

- (*Waarheidswaarden:*)
 φ neemt de waarden 0 en 1 aan.

Definitie waarheidsfunctie

- (*Waarheidswaarden:*)
 φ neemt de waarden 0 en 1 aan.
- (*additiviteit:*)

Definitie waarheidsfunctie

- (*Waarheidswaarden:*)
 φ neemt de waarden 0 en 1 aan.
- (*additiviteit:*)
Als A en B elkaar uitsluiten, dan geldt:

Definitie waarheidsfunctie

- (*Waarheidswaarden:*)

φ neemt de waarden 0 en 1 aan.

- (*additiviteit:*)

Als A en B elkaar uitsluiten, dan geldt:

$$\varphi(A \text{ of } B) = \varphi(A) + \varphi(B) .$$

- (*normalisering:*)

Definitie waarheidsfunctie

- (*Waarheidswaarden:*)

φ neemt de waarden 0 en 1 aan.

- (*additiviteit:*)

Als A en B elkaar uitsluiten, dan geldt:

$$\varphi(A \text{ of } B) = \varphi(A) + \varphi(B) .$$

- (*normalisering:*)

$$\varphi(\mathbb{1}) = 1 .$$

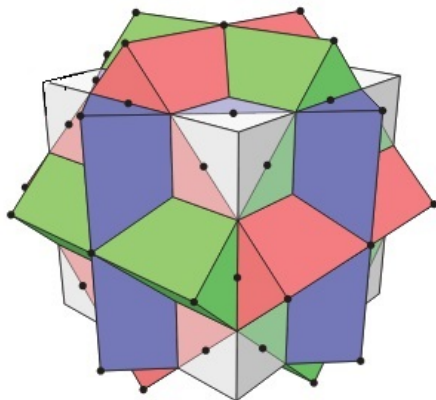
Gleason 1957

Gleason 1957

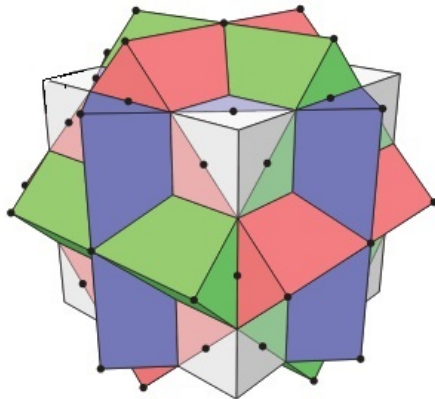
Er bestaat geen waarheidsfunctie φ op de lijnen en vlakken in een driedimensionale ruimte.

Peres 1991

Peres 1991

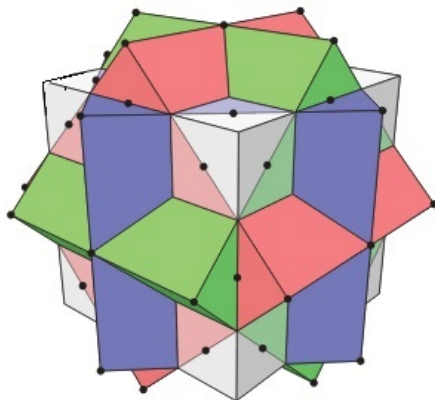


Peres 1991



Deze 'sudoku' heeft geen oplossing.

Peres 1991



Deze 'sudoku' heeft geen oplossing.

Onzekerheid is noodzakelijk.

$\varphi(A)$ tussen 0 en 1

$\varphi(A)$ tussen 0 en 1

Gleason: φ affine functie van operatoren.

Extreem geval: *zuivere kansfunctie of zuivere toestand*:

$$\varphi(A) = \|p_A \psi\|^2 .$$

$\varphi(A)$ tussen 0 en 1

Gleason: φ affine functie van operatoren.

Extreem geval: *zuivere kansfunctie of zuivere toestand*:

$$\varphi(A) = \|p_A \psi\|^2 .$$

Pythagoras:

$\varphi(A)$ tussen 0 en 1

Gleason: φ affine functie van operatoren.

