Université Louis Pasteur Strasbourg

Habilitation à diriger des recherches

Catégories Tensorielles, Algèbres et Champs Quantiques

Michael Müger

Document de synthèse

présenté le

9 décembre 2002

à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg

Garant d'habilitation:

Vladimir Turaev

Rapporteurs:

Sergio Doplicher
David E. Evans
Christian Kassel

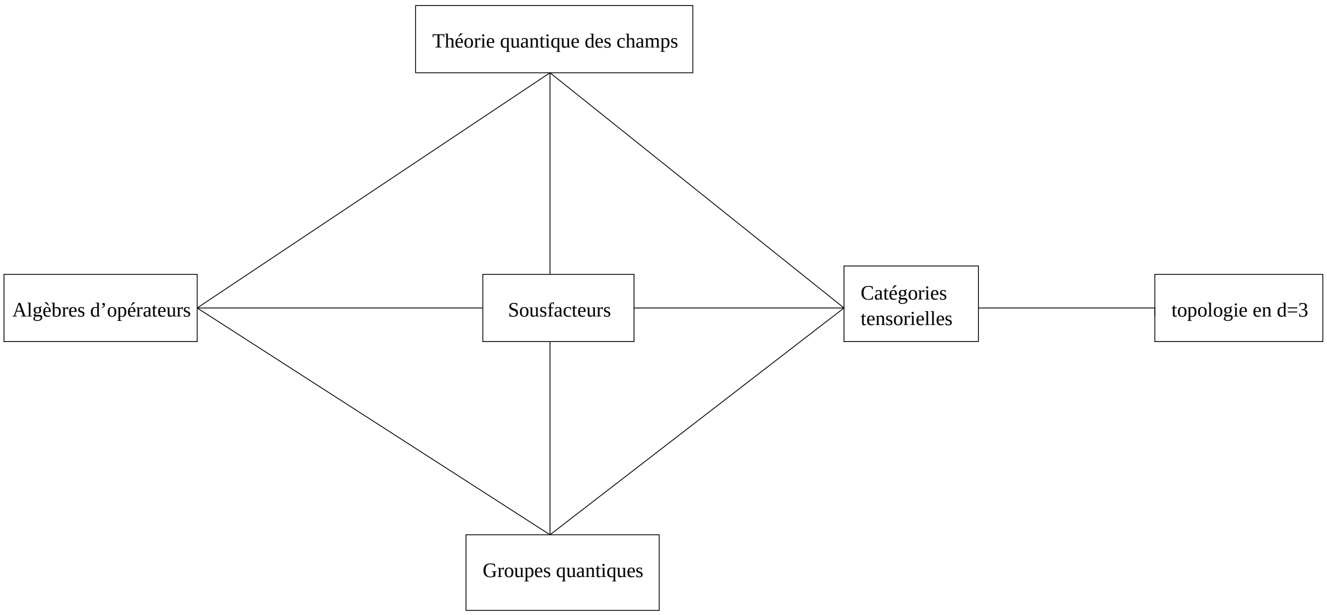
Jury:

Christian Blanchet
Sergio Doplicher
Benjamin Enriquez
Christian Kassel
Bodo Pareigis
Vladimir Turaev

Table des matières

0.1 Introduction

La recherche que j'ai conduite dès la fin de mon doctorat a touché trois domaines d'interaction entre la théorie des algèbres d'opérateurs et la théorie des catégories tensorielles, ainsi que plusieures applications de cette dernière à la topologie en basses dimensions. En termes d'un diagramme les relations entre ces domaines pourraient être représententées ainsi :



Vue sa nature très analytique, la théorie des algèbres d'opérateurs (au sens de C^*-algèbres et algèbres de von Neumann) ne semblerait pas, du premier coup d'œil, amenable à l'application de methodes catégorielles au-delà des notions élémentaires comme, par ex., dans [58].

Il se trouve que c'est n'est pas le cas. D'une part, il y a des domaines comme la théorie quantique des champs (TQC) et la théorie des groupes quantiques, qui (dans certaines de leurs formalisations) se servent des algèbres d'opérateurs. Cela se fait d'une manière très non-triviale, en utilisant de profonds résultats (théorie modulaire, théorie de la désintégration) de cette théorie. Dans les domaines mentionnés on trouve des catégories des représentations très interessantes, souvent tressées et rigides. Tandis que c'est n'est pas surprenant vu la richesse des structures données, il est remarquable que, de l'autre côté, la théorie des sous-facteurs mène à des considérations catégorielles très interessantes malgré le fait qu'on départ d'une structure apparemment pauvre.

Mes travaux, qui seront décrits dans ce mémoire, peuvent êtres classifiés comme il suit :

1. Identification et généralisation des structures catégorielles implicites dans les théories des sous-facteurs et des champs quantiques. Exemples :
   - Sous-facteurs : Algèbres de Frobenius, bicatégories et équivalence faiblement monoïdale de Morita {5}.
   - Sous-facteurs : sous-facteur de Longo/Rehren et sa relation avec le centre catégoriel $Z_1(\mathcal{C})$ {6}.
   - TQC : G-catégories croisées tressées provenantes d'une TQC munie d'une action d'un groupe {10}.
2. Considérations purement catégorielles. Exemples :
   - Théorie de Galois des catégories tensorielles tressées, amenant à G-catégories croisées tressées {2,9}. Modularisation des catégories tressées {2}.
   - Structure des catégories modulaires : théorème du double centralisateur, factorisation en primes {7}.

- Modularité de $Z_1(\mathcal{C})$ et résultats liés. $\{6\}$.

3. Applications de notions/résultats catégoriels aux TQC, sous-facteurs et groupes quantiques. Exemples :
   - Modularité des catégories des représentations des TQC chirales complètement rationnelles $\{3\}$.
   - Théories 'orbifold' conformes : relations entre $\mathrm{Rep}\, A$, $\mathrm{Rep}\, A^G$ et G–$\mathrm{Loc}\, A$. Théories 'orbifold holomorphiques' et cohomologie quasiabélienne $H^3_{qa}(G,\mathbb{T})$ $\{10\}$.
   - Extensions locales des théories conformes par opposition à la catégorie Γ–$\mathrm{Mod}^0_{\mathcal{C}}$ des modules dyslexiques de Pareigis $\{10\}$.
   - Classification des invariants modulaires en termes catégoriels $\{11\}$.
   - Nouvelle démonstration du théorème de Tannaka pour groupes quantiques discrets $\{8\}$.
   - Nouvelle et plus forte démonstration du théorème abstrait de Tannaka pour catégories symétriques $\{12\}$.
4. Applications à la topologie en dimension basse. Exemples :
   - Invariance de Morita des invariants 'state-sum' pour 3-variétés $\{5\}$.
   - Preuve d'une conjecture de Gelfand/Kazhdan sur $Z_1(\mathcal{C})$ $\{6\}$.
   - (Inachevé) Relation entre invariants 'state sum' et chirurgie.

Plusieurs de ces travaux ont été réalisés en collaboration $\{3,8,12\}$. Le présent mémoire se divise en deux chapitres. Dans le premier je décris mes travaux dans la mesure où ils n'impliquent pas la théorie quantique des champs. Les aspects concernant cette dernière sont traités dans le deuxième chapitre. Pour une vue d'ensemble plus détaillée le lecteur est renvoyé à la table des matières.

Chapitre 1

Catégories

1.1 Catégories Tensorielles

1.1.1 Préliminaires

Les catégories qui proviennent des structures opérateur algébriques sont généralement des C^*- ou même W^*-catégories, voir [23, 31, 48]. En particulier, elles sont $\mathbb{C}$-linéaires avec une involution positive sur les morphismes et donc unitaires au sens de [67]. Dans la mesure où la plupart de ces catégories a en fait des espaces de morphismes de dimensions finies, on peut d'habitude ignorer les aspects topologiques. (Par ex., bien que cela ne vaut pas pour la catégorie $\mathrm{Rep}\, A$ de toutes les représentations d'une TQC, c'est le cas pour la catégorie $\mathrm{Rep}_f A$ des représentations de 'dimension finie'.) La théorie des groupes quantiques algébriques peut être formulée sur un corps de base quelconque, et le même vaut pour nos considérations purement catégorielles. Mais à l'exception de parts de {5} près, nous n'aurons pas l'occasion de discuter des catégories non k-linéaires.

Nous supposons connues les notions standard de catégorie tensorielle (symétrique, tressée) comme traitées dans beaucoup de références, voir [49, 41, 67], ainsi que de catégorie rigide et sphérique [5]. Nous assumons aussi les notions des C^*- et W^*-catégorie et d'objets conjugés là-dedans. Nous soulignons un point important : bien que dans les définitions de catégories rigides et sphériques on assume qu'elles soient munies d'objets duaux choisis $X^*, {}^*X$ ou $\overline{X}$ et de morphismes $e_X : X \otimes X^* \to \mathbf{1}$ etc., il n'y a aucune raison de supposer cela pour les $*$-catégories. En fait, c'est grace au fait que l'axiomatisation légèrement différente d'objets conjugés [48] élimine toutes les ambiguïtés qui se présentent dans les non-$*$ catégories si on n'assume que l'existence des duaux. Pour une discussion détaillée voir {5, Section 2}.

Par catégorie semisimple on entend d'habitude une catégorie abélienne dans laquelle toute suite exacte est scindable. Quand une telle catégorie est k-linéaire sur un corps algébriquement clos et les espaces de morphismes sont de dimensions finies, tout objet simple X (cela veut dire $s : Y \to X$ est soit nul soit un isomorphisme) est absolument simple, i.e. $\mathrm{End}\, X = k\mathrm{id}_X$. Dans quelques cas nous préférons exclure les objets nuls. Pour ce que nous voulons faire il est parfois plus commode de définir une catégorie k-linéaire semisimple comme une catégorie avec sommes directes, idempotents scindables, hom-espaces de dimensions finies et algèbres d'endomorphismes $\mathrm{End}\, X$ semisimples. Donc tout objet est une somme directe d'objets (absolument) simples. Signalons une observation dans {5} selon laquelle dans une catégorie tensorielle k-linéaire on peut définir sans ambiguïté le *carré* de la dimension de tout objet simple même en l'absence d'une structure rigide/sphérique :

1.1.1 PROPOSITION *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle k-linéaire avec unité simple* ($\mathrm{End}\mathbf{1} = k\mathrm{id}_{\mathbf{1}}$). *Si X est simple et a un dual bilatère, alors $d^2(X) = (\eta_X \circ e_X)(d_X \circ \varepsilon_X) \in k$ est bien défini. Si X,Y,XY sont simples, alors $d^2(XY) = d^2(X)d^2(Y)$. Quand $\mathcal{C}$ a une structure sphérique ou une $*$-structure, alors $d(X)^2$ (comme défini en utilisant cette dernière) coïncide avec $d^2(X)$.*

Afin d'éviter d'ennuyeuses répétitions des axiomes nous définissons :

1.1.2 DÉFINITION *Une catégorie de fusion est une catégorie semisimple k-linéaire sur un corps algébriquement clos, vérifiant* $\mathrm{End}\,\mathbf{1} = k\mathrm{id}_{\mathbf{1}}$ *et étant ou sphérique ou une $*$-catégorie avec conjugés. Une catégorie de fusion est finie si elle a une nombre fini d'objets simples à isomorphisme près.*

1.1.3 REMARQUE 1. Pour toute $*$-catégorie il existe une catégorie équivalente munie d'une structure sphérique compatible et essentiellement unique, voir [78].

2. La définition de catégories de fusion dans [25] suppose que la dimension soit finie, tandis qu'elle n'assume ni sphéricité ni une $*$-structure. Il y a de bonnes raisons pour cela, puisqu'on peut prouver des résultats rémarquables dans le cas $k = \mathbb{C}$. De l'autre côté, une grande partie de nos considérations est indépendente de la dimension, et le gain de généralité obtenu en renonçant à la présence d'une structure sphérique ou $*$ semble limité. □

1.1.4 DÉFINITION *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion. Si $\mathcal{C}$ a un nombre fini d'objets simples à isomorphisme près, nous définissons*

$$\dim \mathcal{C} = \sum_X d^2(X) \ \in k,$$

où la somme est sur les classes d'isomorphisme d'objets simples et $d^2(X)$ est comme dans la proposition précédente. Si $\mathcal{C}$ est infinie, nous écrivons $\dim \mathcal{C} = \infty$.

Les considérations de cette section sont extraites de {5}.

1.1.2 Algèbres de Frobenius et Équivalence de Morita de Catégories Tensorielles

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est adjoint à droite d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, alors il est bien connu que $T = GF$ fait partie d'une monade dans $\mathcal{C}$, i.e. T est l'objet d'un monoïde dans la catégorie tensorielle (stricte) $\mathrm{End}\,\mathcal{C}$. De la même façon, $S = FG$ fait partie d'une comonade dans $\mathrm{End}\,\mathcal{D}$. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ et toute monade (T,m,η) là-dedans on peut construire une catégorie $\mathcal{D}$ et une paire adjoint $F \dashv G$ de foncteurs induisant la monade donnée de la manière mentionné ci-dessus. Les solutions de ce problème, qui ne sont pas uniques, peuvent être organisées en une catégorie avec objets initial et terminal distingués, les constructions de Kleisli et Eilenberg/Moore.

Les considérations précedentes peuvent être généralisées immédiatement au cas de catégories plus générales, que nous supposons strictes afin de simplifier la notation. Si $X \in \mathcal{C}$ a un dual à droite X^* (i.e. il existe $e : X \otimes X^* \to \mathbf{1}, d : \mathbf{1} \to X^* \otimes X$ satisfaisant aux équations triangulaires) et $\Gamma = X^* \otimes X$, alors $(\Gamma, \mathrm{id}_{X^*} \otimes e \otimes \mathrm{id}_X, d)$ est un monoïde dans $\mathcal{C}$. Nous nous interessons particulièrement au cas où X^* est aussi un dual à gauche ${}^*X$ de X par rapport aux morphismes $e' : {}^*X \otimes X \to \mathbf{1}$, $d' : \mathbf{1} \to X \otimes {}^*X$. Dans ce cas nous écrivons $\overline{X}$. Alors $(\Gamma, \mathrm{id}_{\overline{X}} \otimes e \otimes \mathrm{id}_X, d, \mathrm{id}_{\overline{X}} \otimes d' \otimes \mathrm{id}_X, e')$ est une algèbre de Frobenius dans le sens de la suivante

1.1.5 DÉFINITION *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle (stricte). Une algèbre de Frobenius dans $\mathcal{C}$ est un quintuple $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$, où (Γ,m,η) est un monoïde dans $\mathcal{C}$, $(\Gamma,\Delta,\varepsilon)$ est un comonoïde dans $\mathcal{C}$ et l'on a :*

$$m \otimes \mathrm{id}_\Gamma \circ \mathrm{id}_\Gamma \otimes \Delta = \Delta \circ m = \mathrm{id}_\Gamma \otimes m \circ \Delta \otimes \mathrm{id}_\Gamma.$$

Si $\mathcal{C}$ est k-linéaire, alors $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ est fortement séparable ssi $m \circ \Delta = \alpha\,\mathrm{id}_\Gamma$ et $\varepsilon \circ \eta = \beta\,\mathrm{id}_{\mathbf{1}}$ où $\alpha\beta \neq 0$.

1.1.6 REMARQUE 1. Classiquement, une algèbre de Frobenius est une k-algèbre A de dimension finie munie d'une forme linéaire $\varphi : A \to k$ telle que la forme bilinéaire $(a,b) \mapsto \varphi(ab)$ est non-dégénérée. Dans [1] on montre que pour la catégorie $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_k$ ces deux notions coïncident. Une algèbre de Frobenius classique est fortement séparable ssi $k\mathbf{1} \subset A$ est une extension de Frobenius avec indice

$[A:k\mathbf{1}]$ et $\varphi(1)$,$[A:k\mathbf{1}] \in k^*$, voir [41]. Dans {5} nous démontrons que les deux notions de séparabilité forte coïncident dans la situation considérée ci-dessus.

2. Dans une catégorie semisimple qui est rigide (à gauche ou à droite), tous les duaux sont bilatères. Une catégorie sphérique [5] (non nécessairement semisimple) est munie d'objects duaux bilatères et morphismes e,d,e',d', satisfaisants à certains axiomes. Dans une telle catégorie, l'algèbre de Frobenius $(\Gamma = \overline{X} \otimes X, \ldots)$ est toujours fortement séparable et $\alpha\beta = d(\Gamma) = d(X)^2$.

3. Si $\mathcal{C}$ est une $*$-catégorie et $\overline{X}$ est un objet conjugé de X dans le sens de [48], alors l'algèbre de Frobenius $\Gamma = \overline{X} \otimes X$ vérifie $\Delta = m^*,\varepsilon = \eta^*$. Dans ce cas nous parlons d'une $*$-algèbre de Frobenius. Les 'Q-systèmes' de [46, 48] sont précisément les $*$-algèbres de Frobenius fortement séparables. □

Étant donnée une algèbre de Frobenius Γ dans une catégorie tensorielle $\mathcal{C}$, la question se pose si elle provient d'un objet X et d'un dual bilatère $\overline{X}$. En général, ce n'est pas le cas : dans Vect_k, l'algèbre de Frobenius $\overline{X} \otimes X$ est une algèbre de matrices $M_{\dim X}(k)$, tandis que toutes les algèbres de Frobenius ne sont pas de cette forme. Il y a tout de même une réponse positive à condition qu'on généralise le cadre. Si $\mathcal{E}$ est une bicatégorie, voir [49], $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{E}$ et $X : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ a un dual bilatère $\overline{X} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, alors $\Gamma = \overline{X}X \in \mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ est une algèbre de Frobenius. Maintenant nous pouvons énoncer le contraire {5} :

1.1.7 THÉORÈME *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie tensorielle stricte et $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ une algèbre de Frobenius dans $\mathcal{A}$. Supposons qu'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

(a) $m \circ \Delta = \mathrm{id}_\Gamma$.

(b) $\mathcal{A}$ *est* $\mathrm{End}\,\mathbf{1}$*-linéaire et*

$$m \circ \Delta = \alpha\, \mathrm{id}_\Gamma,$$

où α est un élément inversible du monoïde commutatif $\mathrm{End}\,\mathbf{1}$.

(c) $\mathcal{A}$ *a coégalisateurs et le produit $\otimes$ les préserve.*

Alors, il existe une bicatégorie $\mathcal{E}$ telle que

1. $\mathrm{Obj}\,\mathcal{E} = \{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}$.
2. *Il existe un foncteur tensoriel plein et fidèle* $I : \mathcal{A} \to \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$.
3. *il existe 1-morphismes $J : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ et $\overline{J} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ adjoints bilatères.*
4. *L'algèbre de Frobenius dans la catégorie tensorielle* $\mathrm{End}_\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ *provenant de $J,\overline{J}$ est isomorphe à l'image de $(\Gamma,\ldots)$ par I.*
5. *Dans le cas (c), I est une équivalence. Dans les cas (a),(b), pour tout $Y \in \mathrm{End}_\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ il existe $X \in \mathcal{A}$ tel que Y est un retracte de $I(X)$. (Donc I est une équivalence ssi $\mathcal{A}$ a sous-objets (=idempotents scindables).)*
6. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie pré-additive (k-linéaire), alors $\mathcal{E}$ est une 2-catégorie pré-additive (k-linéaire).*
7. *Si $\mathcal{A}$ a sommes directes alors $\mathcal{E}$ a sommes directes de 1-morphismes.*
8. *Si $\mathcal{A}$ est sphérique k-linéaire avec $\mathrm{End}_\mathcal{A}\mathbf{1} = k$ et $\dim\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma) = 1$, alors $\mathcal{A}$ est sphérique et* $\mathrm{End}_\mathcal{E}(\mathrm{id}_\mathfrak{B}) = k$.
9. *Si $\mathcal{A}$ est abélienne (semisimple) alors $\mathcal{E}$ est localement abélienne (semisimple).*

Algèbres de Frobenius isomorphes Γ donnent lieu à bicatégories $\mathcal{E}$ isomorphes.

