

HERTENTAMEN KANSREKENING 2

vrijdag 26 januari 2001
9.00 uur — 12.00 uur

Schrijf boven elk vel je naam en studentnummer.

1. Laten X_1 en X_2 twee onafhankelijke normaal verdeelde stochasten zijn met $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ en $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ voor $i = 1, 2$. Zij Y onafhankelijk van X_1 en X_2 , met $\mathbb{P}[Y = 1] = p$ en $\mathbb{P}[Y = 0] = 1 - p$ voor een p tussen 0 en 1. Zij $Z := YX_1 + (1 - Y)X_2$.
 - (a) Bereken $\mathbb{E}(Z)$ en $\text{Var}(Z)$.
 - (b) Bewijs dat Z ook normaal verdeeld is als $\mu_1 = \mu_2$ en $\sigma_1 = \sigma_2$.
2. X_1 en X_2 zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameters a_1 en a_2 (beide positief), d.w.z.

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-a_i x} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Zij $Y := \min\{X_1, X_2\}$. Bepaal de verdelingsfunctie F_Y , de dichtheidsfunctie f_Y en de verwachtingswaarde $\mathbb{E}(Y)$ van Y .
 - (b) Zij $Z := \max\{X_1, X_2\}$. Bepaal $\mathbb{E}(Z)$.
3. Na de presidentverkiezingen in een zeker land beweert de zittende president met 75% van de stemmen herkozen te zijn. De oppositiekandidate voor het presidentschap is ervan overtuigd dat er gefraudeerd is bij het tellen van de stemmen. Zij besluit een steekproef onder 100 kiezers te houden. Hoeveel stemmen in de steekproef dienen er tenminste tegen de president te zijn, wil zij kunnen zeggen dat de kans op zo'n steekproef (of een voor de president nog ongunstigere steekproef) zonder de aanname van fraude minder is dan 5%?
 4. Een bepaald soort plant plant zich voort doordat afgewaaid zaadjes ontkiemen. Voor elke plant van deze soort geldt, onafhankelijk van alle andere planten, dat hij in de volgende generatie met kans $\frac{1}{4}$ geen nakomelingen heeft, met kans $\frac{1}{2}$ één nakomeling, en met kans $\frac{1}{4}$ twee nakomelingen. We gaan uit van één bepaalde plant, in de 0^e generatie. Zij X het aantal nakomelingen in de 1^e generatie, en Y het aantal nakomelingen in de 2^e generatie.
 - (a) Bereken $\mathbb{P}[Y = 0]$.
 - (b) Bereken de kansgenererende functies G_X en G_Y .
 - (c) Bereken $\mathbb{E}(Y)$.