Extreem geval: *zuivere kansfunctie of zuivere toestand*:

$$\varphi(A) = \|p_A \psi\|^2 .$$

Pythagoras:

$$\varphi(A) + \varphi(\textit{niet-A}) = \|p_A \psi\|^2 + \|p_A^\perp \psi\|^2 = \|\psi\|^2 = 1 .$$

De reactie van Einstein in 1926

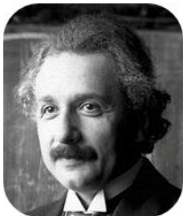
De reactie van Einstein in 1926

*Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß **der** nicht würfelt.*



Verstrengeling

Verstrengeling



A. Einstein

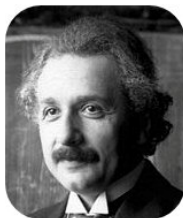


B. Podolsky



N. Rosen

Verstrengeeling



A. Einstein



B. Podolsky



N. Rosen

$$\forall_p : \quad \varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Correlatie versus verstrengeling

Correlatie versus verstrengeling



Aarde

Jupiter

Quantum-informatie

Quantum-informatie

- A. Op elke vraag is het antwoord van het Jupiter-meson op aarde te voorspellen.

Quantum-informatie

- A. Op elke vraag is het antwoord van het Jupiter-meson op aarde te voorspellen.
- B. Er bestaat geen consistente set antwoorden op alle vragen.

Quantum-informatie

- A. Op elke vraag is het antwoord van het Jupiter-meson op aarde te voorspellen.
- B. Er bestaat geen consistente set antwoorden op alle vragen.

ELKE, maar niet ALLE

Kwetsbare informatie

Kwetsbare informatie



Kwetsbare informatie



Veilige communicatielijnen

Veilige communicatielijnen



Veilige communicatielijnen



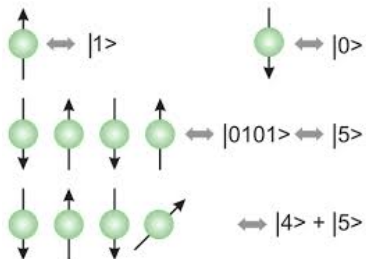
Nicolas Gisin avec son équipe

Quantum-computing

Quantum-computing



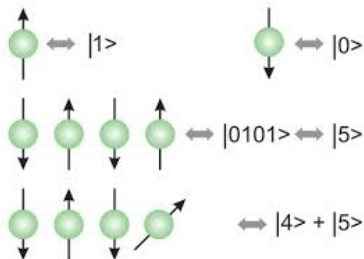
Quantum-computing



Quantum-computing



Peter Shor;



quantum-berekeningen.

Onzekerheid

Onzekerheid

Twee assenstelsels: (x, y, z) , (x', y', z')

Onzekerheid

Twee assenstelsels: (x, y, z) , (x', y', z')

Kansverdelingen:

Onzekerheid

Twee assenstelsels: (x, y, z) , (x', y', z')

Kansverdelingen:

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = 1 : \quad G$$

Onzekerheid

Twee assenstelsels: (x, y, z) , (x', y', z')

Kansverdelingen:

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = 1 : \quad G$$

$$\varphi(x') + \varphi(y') + \varphi(z') = 1 : \quad G'$$

Onzekerheid

Twee assenstelsels: (x, y, z) , (x', y', z')

Kansverdelingen:

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = 1 : \quad G$$

$$\varphi(x') + \varphi(y') + \varphi(z') = 1 : \quad G'$$

Onzekerheid in G :

Onzekerheid

Twee assenstelsels: (x, y, z) , (x', y', z')

Kansverdelingen:

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = 1 : \quad G$$

$$\varphi(x') + \varphi(y') + \varphi(z') = 1 : \quad G'$$

Onzekerheid in G :

$$H(G) = \varphi(x) \log \frac{1}{\varphi(x)} + \varphi(y) \log \frac{1}{\varphi(y)} + \varphi(z) \log \frac{1}{\varphi(z)} .$$

Onzekerheid

Twee assenstelsels: (x, y, z) , (x', y', z')

Kansverdelingen:

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = 1 : \quad G$$

$$\varphi(x') + \varphi(y') + \varphi(z') = 1 : \quad G'$$

Onzekerheid in G :

$$H(G) = \varphi(x) \log \frac{1}{\varphi(x)} + \varphi(y) \log \frac{1}{\varphi(y)} + \varphi(z) \log \frac{1}{\varphi(z)} .$$

H.M., Jos Uffink (1988):

Onzekerheid

Twee assenstelsels: $(x, y, z), \quad (x', y', z')$

Kansverdelingen:

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = 1 : \quad G$$

$$\varphi(x') + \varphi(y') + \varphi(z') = 1 : \quad G'$$

Onzekerheid in G :

$$H(G) = \varphi(x) \log \frac{1}{\varphi(x)} + \varphi(y) \log \frac{1}{\varphi(y)} + \varphi(z) \log \frac{1}{\varphi(z)} .$$

H.M., Jos Uffink (1988):

$$H(G) + H(G') \geq \log \frac{1}{c^2}$$

'No cloning'

'No cloning'

Definitie?