1.1.8 REMARQUE Dans le cas (c), à peine esquissé dans {5}, on définit $\mathcal{E}$ comme la collection des quatre catégories $\mathcal{A}$, $\Gamma-\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Mod}-\Gamma$ et $\Gamma-\mathrm{Mod}-\Gamma$. Ici, $\Gamma-\mathrm{Mod}$ a comme objets les paires (X,μ), où $X \in \mathcal{A}$ et $\mu : \Gamma \otimes X \to X$ vérifie $\mu \circ \mathrm{id}_\Gamma \otimes \mu = \mu \circ m \otimes \mathrm{id}_X$ et $\mu \circ \eta \otimes \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X$, et les autres catégories sont définies d'une manière analogue. La composition des 1-morphismes étant définie par une procedure quotient comme en théorie des anneaux, cette construction est analogue à celle de Eilenberg/Moore. Dans les cas (a),(b) on définit la bicatégorie $\mathcal{E}_0$ où $\mathrm{End}_{\mathcal{E}_0}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Obj}\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \{\text{“}JX\text{”},\ X \in$

$\mathcal{A}\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_0}(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) = \{``X\overline{J}", X \in \mathcal{A}\}$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{E}_0}(\mathfrak{B}) = \{``JX\overline{J}", X \in \mathcal{A}\}$. La composition des 1-morphismes est définie de la façon evidente avec la règle $\overline{J}J = \Gamma$. Les 2-morphismes sont définis par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_0}(``JX",``JY") = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,\Gamma Y)$ etc., comme dans la construction de Kleisli. Puis on définit $\mathcal{E}$ comme la complétée habituelle de $\mathcal{E}_0$ avec idempotents scindables. Les conditions (a),(b) garantissent alors l'existence d'un morphisme d'identité de $\mathfrak{B}$ comme retracte de $J\overline{J} \in \mathrm{End}_{\mathcal{E}}\mathfrak{B}$. Au cas où $\mathcal{A}$ est abélienne et Γ est fortement séparable, les deux constructions mênent à bicatégories $\mathcal{E}$ équivalentes. Pour plus de détails nous renvoyons à $\{5\}$. □

Dans la situation considérée ci-dessus il existe une symétrie : si $J,\overline{J}$ sont duaux bilatères dans une bicatégorie $\mathcal{E}$ alors il existe une algèbre de Frobenius $\tilde{\Gamma} = J\overline{J}$ dans $\mathcal{B} = \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})$. Puisque cela vaut aussi quand $\mathcal{E}$ est obtenue d'une algèbre de Frobenius Γ dans $\mathcal{A}$, nous pouvons appliquer la même construction à $(\tilde{\Gamma},\ldots)$ dans $\mathcal{B}$. On trouve qu'on réobtient les donnés initiales $\mathcal{A}$ et $(\Gamma,\ldots)$. Cela inspire la suivante

1.1.9 Définition *Deux catégories tensorielles $\mathcal{A},\mathcal{B}$ sont faiblement monoïdalement Morita équivalentes $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$ s'il existe une bicatégorie $\mathcal{E}$ telle que*

1. $\mathrm{Obj}\,\mathcal{E} = \{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}$.
2. $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{A})$ ($\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})$) *est monoïdalement équivalente à la complétée par rapport aux sous-objets de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$).*
3. *il existe 1-morphisms $J : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, $\overline{J} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, duaux bilatères, tels que les compositions $\eta_J \circ e_J \in \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}}$ et $d_J \circ \varepsilon_J \in \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathfrak{B}}}$ sont inversibles.*

$\mathcal{E}$ est dite un contexte de Morita pour $\mathcal{A},\mathcal{B}$.

1.1.10 Proposition *$\approx$ est une relation d'équivalence. Étant donnée une catégorie tensorielle $\mathcal{A}$, on a une bijection entre les catégories tensorielles $\mathcal{B} \approx \mathcal{A}$ (munies d'un contexte de Morita $\mathcal{E}$) et les algèbres de Frobenius fortement séparables dans $\mathcal{A}$.*

La relation d'équivalence $\approx$ est beaucoup plus faible que l'équivalence monoïdale habituelle $\simeq$. Néanmoins elle a des conséquences remarquables :

1.1.11 Proposition *Si $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$ sont des catégories de fusion finies, alors* $\dim\mathcal{A} = \dim\mathcal{B}$.

Pour le centre $Z_1(\mathcal{C})$ d'une catégorie tensorielle, voir la Section 1.5, le formalisme de $\{5\}$ en combinaison avec [65] implique immédiatement la suivante

1.1.12 Proposition *Soient $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ des catégories tensorielles faiblement monoïdalement Morita équivalentes. Alors il existe une équivalence $Z_1(\mathcal{C}_1) \simeq Z_1(\mathcal{C}_2)$ de catégories tensorielles tressées.*

Dans [67] on trouve une définition d'invariants $TV(M,\mathcal{C})$ de 3-variétés orientées, basée sur des triangulations, pour toute catégorie tensorielle unimodulaire $\mathcal{C}$. (Une catégorie unimodulaire est une catégorie modulaire (définie plus bas) qui est unimodale, i.e. tout objet simple autodual est orthogonal et non symplectique.) Dans [4] on trouve une généralisation $BW(M,\mathcal{C})$ de TV aux catégories semisimples sphériques [5], non nécessairement tressées. Inspirés par des résultats non publiés (et incomplets) d'Ocneanu [55], nous avons esquissé dans $\{5\}$ une preuve du résultat suivant :

1.1.13 Théorème *Soient $\mathcal{A},\mathcal{B}$ catégories de fusion finies. Si* $\dim\mathcal{A} \neq 0$ *et $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$, alors $BW(M,\mathcal{A}) = BW(M,\mathcal{B})$ pour toute 3-variété orientée M.*

La preuve se base sur une généralisation de l'invariant de Barrett-Westbury aux bicatégories k-lineaires. Au cas particulier où la bicatégorie provient d'un sous-facteur $A \subset B$ comme dans la Section 1.1.4 cet invariant se réduit à celui $Oc(M,A \subset B)$ d'Ocneanu.

La recherche esquissée ci-dessus était motivée par son utilité pour l'analyse $\{6\}$ du centre $Z_1(\mathcal{C})$ d'une catégorie finie de fusion $\mathcal{C}$, voir la Section 1.5. Les exemples suivants sont un peu plus élémentaires, mais également importants.

1.1.3 Exemple : Algèbres de Hopf de Dimension Finie

Toute algèbre de Hopf de dimension finie est une algèbre de Frobenius (classique), donc elle donne lieu à une algèbre de Frobenius (au sens de la Définition 1.1.5) dans Vect_k. Dans {5} nous montrons qu'il existe une algèbre de Frobenius moins évidente dans la catégorie tensorielle $\mathcal{C} = H-\mathrm{Mod}$. Contrairement à H, cette algèbre de Frobenius vérifie toujours $\dim \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma) = 1$. Un ingrédient important est le suivant :

1.1.14 Lemme *Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors il existe une application linéaire $\tilde{m} : H \otimes H \to H$ telle que $\tilde{m}(\Delta(a)x) = a\tilde{m}(x)$ pour tout $a \in H$, $x \in H \otimes H$ et $\tilde{m}(\tilde{m} \otimes \mathrm{id}) = \tilde{m}(\mathrm{id} \otimes \tilde{m})$.*

1.1.15 Théorème *Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie sur le corps k. Soient Λ,φ integraux à gauche dans H et $\hat{H}$, respectivement, normalisés de la façon que $\langle \varphi,\Lambda \rangle = 1$. Soit $\Gamma \in H-\mathrm{Mod}$ la représentation régulière à gauche, où H agit sur soi-même par $\pi_\Gamma(a)b = ab$. Les applications linéaires*

$$\begin{array}{rlc}
\tilde{\eta} : & k \to \Gamma, & c \mapsto c\Lambda, \\
\tilde{\varepsilon} : & \Gamma \to k, & x \mapsto \varepsilon(x), \\
\tilde{\Delta} : & \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma, & x \mapsto \Delta(x), \\
\tilde{m} : & \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma, & x \otimes y \mapsto \tilde{m}(x \otimes y)
\end{array}$$

sont morphismes dans $H-\mathrm{Mod}$, et $(\Gamma,\tilde{m},\tilde{\eta},\tilde{\Delta},\tilde{\varepsilon})$ est une algèbre de Frobenius dans $H-\mathrm{Mod}$ qui vérifie $\dim \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma) = 1$. Elle est fortement séparable ssi H est semisimple et cosemisimple.

1.1.16 Théorème *Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie semisimple et cosemisimple sur un corps k algébriquement clos et soit Γ l'algèbre de Frobenius fortement séparable associée dans $H-\mathrm{mod}$. Si $\mathcal{E}$ est comme dans le Théorème 1.1.7 et $\mathcal{B} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$, alors nous avons une équivalence $\mathcal{B} \simeq \hat{H}-\mathrm{mod}$ de catégories tensorielles sphériques.*

En reformulant ce théorème nous avons l'équivalence faiblement monoïdale de Morita $H-\mathrm{Mod} \approx \hat{H}-\mathrm{Mod}$ quand H est semisimple et cosemisimple. Avec le Théorème 1.1.13 cela implique $BW(M,H-\mathrm{Mod}) = BW(M,\hat{H}-\mathrm{Mod})$. C'était une conséquence connue du fait que $BW(M,H-\mathrm{Mod})$ coïncide avec l'invariant de Kuperberg, mais ce n'est pas du tout évident si on ne considère que la définition de $BW(M,\mathcal{C})$. Bien sûr, le Théorème 1.1.13 est beaucoup plus général, et dans la Section 1.5 on verra autres applications.

1.1.4 Liens avec la Théorie des Sous-facteurs

D'une part, la théorie des sous-facteurs comme initiée dans [35] est un secteur très spécialisé de l'analyse fonctionnelle. Mais d'autre part elle a des applications à (l'approche opérateur algébrique à) la théorie quantique des champs, voir par ex. [45, 47, 10], et liens avec de divers domaines des mathématiques pures, comme les travaux de Jones en théorie de nœds [36, 37] le témoignent. Ces derniers liens sont dus à la structure catégorielle qui est implicite dans la théorie des sous-facteurs. Un but de {5,6} était d'élucider ces structures et d'améliorer la communication entre les deux domaines.

En faisant cela il devient évident que plusieurs résultats qui ont été démontrés d'abord en théorie des sous-facteurs admettent des formulations catégorielles beaucoup plus générales : corps de base arbitraire, catégories infinies ou non semisimples etc. En tant qu'application, la démonstration du lien entre le centre Z_1 d'une catégorie tensorielle et le sous-facteur asymptotique d'Ocneanu contribue à clarifier l'importance de ce dernier. En fin de compte, on espère de rendre applicables à la classification des sous-facteurs des idées provenant d'autres domaines des mathématiques.

1.1.17 Pour tout espace hilbertien $\mathcal{H}$, notons $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des endomorphismes linéaires bornés, et pour $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ notons $M^* = \{x^* \mid x \in M\}$ et $M' = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid xy = yx \ \forall y \in M\}$. Une algèbre de von Neumann sur $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui vérifie $M = M^* = M''$ (donc en particulier M est une algèbre involutive et unifère). Un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires : $Z(M) \equiv M \cap M' = \mathbb{C}\mathbf{1}$. Un facteur M est de type II_1 s'il admet une forme linéaire faiblement continue $tr : M \to \mathbb{C}$ telle que $tr(ab) = tr(ba)$, $tr(\mathbf{1}) = 1$ et $tr(a^*a) \geq 0$ avec égalité ssi $a = 0$. Un facteur M (sur un espace hilbertien séparable) est de type III ssi pour tout orthoprojecteur $p = p^2 = p^* \in M$ il existe $v \in M$ tel que $v^*v = \mathbf{1}$ et $vv^* = p$.

1.1.18 Il existe une 2-catégorie $\mathcal{E}$ dont les objets sont les facteurs, les 1-morphismes $\mathrm{Hom}(M,N)$ étant les morphismes de $*$-algèbres $\alpha : M \to N$ unifères faiblement continus et les 2-morphismes étant

$$\mathrm{Hom}(\alpha,\beta) = \{s \in N \mid s\alpha(x) = \beta(x)s \quad \forall x \in M\}, \quad \alpha,\beta \in \mathrm{Hom}(M,N).$$

(Factorialité et continuité impliquent que les 1-morphismes sont des applications injectives.) Les compositions des 1- et 2-morphismes sont les évidentes. L'involution $*$ des facteurs donne lieu à une involution positive sur $\mathcal{E}$. La sous-2-catégorie pleine $\mathcal{E}_{III}$ dont les objets sont les facteurs de type III sur espaces séparables a sommes directes et sous-objets.

Étant donne une inclusion $A \subset B$ de facteurs ('A est sous-facteur de B'), une espérance conditionnelle est une application $E : B \to A$ qui est $A - A$ bilinéaire ($E(abc) = aE(b)c \; \forall a,c \in A, b \in B$) et complètement positive. Pour une espérance conditionnelle E nous définissons

$$[B : A]_E = (\sup\{\lambda \geq 0 \mid E(b^*b) - \lambda b^*b \geq 0 \; \forall b \in B\})^{-1}$$

et enfin l'indice

$$[B : A] = \inf_{E:B\to A} [B : A]_E.$$

Évidemment, $[B : A] \in [1,\infty]$. Le lien entre les théories des sous-facteurs et des catégories suit d'un résultat crucial dû a Longo [45] (à reformulation triviale près) :

1.1.19 Théorème *Soit $A \subset B$ une inclusion de facteurs de type III (sur un espace séparable). Alors $[B : A] < \infty$ ssi l'application d'inclusion $\iota : A \hookrightarrow B$ a un dual $\bar{\iota}$ bilatère dans la bicatégorie $\mathcal{E}_{III}$.*

La sous-2-catégorie $\mathcal{E}_{III}^f \subset \mathcal{E}_{III}$ composée par les 1-morphismes $\alpha : A \to B$ tels que $[B : \alpha(A)] < \infty$ a conjugés au sens de [48] et est sphérique [5]. Pour $\alpha : A \to B$ dans $\mathcal{E}_{III}^f$ nous avons $[B : \alpha(A)] = d(\alpha)^2$, où $d(\alpha)$ est la dimension catégorielle au sens de [48, 5].

Nous expliquons brièvement les résulats en théorie des sous-facteurs qui ont inspiré les considérations dans {5}. Soit $A \subset B$ une inclusion de facteurs de type III telle que $[B : A] < \infty$. Alors, à côté de l'inclusion $\iota : A \to B$ il existe un morphisme dual $\bar{\iota} : B \to A$ tel que $[A : \bar{\iota}(B)] = [B : A]$, donc il existe une symétrie parfaite entre A et B. Comme dans la discussion catégorielle ci-dessus, $\Gamma = \bar{\iota}\iota$ est l'objet d'une $*$-algèbre de Frobenius fortement séparable dans la catégorie tensorielle $\mathrm{End}\, A$. Inversement, Longo a démontré [46] que toute $*$-algèbre de Frobenius fortement séparable (ou 'Q-système') dans $\mathrm{End}\, A$ provient d'une inclusion $A \subset B$ d'indice fini. D'autre part, par les travaux d'Ocneanu [53, 54] (dans le cadre legèrement différent des facteurs de type II_1) tout sous-facteur d'indice fini donne lieu à une certaine bicatégorie $\mathbb{C}$-linéaire $\mathcal{E}_{A\subset B}$ avec deux objets $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ dans laquelle tout 1-morphisme a un dual. Dans le contexte des facteurs de type III, la bicatégorie d'Ocneanu est très facile à définir : les 1-morphisms sont tous les retractes et sommes directes de toutes des compositions possibles des 1-morphisms ι et $\bar{\iota}$. Il y a donc deux constructions d'une bicatégorie (un contexte de Morita) à partir d'une $*$-algèbre de Frobenius dans $\mathrm{End}\, A$: (a) construire l'inclusion $A \subset B$ correspondante et considérer la bicatégorie d'Ocneanu, (b) appliquer la construction catégorielle du Théorème 1.1.7 à $\mathrm{End}\, A$ et Γ et considérer la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ générée par J et $\overline{J}$. Le résultat suivant démontre qu'on obtient des bicatégories équivalentes :

1.1.20 Théorème *Soient A un facteur de type III, $(\Gamma, \ldots)$ une $*$-algèbre de Frobenius fortement séparable dans* $\mathrm{End}\, A$ *et $\mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine, stable par isomorphismes et sous-objets, de* $\mathrm{End}\, A$

générée par Γ. *Soit* $\mathcal{E}_{A\subset B}$ *la bicatégorie associée au sous-facteur* $A \subset B$, *où* B *est construit comme dans [46]. Si* $\mathcal{E}$ *est obtenue de* $\mathcal{A}$ *et* $(\Gamma, \ldots)$ *selon le Théorème 1.1.7, alors nous avons une équivalence de bicatégories* $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_{A\subset B}$.

Ce résultat implique que le Théorème 1.1.7 peut agir comme remplaçant parfait des constructions analytiques en théorie des sous-facteurs à la mesure que la bicatégorie $\mathcal{E}_{A\subset B}$ est concerné. Cela nous permettra d'appliquer certaines idées dans la théorie des sous-facteurs [54, 26, 34] à l'étude du centre $Z_1(\mathcal{C})$ d'une catégorie de fusion finie.

Pour plus de détails nous renvoyons aux Sections 1.3 et 6.4 de $\{5\}$.

1.2 Théorie Tannakienne pour Groupes Quantiques Discrets

1.2.1 Groupes Quantiques Algébriques Discrets et Leurs Représentations

Il est bien connu que l'espace dual $\hat{H}$ d'une algèbre de Hopf H de dimension finie peut être muni d'une structure d'algèbre de Hopf, et qu'il existe une variante de la dualité de Pontryagin : $\hat{\hat{H}} \cong H$. (Si G est un groupe fini abélien et $H = kG$ cela devient un exemple de la dualité de Pontryagin pour les groupes localement compacts abéliens.) Cette auto-dualité de la catégorie d'algèbres de Hopf de dimensions finies ne s'étend pas aux algèbres de dimensions arbitraires, une raison étant qu'il n'est pas toujours possible de munir le dual algébrique $\hat{H}$ d'une stucture d'algèbre de Hopf raisonable. Pour cette raison plusieures modifications de la catégorie d'algèbres de Hopf ont été définies, comme les algèbres de Kac [24] et les groupes quantiques localement compacts [44]. Les deux catégories possèdent l'auto-dualité désirée et contiennent la catégorie des groupes localement compacts, ainsi fournissant une vraie généralization de la théorie de Pontryagin. Les algèbres de Kac se sont révélées trop restraites, mais le cadre de [44] contient en particulier les groupes quantiques compacts et discrets définis par Woronowicz et d'autres. Tandis que l'existence d'une mesure de Haar peut être démontrée pour groupes localement compacts ainsi que pour groupes quantiques compacts [75] et discrets [71], cela ne semble pas être le cas pour groupes quantiques plus généraux. Pour cette raison l'existence d'une forme de Haar est assumée dans [44] et la plupart de la litérature sur ce sujet. Puisque la théorie des groupes quantiques localement compacts [24, 44] est plutôt analytique et technique, un formalisme alternatif purement algébrique a été développé par Van Daele [72]. Bien que moins général, il contient toujours les groupes quantiques compacts et discrets et est fermé par rapport aux duaux et doubles quantiques. Dans $\{8\}$, ce cadre est recommandé comme l'environnement le plus commode pour la preuve des théorèmes généralisés de reconstruction tannakienne. Nous commençons par quelques définitions, où nous utiliserons une terminologie un peu non-standard dans l'intérêt de concision. Tous les produits tensoriels sont algébriques.

Si k est un corps, une k-algèbre A est dite non-dégénérée si $ab = 0 \ \forall a \in A \ \Rightarrow b = 0$ et $ab = 0 \ \forall b \in A \ \Rightarrow a = 0$. Pour toute algèbre A non-dégénérée il existe une algèbre unifère $M(A)$ de multiplicateurs bilatères, dans laquelle A s'insert comme idéal essentiel, voir [72] et les références là-données. Un homomorphisme $\alpha : A \to B$ d'algèbres non-dégénérées est non-dégénéré si $B = \alpha(A)B := \mathrm{span}_k\{\alpha(a)b,\ a \in A, b \in B\}$ et $B = B\alpha(A)$. Un homomorphisme α non-dégénéré s'étend uniquement à un homomorphisme unifère $\overline{\alpha} : M(A) \to M(B)$. Une bialgèbre de multiplicateurs est une algèbre A non-dégénérée munie d'un coproduit, i.e. un homomorphisme $\Delta : A \to M(A \otimes A)$ non-dégénéré qui est coassociatif (dans un certain sens). Une bialgèbre de multiplicateurs est un semigroupe quantique algébrique si elle est munie d'une forme linéaire $\varphi : A \to k$ invariante à gauche, i.e. $(\mathrm{id} \otimes \varphi)\Delta(a) = \varphi(a)1 \ \forall a \in A$, et fidèle, i.e. $\varphi(ab) = 0 \ \forall a \in A \ \Rightarrow \ a = 0$ et $a \leftrightarrow b$. Une bialgèbre de multiplicateurs est une algèbre de Hopf de multiplicateurs si les propriétées d'annulation

$$\Delta(A)(A \otimes 1) = \Delta(A)(1 \otimes A) = (A \otimes 1)\Delta(A) = (1 \otimes A)\Delta(A) = A \otimes A$$

sont satisfaites dans $M(A \otimes A)$. Finalement, un groupe quantique algébrique (gqa) est une algèbre de Hopf de multiplicateurs munie d'une forme fidèle invariante à gauche. Si $k = \mathbb{C}$ et A admet une involution $*$ positive, i.e. $a^*a = 0 \Rightarrow a = 0$, nous parlons de $*$-algèbres de multiplicateurs, groupes quantiques $*$-algébriques ($*$-gqa) etc. En ce cas la forme φ est demandée positive.

Une bialgèbre de multiplicateurs donne lieu à des applications linéaires $\varepsilon : A \to k$ et $S : A \to M(A)$ ayant la plupart des propriétés expectées. Si A est une algèbre de Hopf de multiplicateurs on a $S(A) = A$. Un gqa est discret s'il existe $\Lambda \in A$ tel que $a\Lambda = \Lambda a = \varepsilon(a)\Lambda$ pour tout $a \in A$ et compacte si A est unifère (en ce cas A est une algèbre de Hopf). Il existe une théorie de dualité de Pontryagin pour groupes quantiques algébriques telle que $\widehat{\widehat{(A,\Delta)}} \cong (A,\Delta)$. (Nous soulignons la différence par rapport à la dualité pour algèbres de Hopf de dimension finie : au lieu des éléments d'unité on demande l'existence de formes fidèles invariantes à gauche.) Cette dualité établit une bijection entre gqa compacts et discrets. Dans {8, Section 5.4} nous démontrons :

1.2.1 PROPOSITION *Soit (A,Δ) un gqa discret. Alors (A,Δ) est semisimple, à voir A est une somme directe d'algèbres de matrices de dimensions finies, ssi le gqa compact $\widehat{(A,\Delta)}$ vérifie $\varphi(1) \neq 0$.*

1.2.2 REMARQUE 1. Les gqa discrets ont été étudiés d'abord dans [71] où ils étaient nommés 'groupes quantiques discrets'. Pour les algèbres de Hopf de multiplicateurs semisimples on peut démontrer l'existence d'une forme fidèle et invariante à gauche.