'No cloning'

Definitie?

$$C\varphi := \varphi \otimes \varphi .$$

'No cloning'

Definitie?

$$C\varphi := \varphi \otimes \varphi .$$

Niet goed voor *kansfuncties*!

'No cloning'

Definitie?

$$C\varphi := \varphi \otimes \varphi .$$

Niet goed voor *kansfuncties*!

Munt:

'No cloning'

Definitie?

$$C\varphi := \varphi \otimes \varphi .$$

Niet goed voor *kansfuncties*!

Munt:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

Na kopiëren:

'No cloning'

Definitie?

$$C\varphi := \varphi \otimes \varphi .$$

Niet goed voor *kansfuncties*!

Munt:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

Na kopiëren:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) .$$

'No cloning'

Definitie?

$$C\varphi := \varphi \otimes \varphi .$$

Niet goed voor *kansfuncties*!

Munt:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

Na kopiëren:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) .$$

We willen ze **identiek**, niet **onafhankelijk**!

Geen goede definitie.

Betere definitie

Betere definitie

Definitie

Betere definitie

Definitie

We noemen C een *kopieeroperatie* als voor alle p geldt:

Betere definitie

Definitie

We noemen C een *kopieeroperatie* als voor alle p geldt:

$$C\varphi(\mathbb{1} \otimes p) = C\varphi(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) .$$

Hulpstelling

Hulpstelling

Lemma

Hulpstelling

Lemma

Verskillende kopieën geven op elke vraag met kans 1 hetzelfde antwoord.

Hulpstelling

Lemma

Verschillende kopieën geven op elke vraag met kans 1 hetzelfde antwoord.

$$\forall_{\varphi} \forall_p : \quad C_{\varphi}(p \otimes p^{\perp}) = 0 .$$

Ze zijn maximaal verstrengeld!

Bewijs van de hulpstelling

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ toestandsvector.)

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ toestandsvector.)

Kans op onenigheid: affine functie van φ ,

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ *toestandsvector*.)

Kans op onenigheid: affine functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ *toestandsvector*.)

Kans op onenigheid: affiene functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = ||X\psi||^2 .$$

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ *toestandsvector*.)

Kans op onenigheid: affiene functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = ||X\psi||^2 .$$

Maar dan moet

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ *toestandsvector*.)

Kans op onenigheid: affiene functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = ||X\psi||^2 .$$

Maar dan moet

$$||X\psi||^2 \leq C\varphi(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) = ||p\psi||^2$$

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ *toestandsvector*.)

Kans op onenigheid: affiene functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = ||X\psi||^2 .$$

Maar dan moet

$$\begin{aligned} ||X\psi||^2 &\leq C\varphi(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) = ||p\psi||^2 \\ ||X\psi||^2 &\leq C\varphi(\mathbb{1} \otimes p^\perp) = \varphi(p^\perp) = ||p^\perp\psi||^2 \end{aligned}$$

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ *toestandsvector*.)

Kans op onenigheid: affine functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = ||X\psi||^2 .$$

Maar dan moet

$$\begin{aligned} ||X\psi||^2 &\leq C\varphi(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) = ||p\psi||^2 \\ ||X\psi||^2 &\leq C\varphi(\mathbb{1} \otimes p^\perp) = \varphi(p^\perp) = ||p^\perp\psi||^2 \end{aligned}$$

Dus $X\psi = 0$ als $\psi \perp p\mathcal{H}$,

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = \|p\psi\|^2 .$$

(ψ toestandsvector.)

Kans op onenigheid: affiene functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = \|X\psi\|^2 .$$

Maar dan moet

$$\begin{aligned} \|X\psi\|^2 &\leq C\varphi(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) = \|p\psi\|^2 \\ \|X\psi\|^2 &\leq C\varphi(\mathbb{1} \otimes p^\perp) = \varphi(p^\perp) = \|p^\perp\psi\|^2 \end{aligned}$$

Dus $X\psi = 0$ als $\psi \perp p\mathcal{H}$, maar ook als $\psi \in p\mathcal{H}$.

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = ||p\psi||^2 .$$

(ψ toestandsvector.)

Kans op onenigheid: affiene functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = ||X\psi||^2 .$$

Maar dan moet

$$\begin{aligned} ||X\psi||^2 &\leq C\varphi(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) = ||p\psi||^2 \\ ||X\psi||^2 &\leq C\varphi(\mathbb{1} \otimes p^\perp) = \varphi(p^\perp) = ||p^\perp\psi||^2 \end{aligned}$$

Dus $X\psi = 0$ als $\psi \perp p\mathcal{H}$, maar ook als $\psi \in p\mathcal{H}$.

Dus $X = 0$ en de kans is 0.

Bewijs van de hulpstelling

Te bewijzen: de kans op onenigheid is 0:

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Voldoende: dit te bewijzen voor extreme gevallen

$$\varphi(p) = \|p\psi\|^2 .$$

(ψ *toestandsvector*.)

Kans op onenigheid: affiene functie van φ ,
dus een (positieve) kwadratische vorm in ψ :

$$C\varphi(p \otimes p^\perp) = \|X\psi\|^2 .$$

Maar dan moet

$$\begin{aligned} \|X\psi\|^2 &\leq C\varphi(p \otimes \mathbb{1}) = \varphi(p) = \|p\psi\|^2 \\ \|X\psi\|^2 &\leq C\varphi(\mathbb{1} \otimes p^\perp) = \varphi(p^\perp) = \|p^\perp\psi\|^2 \end{aligned}$$

Dus $X\psi = 0$ als $\psi \perp p\mathcal{H}$, maar ook als $\psi \in p\mathcal{H}$.

Dus $X = 0$ en de kans is 0. QED

Bewijs van 'no cloning'

Bewijs van 'no cloning'

Maak 16 kopieën.

Bewijs van 'no cloning'

Maak 16 kopieën.

Vul per kopie een rij of kolom in van sudoku.

Bewijs van 'no cloning'

Maak 16 kopieën.

Vul per kopie een rij of kolom in van sudoku.

Lemma zegt: kruispunten stemmen overeen.

Bewijs van 'no cloning'

Maak 16 kopieën.

Vul per kopie een rij of kolom in van sudoku.

Lemma zegt: kruispunten stemmen overeen.

De sudoku is netjes ingevuld.

Bewijs van 'no cloning'

Maak 16 kopieën.

Vul per kopie een rij of kolom in van sudoku.

Lemma zegt: kruispunten stemmen overeen.

De sudoku is netjes ingevuld.

MAAR DIT IS ONMOGELIJK!

Bewijs van 'no cloning'

Maak 16 kopieën.

Vul per kopie een rij of kolom in van sudoku.

Lemma zegt: kruispunten stemmen overeen.

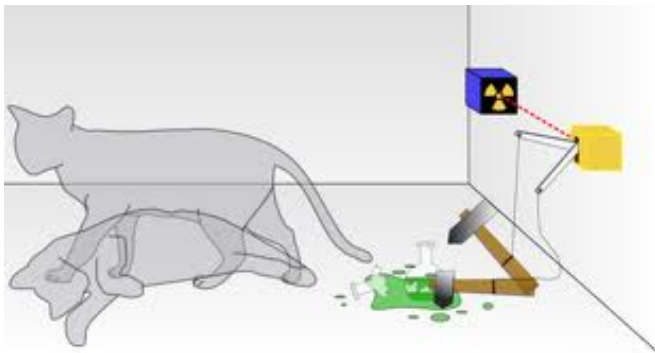
De sudoku is netjes ingevuld.

MAAR DIT IS ONMOGELIJK!

Conclusie: Kopiëren van ρ -mesonen met hun kansfuncties is onmogelijk.