2. Das le cas de $*$-gqa les groupes quantiques compacts vérifient toujours $\varphi(1) \neq 0$ et donc les gqa discrets sont automatiquement semisimples. □

Un représentation non-dégénérée d'un gqa est un ($*$-)homomorphisme $\pi : A \to \operatorname{End} V$ tel que $\pi(A)V = V$. La catégorie de ces représentations et de leurs morphismes est notée $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$. On note $\mathrm{Rep}_f(A,\Delta)$ la sous-catégorie pleine des représentations de dimension finie. La théorie des représentations a été étudiée par Van Daele et ses collaborateurs et dans {8}. En particulier,

1.2.3 PROPOSITION {8} *Soit (A,Δ) un $*$-gqa discret. Alors la catégorie $\mathrm{Rep}_f(A,\Delta)$ est une $*$-catégorie de fusion avec conjugés (dans le sens de [48]).*

Plus généralement, si (A,Δ) est discret et semisimple alors $\mathrm{Rep}_f(A,\Delta)$ est une catégorie de fusion sphérique dans le sens de [5].

1.2.2 Théorie Tannakienne pour Groupes Quantiques Algébriques Discrets

$\mathrm{Rep}_f(A,\Delta)$ est une catégorie tensorielle concrète, au sens que ses objets sont espaces vectoriels munis de plus de structure. Il est souvent profitable de considérer $\mathrm{Rep}_f(A,\Delta)$ comme une catégorie tensorielle abstraite $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur tensoriel fidèle $E : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_k$ et de représentations π_X de A sur les $E(X)$. Un foncteur tensoriel fidèle $E : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_k$ est dit un foncteur fibre. Si $\mathcal{C}$ est une $*$-catégorie, on demande que E respecte les involutions $*$. Dans [74], Woronowicz a caracterisé les C^*-catégories tensorielles qui sont catégories de coreprésentations de 'pseudogroupes compacts matriciels'. (Ces derniers sont aux groupes quantiques compacts ce qui les groupes de Lie compacts sont aux groupes compacts.)

On note $\mathcal{H}$ la catégorie d'espaces hilbertiens de dimensions finies et Σ sa symétrie naturelle. Dans l'article {8}, qui est partiellement une vue d'ensemble, nous donnons des preuves simples pour le faits suivants :

1.2.4 THÉORÈME *Soient $\mathcal{C}$ une $*$-catégorie de fusion et $E : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ un foncteur fibre. Alors il existe un semigroupe $*$-algébrique discret (A,Δ) et une equivalence $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}_f(A,\Delta)$ de $*$-catégories tensorielles telle que $K \circ F = E$, où $K : \mathrm{Rep}_f(A,\Delta) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ est le foncteur oubli. Si $\mathcal{C}$ a objets conjugés alors (A,Δ) est un $*$-gqa discret.*

Une R-matrice pour un gqa (A,Δ) est un élément inversible (satisfaisant aux équations habituelles) de $M(A \otimes A)$ tel que $R\Delta(a)R^{-1} = \sigma\Delta(a)$ pour tout $a \in A$, où σ est l'automorphisme volte-face. Une R-matrice donne lieu à un tressage pour $\mathrm{Rep}_{(f)}(A,\Delta)$. Le contraire vaut aussi :

1.2.5 THÉORÈME *Soient $\mathcal{C}$,E et les données derivées (A,Δ),F comme ci-dessus. Alors il existe une bijection entre tressages pour $\mathcal{C}$ et R-matrices pour (A,Δ) telle que $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}_f(A,\Delta)$ comme catégories tressées. Tressages unitaires correspondent aux R-matrices unitaires.*

Tous ces résultats se généralisent au cas de catégories de fusion sans $*$, voir {8, Section 5.4}. Si $\mathcal{C}$ est tressée et E respecte le tressage, i.e. $c(X,Y) = \Sigma_{E(X),E(Y)}$, alors $\mathcal{C}$ est symétrique et (A,Δ) est cocommutatif. Dans ce cas on retrouve le théorème classique de Tannaka :

1.2.6 THÉORÈME *Soient $\mathcal{C}$ une $*$-catégorie de fusion symétrique avec conjugés et $E : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ un foncteur fibre tel que $c(X,Y) = \Sigma_{E(X),E(Y)}$. Alors il existe un groupe compact G et une équivalence $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}_f G$ de $*$-catégories symétriques tel que $K \circ F = E$, où $K : \mathrm{Rep}_f G \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ est le foncteur oubli.*

1.2.3 Le Monoïde Régulier

Dans la Section 1.1.3 nous avons vu que la représentation régulière d'une algèbre de Hopf H de dimension finie donne lieu à une algèbre de Frobenius Γ dans $\mathrm{Rep}_f H$. Évidemment, dans le cas de dimension infinie, la représentation ne vit plus dans $\mathrm{Rep}_f H$, mais le résultat mentionné échoue aussi pour d'autres raisons. Tout de même les résultats suivants de {12, Section 3} montrent qu'une partie de la structure survit :

1.2.7 LEMME *Soit Γ la représentation regulière à gauche du $*$-gqa (A,Δ). Alors il existent isomorphismes unitaires $\Gamma \otimes \pi \cong \Gamma \otimes I_\pi$, naturels en π, pour tout $\pi \in \mathrm{Rep}(A,\Delta)$, où I_π est la représentation $a \mapsto \varepsilon(a)\mathrm{id}_\pi$. Γ contient $\mathbf{1}_{\mathrm{Rep}(A,\Delta)} = \varepsilon$ comme sous-représentation ssi (A,Δ) est discret. Dans ce cas la multiplicité est un.*

1.2.8 PROPOSITION *Soit (A,Δ) un $*$-gqa. Alors il existe une application linéaire $\tilde{m} : A \otimes A \to A$ qui vérifie $\tilde{m}(\Delta(a)x) = a\tilde{m}(x)$ pour tout $a \in A$, $x \in A \otimes A$ et $\tilde{m}(\tilde{m} \otimes \mathrm{id}) = \tilde{m}(\mathrm{id} \otimes \tilde{m})$.*

La première équation signifie que $\tilde{m}$ est un morphisme $\Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma$ dans $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$ et la seconde que $(\Gamma,\tilde{m})$ est un semigroupe dans $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$. Si (A,Δ) est discret, alors $c \mapsto c\Lambda$ définit un morphisme $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma)$ et on vérifie que $(\Gamma,\tilde{m},\eta)$ est un monoïde dans $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$. En outre, nous avons $\Delta(A) \subset A \otimes A$ ssi (A,Δ) est compact ssi A est unifère. En ce cas Δ est un morphisme dans $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$ et donc $(\Gamma,\Delta,\varepsilon)$ est un comonoïde dans $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$. Les deux structures de monoïde et comonoïde existent ssi (A,Δ) est de dimension finie, où elles coïncident avec celles de la Section 1.1.3. Nous résumons la partie qui sera pertinente dans ce qui suit :

1.2.9 THÉORÈME *Soient (A,Δ) un $*$-aqg discret et Γ sa représentation regulière. Alors il existe un monoïde $(\Gamma,\tilde{m},\eta)$ dans $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$ où Γ a la propriété d'absorption $\Gamma \otimes \pi \cong \Gamma \otimes I_\pi \cong \dim V_\pi \Gamma$ et vérifie $\dim \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma) = 1$. Si (A,Δ) est cocommutatif (donc $\mathrm{Rep}_f(A,\Delta) \simeq \mathrm{Rep}_f G$ pour un groupe G compact), alors $\mathrm{Rep}(A,\Delta)$ est symétrique et le monoïde est commutatif: $\tilde{m} \circ c_{\Gamma,\Gamma} = \tilde{m}$.*

À nouveau, les résultats se généralisent aux gqa (semisimples discrets) sans involution $*$.

1.3 Catégories Tensorielles Symétriques : Reconstruction Abstraite

La théorie tannakienne de Woronowicz [74] ansi que celle décrite ci-dessus comptent sur l'existence d'un foncteur fibre, i.e. un foncteur tensoriel fidèle $E : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_k$. Une catégorie tensorielle, souvent

– mais pas toujours – supposée symétrique et munie d'un foncteur fibre est dite tannakienne (ou concrète). Dans le formalisme général le tressage de $\mathcal{C}$, s'il existe, joue un rôle mineur. Il correspond à une R-matrice pour (A,Δ). Si $\mathcal{C}$ et E sont symétriques, on déduit la cocommutativité de (A,Δ) et donc $\mathrm{Rep}_f(A,\Delta) \simeq \mathrm{Rep}_f G$ pour G un groupe compact.

Les travaux [23, 15] vont au-delà de la reconstruction tannakienne au sens qu'ils caractérisent certaines classes de catégories symétriques qui admettent un foncteur fibre et, en fait, le construisent. Ici la symétrie a un rôle crucial.

Les cadres dans lequels les travaux cités se situent sont un peu différents. En considérant une C^*-catégorie $\mathcal{C}$ tensorielle munie d'une symétrie unitaire et en assumant qu'elle ait conjugés et qu'elle soit paire, i.e. la torsion ('twist') le tout objet soit égale à $+1$, Doplicher et Roberts [23] démontrent d'abord que la dimension de tout objet est un entier positif. Puis ils construisent un groupe compact G et une équivalence $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}_f G$. (Enfin, ils généralisent les résultats au cas où torsions -1 sont admises, qui donne lieu à un supergroupe.) Par contre, Deligne [15] considère des catégories k-linéaires tensorielles symétriques abéliennes où k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. En *assumant* que la dimension de tout objet soit dans $\mathbb{N}$, il construit un foncteur fibre E et puis applique le théorème tannakien de Saavedra Rivano, comme complété par Deligne et Milne, afin de conclure que $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des représentations d'un groupe proalgébrique. Nous commençons par une briève déscription de l'idée de la preuve de Deligne, cette dernière étant plus proche à l'esprit du présent chapitre.

Nous assumons partout que k soit algébriquement clos de caractéristique zéro et que $\mathcal{C}$ soit k-linéaire symétrique. Nous demandons aussi que $\mathcal{C}$ ait un générateur, i.e. un objet Y tel que tout $X \in \mathcal{C}$ est un sommand direct de Y^n pour un $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{C}$ soit paire. (Concernant les généralisations aux catégories sans générateurs et/ou admettant objets avec torsion -1, voir [23, 15, 16], nous n'avons rien de nouveau à dire.) L'idée fondamentale est d'injecter $\mathcal{C}$ dans la catégorie associée $\hat{\mathcal{C}} = \mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ (complète par rapport aux limites inductives filtrées) et de constuire un monoïde commutatif (Γ,m,η) dans $\hat{\mathcal{C}}$ tel que $\Gamma \otimes X \cong d(X)\Gamma$ pour tout $X \in \mathcal{C}$.

L'espace vectoriel $K = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{1},\Gamma)$ est une k-algèbre commutative pour la multiplication $(a,b) \mapsto m \circ a \otimes b$ et l'unité $1_K = \eta$. Définissant un foncteur $E_K : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_k$ par

$$\begin{aligned} E_K(X) &= \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{1},\Gamma \otimes X), \\ E_K(s)\phi &= \mathrm{id} \otimes s \circ \phi, \quad s : X \to Y,\ \phi \in E_K(X), \end{aligned}$$

on trouve que $E_K(X)$ est un K-module pour tout X, l'action de K étant donnée par

$$K \times E_K(X) \to E_K(X), \quad (a,\phi) \mapsto m \otimes \mathrm{id}_X \circ a \otimes \phi.$$

En fait, E_K est un foncteur tensoriel $\mathcal{C} \to K-\mathrm{Mod}$. Choisissant un idéal maximal M dans K, on peut construire un foncteur tensoriel $E_{\hat{k}} : \mathcal{C} \to \hat{k}-\mathrm{Mod}$, où $\hat{k} = K/M \supset k$ est une extension de corps, dont on peut démontrer l'algébricité. Si k est algébriquement clos, $E_{\hat{k}}$ est donc un foncteur fibre à valeurs dans Vect_k. Le résultat classique de Saavedra Rivano implique alors qu'il existe un groupe algébrique G et une équivalence $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}_f G$ telle que $E = K \circ F$, où $K : \mathrm{Rep}_f G \to \mathrm{Vect}_k$ est le foncteur oubli. D'autre part, si $\mathcal{C}$ est une $*$-catégorie on peut appliquer un argument dans [8] afin d'obtenir un foncteur fibre qui respecte les $*$, et le Théorème 1.2.6 implique un résultat analogue pour un groupe compact de Lie.

La construction décrite ci-dessus n'est pas entièrement satisfaisante. Après avoir prouvé que la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à $\mathrm{Rep}_f G$, la discussion dans la Section 1.2.3 implique que $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}(A,\Delta)$ contient un monoïde commutatif (Γ,m,η) qui a la propriété d'absorption et contient l'unité $\mathbf{1}$ avec multiplicité un. Si on applique la prescription précéndente à *ce* monoïde afin de définir un foncteur fibre E, la dernière propriété implique $\dim_k K = 1$ et donc E est automatiquement un foncteur à valeurs dans Vect_k. Définissant $G = \mathrm{Aut}^{\otimes} E$, suivant Saavedra Rivano, on trouve aisément

$$G \cong \mathrm{Aut}(\Gamma,m,\eta) := \{g \in \mathrm{Aut}\Gamma \mid g \circ m = m \circ g \otimes g,\ g \circ \eta = \eta\}.$$

Le groupe G pour lequel on a $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}_f G$ peut donc être obtenu directement du monoïde régulier (Γ,m,η) même sans considérer le foncteur fibre qui en ensuit. Pour cette raison il serait très souhaitable de construire directement le monoïde régulier dans $\hat{\mathcal{C}}$. (Le monoïde construit dans [15, 8] ne vérifie pas $\dim \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma) = 1$, donc il est au mieux un multiple non contrôlé du monoïde régulier.) Cela est accompli dans {12, Section 3}, où nous nous bornons au cas semisimple et utilisons des simplifications du travail de Deligne qu'on trouve dans [7, 64].

1.3.1 THÉORÈME *Soit k algébriquement clos de caractéristique zéro et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion symétrique paire sur k telle que $d(X) \in \mathbb{N}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$. Alors*

1. *Il existe un monoïde commutatif (Γ,m,η) dans $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ tel que $\Gamma \otimes X \cong d(X)\Gamma$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $\dim \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma) = 1$.*
2. *Le groupe $G = \mathrm{Aut}(\Gamma,m,\eta)$ est proalgébrique et $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}_f G$.*
3. *Si $\mathcal{C}$ est une $*$-catégorie alors G est un groupe topologique compact.*

Ici, la nouveauté principale est 1, d'ou les énoncés 2 et 3 suivent comme expliqué ci-dessus. (Bien entendu, 1 suit aussi de 2 ou 3 grace aux résultats de la Section 1.2.3, mais notre preuve est beaucoup plus directe et entièrement catégorielle.) Nous esquissons brièvement la construction. Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la symétrie donne lieu à un homomorphisme $\pi_n^X : \Sigma_n \to \mathrm{End}X^n$, et les idempotents

$$P_n^{\pm}(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \mathrm{sgn}(\sigma) \end{array} \right\} \pi_X^n(\sigma)$$

projectent sur des sous-objets $S_n(X)$ et $A_n(X)$, respectivement, de X^n. En particulier, $d(A_{d(X)}(X)) = 1$ et $A_{d(X)} \cong \mathbf{1}$ si $X \cong \overline{X}$. On vérifie facilement que l'objet $S(X) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} S_n(X)$ fait partie d'un monoïde commutatif $(S(X),m,\eta)$ dans $\hat{\mathcal{C}}$, l'algèbre symétrique sur X.

Pour tout monoïde commutatif (Γ,m,η) dans une catégorie tensorielle k-linéaire $\mathcal{D}$, (Γ,m) est un Γ-module (à gauche). Un idéal dans (Γ,m,η) consiste de $(X,\mu) \in \Gamma-\mathrm{Mod}$ et un monomorphisme $\iota \in \mathrm{Hom}_{\Gamma-\mathrm{Mod}}((X,\mu),(\Gamma,m))$. Considérant le conoyeau $p : (\Gamma,m) \to (\Gamma',m_1)$ de ι, on construit un monoïde commutatif (Γ',m',η') dans $\mathcal{D}$ tel que $p \circ m = m \circ p \otimes p, p \circ \eta = \eta'$. Ce monoïde est considéré comme quotient de (Γ,m,η) par l'idéal $((X,\mu),\iota)$. On a une notion d'idéaux maximaux, et comme en algèbre commutative on montre que tout idéal est contenu dans un idéal maximal et que le quotient par un idéal maximal est un 'corps'. Dans notre cadre, cela veut dire que la k-algébre commutative $\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma')$ est un corps qui étend k.

Soit Z un générateur de $\mathcal{C}$ auto-dual ($\overline{Z} \cong Z$), et considérons le monoïde commutatif $(S(Z),m,\eta)^{\times d}$, où $d = d(Z)$. En utilisant des idées de [7], voir aussi [64], on trouve un idéal $((X,\mu),\iota)$ dans $(S(Z),m,\eta)^{\times d}$ tel que le quotient de $(S(Z),m,\eta)^{\times d}$ par ce dernier (ou tout idéal qui contient ce dernier) a la propriété d'absorption pour tout $X \in \mathcal{C}$. En considérant le quotient par un idéal maximal contenant $((X,\mu),\iota)$ nous obtenons donc un monoïde commutatif Γ dans $\hat{\mathcal{C}}$ qui a la propriété d'absorption et pour lequel $K = \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma)$ est un corps. Montrant que l'extension $K \supset k$ est algébrique, donc triviale, achève la construction d'un monoïde qui a toutes les propriétés désirées. Maintenant les considérations précédentes impliquent que $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}_f G$ où G est le groupe d'automorphismes de ce monoïde, et l'unicité des foncteurs fibre entraine que ce monoïde est en fait celui provenant de la représentation régulière. En particulier, on conclut que $\Gamma \cong \oplus_i d(X_i) X_i$. (Notons qu'il semble impossible de définir directement une structure de monoïde commutatif sur cet objet Γ.)

1.4 Structure des Catégories Modulaires

1.4.1 Préliminaires

Si l'on adopte la perspective de 'catégorisation' [3] il n'est pas surprenant qu'au niveau de (1-)catégories on trouve des analogies des constructions familaires avec 0-catégories, i.e. ensembles, monoïdes etc. En particulier, nous avons centralisateurs et centres :

1.4.1 DÉFINITION *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle tressée et $\mathcal{K}$ une sous-catégorie pleine, i.e. un ensemble d'objets dans $\mathcal{C}$. Le centralisateur $C_\mathcal{C}(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}$ (ou le commutant relatif $\mathcal{C}\cap\mathcal{K}'$) est la sous-catégorie pleine définie par*

$$\mathrm{Obj}\, C_\mathcal{C}(\mathcal{K}) = \{X \in \mathcal{C} \mid c_{Y,X}\circ c_{X,Y} = \mathrm{id}_{XY} \quad \forall Y \in \mathcal{K}\}.$$

1.4.2 DÉFINITION *Le centre d'une catégorie tensorielle tressée $\mathcal{C}$ est défini comme $Z_2(\mathcal{C}) = C_\mathcal{C}(\mathcal{C})$. Évidemment, il est une catégorie symétrique. Nous disons que le centre d'une catégorie tressée semisimple est trivial si tout objet de $Z_2(\mathcal{C})$ est une somme directe de copies de l'unité tensorielle* $\mathbf{1}$ *(ou tout objet simple dans $Z_2(\mathcal{C})$ est isomorphe à* $\mathbf{1}$*).*

1.4.3 LEMME *Soit $\mathcal{C}$ tressée et $\mathcal{K}$ une sous-catégorie. Alors $C_\mathcal{C}(\mathcal{K})$ est tensorielle et close par rapport aux sommes directes et retractions dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est k-linéaire semisimple, $C_\mathcal{C}(\mathcal{K})$ l'est aussi. Si $\mathcal{C}$ a duaux pour tout objet, alors $C_\mathcal{C}(\mathcal{K})$ a duaux. Si $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{C}$ alors $C_\mathcal{C}(\mathcal{K}_1\vee\mathcal{K}_2) = C_\mathcal{C}(\mathcal{K}_1)\cap C_\mathcal{C}(\mathcal{K}_2)$, où $\mathcal{K}_1\vee\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{C}$ est la plus petite sous-catégorie tensorielle qui contient $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2$.*

Maintenant nous nous bornons aux catégories semisimples qui ont un nombre fini d'objets simples à isomorphisme près.

1.4.4 DÉFINITION *Une catégorie pré-modulaire [11] est une catégorie de fusion finie tressée. Une catégorie modulaire [67] est une catégorie pré-modulaire telle que la matrice $(S(X,Y)) = Tr_{XY}(c_{Y,X}\circ c_{X,Y})$, indexée par les classes d'isomorphisme d'objets simples, est inversible.*

Le suivant a été démontré par Rehren [59] pour $*$-catégories et en général par Bruguières et d'autres, voir [6].

1.4.5 THÉORÈME *Soit $\mathcal{C}$ pré-modulaire telle que* $\dim\mathcal{C} \neq 0$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Le centre $Z_2(\mathcal{C})$ est trivial.

(ii) $\mathcal{C}$ est modulaire.

L'importance des catégories modulaires se dérive du fait qu'elles servent comme données initiales pour la construction de certaines TQC topologiques, voir [67]. D'autre part elles surgissent commes catégories de représentations des groupes quantiques (à une racine d'unité) et en TQC conforme {3}. Cette dernière situation sera discutée dans la Section 2.1.2.

1.4.2 Catégories Modulaires : Théorème du Double Centralisateur et Applications

Dans {7} j'ai maintenu que les catégories modulaires se présentent assez souvent pour mériter de l'attention elles mêmes, et j'ai fait un premier pas vers une théorie structurelle des catégories modulaires. Tous les résultats de cette sous-section sont extraits de {7}. Toutes les sous-catégories considérées ici sont des sous-catégories tensorielles complètes par rapport aux sommes directes, retractions et duaux. L'ingrédient crucial est le suivant 'théorème du double centralisiateur' (TDC) :

1.4.6 THÉORÈME *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie modulaire et $\mathcal{K}\subset\mathcal{C}$. Alors nous avons :*

(i) $C_\mathcal{C}(C_\mathcal{C}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}$.

(ii) $\dim\mathcal{K}\cdot\dim C_\mathcal{C}(\mathcal{K}) = \dim\mathcal{C}$.

1.4.7 COROLLAIRE *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie modulaire et $\mathcal{K}\subset\mathcal{C}$. Alors nous avons :*

$$Z_2(C_\mathcal{C}(\mathcal{K})) = Z_2(\mathcal{K}).$$

En particulier, si $\mathcal{K}$ est modulaire, $C_\mathcal{C}(\mathcal{K})$ l'est aussi. Si $\mathcal{K}$ est symétrique alors $Z_2(C_\mathcal{C}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}$.

1.4.8 Proposition *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ des catégories modulaires où $\mathcal{K}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{L} = C_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$. Alors il existe une équivalence de catégories modulaires :*

$$\mathcal{C} \simeq \mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}.$$

(Ici $\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}$ est la complétée par sommes directes du produit direct $\mathcal{K} \otimes_k \mathcal{L}$, dont les objets sont paires d'objets et les hom-ensembles produits tensoriels sur k d'espaces de morphismes respectifs dans $\mathcal{K}$,$\mathcal{L}$.)

1.4.9 Définition *Une catégorie modulaire $\mathcal{C}$ est prime si toute sous-catégorie pleine modulaire est équivalente soit à $\mathcal{C}$ soit à la catégorie modulaire triviale $Vect_k$.*

1.4.10 Théorème *Toute catégorie modulaire est équivalente à un produit direct fini de catégories modulaires primes.*

Le théorème implique qu'il suffit de classifier les catégories modulaires primes. Notons cependant que la factorisation d'une catégorie modulaire en primes n'est pas nécessairement unique. Des exemples de ce phénomène seront présentés plus bas.

1.4.3 Exemples et Applications

Une classe naturelle de catégories modulaires à étudier au début est fournie par les doubles quantiques des groupes finis. Quand $G = G_1 \times G_2$ nous avons $D(G)-\mathrm{Mod} \simeq D(G_1)-\mathrm{Mod} \boxtimes D(G_2)-\mathrm{Mod}$. Il suffit donc de considérer les groupes primes. Le cas abélien, où G est prime ssi il est cyclique d'ordre une puissance d'un prime, a été complètement clarifié :

1.4.11 Théorème *Soient p prime, $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $\mathcal{C} = D(G)-\mathrm{Mod}$.*
- *(i) $\mathcal{C}$ est prime ssi $p = 2$.*
- *(ii) Si p est impair, il existe une bijection entre les isomorphismes $\alpha : G \to \hat{G}$ et les sous-catégories modulaires $\mathcal{K}_\alpha \subset \mathcal{C}$, établie par $K_\alpha = \{(g,\alpha(g)),\ g \in G\}$. (Rappelons que les classes d'isomorphisme d'objets simples dans $D(G) - \mathrm{Mod}$ sont indexées par les éléments de $G \times \hat{G}$.) Les catégories $\mathcal{K}_\alpha$ sont primes, et $C_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_\alpha) = \mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$, où $\overline{\alpha}(\cdot) = \alpha(\cdot)^{-1}$. Les factorisations de $\mathcal{C}$ en primes sont donc données par $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_\alpha \boxtimes \mathcal{C}_{\overline{\alpha}}$, $\alpha \in Isom(G,\hat{G})$.*

Ce résulat implique, déjà pour groupes abéliens, qu'il n'existe aucune relation entre simplicité de G et primalité de $D(G)-\mathrm{Mod} \simeq Z_1(\mathrm{Rep}_f G)$.

Pour les catégories modulaires unitaires (i.e. $*$-catégories modulaires) ce qui suit est une conséquence facile du TDC :

1.4.12 Proposition *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie modulaire unitaire et $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$. Alors*

$$\dim \mathcal{C} \geq \dim \mathcal{K} \cdot \dim Z_2(\mathcal{K}).$$

On a égalité ssi $C_{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = C_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) (= Z_2(\mathcal{K}))$. En ce cas nous disons que $\mathcal{C}$ est une extension (pleine) modulaire minimale de $\mathcal{K}$.

1.4.13 Exemple Considérons $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est modulaire et $\mathcal{S}$ est symétrique. Avec $\mathcal{K} = C_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ nous avons $Z_2(\mathcal{K}) = Z_2(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Donc $\mathcal{C}$ est une extension modulaire minimale de $\mathcal{K}$. Grace au TDC cette situation est générique : si $\mathcal{C} \supset \mathcal{K}$ est une extension modulaire minimale et nous posons $\mathcal{S} = Z_2(\mathcal{K})$ alors $\mathcal{K} = C_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$. □

Il est naturel d'expecter que cette borne soit optimale :

1.4.14 Conjecture *Soit $\mathcal{K}$ une catégorie pré-modulaire unitaire. Alors il existe une catégorie modulaire unitaire $\mathcal{C}$ et un foncteur tensoriel plein et fidèle $I : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ tels que*

$$\dim \mathcal{C} = \dim \mathcal{K} \cdot\ Z_2(\mathcal{K}).$$

Une approche directe à la preuve ne semble pas prometteuse. Voir la Remarque 1.6.20 pour une approche plus sophistiquée.

1.5 Le Centre Z_1 d'une Catégorie de Fusion

1.5.1 Définition et Propriétés Élémentaires

Pour la construction de catégories modulaires il semble désirable avoir des moyens qui soient plus simples que ceux qui utilisent groupes quantiques et TQC conformes. (Notons en passant que ces deux sujets sont étroitement liés.) L'approche de modularisation {2},[11] sera mentionnée dans la Section 1.6.4.

Il a été bien connu longtemps que la catégorie des représentations du double quantique $D(G)$ d'un groupe fini est modulaire, voir par ex. [2]. Cette construction (qui est un cas particulier d'une construction pour algèbres de Hopf de dimension finie) admet une généralisation aux catégories tensorielles arbitraires, découverte indépendemment par Drinfeld (non publié), Majid [51] et Joyal et Street [38]. Voir aussi [41].

1.5.1 Définition/Proposition *Le centre $Z_1(\mathcal{C})$ d'une catégorie tensorielle (stricte) $\mathcal{C}$ a comme objets les paires (X,e_X), où $X \in \mathcal{C}$ et e_X est un 'demi-tressage', i.e. une famille $\{e_X(Y) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y,Y \otimes X),\ Y \in \mathcal{C}\}$ d'isomorphismes, naturels en Y et vérifiants la relation des tresses :*

$$e_X(Y \otimes Z) = \mathrm{id}_Y \otimes e_X(Z) \circ e_X(Y) \otimes \mathrm{id}_Z \quad \forall Y,Z \in \mathcal{C}.$$

Les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{Z_1(\mathcal{C})}((X,e_X),(Y,e_Y)) = \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ \mid \ \mathrm{id}_X \otimes t \circ e_X(Z) = e_Y(Z) \circ t \otimes \mathrm{id}_X \quad \forall Z \in \mathcal{C}\}.$$

Le produit tensoriel d'objets est donné par $(X,e_X) \otimes (Y,e_Y) = (X \otimes Y,e_{X\otimes Y})$, où

$$e_{X\otimes Y}(Z) = e_X(Z) \otimes \mathrm{id}_Y \circ \mathrm{id}_X \otimes e_Y(Z).$$

L'unité tensorielle est $(\mathbf{1},e_{\mathbf{1}})$ où $e_{\mathbf{1}}(X) = \mathrm{id}_X$. La composition et le produit tensoriel des morphismes sont herités de $\mathcal{C}$. Avec

$$c_{(X,e_X),(Y,e_Y)} = e_X(Y)$$

$Z_1(\mathcal{C})$ est une catégorie tensorielle tressée.

Les suivantes sont quelques observations immédiates :

1.5.2 Lemme *Si $\mathcal{C}$ est k-linéaire, $Z_1(\mathcal{C})$ l'est aussi. Si l'unité $\mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$ est absolument simple, $\mathbf{1}_{Z_1(\mathcal{C})}$ l'est aussi. Si $\mathcal{C}$ a sommes directes (sous-objects), $Z_1(\mathcal{C})$ a sommes directes (sous-objects).*

1.5.3 Proposition *Soit $\mathcal{C}$ (stricte) pivotale. Alors $Z_1(\mathcal{C})$ l'est aussi, le dual $\overline{(Y,e_Y)}$ étant $(\overline{Y},e_{\overline{Y}})$, où $e_{\overline{Y}}(X)$ est défini par*

$$\overline{Y} \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{Y}X} \otimes \varepsilon(Y)} \overline{Y} \otimes X \otimes Y \otimes \overline{Y} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{Y}} \otimes e_Y(X)^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\overline{Y}}} \overline{Y} \otimes Y \otimes X \otimes \overline{Y} \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\overline{\varepsilon}(\overline{Y}) \otimes \mathrm{id}_{X\overline{Y}}} X \otimes \overline{Y}$$

Les morphismes d'évaluation et coévaluation sont hérités de $\mathcal{C}$:

$$\varepsilon((Y,e_Y)) = \varepsilon(Y), \quad \overline{\varepsilon}((Y,e_Y)) = \overline{\varepsilon}(Y).$$

Si $\mathcal{C}$ est sphérique, $Z_1(\mathcal{C})$ l'est aussi.

Le problème de semisimplicité de $Z_1(\mathcal{C})$ est moins évidente. Nous obtenons une reponse affirmative qu'en assumant des propriétés restrictives, mais cela suffira. Le résultat ci-dessous et ceux de la sous-section suivante sont extraits de {6}.

1.5.4 THÉORÈME *Soient k algébriquement clos et $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion sur k telle que* $\dim\mathcal{C} \neq 0$. *Alors le centre $Z_1(\mathcal{C})$ est une catégorie de fusion, donc en particulier semisimple et sphérique.*

1.5.2 Équivalence de Morita $Z_1(\mathcal{C}) \approx \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et Modularité

À ce point, nous savons que $Z_1(\mathcal{C})$ est semisimple si $\mathcal{C}$ est une catégorie de fusion de dimension non-nulle. Afin d'obtenir des résultats sur da dimension de $Z_1(\mathcal{C})$ nous aurons besoin des machines plus avancées décrites dans la Section 1.1.2. Nous définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \\ \hat{X}_i &= X_i \boxtimes X_i^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Grace à {5, Lemma 2.9}, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$,$\mathcal{C} \otimes_k \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et $\mathcal{A}$ sont strictes sphériques d'une manière canonique. Tout $\hat{X}_i$, $i \in \Gamma$, est simple.

Le suivant est une généralisation marginale de [47, Proposition 4.10].

1.5.5 LEMME *Soient k algébriquement clos et $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion finie sur k telle que* $\dim\mathcal{C} \neq 0$. *Alors il existe une algèbre de Frobenius fortement séparable* $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ *dans $\mathcal{A} = \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, telle que*

$$\Gamma \cong \bigoplus_{i \in \Gamma} \hat{X}_i.$$

1.5.6 PROPOSITION *Soit $\mathcal{E}$ le contexte de Morita provenant de l'algèbre de Frobenius* $(\Gamma, \ldots)$ *dans la catégorie tensorielle $\mathcal{A}$, et soit $\mathcal{B} = \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})$. Alors il existe une équivalence tensorielle $\mathcal{B} \simeq Z_1(\mathcal{C})$. Par conséquent,* $\dim Z_1(\mathcal{C}) = (\dim\mathcal{C})^2$.

Puisque nous savons très bien contrôler la bicatégorie $\mathcal{E}$, le même s'ensuit pour $Z_1(\mathcal{C})$. Par ex., on peut démontrer que le nombre de classes d'isomorphisms d'objets simples dans $Z_1(\mathcal{C})$ est borné par $\sum_{i,j} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_iX_j,X_jX_i)$. Au cas où $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}\,G$ pour G un groupe abélien fini cette borne est atteinte. En plus :

1.5.7 THÉORÈME *Soient k algébriquement clos et $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion finie sur k telle que* $\dim\mathcal{C} \neq 0$. *Alors le centre $Z_1(\mathcal{C})$ est une catégorie modulaire. En outre, la dimension et les 'sommes de Gauss' $\Delta_\pm(\mathcal{D}) = \sum_i \theta(X_i)^{\pm 1} d(X_i)^2$ sont données par :*

$$\begin{aligned} \dim Z_1(\mathcal{C}) &= (\dim\mathcal{C})^2, \\ \Delta_\pm(Z_1(\mathcal{C})) &= \dim\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{C}$ est munie d'un tressage c, on peut considérer $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine de $Z_1(\mathcal{C})$ grace au foncteur $F_1 : X \mapsto (X,e_X)$ tensoriel tressé plein et fidèle, où $e_X(Y) = c_{X,Y}$. Notant $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie tensorielle $\mathcal{C}$ munie du tressage $\tilde{c}_{X,Y} = c_{Y,X}^{-1}$, il existe un foncteur analogue $F_2 : \tilde{\mathcal{C}} \to Z_1(\mathcal{C})$ tel que $C_{Z_1(\mathcal{C})}(F_1(\mathcal{C})) = F_2(\tilde{\mathcal{C}})$ et $C_{Z_1(\mathcal{C})}(F_2(\tilde{\mathcal{C}})) = F_1(\mathcal{C})$. (Cela est valable en complète généralité, indépendemment du TDC.) Si $\mathcal{C}$ satisfait aux suppositions du Théorème 1.5.7 alors la modularité de $Z_1(\mathcal{C})$ et la Proposition 1.4.8 impliquent :

1.5.8 THÉORÈME *Si $\mathcal{C}$ est modulaire alors $Z_1(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \boxtimes \tilde{\mathcal{C}}$ comme catégories modulaires.*

En particulier, toute catégorie modulaire apparaît comme sommand direct de $Z_1(\mathcal{C})$ pour une catégorie de fusion $\mathcal{C}$.

Vue le Théorème 1.1.13, l'équivalence faiblement tensorielle de Morita $Z_1(\mathcal{C}) \approx \mathcal{C} \boxtimes \tilde{\mathcal{C}}$ implique

$$TV(M,Z_1(\mathcal{C})) = BW(M,Z_1(\mathcal{C})) = BW(M,\mathcal{C} \boxtimes \tilde{\mathcal{C}}) = BW(M,\mathcal{C}) \cdot BW(-M,\mathcal{C})$$

pour toute catégorie de fusion $\mathcal{C}$.

On peut démontrer {6} que le nombre d'objets simples dans $Z_1(\mathcal{C})$ coïncide avec la dimension de l'espace $H_{S^1 \times S^1}$ d'états du tore dans la TQC topologique en dimensions $d = 2+1$ définie par triangulation, comme conjecturé dans [30]. D'autre part, dans la TQC topologique RT définie par chirurgie [67] partant d'une catégorie modulaire $\mathcal{D}$, $\dim H_{S^1 \times S^1}$ coïncide avec le nombre d'objets simples de $\mathcal{D}$. Cela supporte la *conjecture* selon laquelle $BW(M,\mathcal{C}) = RT(M,Z_1(\mathcal{C}))$ pour toute 3-variété orientée M et toute catégorie $\mathcal{C}$ de fusion finie unimodale. Dans le cadre des sous-facteurs il a été démontré recemment [42] que la TQC topologique de type triangulation associée à un sous-facteur $N \subset M$ d'indice et profondité finies, voir [55], coïncide avec la TQC topologique de type chirugie associée au sous-facteur asymptotique d'Ocneanu. Vue la relation [34],{6} entre le sous-facteur asymptotique et $Z_1(\mathcal{C})$, il semble un simple exercise de prouver la conjecture mentionnée par d'arguments purement topologiques et catégoriels.

1.6 Théorie de Galois pour Catégories Tensorielles Tressées

1.6.1 Catégories Tensorielles de Modules

À plusieures occasions nous avons considéré catégories de (bi)modules d'un monoïde dans une catégorie tensorielle $\mathcal{C}$. En l'absence d'un tressage pour $\mathcal{C}$ seule la catégorie $\Gamma\!-\!\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}\!-\!\Gamma$ est monoïdale. On savait longtemps que si $\mathcal{C}$ est tensorielle et symétrique, $\Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$ l'est aussi, voir par ex. [15]. Le cas d'un tressage non-symétrique a été considéré premièrement dans [57] :

1.6.1 Définition/Proposition *Si $\mathcal{C}$ est tressée et a coégalisateurs, alors $\Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$ est tensorielle avec $(X,\mu) \otimes (Y,\eta) = \mathrm{coeq}(\alpha,\beta)$, où $\alpha,\beta : \Gamma \otimes X \otimes Y \to X \otimes Y$ sont donnés par*

$$\alpha = \mu \otimes \mathrm{id}_Y, \qquad \beta = \mathrm{id}_X \otimes \eta \,\circ\, c_{\Gamma,X} \otimes \mathrm{id}_Y.$$

Il existe un foncteur tensoriel $F : \mathcal{C} \to \Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$ tel que $F(X) = (\Gamma \otimes X, m \otimes \mathrm{id}_X)$. La sous-catégorie pleine $\Gamma-\mathrm{Mod}^0_{\mathcal{C}} \subset \Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$ qui consiste d'objets (X,μ) vérifiant $\mu \circ c_{X,\Gamma} \circ c_{\Gamma,X} = \mu$ est tensorielle et tressée.

Ces résultats ont été redécouverts dans [11] pour le cas special où $\Gamma \in Z_2(\mathcal{C})$, dans lequel $\Gamma\!-\!\mathrm{Mod}^0_{\mathcal{C}} = \Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$, et dans [43] en général. Le matériel dans le reste de cette section est extrait de {9}.

1.6.2 Proposition *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de fusion finie tressée et soit $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ une algèbre de Frobenius fortement séparable dans $\mathcal{C}$ telle que $\dim \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma) = 1$. Alors $\Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$ est une catégorie de fusion finie et*

$$\dim \Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}} = (\dim \Gamma)^{-1} \dim \mathcal{C}.$$

La catégorie $\Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$ est un peu ennuyeuse en tant que son produit tensoriel est défini d'une manière un peu implicite. Pour cette raison il est utile avoir la suivante alternative :

1.6.3 Définition/Proposition *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie (stricte) tressée de fusion et $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ une algèbre de Frobenius fortement séparable dans $\mathcal{C}$. Alors le suivant définit une catégorie tensorielle $\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma$.*

- $\mathrm{Obj}\, \tilde{\mathcal{C}}_\Gamma = \mathrm{Obj}\, \mathcal{C}$,
- $X \tilde{\otimes} Y = X \otimes Y$,

- $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma}(X,Y) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma X,Y)$,
- *Soient* $s \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma}(X,Y) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma X,Y)$ *et* $t \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma}(Y,Z) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma Y,Z)$. *Alors* $t\tilde{\circ}s = t \circ \mathrm{id}_\Gamma \otimes s \circ \Delta \otimes X$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma}(X,Z) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma X,Z)$,
- *Soient* $s \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma}(X,Y) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma X,Y)$ *et* $t \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma}(Z,T) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma Z,T)$. *Alors* $s\tilde{\otimes}t = s \otimes t \circ \mathrm{id}_\Gamma \otimes c_{\Gamma,X} \otimes \mathrm{id}_Z \circ \Delta \otimes \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Z$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma}(XZ,YT) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma XZ,YT)$.

La complétée canonique $\hat{\mathcal{C}}_\Gamma = \tilde{\mathcal{C}}_\Gamma^p$ *de* $\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma$ *en une catégorie à idempotents scindables est semisimple. (Rappelons que* $\mathrm{Obj}\,\hat{\mathcal{C}}_\Gamma = \{(X,p),\ X \in \mathrm{Obj}\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma, p = p^2 \in \mathrm{End}_{\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma} X\}$ *etc. Au lieu de* $(X,\mathrm{id}_X) \in \hat{\mathcal{C}}_\Gamma$ *nous écrivons simplement* X*.) Si* $\mathcal{C}$ *est une* $*$*-catégorie et* $\Delta = m^*, \varepsilon = \eta^*$ *alors* $\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma, \hat{\mathcal{C}}_\Gamma$ *sont des* $*$*-catégories. Le foncteur* $\iota : \mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}_\Gamma$ *défini par* $X \mapsto X$, $s \mapsto \varepsilon \otimes s$ *est tensoriel et fidèle. La composition de* ι *avec l'injection pleine* $\tilde{\mathcal{C}}_\Gamma \to \hat{\mathcal{C}}_\Gamma$ *est aussi notée* ι.