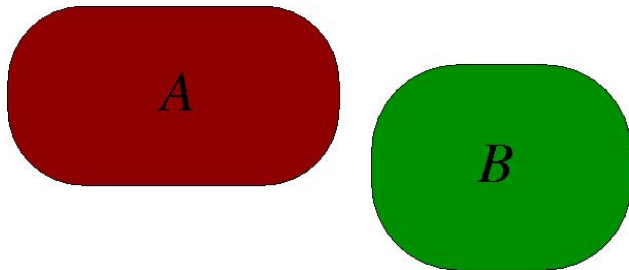
Macroscopische superposities

Macroscopische superposities



Macroscopische superposities

Macroscopische superposities



Monogamie

Monogamie

$$\forall_p : \quad \varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$

Monogamie

$$\forall_p : \quad \varphi(p \otimes p^\perp) = 0 .$$



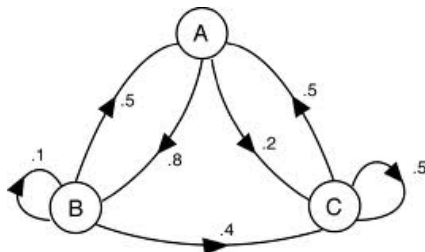
Gegarandeerde onzekerheid

Gegarandeerde onzekerheid



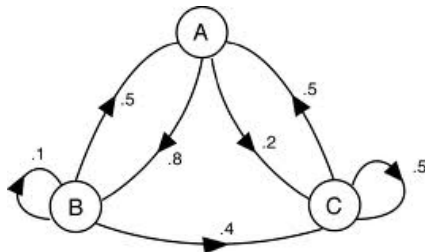
Quantum-Kansrekening

Quantum-Kansrekening

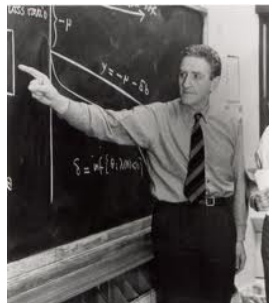


Markov graph of transition probabilities
between states A, B and C

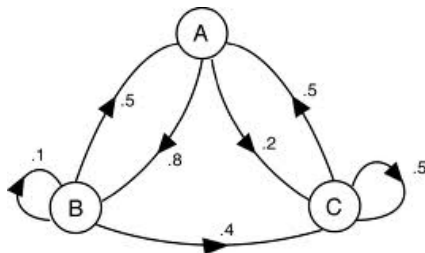
Quantum-Kansrekening



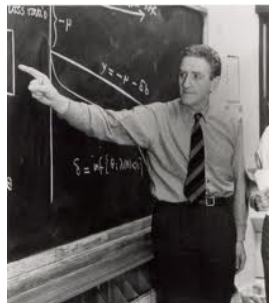
Markov graph of transition probabilities
between states A, B and C



Quantum-Kansrekening



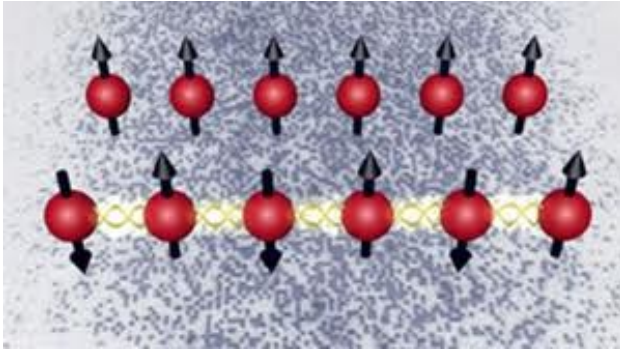
Markov graph of transition probabilities
between states A, B and C



John T. Lewis

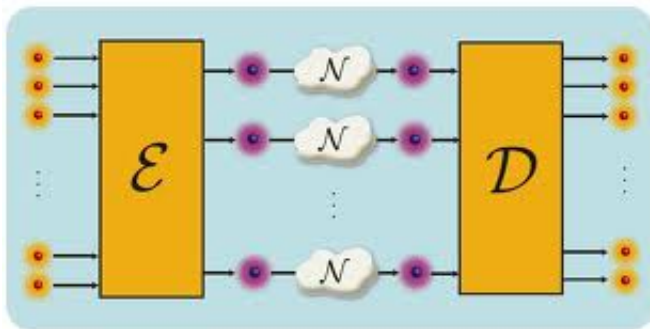
Verstrengingsonderzoek

Verstrengingsonderzoek



Capaciteit van quantumkanalen

Capaciteit van quantumkanalen



Dank!