1.6.4 Proposition *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ *comme ci-dessus. Alors il existe une équivalence tensorielle* $K : \hat{\mathcal{C}}_\Gamma \to \Gamma-\mathrm{Mod}_\mathcal{C}$ *telle que* $K \circ \iota \cong F$ *comme foncteurs tensoriels.*

1.6.2 Extensions de Galois de Catégories Tensorielles Tressées

1.6.5 Définition *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie de fusion stricte tressée et* $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ *une sous-catégorie pleine finie symétrique paire. Soit* $(\Gamma, \ldots)$ *l'algèbre de Frobenius dans* $\mathcal{C}$ *provenant des Théorèmes 1.3.1 et 1.1.15. Nous notons* $\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S} := \tilde{\mathcal{C}}_\Gamma$ *et* $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S} := \hat{\mathcal{C}}_\Gamma$.

1.6.6 Proposition $\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S}$ *et* $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ *sont des catégories tensorielles strictes sphériques et* $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ *est semisimple, donc une catégorie de fusion. Si* $\mathcal{C}$ *est une* $*$*-catégorie, la* $*$*-structure s'étend à* $\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S}$ *et* $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$*. Il existe un foncteur tensoriel* $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ *fidèle et injectif aux objets. Le groupe* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma,m,\eta)$ *agit sur* $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ *par* $\gamma_g(s) = s \circ g^{-1} \otimes \mathrm{id}_X$ *pour* $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}}(X,Y) = \mathrm{Hom}(\Gamma X,Y)$ *et* $\gamma_g((X,p)) = (X,\gamma_g(p))$*. Nous avons* $(\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S})^G \cong \mathcal{C}$ *et* $(\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S})^G \simeq \mathcal{C}$*. Si* $\mathcal{C}$ *est finie, alors* $\dim \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S} = \dim \mathcal{C}/|G| = \dim \mathcal{C}/\dim \mathcal{S}$.

1.6.7 Théorème *Soient* $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ *comme ci-dessus. Le foncteur tensoriel* $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ *satisfait à la propriété universelle suivante :*

1. *Pour tout objet simple* $Y \in \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ *il existe* $X \in \mathcal{C}$ *tel que* Y *est un sommand direct de* $\iota(X)$.
2. *Pour tout* $X \in \mathcal{S}$ *nous avons* $\iota(X) \cong d(X)\mathbf{1}$ *dans* $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$.
3. *Si* $\mathcal{D}$ *est semisimple et* $\iota' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *vérifie 1-2 alors il existe un foncteur tensoriel* $\iota'' : \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S} \to \mathcal{D}$*, unique à isomorphisme tensoriel naturel près, tel que* $\iota' = \iota'' \circ \iota$.

Nous appelons $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ l'extension galoisienne de $\mathcal{C}$ par la sous-catégorie pleine symétrique $\mathcal{S}$. Maintenant nous identifions $\mathcal{C}$ à la sous-catégorie $\iota(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$.

1.6.8 Théorème *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie de fusion tressée et* $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ *une sous-catégorie pleine symétrique finie paire telle que* $\mathcal{S} \simeq \mathrm{Rep}\, G$*. Alors il existe une bijection entre sous-groupes* $H \subset G$ *et catégories* $\mathcal{E}$ *telles que* $\mathcal{C} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ *et* $\mathcal{E}$ *est la complétée de* $(\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S}) \cap \mathcal{E}$ *par rapport aux sous-objets. La correspondance est donnée par* $\mathcal{E} = (\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S})^H$ *et* $H = \mathrm{Aut}_\mathcal{E}(\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S})$.

1.6.9 Proposition *Dans la correspondance susdite, le sous-groupe* $H \subset G$ *est normal ssi il existe une sous-catégorie symétrique* $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ *telle que* $\mathcal{E} \cong \mathcal{C} \rtimes \mathcal{T}$*. Dans ce cas,* $\mathrm{Aut}_\mathcal{E}(\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}) = H$ *et* $\mathrm{Aut}_\mathcal{C}(\mathcal{E}) \cong G/H$.

1.6.3 Théorie de la Ramification

Nous discutons brièvement les faits connus concernant la décomposition des objects $\iota(X) \in \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ pour $X \in \mathcal{C}$ simple.

1.6.10 Définition *Pour* $X,Y \in \mathcal{C}$ *nous écrivons* $X \sim Y$ *ssi* $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\Gamma \otimes X,Y) \neq \{0\}$.

1.6.11 THÉORÈME {9} *Restrainte aux objets simples, la rélation $\sim$ est un rélation d'équivalence. Soient $X,Y \in \mathcal{C}$ simples. Si $X \not\sim Y$ alors $\iota(X),\iota(Y)$ sont disjoints, i.e. $\iota(X),\iota(Y)$ n'ont pas de sous-objets isomorphes. Pour toute classe σ d'equivalence il existe un ensemble fini I_σ, des objets simples deux-à-deux non-isomorphes $Z_i \in \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$, $i \in I_\sigma$, et entiers positifs $N_X,X \in \sigma$, tels que*

$$\iota(X) \cong N_X \bigoplus_{i \in I_\sigma} Z_i \quad \forall X \in \sigma.$$

Au cas où G est abélien (i.e. tout objet simple de $\mathcal{S}$ est inversible) une déscription plus précise des objets simples de $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ peut être donnée, voir {2}. Soient Δ et K les ensembles des classes d'isomorphismes d'objets simples dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$, respectivement. Alors K est un groupe abélien qui agit sur Δ de la manière évidente (si X est simple et Y est inversible, alors $X \otimes Y$ est simple), et les classes d'équivalence considérées ci-dessus sont précisément les orbites sous cette action. En définissant, pour tout $[X] \in \Delta$,

$$K_X = \{[Y] \in K \mid Y \otimes X \cong X\},$$

K_X est un sous-groupe de K et on démontre qu'il existe $\alpha \in Z^2(K_X,k^*)$ tel que $\mathrm{End}_{\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}}(\iota(X))$ est isomorphe à l'algèbre tordue $k^\alpha K_X$. Maintenant, $L_X = \{k \in K_X \mid \alpha(k,l) = \alpha(l,k)\ \forall l \in K_X\}$ est un sous-groupe de K_X qui engendre le centre de $k^\alpha K_X$. Donc il existe une correspondance bijective entre les caractères de L_X et les sous-objets simples non-isomorphes de $\iota(X)$.

1.6.4 $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ comme G-Catégorie Croisée Tressée

Maintenant nous considérons la question si (ou en quel sens généralisé) $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ est tressée. Puisque la catégorie $\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S}$ a les mêmes objets comme $\mathcal{C}$, un candidat naturel d'un tressage est celui c de $\mathcal{C}$. Mais $\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S}$ a plus de morphismes, donc la naturalité de cet aspirant tressage doit être verifiée. En fait, le suivant a été démontré dans {2} :

1.6.12 LEMME *Le tressage c de $\mathcal{C}$ s'étend à un tressage de $\mathcal{C} \rtimes_0 \mathcal{S}$ ssi $\mathcal{S} \subset Z_2(\mathcal{C})$. En ce cas $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ est également tressée.*

1.6.13 PROPOSITION *Si $\mathcal{S} \subset Z_2(\mathcal{C})$, on a $Z_2(\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}) \cong Z_2(\mathcal{C}) \rtimes \mathcal{S}$. En particulier, le centre $Z_2(\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S})$ est trivial ssi $\mathcal{S} = Z_2(\mathcal{C})$.*

Le centre de $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \rtimes Z_2(\mathcal{C})$ est donc trivial. Si $\mathcal{C}$ est finie, $\hat{\mathcal{C}}$ l'est aussi, et par conséquent $\hat{\mathcal{C}}$ est modulaire grace au Théorème 1.4.5. Pour cette raison $\hat{\mathcal{C}}$ était appelée la clôture modulaire de $\mathcal{C}$ dans {2}. (Dans [11], la catégorie équivalente $\Gamma{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$, où (Γ,m,η) est le monoïde régulier dans la catégorie symétrique $Z_2(\mathcal{C})$, est nommée la modularisation de $\mathcal{C}$.)

Même si $\mathcal{S} \not\subset Z_2(\mathcal{C})$ on trouve que $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ est toujours tressée, pourvu qu'on généralise le cadre. Une telle généralisation à été proposée dans [68], et nous donnons une version légèrement adaptée de cette définition :

1.6.14 DÉFINITION *Soit G un groupe (discret). Une G-catégorie croisée (stricte) est une catégorie tensorielle $\mathcal{D}$ (stricte) munie de*

- *une sous-catégorie tensorielle pleine $\mathcal{D}_G \subset \mathcal{D}$ d'objets 'homogènes',*
- *une application $\partial : \mathrm{Obj}\, \mathcal{D}_G \to G$ constante sur les classes d'isomorphisme,*
- *un homomorphisme $\gamma : G \to \mathrm{Aut}\mathcal{D}$ (automorphismes (stricts) tensoriels de $\mathcal{D}$),*

tels que

1. *$\partial(X \otimes Y) = \partial X\, \partial Y$ pour tout $X,Y \in \mathcal{D}_G$.*
2. *$\gamma_g(\mathcal{D}_h) \subset \mathcal{D}_{ghg^{-1}}$, où $\mathcal{D}_g \subset \mathcal{D}_G$ est la sous-catégorie pleine $\partial^{-1}(g)$.*

Si $\mathcal{D}$ est additive nous démandons que tout objet de $\mathcal{D}$ soit une somme directe d'objets dans $\mathcal{D}_G$. Un tressage pour une G-catégorie croisée $\mathcal{D}$ est une famille d'isomorphismes $c_{X,Y} : X \otimes Y \to {}^XY \otimes X$, définis pour tout $X \in \mathcal{D}_G$, $Y \in \mathcal{D}$, telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[r, "s \otimes t"] \arrow[d, "c_{X,Y}"] & X' \otimes Y' \arrow[d, "c_{X',Y'}"'] \\ {}^XY \otimes X \arrow[r, "{}^Xt \otimes s"'] & {}^{X'}Y' \otimes X' \end{tikzcd}$$

commute pour tout $s : X \to X'$, $t : Y \to Y'$, et

$$\begin{aligned} c_{X,Z\otimes T} &= \mathrm{id}_{{}^XZ} \otimes c_{X,T} \circ c_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_T, \\ c_{X\otimes Y,Z} &= c_{X,{}^YZ} \otimes \mathrm{id}_Y \circ \mathrm{id}_X \otimes c_{Y,Z}, \end{aligned}$$

pour tout $X,Y \in \mathcal{D}_G$, $Z,T \in \mathcal{D}$.

1.6.15 Théorème *$\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ est une G-catégorie croisée tressée, où $\mathcal{S} \simeq \mathrm{Rep}\, G$.*

1.6.16 Définition/Proposition *Le spectre d'une G-catégorie croisée tressée $\mathcal{D}$ est $\mathrm{Spec}\,\mathcal{D} = \{g \in G \mid \mathcal{D}_g \neq \emptyset\}$. $\mathrm{Spec}\,\mathcal{D}$ est clos par multiplication et conjugation avec éléments de G. Il est clos par inverses, donc un sous-groupe normal, si $\mathcal{D}$ a duaux.*

Le spectre est dit plein s'il coïncide avec G et trivial s'il est $\{e\}$.

1.6.17 Proposition *L'inclusion $(\mathcal{C} \cap \mathcal{S}') \rtimes \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ donne lieu à un isomorphisme $(\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S})_e \cong (\mathcal{C} \cap \mathcal{S}') \rtimes \mathcal{S}$. Le spectre de $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ est trivial ssi $\mathcal{S} \subset Z_2(\mathcal{C})$.*

Soit $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ une inclusion pleine de catégories de fusion finies symétriques paires. Soient $(\Gamma, \ldots)$, $(\Gamma_0, \ldots)$ les algèbres de Frobenius correspondantes dans $\mathcal{S}_0,\mathcal{S}$, respectivement, dont G_0,G sont les groupes d'automorphismes. Alors $\Gamma \cong \Gamma_0 \oplus Z$ et $\mathrm{Hom}(\Gamma_0,Z) = \{0\}$, donc le projecteur $q \in \mathrm{End}\,\Gamma$ sur Γ_0 est central. Le groupe

$$N = \{g \in G \mid g \circ q = q\}$$

est un sous-groupe normal de $G = \mathrm{Aut}(\Gamma,m,\eta)$. Il coïncide avec

$$N = \{g \in G \mid \pi_X(g) = \mathrm{id}_{E(X)}\ \forall X \in \mathcal{S}_0\},$$

où $E : \mathcal{S} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ est le foncteur fibre et π_X est la représentation de G sur $E(X)$. (Cela est déduit aisément de $E(X) = \mathrm{Hom}(\mathbf{1},\Gamma \otimes X)$ et le fait que $g \in G$ agit sur $E(X)$ par $\pi_X(g) : \phi \mapsto g \otimes \mathrm{id}_X \circ \phi$.) Cela implique $G_0 \cong G/N$.

1.6.18 Théorème *Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ où $\mathcal{S} \simeq \mathrm{Rep}\, G$. Soit N le sous-groupe normal de G correspondant comme ci-dessus à l'inclusion pleine $\mathcal{S} \cap Z_2(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}$ de catégories symétriques. Alors $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S} = N$. En particulier, le spectre de $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ est plein ssi $\mathcal{S} \cap Z_2(\mathcal{C})$ est trivial, i.e. ne consiste que de multiples de $\mathbf{1}$.*

1.6.19 Corollaire *Si $\mathcal{C}$ est modulaire alors le spectre de $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ est plein et $(\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S})_e$ est modulaire.*

1.6.20 Remarque Nous esquissons brièvement une approche concevable à la construction d'extensions modulaires minimales comme définies dans la Section 1.4.3. Considérons d'abord une catégorie $\mathcal{K}$ pré-modulaire et une extension $\mathcal{C} \supset \mathcal{K}$ modulaire minimale. Soit $\mathcal{S} = Z_2(\mathcal{K})$ et considérons l'inclusion pleine $\mathcal{K} \rtimes \mathcal{S} \subset \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$. À gauche nous avons une catégorie tressée munie d'une action de

G (où $\mathcal{S} \simeq \operatorname{Rep} G$) – en fait ce n'est que la modularisation de $\mathcal{K}$ comme dans {2},[11] – alors qu'à droite nous avons une G-catégorie croisée tressée dont le spectre est plein. $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ peut être considerée comme un produit croisé de sa sous-catégorie pleine $\mathcal{K} \rtimes \mathcal{S}$ de degré zéro par l'action de G. Dans des contextes pas trop différents tels produits croisés ont déjà été considérés, voir par ex. [70]. L'idee pour la *construction* de $\mathcal{C}$ partant de $\mathcal{K}$ est donc : (i) considérer la G-catégorie $\mathcal{D} = \mathcal{K} \rtimes Z_2(\mathcal{K})$, (ii) définir une G-catégorie croisée tressée $\mathcal{E} =$"$\mathcal{D} \rtimes G$" et (iii) définir $\mathcal{C} = \mathcal{E}^G$. □

Chapitre 2

Champs Quantiques

2.1 Théories Quantiques des Champs sur $\mathbb{R}$ et S^1

2.1.1 La G-Catégorie Croisée Tressée d'une TQC sur $\mathbb{R}$ avec G-Symétrie

Dans cette section nous considérons des théories quantiques de champs (TQCs) sur la droite $\mathbb{R}$ munies d'une action d'un groupe G de symétries internes. Dans {10} nous montrons que ce cadre donne lieu à une G-catégorie croisée tressée $G-\mathrm{Loc}\,A$ et à une sous-catégorie pleine $G-\mathrm{Loc}_f A$ qui est en plus rigide et semisimple. Ces considérations se situent dans le cadre rigoureux de la TQC (opérateur) algébrique, voir [33]. Au cas où $G = \{e\}$ notre analyse se réduit à des résultats connus, voir [22, 27, 32]. Ici nous nous bornons à énoncer les définitions et les résultats les plus importants.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des intervals dans $\mathbb{R}$, i.e. les sous-ensembles bornés connexes ouverts de $\mathbb{R}$. Nous écrivons $I^\perp = \mathbb{R} - \overline{I}$, et pour $I,J \in \mathcal{K}$ nous notons $I < J$ ou $I > J$ si $I \subset (-\infty, \inf J)$ ou $I \subset (\sup J, +\infty)$, respectivement. Le suivant est la version en dimension un d'une définition très classique, voir [33].

2.1.1 Définition *Un réseau d'algèbres sur $\mathbb{R}$ est un triple $(\mathcal{H}_0,A,\Omega)$, d'habitude noté simplement A, où $\mathcal{H}_0$ est un espace hilbertien muni d'un vecteur distingué Ω, et A est une application $\mathcal{K} \ni I \mapsto A(I) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, où $A(I)$ est un facteur de type III, voir 1.1.17. Ces données doivent satisfaire aux axiomes suivants :*

- *Isotonie : $I \subset J \;\Rightarrow\; A(I) \subset A(J)$,*
- *Localité : $I \subset J^\perp \;\Rightarrow\; A(I) \subset A(J)'$,*
- *Irréductibilité : $\vee_{I\in\mathcal{K}} A(I) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ (équivalent à $\cap_{I\in\mathcal{K}} A(I)' = \mathbb{C}\mathbf{1}$),*
- *Additivité forte : $A(I) \vee A(J) = A(\overline{I \cup J}^0)$ quand $I,J \in \mathcal{K}$ sont adjacents, i.e. leurs clôtures s'intersectent en un point.*
- *Dualité de Haag : Pour tout $I \in \mathcal{K}$ nous avons $A(I) = A(I^\perp)'$, où*

$$A(I^\perp) = \mathrm{Alg}\,\{A(J),\ J \in \mathcal{K},\ J \subset I'\}.$$

Nous définissons également :

$$A_\infty = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} A(I) \ \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0).$$

Comme conséquence du fait que les $A(I)$ sont des facteurs nous avons $Z(A_\infty) = \mathbb{C}\mathbf{1} = Z(A(I^\perp))\ \forall I \in \mathcal{K}$.

2.1.2 Remarque Les axiomes d'une TQC démandent en plus la covariance par rapport à une représentation du groupe de Poincaré telle que le générateur des translations temporales soit positif. Nous n'aurons pas besoin de ces propriétés, ce qui explique pourquoi nous préférons de parler de réseaux d'algèbres. □

2.1.3 DÉFINITION *Soit* $(\mathcal{H}_0,A,\Omega)$ *un réseau d'algèbres sur* $\mathbb{R}$. *Un groupe topologique* G *agit sur* A *(par symétries internes) s'il existe une représentation unitaire fortement continue* $V : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_0)$ *telle que*

1. $\beta_g(A(I)) = A(I)\ \forall g \in G,\ I \in \mathcal{K}$, *où* $\beta_g(x) = V(g)xV(g)^*$.
2. $V(g)\Omega = \Omega$.
3. *Si* $\beta_g \restriction A(I) = \mathrm{id}$ *pour un* $I \in \mathcal{K}$ *alors* $g = e$.

2.1.4 REMARQUE 1. Dans la plupart de ce qui suit, la topologie de G n'est pas prise en compte. En fait nous nous intéresserons surtout aux groupes finis, mais beaucoup de résultats sont aussi valables dans le cas de groupes compacts, voir {10}.

2. La condition 3 est cruciale pour la définition de la G-gradation sur $G-\mathrm{Loc}\,A$. Elle n'entraîne pas de perte serieuse de generalité. □

Le suivant est bien connu :

2.1.5 DÉFINITION/PROPOSITION *Soit* B *une* $*$*-algèbre unifère. Soit* $\mathrm{End}\,B$ *la catégorie dont les objets* $\rho,\sigma,\ldots$ *sont les endomorphismes (au sens des* $*$*-algèbres unifères) de* B. *Avec*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\rho,\sigma) &=& \{s \in B \mid s\rho(x) = \sigma(x)s \quad \forall x \in B\}, \\ t \circ s &=& ts, \quad s \in \mathrm{Hom}(\rho,\sigma),\ t \in \mathrm{Hom}(\sigma,\eta), \\ \rho \otimes \sigma &=& \rho(\sigma(\cdot)), \\ s \otimes t &=& s\rho(t) = \rho'(t)s, \quad s \in \mathrm{Hom}(\rho,\rho'),\ t \in \mathrm{Hom}(\sigma,\sigma'), \end{array}$$

$\mathrm{End}\,B$ *est une catégorie tensorielle stricte* $\mathbb{C}$*-linéaire avec unité* $\mathbf{1} = \mathrm{id}_B$ *et* $*$*-involution positive. Nous avons* $\mathrm{End}\,\mathbf{1} = Z(B)$.

Maintenant soient A un réseau d'algèbres sur $\mathbb{R}$ et G un groupe de symétries internes. Nous définirons $G-\mathrm{Loc}\,A$ comme sous-catégorie pleine de $\mathrm{End}\,A_\infty$.

2.1.6 DÉFINITION *Soient* $I \in \mathcal{K}$, $g \in G$. *Un objet* $\rho \in \mathrm{End}\,A_\infty$ *est dit* g*-localisé dans* I *si*

$$\begin{array}{rcll} \rho(x) &=& x & \forall J < I,\ x \in A(J), \\ \rho(x) &=& \beta_g(x) & \forall J > I,\ x \in A(J). \end{array}$$

ρ *est* g*-localisé s'il est* g*-localisé dans un* $I \in \mathcal{K}$. ρ *est* G*-localisé s'il est* g*-localisé pour un* $g \in G$. *Un* $\rho \in \mathrm{End}\,A_\infty$ g*-localisé est transportable s'il existe, pour tout* $J \in \mathcal{K}$, *un* $\rho' \in \mathrm{End}\,A_\infty$ g*-localisé dans* J, *tel que* $\rho \cong \rho'$ *(au sens d'équivalence unitaire).*

2.1.7 REMARQUE 1. Si ρ est g-localisé dans I et $J \supset I$ alors ρ est g-localisé dans J.

2. Les sommes directes de morphismes transportables sont transportables.

3. La condition 3 de la Définition 2.1.3 implique que si ρ est g-localisé et h-localisé alors $g = h$. □

2.1.8 DÉFINITION $G-\mathrm{Loc}\,A$ *est la sous-catégorie pleine* $\mathrm{End}\,A_\infty$ *dont les objets sont les sommes directes d'objets G-localisés transportables de* $\mathrm{End}\,A_\infty$. *Donc* $\rho \in \mathrm{End}\,A_\infty$ *est dans* $G-\mathrm{Loc}\,A$ *ssi il existe un ensemble fini* Δ *et, pour tout* $i \in \Delta$, *éléments* $g_i \in G$, *objets* $\rho_i \in \mathrm{End}\,A_\infty$ g_i*-localisés transportables et* $v_i \in A_\infty$ *tels que* $v_i^* v_j = \delta_{ij}$ *et*

$$\rho = \sum_i v_i\, \rho_i(\cdot)\, v_i^*.$$

Nous disons que $\rho \in G-\mathrm{Loc}\,A$ *est G-localisé dans* $I \in \mathcal{K}$ *s'il existe une décomposition comme ci-dessus où tous les* ρ_i *sont* g_i*-localisés dans* I *et* $v_i \in A(I)\ \forall i$.

Pour $g \in G$, soit $(G-\mathrm{Loc}\,A)_g$ la sous-catégorie pleine de $G-\mathrm{Loc}\,A$ des ρ qui sont g-localisés, et soit $(G-\mathrm{Loc}\,A)_G$ l'union des $(G-\mathrm{Loc}\,A)_g$, $g \in G$.

Pour $g \in G$ nous définissons $\gamma_g \in \mathrm{Aut}(G-\mathrm{Loc}\,A)$ par

$$\begin{aligned} \gamma_g(\rho) &= \beta_g \rho \beta_g^{-1}, \\ \gamma_g(s) &= \beta_g(s), \quad s \in \mathrm{Hom}(\rho,\sigma) \subset A_\infty. \end{aligned}$$

2.1.9 LEMME *L'application ∂ : $\mathrm{Obj}\,(G-\mathrm{Loc}\,A)_G \to G$, définie par $\partial\rho = g$ si $\rho \in (G-\mathrm{Loc}\,A)_g$ est une G-gradation, et $G-\mathrm{Loc}\,A$ est une G-catégorie croisée $\mathbb{C}$-linéaire avec $*$-opération positive, sommes directes et sous-objets (au sens d'orthoprojecteurs scindables par isometries) et telle que* $\mathrm{End}\mathbf{1} = \mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathbf{1}}$.

Avant de construire le tressage pour $G-\mathrm{Loc}\,A$ il nous faut quelques préparations :

2.1.10 LEMME *Si ρ est g-localisé dans I alors $\rho(A(I)) \subset A(I)$ et $\rho \restriction A(I)$ est ultrafaiblement continu.*

2.1.11 LEMME *Soient ρ,σ g-localisés dans I. Alors* $\mathrm{Hom}(\rho,\sigma) \subset A(I)$, *impliquant que $G-\mathrm{Loc}\,A$ est une W^*-catégorie au sens de [31].*

2.1.12 LEMME *Soient $\rho_i \in G-\mathrm{Loc}\,A$, $i = 1,2$, g_i-localisés dans I_i, où $I_1 < I_2$. Alors*

$$\rho_1 \otimes \rho_2 = {}^{\rho_1}\rho_2 \otimes \rho_1 \quad (\equiv \gamma_{g_1}(\rho_2) \otimes \rho_1).$$

2.1.13 PROPOSITION *G–$\mathrm{Loc}\,A$ admet un tressage, i.e. une famille d'isomorphismes $c_{\rho,\sigma} : \rho\otimes\sigma \to {}^{\rho}\sigma\otimes\rho$, pour tous $\rho \in (G–\mathrm{Loc}\,A)_G$, $\sigma \in G–\mathrm{Loc}\,A$, satisfaisante aux conditions de la Définition 1.6.14. Si ρ_1,ρ_2 sont comme dans Lemme le 2.1.12 alors $c_{\rho_1,\rho_2} = \mathrm{id}_{\rho_1\otimes\rho_2} = \mathrm{id}_{{}^{\rho_1}\rho_2\otimes\rho_1}$.*

Nous ne faisons qu'indiquer comme c est défini. Soient $\rho \in (G-\mathrm{Loc}\,A)_g$, $\sigma \in G-\mathrm{Loc}\,A$ G-localisés dans $I,J \in \mathcal{K}$, respectivement. Soit $\tilde{I} < J$. Grace à la transportabilité nous pouvons trouver $\tilde{\rho} \in (G-\mathrm{Loc}\,A)_g$ g-localisé dans $\tilde{I}$ et un $u \in \mathrm{Hom}(\rho,\tilde{\rho})$ unitaire. Par Lemme 2.1.12 nous avons $\tilde{\rho} \otimes \sigma = \gamma_g(\sigma) \otimes \tilde{\rho}$, donc le morphisme composé

$$c_{\rho,\sigma} : \quad \rho \otimes \sigma \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}_\sigma} \tilde{\rho} \otimes \sigma = \gamma_g(\sigma) \otimes \tilde{\rho} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\gamma_g(\sigma)} \otimes u^*} \gamma_g(\sigma) \otimes \rho$$

est unitaire et un candidat pour un tressage. Comme élément de A_∞, $c_{\rho,\sigma} = \gamma_g(\sigma)(u^*)u = \beta_g\sigma\beta_g^{-1}(u^*)u$. Puis on vérifie que $c_{\rho,\sigma}$ est indépendant des choix faits et qu'il satisfait aux conditions de la Définition 1.6.14. Pour les détails voir {10}.

Vu le Lemme 2.1.10 nous pouvons définir :

2.1.14 DÉFINITION *$G-\mathrm{Loc}_f A$ est la sous-catégorie tensorielle pleine de $G-\mathrm{Loc}\,A$ dont les objets ρ vérifient $[A(I) : \rho(A(I))] < \infty$ quand ρ est G-localisé dans I.*

Par une adaption de l'approche de [32] on démontre la suivante :

2.1.15 PROPOSITION *G–$\mathrm{Loc}_f A$ est semisimple (au sens expliqué au début de ce mémoire). Tout objet de $G-\mathrm{Loc}_f A$ a un conjugé au sens de [48], et $G-\mathrm{Loc}_f A$ est rigide.*

Nous résumons la discussion précédente :

2.1.16 THÉORÈME *Soit A un réseau d'algèbres sur $\mathbb{R}$ muni d'une action par symétries internes d'un groupe G. Alors $G-\mathrm{Loc}\,A$ est une G-catégorie croisée tressée et la sous-catégorie $G-\mathrm{Loc}_f A$ est une G-catégorie croisée tressée rigide semisimple.*

Il est évident que la sous-catégorie $\mathcal{D}_e$ de degré zéro d'une G-catégorie croisée tressée $\mathcal{D}$ quelconque est tressée au sens habituel. Dans le cas de $G{-}\mathrm{Loc}_{(f)}A$ ces sous-catégories ont été étudiées longtemps, et nous écrivons

2.1.17 DÉFINITION $\mathrm{Loc}\,A = (G{-}\mathrm{Loc}\,A)_e$ *et* $\mathrm{Loc}_f A = (G{-}\mathrm{Loc}_f A)_e$.

2.1.18 REMARQUE 1. $\mathrm{Loc}\,A$ n'est que la catégorie familaire des morphismes localisés et transportables définie dans [27]. (S'il n'y a pas de group G agissant sur A, mettons $G = \{e\}$.) Elle est équivalente à la sous-catégorie pleine DHR(A) de $\mathrm{Rep}\,A_\infty$ dont les objets sont les représentations π qui satisfont au critère DHR: pour tout $I \in \mathcal{K}$ nous avons $\pi \restriction A(I^\perp) \cong \pi_0 \restriction A(I^\perp)$, i.e. il existe un unitaire $u_I : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\pi$ tel que $ux = \pi(x)u$ pour tout $x \in A(I^\perp)$. Tout cela est très classique, voir par ex. [22, 27].

2. Pour une symétrie G non-triviale, la catégorie G–$\mathrm{Loc}\,A$ contient des informations qui ne peuvent pas être récuperées de $\mathrm{Loc}\,A$. Le précédent le plus proche de nos considérations se trouve dans [60] avec des suppositions si restrictives que la structure G-croisée essentiellement se trivialise. En particulier, seulement le cas de groupes abéliens est considéré. □

2.1.2 TQC Chirales Complètement Rationnelles : Modularité et Spectre Plein

Tandis que les constructions dans la section précédente sont très générales, nous nous interessons typiquement à une situation plus spécifique, c'est-à-dire aux TQC chirales sur S^1. Nous présenterons les définitions et montrerons comment elles donnent lieu à des réseaux d'algèbres sur $\mathbb{R}$. Puis nous exposerons les résultats de {3} où nous avons demontré, en n'assumant que des propriétés très naturelles, que $\mathrm{Loc}\,A$ est une catégorie modulaire unitaire. Une vue d'ensemble plus complète accessible aux non-experts est en préparation {13}.

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervaux dans S^1, i.e. des parties de S^1 connexes ouvertes ni vides ni denses. ($\mathcal{I}$ est équivalent à l'ensemble $\{(x,y) \in S^1 \times S^1 \mid x \neq y\}$.) Pour tout $J \subset S^1$ notons J' l'intérieur du complément de J.

La définition suivante est classique, voir par ex. [13, 28] :

2.1.19 DÉFINITION *Une TQC (conforme) chirale est un quadruple $(\mathcal{H}_0,A,U,\Omega)$, d'habitude noté simplement A, où*

1. *$\mathcal{H}_0$ est un espace hilbertien séparable muni d'un vecteur distingué Ω,*
2. *A est une application $\mathcal{I} \ni I \mapsto A(I)$, où $A(I)$ est une algèbre de von Neumann sur $\mathcal{H}_0$.*
3. *U est une représentation unitaire fortement continue sur $\mathcal{H}_0$ du groupe de Möbius $PSU(1,1) = SU(1,1)/\{\mathbf{1},-\mathbf{1}\}$, i.e. le groupe d'applications fractionelles linéaires $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui envoient le circle dans soi-même.*

Ces données vérifient :

- *Isotonie : $I \subset J \;\Rightarrow\; A(I) \subset A(J)$,*
- *Localité : $I \subset J' \;\Rightarrow\; A(I) \subset A(J)'$,*
- *Irréductibilité : $\vee_{I \subset S^1} A(I) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ (ou $\cap_{I\in\mathcal{I}} A(I)' = \mathbb{C}\mathbf{1}$),*
- *Covariance : $U(a)A(I)U(a)^* = A(aI) \quad \forall a \in PSU(1,1),\ I \in \mathcal{I}$,*
- *Positivité de l'énergie : $L_0 \geq 0$, où L_0 est le générateur du sous-groupe de $PSU(1,1)$ des rotations,*
- *Unicité du vide : tout vecteur dans $\mathcal{H}_0$ qui est invariant par l'action de $PSU(1,1)$ est un multiple de Ω.*

2.1.20 Pour les conséquences de ces axiomes voir par ex. [29]. Nous nous bornons à énoncer quelques faits importants :

1. Type : L'algèbre de von Neumann $A(I)$ est un facteur de type III_1 pour tout $I \in \mathcal{I}$.

2. Dualité de Haag : $A(I)' = A(I') \quad \forall I \in \mathcal{I}$.
3. Propriété de Reeh-Schlieder : $\overline{A(I)\Omega} = \overline{A(I)'\Omega} = \mathcal{H}_0 \quad \forall I \in \mathcal{I}$.
4. Les groupes et les conjugations modulaires associés aux paires $(A(I),\Omega)$ ont une interprétation géométrique, voir [12, 29] pour les énonciations précises.
5. Additivité : Si $I,J \in \mathcal{I}$ sont tels que $I \cap J$, $I \cup J \in \mathcal{I}$ alors $A(I) \vee A(J) = A(I \cup J)$.

2.1.21 Remarque Notons que l'additivité forte, définie de la même façon comme pour les réseaux d'algèbres sur $\mathbb{R}$, ne suit pas des autres axiomes. Grace à la covariance, l'additivé forte suit si elle est vérifié par une paire I,J d'intervaux adjacents. En plus, tout TQC chirale peut être étendue à une qui satisfait à l'additivité forte. □

2.1.22 Définition *Une représentation π de A consiste d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$ et d'une famille $\{\pi_I, I \in \mathcal{I}\}$, où π_I est une $*$-représentation unifère de $A(I)$ sur $\mathcal{H}$ telle que*

$$I \subset J \quad \Rightarrow \quad \pi_J \restriction A(I) = \pi_I.$$

π est dite covariante s'il existe une représentation U_π d'énergie positive du groupe $\widehat{PSU(1,1)}$ (le revêtement universel du groupe de Möbius) sur $\mathcal{H}$ telle que

$$U_\pi(a)\pi_I(x)U_\pi(a)^* = \pi_{aI}(U(a)xU(a)^*) \quad \forall a \in \widehat{PSU(1,1)},\ I \in \mathcal{I}.$$

Notons Rep A *la W^*-catégorie de toutes les représentations sur des espaces hilbertiens séparables avec les opérateurs entrelaçants bornés comme morphismes.*

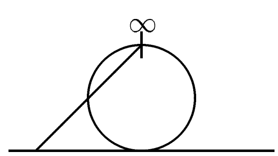
2.1.23 Définition/Proposition *Si A vérifie l'additivité forte et π est une représentation alors l'indice de Jones de l'inclusion $\pi_I(A(I)) \subset \pi_{I'}(A(I'))$ ne dépend pas de $I \in \mathcal{I}$ et nous définissons la 'dimension' de π par :*

$$d(\pi) = [\pi_{I'}(A(I')) : \pi_I(A(I))]^{1/2} \ \in [1,\infty].$$

Par $\mathrm{Rep}_f A$ *nous notons la sous-catégorie pleine de* Rep A *des représentations π vérifiantes $d(\pi) < \infty$.*

2.1.24 Proposition *Une TQC chirale $(\mathcal{H}_0,A,U,\Omega)$ fortement additive donne lieu à un réseau d'algèbres sur $\mathbb{R}$.*

La preuve procède en choisissant un point $\infty \in S^1$ quelconque et en identifiant $S^1 - \{\infty\}$ à $\mathbb{R}$ par projection stéréographique :



Avec $\mathcal{I}_\infty = \{I \in \mathcal{I} \mid \infty \notin \overline{I}\}$ il existe une bijection évidente entre $\mathcal{I}_\infty$ et $\mathcal{K}$. La famille $\{A(I), I \in \mathcal{K}\}$ n'est que la restriction de $I \mapsto A(I), I \in \mathcal{I}$ à $\mathcal{K} \cong \mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}$. L'additivité forte de la théorie sur S^1 et la dualité de Haag sur S^1 impliquent la dualité de Haag au sens de la Définition 2.1.1.

Le résultat suivant est démontré dans {3, Appendix B}. D'une part, il fournit une interprétation très satisfaisante de la catégorie Loc A, et d'autre part il équipe la catégorie Rep A d'une structure tensorielle qui n'est pas du tout évidente a priori.

2.1.25 Proposition *Soit $(\mathcal{H}_0,A,U,\Omega)$ une TQC chirale fortement additive. Alors on a des équivalences de $*$-catégories*

$$\begin{aligned} \mathrm{Loc}\, A &\simeq \mathrm{Rep}\, A, \\ \mathrm{Loc}_f A &\simeq \mathrm{Rep}_f A, \end{aligned}$$

où $\mathrm{Rep}_{(f)}A$ fait référence à la TQC chirale et Définition 2.1.22, tandis que $\mathrm{Loc}_{(f)}A$ fait référence au réseau d'algèbres sur $\mathbb{R}$ obtenu par restriction et la Définition 2.1.8.

2.1.26 REMARQUE Les catégories $\mathrm{Rep}\,A$ et G–$\mathrm{Loc}\,A$ n'ont pas d'objets nuls, donc ne peuvent pas être additives ou abéliennes. Cela est dû au fait que nous ne considérons que des représentations $\pi = (\pi_I)$ où toutes les π_I sont unifères et endomorphismes $\rho \in \mathrm{End} A_\infty$ unifères, respectivement, et pourrait être corrigé en renonçant à ces conditions. Nous nous abstenions de faire ainsi parce que cela compliquerait l'analyse sans entraîner des vrais gains. □

Maintenant nous nous interessons aux théories rationneles, i.e. TQC chirales qui n'admettent qu'un nombre fini de représentations irréductibles à équivalence unitaire près. Notre premier but est d'identifier des axiomes supplémentaires qui choisissent de telles théorie sans éliminer les théories rationneles connues.

2.1.27 DÉFINITION *Une TQC chirale vérifie la propriété de séparation si l'application*

$$m: \ A(I) \otimes_{alg} A(J) \to A(I) \vee A(J), \quad x \otimes y \mapsto xy$$

s'étend à un isomorphisme d'algèbres de von Neumann quand $I,J \in \mathcal{I}$ sont tels que $\overline{I} \cap \overline{J} = \emptyset$.

2.1.28 REMARQUE 1. La propriété de séparation est implique par la propriété $Tre^{-\tau L_0} < \infty \ \forall \tau > 0$. Cette dernière et l'additivité forte ont été vérifiées dans tous les théories rationneles étudiées jusqu'ici.

2. On connaît des TQC chirales, comme l'algèbre des courants $U(1)$, voir [13], fortement additives et vérifiant la propriété de séparation, qui ont un nombre infini de représentations irréductibles inéquivalentes. Cela signifie qu'il nous faut un autre axiome pour éliminer cette possibilité. □

2.1.29 DÉFINITION/PROPOSITION *Soit A une TQC chirale fortement additive et vérifiant la propriété de séparation. Pour $E = I \cup J$, où $I,J \in \mathcal{I}$ sont tels que $\overline{I} \cap \overline{J} = \emptyset$, nous notons $A(E) = A(I) \vee A(J)$. Alors l'indice de l'inclusion $A(E) \subset A(E')'$ ne dépend pas de I,J, et nous définissons*

$$\mu(A) = [A(E')' : A(E)] \ \in [1,\infty].$$

Une TQC chirale est dite complètement rationnelle si elle vérifie (a) l'additivité forte, (b) la propriété de séparation et (c) $\mu(A) < \infty$.

2.1.30 REMARQUE 1. Grace à la proposition, toute TQC chirale satisfaisante à l'additivité forte et la propriété de séparation donne lieu à un invariant numérique $\mu(A) \in [1,\infty]$. Les théories complètement rationnels sont certainement les TQC non-triviales les plus reguières, au sens qu'on a des résulats très forts concernant soit leur structure soit leur théorie des représentations, voir {3, 13}. En particulier, l'invariant $\mu(A)$ admet une interprétation satisfaisante, voir plus bas.

2. Toutes les classes connues de TQC chirales rationnelles sont complètement rationnelles dans notre sens. Pour les 'modèles WZW' liés aux groupes des lacets cela a été démontré dans [73, 76]. Il est encore plus important que la classe des modèles complètement rationnels est stable par produits tensoriels et extensions et sous-théories finies. Cela admet des applications aux modèles 'orbifold', voir la prochaine section, et aux modèles coset. □

2.1.31 THÉORÈME {3} *Soit A une TQC chirale complètement rationnelle. Alors*

- *Toute représentation $\pi \in \mathrm{Rep}\,A$ (donc sur un espace hilbertien séparable) est complètement réductible, i.e. une somme directe de représentations irréductibles. (Pour représentations non-séparables cela vaut si on suppose qu'elles soient localement normales, ce qui est automatique dans le cas séparable, ou Möbius covariantes.)*

- *Toute représentation* $\pi \in \mathrm{Rep}\, A$ *est covariante.*
- *Toute représentation* $\pi \in \mathrm{Rep}\, A$ *irréductible est de dimension* $d(\pi)$ *finie, donc* $\mathrm{Rep}_f A$ *est la catégorie des sommes directes finies de représentations irréductibles, et a une représentation conjugée* $\overline{\pi}$.
- *Le nombre des classes d'équivalence unitaire de représentations irréductibles et séparables est fini et*
$$\mu(A) = \dim \mathrm{Rep}_f A \quad (\equiv \sum_i d(\pi_i)^2).$$
- *Le centre* $Z_2(\mathrm{Rep}_f A)$ *est trivial, donc* $\mathrm{Rep}_f A$ *est une catégorie modulaire unitaire.*

Si A admet un groupe G de symétries internes, définies comme dans la Définition 2.1.3, les considérations précédentes sont appliquables à $(G-\mathrm{Loc}_f A)_e = \mathrm{Loc}_f A \simeq \mathrm{Rep}_f A$. Concernant les catégories $(G-\mathrm{Loc}\, A)_g$, $g \neq e$, nous démontrons dans $\{10\}$:

2.1.32 THÉORÈME *Soit* A *une TQC chirale complètement rationnelle munie d'un groupe fini* G *de symétries internes. Alors*

1. *Le spectre de la G-catégorie* $G-\mathrm{Loc}\, A$ *croisée tressée est plein, i.e.* $(G-\mathrm{Loc}_f A)_g \neq \emptyset$ *pour tout* $g \in G$.
2. *Tout objet* $\rho \in G-\mathrm{Loc}\, A$ *est une somme directe (possiblement infine) d'objets dans* $G-\mathrm{Loc}_f A$. *Donc tout objet simple dans* $G-\mathrm{Loc}\, A$ *est de dimension finie.*
3. $\dim G-\mathrm{Loc}_f A = |G| \dim \mathrm{Rep}_f A$.

2.1.33 REMARQUE 1. La preuve se base sur la rélation entre $G-\mathrm{Loc}\, A$ et $\mathrm{Loc}\, A^G$, où A^G est la sous-théorie G-invariante de A, la 'théorie orbifold', voir la Section 2.2.2. Il serait désirable de trouver un argument plus direct, mais cela semble très difficile.

2. Dans la litérature sur les 'algèbres d'opérateurs vertices' (AOV) nos objets de G–$\mathrm{Loc}\, A$ de degré $g \neq e$ apparaissent comme 'représentations G-tordues de A'. Il y a des résultats sur l'existence de telles représentations pour certaines AOV, voir par ex. [20], mais dans ce cadre il ne semble exister un résultat selon lequel les représentations G-tordues forment une G-catégorie croisée tressée. □

2.1.34 En combinant le Théorème 2.1.31 (de $\{3\}$) et [67] nous obtenons une chaine de constructions :

TQC chirale complètement rationnelle $\rightsquigarrow$ Catégorie modulaire $\rightsquigarrow$ Invariant de 3-variétés.

Dans [68] les G-catégories croisées modulaires ont été utilisées pour la construction d'invariants de G-variétés en trois dimensions, i.e. 3-variétés munies de G-faisceaux principaux. Combiné avec le Théorème 2.1.32 (de $\{10\}$) cela revient à une version équivariante de la susdite chaine de constructions.

2.2 Théories Orbifold

2.2.1 Résultats Généraux sur les Extensions Locales

Dans cette sous-section nous considérons les extensions locales finies de réseaux d'algèbres sur $\mathbb{R}$. Les références principales sont [47, 9].

2.2.1 DÉFINITION *Soit* $I \mapsto A(I) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0^A)$ *un réseau d'algèbres sur* $\mathbb{R}$. *Une sous-théorie* $B \subset A$ *est une famille* $B(I) \subset A(I)$ *de sous-algèbres de von Neumann telle que, en définissant*
$$\mathcal{H}_0^B = \overline{\bigcup_{I \in \mathcal{K}} B(I)\Omega},$$

le triple $(\mathcal{H}_0^B,(B(I)\restriction\mathcal{H}_0^B),\Omega)$ *est un réseau d'algèbres sur* $\mathbb{R}$. *Si un groupe* $\mathcal{P}$ *(Möbius, Poincaré) de symétries géométriques agit sur* A *par* $\mathrm{Ad}\,U(a)$ *nous démandons* $U(a)B(I)U(a)^* = B(aI)$ *pour tout* $a \in \mathcal{P}, I \in \mathcal{K}$. *Nous disons également que* A *est une extension locale de* B.

On peut démontrer [47] que l'indice de Jones $[A(I) : B(I)]$ ne dépend pas de $I \in \mathcal{K}$. Cette valeur est prise comme définition de l'indice $[A : B]$ de l'extension locale. Si $[A : B] < \infty$, nous disons que A est une extension locale finie de B. En ce cas on peut prouver que $\mu(B) = [A : B]^2\mu(A)$ et par conséquent $\dim \mathrm{Rep}_f B = [A : B]^2 \dim \mathrm{Rep}_f A$, voir {3}. Le suivant est contenu essentiellement dans [47] :

2.2.2 THÉORÈME *Soit* B *un réseau d'algèbres sur* $\mathbb{R}$. *Alors il existe une correspondance bijective entre les extensions locales finies* $A \supset B$ *(à équivalence unitaire près) et les algèbres de Frobenius commutatives fortement séparables* $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ *dans* $\mathrm{Loc}_f B$ *(à isomorphisme près). Cette correspondance est telle que* $[A : B] = d(\Gamma)$.

Dans [47, 9] un foncteur tensoriel $\alpha : \mathrm{Loc}\,B \to \mathrm{End}\,A_\infty$ a été défini. Partant de cela on peut prouver {10} :

2.2.3 PROPOSITION *Soient* B *un réseau d'algèbres sur* $\mathbb{R}$ *et* $A \supset B$ *une extension locale finie correspondante à l'algèbre de Frobenius* $(\Gamma,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ *dans* $\mathcal{C} = \mathrm{Loc}_f B$. *Soit* $F : \mathcal{C} \to \Gamma-\mathrm{Mod}_\mathcal{C}$ *le foncteur tensoriel canonique de la Définition/Proposition 1.6.1. Alors il existe un foncteur tensoriel plein fidèle* $K : \Gamma-\mathrm{Mod}_\mathcal{C} \to \mathrm{End}\,A_\infty$ *tel que*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Loc}_f B \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \Gamma-\mathrm{Mod}_\mathcal{C} \arrow[d, "K"] \\ & \mathrm{End}\,A_\infty \end{tikzcd}$$

commute. K *envoit la sous-catégorie pleine* $\Gamma-\mathrm{Mod}^0_\mathcal{C} \subset \Gamma-\mathrm{Mod}_\mathcal{C}$ *dans* $\mathrm{Loc}_f A$.

Pour les extensions locales finies des modèles complètement rationnels on a la formule $\dim \mathrm{Rep}_f A = \dim \mathrm{Rep}_f B/[A : B]^2 = \dim \mathrm{Rep}_f A/d(\Gamma)^2$. En comparant cela avec $\dim \Gamma-\mathrm{Mod}^0_\mathcal{C} = \dim \mathcal{C}/d(\Gamma)^2$ [43] on conclut que K est essentiellement surjectif et donc on obtient {10} :

2.2.4 THÉORÈME *Soit* B *la restriction à* $\mathbb{R}$ *d'une TQC chirale complètement rationnelle sur* S^1, *et soit* A *l'extension locale finie qui correspond à l'algèbre de Frobenius* $(\Gamma,\ldots)$ *dans* $\mathcal{C} = \mathrm{Loc}_f B$. *Alors* $K : \Gamma-\mathrm{Mod}^0_\mathcal{C} \to \mathrm{Loc}_f A$ *est une équivalence de catégories tensorielles tressées.*

Des résultats similairs aux Théorèmes 2.2.2 et 2.2.4 ont été formulés dans le contexte des AOV, voir [43]. Cependant, dans ce cadre ils sont beaucoup plus difficiles à prouver, et en fait aucune preuve complète est parue jusqu'ici.

2.2.2 Les Théories Orbifold

Si A est une TQC munie d'un groupe G de symétries, la théorie orbifold est donnée par $I \mapsto A(I)^G \restriction \mathcal{H}_0^G$. Maintenant A est une extension locale de A^G d'indice $[A : A^G] = |G|$, et les considérations de la précédente section sont appliquables. Si A est une TQC chirale complètement rationnelle alors A^G est complètement rationnelle ssi G est fini, voir [77].

Par un résultat classique [21], $\mathrm{Loc}\,A^G$ a une sous-catégorie pleine symétrique $\mathcal{S} \simeq \mathrm{Rep}\,G$ qui consiste de toutes les sommes directes des sous-représentations irréductibles de $\pi_0^A \restriction A^G$. En plus, l'algèbre de Frobenius dans $\mathcal{C} = \mathrm{Loc}_f A^G$ qui correspond (par le Théorème 2.2.2) à l'extension $A \supset A^G$

est celle de la représentation régulière de G, voir le Théorème 1.1.15, donc $\Gamma - \mathrm{mod}_{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$. Par conséquent, il est naturel de comparer les G-catégories croisées tressées $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ et $G-\mathrm{Loc}\, A$:

2.2.5 LEMME *Soient A un réseau d'algèbres sur $\mathbb{R}$ et G un groupe fini agissant sur A. Nous écrivons $\mathcal{C} = \mathrm{Loc}_f A^G$. Soit $(\rho,p) \in \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S}$ simple (donc $\rho \in \mathcal{C}$ et p est un idempotent minimal dans $\mathrm{End}_{\mathcal{C}\rtimes_0\mathcal{S}}(\rho)$). Avec $g = \partial(\rho,p) \in G$ nous avons $K((\rho,p)) \in (G-\mathrm{Loc}_f A)_g$. Donc le foncteur $K : \mathcal{C} \rtimes \mathcal{S} \simeq \Gamma-\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{End}\, A_\infty$ de la Proposition 2.2.3 (et a fortiori $\alpha : \mathrm{Loc}_f A^G \to \mathrm{End}\, A_\infty$) envoye $\mathrm{Loc}_f A^G$ dans $G-\mathrm{Loc}_f A$.*

2.2.6 PROPOSITION *$K : \mathrm{Loc}_f A^G \rtimes \mathcal{S} \to G-\mathrm{Loc}_f A$ est un foncteur de G-catégories croisées tressées.*

Quand G est fini nous avons :

2.2.7 THÉORÈME *Soient A un réseau d'algèbres sur $\mathbb{R}$ et G un groupe fini de symétries. Alors K : $\mathrm{Loc}_f A^G \rtimes \mathcal{S} \to G-\mathrm{Loc}_f A$ est essentiellement surjectif et par conséquent donne lieu à l'equivalence*

$$G-\mathrm{Loc}_f A \quad \simeq \quad \mathrm{Loc}_f A^G \rtimes \mathcal{S}$$

de G-catégories croisées tressées.

Vues les Propositions 1.6.17 et 1.6.6, cela implique les équivalences tressées

$$\begin{aligned} \mathrm{Loc}_f A \quad &\simeq \quad (\mathrm{Loc}_f A^G \cap \mathcal{S}') \rtimes \mathcal{S}, \\ \mathrm{Loc}_f A^G \quad &\simeq \quad (G-\mathrm{Loc}_f A)^G \end{aligned}$$

et donc la rélation

$$|G| = \frac{\dim \mathrm{Loc}_f A^G}{\dim G-\mathrm{Loc}_f A} = \frac{\dim(\mathrm{Loc}_f A^G \cap \mathcal{S}')}{\dim \mathrm{Loc}_f A} \tag{2.1}$$

entre les dimensions. En termes d'un diagramme, les catégories en question sont liées par :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xleftarrow{\text{degré } 0} & & & \\ & & \mathrm{Loc}_f A & \subset & G-\mathrm{Loc}_f A & & \\ G-\text{fixpoints} & \Big\downarrow & \cup & & \cup & \Big\uparrow & \cdot \rtimes \mathcal{S} \\ & & \mathrm{Loc}_f A^G \cap \mathcal{S}' & \subset & \mathrm{Loc}_f A^G & & \end{array}$$

Ici $G-\mathrm{Loc}\, A$ est une G-catégorie croisée tressée, tandis que les autres catégories sont tressées au sens habituel. Les inclusions verticales sont les sous-catégories G-fixes et les inclusions horizontales sont pleines. La G-gradation sur $G-\mathrm{Loc}_f A$ descend à $(G-\mathrm{Loc}_f A)^G \simeq \mathrm{Loc}_f A^G$ ssi G est abélien. En ce cas $(\mathrm{Loc}_f A^G)_e = \mathrm{Loc}_f A^G \cap \mathcal{S}'$.

On obtient les résultats les plus forts quand A provient d'une TQC chirale complètement rationnelle :

2.2.8 THÉORÈME *Soient A une TQC chirale complètement rationnelle et G un groupe fini de symétries. Alors la théorie orbifold A^G est complètement rationnelle et $\mu(A^G) = |G|^2\mu(A)$. Les catégories $\mathrm{Loc}_f A^G$ et $\mathrm{Loc}_f A \simeq (G - \mathrm{Loc}\, A)_e$ sont modulaires. Le spectre de $G - \mathrm{Loc}_f A \simeq \mathrm{Loc}_f A^G \rtimes \mathcal{S}$ est plein et $\dim G-\mathrm{Loc}_f A = |G| \dim \mathrm{Loc}_f A$.*

Démonstration. La modularité de $\mathrm{Loc}_f A$ et $\mathrm{Loc}_f A^G$ suit de {3} et de la complète rationalité. Par conséquent, le spectre de $G - \mathrm{Loc}_f A \simeq \mathrm{Loc}_f A^G \rtimes \mathcal{S}$ est plein grace au Corollaire 1.6.19. Par le Théorème 1.4.6 nous avons $\dim \mathrm{Loc}_f A^G \cap \mathcal{S}' = \dim \mathrm{Loc}_f A^G/|G|$, et $\dim G-\mathrm{Loc}_f A = |G| \dim \mathrm{Loc}_f A$ suit de (2.1). ■

2.2.3 Le Cas Holomorphe

Un cas particulier très interessant est celui où la catégorie des représentations de A est triviale : $\mathrm{Rep}\, A \simeq \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$. Pour des raisons historiques on parle de modèles orbifold 'holomorphes', voir [18]. Dans notre cadre, cela équivaut à considérer des TQC chirales complètement rationnelles telles que $\mu(A) = 1$. (On peut montrer que ceci est équivalent à assumer que A vérifie (a) la propriété de séparation et (b) la dualité de Haag pour 2-intervals, i.e. $A(E)' = A(E')$ quand $E = I \cap J$ où $I,J \in \mathcal{I}, \overline{I} \cap \overline{J} = \emptyset$.) Les résultats précédents $\{9,10\}$ impliquent immédiatement :

2.2.9 THÉORÈME *Soit A une TQC chirale complètement rationnelle dont la catégorie des représentations est triviale. Soit G un groupe fini de symétries de A. Alors $G-\mathrm{Loc}\, A$ a, à isomorphismes près, exactement un object simple X_g de degré g pour tout $g \in G$, et on a $d(X_g) = 1$.*

Soit $\mathcal{D}$ une G-catégorie croisée ayant exactement une classe d'isomorphismes d'objets simples de chaque degré. Si $\tilde{\mathcal{D}}$ est la sous-catégorie pleine des objets simples, tout morphisme non-nul dans $\tilde{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme. Si l'on ignore les morphismes nuls, $\tilde{\mathcal{D}}$ est un groupe catégoriel. Comme montré dans [68], les groupes catégoriels G-croisées tressées sont classifiés à équivalence près par $H^3_{qa}(G,k^*)$. Ce dernier est un groupe de cohomologie quasiabélienne comme introduite par Ospel [56]. Comme d'habitude, on a $H^3_{qa}(G,A) = Z^3_{qa}(G,A)/B^3_{qa}(G,A)$. Les éléments de $Z^3_{qa}(G,A)$ sont les paires (ω,σ) où $\omega \in Z^3(G,A)$ et $\sigma : G \times G \to A$ satisfont aux conditions

$$\begin{aligned}
\omega(x,y,z) + \omega(xyx^{-1},xzx^{-1},x) + \sigma(x,y+z) &= \omega(xyx^{-1},x,z) + \sigma(x,z) + \sigma(x,y), \\
\omega(x,y,z) + \omega(xyzy^{-1}x^{-1},x,y) - \sigma(x+y,z) &= \omega(x,yzy^{-1},y) - \sigma(x,z) - \sigma(y,z)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\omega(uxu^{-1},uyu^{-1},uzu^{-1}) &= \omega(x,y,z), \\
\sigma(uxu^{-1},uyu^{-1}) &= \sigma(x,y)
\end{aligned}$$

pour tout $x,y,z,u \in G$. Puis, $(\omega,\sigma) \in B^3_{qa}(G,A)$ s'il existe $\eta : G \times G \to A$ tel que

$$\begin{aligned}
\omega(x,y,z) &= \eta(y,z) - \eta(x+y,z) + \eta(x,y+z) - \eta(x,y), \\
\sigma(x,y) &= \eta(x,y) - \eta(y,x).
\end{aligned}$$

Pour G abélien il est évident qu'on retrouve la cohomologie abélienne de [51] : $H^3_{qa}(G,A) = H^3_{ab}(G,A)$.

Des considérations précédentes on conclut :

2.2.10 COROLLAIRE *Une TQC chirale complètement rationnelle A munie d'une symétrie G telle que $\mathrm{Rep}\, A$ est triviale définit un élément de $H^3_{qa}(G,\mathbb{C}^*)$, à savoir l'invariant correspondant au groupe catégoriel G-croisée tressée $\widetilde{G - \mathrm{Loc}\, A}$.*

Une détermination des $(\omega,\sigma) \in H^3_{qa}(G,\mathbb{C}^*)$ qui sont réalisés par une TQC chirale semble très difficile. Au moins nous savons que tout $[\omega] \in H^3(G,\mathbb{C}^*)$ ne peut apparaître, mais seulement les ω pour lesquels il existe une application $\sigma : G \times G \to \mathbb{C}^*$ compatible.

La question se pose, si le passage d'une G-catégorie $\mathcal{C}$ croisée tressée comme ci-dessus au groupe catégoriel G-croisée tressée $\tilde{\mathcal{C}}$ entraîne une perte d'information, c'est à dire si $\mathcal{C}$ peut être reconstruite (à équivalence près) de l'élément $H^3_{qa}(G,k^*)$ associé à $\tilde{\mathcal{C}}$.

2.2.11 CONJECTURE *Pour tout $[(\omega,\sigma)] \in H^3(G,k^*)$ il existe une G-catégorie croisée tressée k-linéaire $\mathcal{C}(\omega,\sigma)$ telle que*

1. *À isomorphisme près il existe exactement un objet simple X_g pour tout $g \in G$, et $d(X_g) = 1$.*
2. *$[(\omega,\sigma)]$ est l'invariant associé à $\widetilde{\mathcal{C}(\omega,\sigma)}$.*

3. *$\mathcal{C}(\omega,\sigma)^G$ a une sous-catégorie pleine $\mathcal{S} \simeq \mathrm{Rep}\, G$ telle que $\mathcal{C}(\omega,\sigma) \simeq \mathcal{C}(\omega,\sigma)^G \rtimes \mathcal{S}$.*
4. *Comme catégorie tensorielle $\mathcal{C}(\omega,\sigma)^G \simeq D^\omega(G)-\mathrm{Mod}$, où $D^\omega(G)$ est le double quantique tordu [17] de G. Le tressage de $\mathcal{C}(\omega,\sigma)^G$ dépend de σ et est donc différent de celui de $D^\omega(G)-\mathrm{Mod}$.*

2.2.12 Remarque Cette conjecture montrerait d'une manière précise que $H^3_{qa}(G,k^*)$, et non $H^3(G,k^*)$, est rélevant dans le contexte des modèles orbifold holomorphes. Le problème principal dans la preuve est la condition 3. En l'absence de cette dernière il suffirait de k-linéariser le groupe catégoriel G-croisé tressé associé à (ω,σ) et de compléter par rapport aux sommes directes. Mais afin que 3 soit vérifié, tout $X \in \mathcal{C}(\omega,\sigma)$ doit être un sommand direct d'un objet G-invariant, et pour tout $\pi \in \mathrm{Rep}\, G$ irréductible un $X_\pi \in \mathcal{C}(\omega,\sigma)^G$ doit exister tel que $\mathrm{Hom}(\mathbf{1},X_\pi) \simeq \pi$ comme représentations de G. □

2.3 Les Invariants Modulaires

Dans ce qui suit, une TQC conforme en deux dimensions est un foncteur de la catégorie des surfaces riemanniennes et des cobordismes dans la catégorie d'espaces hilbertiens (de dimensions non nécessairement finies), satisfaisant aux axiomes de Segal [66]. Un problème fondamental en TQC conforme est la construction de telles théorie partant de deux TQC chirales A^L,A^R (non nécessairement différentes). Même s'il existe une TQC en deux dimensions associée aux TQC chirales A^L,A^R, en général elle ne sera pas unique. Donc il faut des données supplémentaires, que nous appelons 'l'invariant modulaire'. En physique théorique on pense généralement que cette donnée soit une matrice (Z_{ij}) où $i \in \Delta^L, j \in \Delta^R$, les ensembles respectifs des classes d'équivalence des représentations irréductibles de A^L et A^R. Z est sujette aux conditions $Z_{ij} \in \mathbb{N}$, $Z_{00} = 1$, où $0 \in \Delta^{L/R}$ correspond à la représentation $\pi_0^{L/R}$ du vide, et $ZT^R = T^L Z$, $ZS^R = S^L Z$. (Cettes dernières conditions impliquent que Z entrelace les représentations de $SL(2,\mathbb{Z})$ associées aux catégories modulaires $\mathrm{Rep}\, A^L$ et $\mathrm{Rep}\, A^R$, respectivement.) Afin d'éviter toute confusion nous parlerons de matrices invariantes modulaires.

Tandis que beaucoup de travail à été investi dans la classification des matrices invariantes modulaires, en particulier au cas où $A^L = A^R$, il est devenu évident qu'une approche plus sophistiquée est exigée. Nous décrivons brièvement l'approche proposée par Rehren [61, 62] : rappelons que l'espace minkowskien en $d = 1+1$ est la variété pseudo-riemannienne $M = \mathbb{R}^2$ munie de la métrique $g = \mathrm{diag}(1, -1)$ constante. Deux points $(x_0,x_1),(y_0,y_1)$ sont de genre expace ($x \perp y$) ssi $d^2(x,y) = (x_0-y_0)^2 - (x_1^2 - y_1^2) < 0$. Pour $S \subset M$ nous définissons le complément de genre espace $S^\perp = \{x \in M \mid x \perp y\ \forall y \in S\}$. Une TQC sur M est une application $O \mapsto A(O) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ définie pour certaines régions $O \subset M$ et vérifiant des axioms semblables á ceux de la Définition 2.1.1. (Maintenant, localité signifie $O_1 \subset O_2^\perp \Rightarrow [A(O_1),A(O_2)] = \{0\}$.) Nous définissons une bijection $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to M$ par $(x_L,x_R) \mapsto (x_L+x_R,x_L-x_R)$ et écrivons $\mathcal{O} = \{\phi(I_L \times I_R),\ I_L,I_R \in \mathcal{K}\}$. Il existe une théorie des TQC complètement rationnelles sur M analogue à celle sur $\mathbb{R}$.

Étant données deux TQC $(\mathcal{H}_0^L,A^L,\Omega^L),(\mathcal{H}_0^R,A^R,\Omega^R)$ sur $\mathbb{R}$, nous obtenons une TQC A sur M comme l'application $\mathcal{O} \ni O \mapsto A^L(I_L) \otimes A^R(I_R) \subset \mathcal{B}(H_0^A \otimes \mathcal{H}_0^B)$ où $I_L \times I_R = \phi^{-1}(O)$. (Évidemment, cette théorie est définie sur l'espace hilbertien $\mathcal{H}_0^L \otimes \mathcal{H}_0^R$ et le vide est $\Omega^L \otimes \Omega^R$.) Si A^L,A^R sont complètement rationnelles, $B \supset A$ est une extension locale finie et $\pi \in \mathrm{Rep}_f B$, et la restriction $\pi \restriction A$ se décompose selon

$$\pi \restriction A \cong \bigoplus_{i\in\Delta^L, j\in\Delta^R} Z_{ij}\ \pi_i^L \otimes \pi_j^R,$$

où π_i^L (π_i^R) sont les représentations irréductibles de A^L (A^R) et $Z_{ij} \in \mathbb{N}$. Dans [62], Rehren a démontré que $Z_{00} = 1$ et $ZT^R = T^L Z$, mais le problème d'identifier de conditions supplémentaires qui garantissent $ZS^R = S^L Z$ restait ouvert. Les résultats dans le reste de cette section sont extaits de {11}.

2.3.1 THÉORÈME *Soient A^L,A^R des TQC chirales complètement rationnelles et soit B une extension locale finie de $A = A^L \otimes A^R$ sur M. Alors B est complètement rationnelle, et les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $ZS^R = S^L Z$, *donc Z est une matrice invariante modulaire pour la paire (A^L,A^R).*

(ii) $\mu(B) = 1$.

(iii) La catégorie $DHR(B)$ des représentations de B (au sens de [22]) est triviale.

2.3.2 REMARQUE Nous sommes convaincus qu'il existe une bijection entre les TQC conformes en $d = 2$ selon Segal (associées à la paire (A^L,A^R)) et les extensions B ci-dessus, c'est-a-dire que cettes dernières sont les invariants modulaires corrects au sens expliqué ci-dessus. Tandis que cela n'a pas été démontré, nous donnons un argument heuristique à cet effet : les conditions (ii), (iii) dans le théorème sont équivalentes à la trivialité de la 1-cohomologie locale de B comme introduite par J. Roberts, voir [63]. Considérant cette dernière comme une obstruction, il semble raisonable de supposer qu'elle soit nécessaire et suffisante pour l'existence d'une TQC conforme à la Segal associée à $B \supset A^L \otimes A^R$. □

Le Théorème 2.3.1 mène au problème de classifier les extensions locales finies $B \supset A^L \otimes A^R$ telles que $\mathrm{Rep}\, B$ est triviale. Cela se réduit essentiellement à un problème purement catégoriel qui est interessant en soi-même :

2.3.3 PROPOSITION *(i) Soient k un corps algébriquement clos et $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ des catégories de fusion finies sur k. Écrivant $\mathcal{E} = \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$, il existe une bijection entre*

1. *Équivalences tensorielles $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ à isomorphismes naturels tensoriels près.*
2. *Classes d'isomorphismes d'algèbres de Frobenius Γ fortement séparables dans $\mathcal{E}$ telles que*

$$\Gamma \cong \bigoplus_{i \in I} X_i \boxtimes Y_i^{\mathrm{op}},$$

où $\{X_i,\ i \in I\}$ et $\{Y_i,\ i \in I\}$ sont les ensembles des classes d'isomorphisme d'objects simples dans $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$, respectivement.

(ii) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont tressées, alors les équivalences tressées $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ correspondent aux algèbres de Frobenius commutatives par rapport au tressage sur $\mathcal{E}$ donné par

$$c_{\mathcal{E}}(U \boxtimes X, V \boxtimes Y) = c_{\mathcal{C}}(U,V) \boxtimes c_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}(X,Y),$$

où $c_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = c_{\mathcal{D}}(Y,X)$.

(iii) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des $*$-catégories alors les équivalences tensorielles F de $*$-catégories (pour lesquelles les isomorphismes $d^F_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ sont unitaires) correspondent aux $*$-algèbres de Frobenius. En plus, les tressages dans (ii) sont unitaires.

Utilisant quelques observations dans [61] cela permet de démontrer le suivant :

2.3.4 THÉORÈME *Soient A^L,A^R des TQC chirales complètement rationnelles. Alors il existe une bijection entre les classes d'équivalence unitaire d'extensions locales finies $B \supset A^L \otimes A^R$ telles que $\mathrm{Rep}\, B$ est triviale et triples $([\hat{A}^L],[\hat{A}^R],[F])$, où $[\hat{A}^L],[\hat{A}^R]$ sont des classes d'équivalence d'extensions locales finies de A^L et A^R, respectivement, et $[F]$ est la classe d'isomorphisme d'un foncteur $F : \mathrm{Rep}(\hat{A}^L) \to \mathrm{Rep}(\hat{A}^R)$ qui établit une équivalence de $*$-catégories tensorielles tressées.*

Vu le Théorème 2.3.1, ce résultat fournit une classification en termes de triples $([\hat{A}^L],[\hat{A}^R],[F])$ exactement de ces extensions $B \supset A^L \otimes A^R$ pour lesquelles Z est une matrice invariante modulaire. Si nous rappelons les résultats de la Section 2.2.1, la classification ci-dessus peut être formulée en termes purement catégoriels : considérer (classes d'équivalence de) triples (Γ^L,Γ^R,F) où Γ^L (Γ^R) est une algèbre de Frobenius commutative dans $\mathrm{Rep}\,A^L$ ($\mathrm{Rep}\,A^R$) et F est une équivalence tressée F : $\Gamma^L - \mathrm{Mod}^0_{\mathrm{Rep}\,A^L} \to \Gamma^R - \mathrm{Mod}^0_{\mathrm{Rep}\,A^R}$. Ce qui nous amène à la suivante

2.3.5 CONJECTURE *Soient A^L,A^R des TQC chirales complètement rationnelles. Alors les TQC conformes de Segal en $d = 2$ 'associées à (A^L,A^R)' (à préciser !) sont classifiées par les triples* $([\Gamma^L],[\Gamma^R],[F])$ *(ou $([\hat{A}^L],[\hat{A}^R],[F])$) comme ci-dessus.*

2.3.6 REMARQUE Concluons en remarquant que quelque peu de support pour cette conjecture dérive des considerations heuristiques dans [52] que nous ne répétons pas. Ces auteurs ont maintenu que les TQC conformes en $d = 2$ associées à (A^L,A^R) sont classifiées par les triples $(\hat{A}^L,\hat{A}^R,\sigma)$, où $\hat{A}^{L/R} \supset A^{L/R}$ sont des extensions locales finies et $\sigma : \Delta(\hat{A}^L) \mapsto \Delta(\hat{A}^R)$ est un isomorphisme des anneaux de fusion de $\mathrm{Rep}\,\hat{A}^L$ et $\mathrm{Rep}\,\hat{A}^L$. Évidemment, une équivalence de catégories tensorielles donne lieu à un tel isomorphisme, mais l'inverse n'est pas vrai en général. Vue la nature catégorielle de tout le cadre des TQC conformes, il semble mathématiquement beaucoup plus naturel de démander une équivalence F de catégories tressées au lieu d'un simple isomorphisme σ comme dans [52]. □

Publications de l'Auteur

Thèse de doctorat et articles en tirés :

{A} Superselection structure of quantum field theories in $1+1$ dimensions. 117pp. Thèse de doctorat. Université d'Hamburg, Avril 1997. DESY-preprint 97-073.

{A1} Disorder operators, quantum doubles, and Haag duality in $1+1$ dimensions. 8pp. *Dans:* Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on *Quantum fields and quantum spacetime*, Cargèse 1996. Plenum Press, New York 1997.

{A2} Quantum double actions on operator algebras and orbifold quantum field theories. Commun. Math. Phys. **181**, 137–181 (1998).

{A3} The superselection structure of massive quantum field theories in $1+1$ dimensions. Rev. Math. Phys. **10**, 1147–1170 (1998).

{A4} On charged fields with group symmetry and degeneracies of Verlinde's matrix S. Ann. Inst. Henri Poincaré B (Phys. Théor.) **7**, 359–394 (1999).

Travaux postdoctoraux :

{1} On soliton automorphisms in massive and conformal theories. Rev. Math. Phys. **11**, 337–359 (1999).

{2} Galois theory for braided tensor categories and the modular closure. Adv. Math. **150**, 151–201 (2000).

{3} Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory. Avec Y. Kawahigashi et R. Longo. Commun. Math. Phys. **219**, 631–669 (2001).

{4} Conformal field theory and Doplicher-Roberts reconstruction. *Dans:* R. Longo (ed.): *Mathematical physics in mathematics and physics. Quantum and operator algebraic aspects.* Fields Inst. Commun. **30**, 297–319 (2001).

{5} From subfactors to categories and topology I. Frobenius algebras in and Morita equivalence of tensor categories. À paraître dans J. Pure Appl. Alg. (MSRI prépublication 2002-003, `math.CT/0111204`).

{6} From subfactors to categories and topology II. The quantum double of tensor categories and subfactors. À paraître dans J. Pure Appl. Alg. (MSRI prépublication 2002-004, `math.CT/0111205`).

{7} On the structure of modular categories. À paraître dans Proc. Lond. Math. Soc. (`math.CT/0201017`).

{8} Representations of algebraic quantum groups and reconstruction theorems for tensor categories. Avec L. Tuset et J. E. Roberts. `math.QA/0203206`. Soumis.

{9} Galois extensions of braided tensor categories and braided crossed G-categories. `math.CT/0209093`.

{10} Conformal orbifold theories, crossed G-categories and quasiabelian cohomology. En préparation.

{11} Extensions and modular invariants of rational conformal field theories. En préparation.

{12} Regular representations of algebraic quantum groups and embedding theorems. Avec L. Tuset. En préparation.

{13} On the structure and representation theory of rational chiral conformal theories. En préparation.

Bibliographie

[1] L. Abrams: Modules, comodules and cotensor products over Frobenius algebras. J. Alg. **219**, 201-213 (1999).

[2] D. Altschuler & A. Coste: Invariants of 3-manifolds from finite groups. *Dans:* Proc. XXth Int. Conf. Diff. Geom. Meth. in Theor. Phys., New York, 1991, pp. 219–233, World Scientific, 1992.

[3] J. Baez & J. Dolan: Categorification. *Dans:* E. Getzler & M. Kapranov (eds.): *Higher category theory.* AMS, 1998.

[4] J. W. Barrett & B. W. Westbury: Invariants of piecewise-linear 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **348**, 3997-4022 (1996).

[5] J. W. Barrett & B. W. Westbury: Spherical categories. Adv. Math. **143**, 357-375 (1999).

[6] A. Beliakova & C. Blanchet: Modular categories of types B, C and D. Comment. Math. Helv. **76**, 467-500 (2001).

[7] J. Bichon: Trivialisations dans les catégories tannakiennes. Cah. Topol. Geom. Diff. Catég. **39**, 243–270 (1998).

[8] J. Bichon: Trivialisations dans les catégories tannakiennes. Preprint version of [7].

[9] J. Böckenhauer & D. E. Evans: Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors I. Commun. Math. Phys. **197**, 361-386 (1998).

[10] J. Böckenhauer & D. E. Evans: Modular invariants and subfactors. *Dans:* Mathematical physics in mathematics and physics, Fields Inst. Commun. **30**. AMS 2001.

[11] A. Bruguières: Catégories prémodulaires, modularisations et invariants de variétés de dimension 3. Math. Ann. **316**, 215-236 (2000).

[12] R. Brunetti, D. Guido & R. Longo: Modular structure and duality in QFT. Commun. Math. Phys. **156**, 201-219 (1993).

[13] D. Buchholz, G. Mack & I. T. Todorov: The current algebra on the circle as a germ of local field theories. Nucl. Phys. **B5**, 20-56 (1988) Proc. Suppl.

[14] P. Carrasco & J. M. Moreno: Categorical G-crossed modules and 2-fold extensions. J. Pure Appl. Alg. **163**, 235-257 (2001).

[15] P. Deligne: Catégories Tannakiennes. *Dans:* Grothendieck Festschrift, Vol. 2, 111-193. Birkhäuser, 1991.

[16] P. Deligne: Catégories tensorielles. Preprint, 2002.

[17] R. Dijkgraaf, V. Pasquier & P. Roche: Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)**18B**, 60-72 (1990).

[18] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde & H. Verlinde: The operator algebra of orbifold models. Commun. Math. Phys. **123**, 485-527 (1989).

[19] R. Dijkgraaf & E. Witten: Topological gauge theories and group cohomology. Commun. Math. Phys. **129**, 393-429 (1990).

[20] C. Dong, H. Li & G. Mason: Twisted representations of vertex operator algebras. Math. Ann. **310**, 571-600 (1998).

[21] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts: Fields, observables and gauge transformations I. Commun. Math. Phys. **13**, 1-23 (1969).

[22] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts: Local observables and particle statistics I & II. Commun. Math. Phys. **23**, 199-230 (1971), **35**, 49-85 (1974).

[23] S. Doplicher & J. E. Roberts: A new duality theory for compact groups. Invent. Math. **98**, 157-218 (1989).

[24] M. Enock & J. M. Schwartz: *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*. Springer Verlag, 1980.

[25] P. Etingof, D. Nikshych & V. Ostrik: On fusion categories. `math.QA/0203060`.

[26] D. E. Evans & Y. Kawahigashi: On Ocneanu's theory of asymptotic inclusions for subfactors, topological quantum field theories and quantum doubles. Int. J. Math. **6**, 205-228 (1995).

[27] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren & B. Schroer: Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras I. General theory. Commun. Math. Phys. **125**, 201-226 (1989).

[28] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren & B. Schroer: Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras II. Geometric aspects and conformal covariance. Rev. Math. Phys. **Special Issue**, 113-157 (1992).

[29] F. Gabbiani & J. Fröhlich: Operator algebras and conformal field theory. Commun. Math. Phys. **155**, 569-640 (1993).

[30] S. Gelfand & D. Kazhdan: Invariants of three-dimensional manifolds. Geom. Funct. Anal. **6**, 268-300 (1996).

[31] P. Ghez, R. Lima & J. E. Roberts: W^*-categories. Pac. J. Math. **120**, 79-109 (1985).

[32] D. Guido & R. Longo: Relativistic invariance and charge conjugation in quantum field theory. Commun. Math. Phys. **148**, 521-551 (1992).

[33] R. Haag: *Local Quantum Physics*. 2nd ed. Springer Texts and Monographs in Physics, 1996.

[34] M. Izumi: The structure of sectors associated with Longo-Rehren inclusions I. General theory, Commun. Math. Phys. **213**, 127-179 (2000).

[35] V. F. R. Jones: Index for subfactors. Invent. Math. **72**, 1-25 (1983).

[36] V. F. R. Jones: A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 103-111 (1985).

[37] V. F. R. Jones: *Subfactors and knots*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 80. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[38] A. Joyal & R. Street: Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories. J. Pure Appl. Alg. **71**, 43-51 (1991).

[39] A. Joyal & R. Street: Braided tensor categories. Adv. Math. **102**, 20-78 (1993).

[40] L. Kadison: *New examples of Frobenius extensions*. University Lecture Series #14, AMS, 1999.

[41] C. Kassel: *Quantum Groups*. Springer Verlag, 1995.

[42] Y. Kawahigashi, N. Sato & M. Wakui: $(2+1)$-dimensional topological quantum field theory from subfactors and Dehn surgery formula for 3-manifold invariants. `math.OA/0208238`.

[43] A. Kirillov Jr. & V. Ostrik: On q-analog of McKay correspondence and ADE classification of $sl^{(}2)$ conformal field theories. `math.AQ/0101219`.

[44] J. Kustermans & S. Vaes: Locally Compact Quantum Groups. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **33**, 837–934 (2000).

[45] R. Longo: Index of subfactors and statistics of quantum fields I & II. Commun. Math. Phys. **126**, 217-247 (1989) & **130**, 285-309 (1990).

[46] R. Longo: A duality for Hopf algebras and for subfactors I. Commun. Math. Phys. **159**, 133-150 (1994).

[47] R. Longo & K.-H. Rehren: Nets of subfactors. Rev. Math. Phys. **7**, 567-597 (1995).

[48] R. Longo & J. E. Roberts: A theory of dimension. K-Theory **11**, 103-159 (1997).

[49] S. Mac Lane: *Categories for the working mathematician*. 2nd ed. Springer Verlag, 1998.

[50] S. Mac Lane: Cohomology theory of abelian groups. Proceedings of the ICM 1950, vol. II, p. 8-14.

[51] S. Majid: Representations, duals and quantum doubles of monoidal categories. Rend. Circ. Mat. Palermo Suppl. **26**, 197-206 (1991).

[52] G. Moore & N. Seiberg: Naturality in conformal field theory. Nucl. Phys. **B313**, 16-40 (1989).

[53] A. Ocneanu: Quantized group string algebras and Galois theory for algebras. *Dans:* D. E. Evans & M. Takesaki (eds.): *Operator algebras and applications*, Vol. 2. London Math. Soc. Lect. Notes 136. Cambridge University Press, 1988.

[54] A. Ocneanu (notes by Y. Kawahigashi): Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors. Lectures given at Tokyo Univ. 1990.

[55] A. Ocneanu: An invariant coupling between 3-manifolds and subfactors, with connections to topological and conformal quantum field theory. Unpublished manuscript. Ca. 1991.

[56] C. Ospel: Tressages et théories cohomologiques pour les algèbres de Hopf. Application aux invariants des 3-varités. Thèse, Univ. Strasbourg, 1999.

[57] B. Pareigis: On braiding and dyslexia. J. Algebra **171**, 413-425 (1995).

[58] G. Pedersen: Pullback and pushout constructions in C^*-algebra theory. J. Funct. Anal. **167**, 243-344 (1999).

[59] K.-H. Rehren: Braid group statistics and their superselection rules. *In*: D. Kastler (ed.): *The Algebraic Theory of Superselection Sectors. Introduction and Recent Results*. World Scientific, 1990. Voir aussi : `http://www.Theorie.Physik.UNI-Goettingen.DE/~rehren/oldpubl.html`

[60] K.-H. Rehren: Spin-statistics and CPT for solitons. Lett. Math. Phys. **46**, 95-110 (1998).

[61] K.-H. Rehren: Chiral observables and modular invariants. Commun. Math. Phys. **208**, 689-712 (2000).

[62] K.-H. Rehren: Locality and modular invariance in 2D conformal QFT. *Dans:* R. Longo (ed.): *Mathematical physics in mathematics and physics. Quantum and operator algebraic aspects.* Fields Inst. Commun. **30**, 341-354 (2001).

[63] J. E. Roberts: The cohomology and homology of quantum field theory. *Dans:* Quantum fields and quantum space time (Cargèse, 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 364.

[64] A. L. Rosenberg: The existence of fiber functors. *Dans:* I. M. Gelfand & V. S. Retakh (eds.): *The Gelfand Mathematical Seminars* 1996–1999, 145–154. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[65] P. Schauenburg: The monoidal center construction and bimodules. J. Pure Appl. Alg. **158**, 325-346 (2001).

[66] G. Segal: Two-dimensional conformal field theories and modular functors. *Dans:* Proceedings of the IXth ICMP, Swansea 1988. Hilger, 1989.

[67] V. G. Turaev: *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* Walter de Gruyter, 1994.

[68] V. G. Turaev: Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories. `math.GT/0005291`.

[69] V. G. Turaev & H. Wenzl: Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical simple Lie algebras. Intern. Journ. Math. **4**, 323-358 (1993).

[70] K.-H. Ulbrich: Group cohomology for Picard categories. J. Alg. **91**, 464-498 (1984).

[71] A. Van Daele: Discrete quantum groups. J. Alg. **180**, 431–444 (1996).

[72] A. Van Daele: An algebraic framework for group duality. Adv. Math. **140**, 323–366 (1998).

[73] A. Wassermann: Operator algebras and conformal field theory III. Fusion of positive energy representations of $SU(N)$ using bounded operators. Invent. Math. **133**, 467–538 (1998).

[74] S. L. Woronowicz: Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Invent. Math. **93**, 35–76 (1988).

[75] S. L. Woronowicz: Compact quantum groups. *Dans:* A. Connes, K. Gawedzki & J. Zinn-Justin (eds.): *Symétries Quantiques. [Quantum Symmetries]*. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute Summer School in Theoretical Physics in Les Houches, 1995. North-Holland, 1998.

[76] F. Xu: Jones-Wassermann subfactors for disconnected intervals. Commun. Contemp. Math. **2**, 307-347 (2000).

[77] F. Xu: Algebraic orbifold conformal field theories. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **97**, 14069-14073 (2000).

[78] S. Yamagami: Tannaka duals in semisimple tensor categories. `math.CT/0106065`.