Grondslagen van het Caristi-Ekelandprincipe in ZF

Bachelorscriptie

Rick Schreurs
s4244346

Begeleider: Michael Müger

Faculteit der natuurwetenschappen, wiskunde en informatica
Radboud Universiteit Nijmegen
Juni 2016

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding dekpuntstellingen

1.1 Wat is een dekpuntstelling?

Dekpuntstellingen zijn stellingen die beweren dat voor een bepaalde verzameling X waaraan een aantal eisen gesteld kunnen zijn en een functie $f : X \to X$ op die verzameling waar ook een aantal eisen aan gesteld kunnen zijn geldt dat de functie in kwestie een vast punt heeft. Met een vast punt bedoelen we dat een punt in het domein gelijk is aan het beeld op dat punt onder de functie in kwestie, dus een $x \in X$ zodat $f(x) = x$.

Definitie 1.1.1. *(Vast punt) Zij X een verzameling en $f : X \to X$ een functie. Als voor $x \in X$ geldt dat $f(x) = x$, dan is x een vast punt.*

Andere benamingen voor een vast punt die ook wel worden gebruikt zijn fixpunt en dekpunt, vandaar ook de naam 'dekpuntstelling'. Dit principe klinkt heel eenvoudig, maar het is een kunst om met zo min mogelijk gegevens over de verzameling en de functie in kwestie toch te kunnen stellen dat er een vast punt bestaat. In deze scriptie zullen we de stelling van Caristi en de stelling van Ekeland behandelen. De stelling van Caristi is een dekpuntstelling die in vergelijking met andere dekpuntstellingen minder voowaarden stelt om het bestaan van een vast punt aan te tonen. De stelling van Caristi lijkt heel erg op de stelling van Ekeland die het bestaan van een maximaal element in een ordening aantoont. De equivalentie van de twee is in een zeer kort bewijs aan te tonen. We zullen daarom deze twee stellingen vergelijken en later hun fundamenten beschouwen.

1.2 Dekpuntstelling van Banach

De dekpuntstelling van Banach is een van de meest gebruikte dekpuntstellingen in de analyse. Dit komt doordat de benodigde eigenschappen om de stelling toe te kunnen passen makkelijk te verifiëren zijn, er gebruik wordt gemaakt van een constructief algoritme en omdat hij vele toepassingen kent in de differentiaal- en integraalrekening.

We introduceren eerst twee definities om vervolgens de stelling te kunnen formuleren.

Definitie 1.2.1. *(Lipschitz-afbeelding) Zij (M, d) een metrische ruimte. Een afbeelding $T : M \to M$ is een Lipschitz-afbeelding als er een constante $k \geq 0$ is zodat geldt:*

$$\forall x, y \in M : \ d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

De kleinste k waarvoor bovenstaande geldt is de Lipschitz-constante van T.

Definitie 1.2.2. *(Contractie-afbeelding) Een Lipschitz-afbeelding $T : M \to M$ met Lipschitz-constante $k < 1$ is een contractie-afbeelding.*

De dekpuntstelling van Banach, oftewel Banachs contractie-afbeelding principe luidt als volgt:

Stelling 1.2.3. *(Dekpuntstelling van Banach) Zij (M, d) een volledige metrische ruimte en zij $T : M \to M$ een contractie-afbeelding. Dan heeft T een uniek vast punt x_0 en:*

$$\forall x \in M : \ \lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_0.$$

Bovendien:

$$d(T^n(x), x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x, T(x)).$$

In het volgende hoofdstuk zullen we het bewijs van deze stelling geven.

1.3 Stelling van Caristi

Om de stelling van Caristi te kunnen formuleren moeten we eerst formuleren wat halfcontinuïteit van een functie op een metrische ruimte is.

Definitie 1.3.1. *(Halfcontinu van boven en halfcontinu van beneden) Zij (X, d) een metrische ruimte. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ is halfcontinu van boven in $x_0 \in X$ als:*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ is halfcontinu van beneden in $x_0 \in X$ als:

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

Uiteraard noemen we de functie f als geheel halfcontinu van boven (respectievelijk halfcontinu van beneden) als f in iedere $x_0 \in X$ halfcontinu van boven (respectievelijk halfcontinu van beneden) is.

We hebben hier de definitie voor halfcontinuïteit op een metrische ruimte door de definitie van lim sup te nemen met open bollen:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} (\sup f(x) \mid x \in B(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\})$$

(Definitie lim inf gaat uiteraard analoog).

Dat is in dit geval voldoende om aan de slag te gaan met de stelling van Caristi, omdat die stelling van toepassing is om metrische ruimtes. Uiteraard bestaat er ook een topologische variant van deze definitie door de topologische definitie van lim sup te nemen. Hierbij wordt er geen gebruik gemaakt van open bollen maar van een open omgeving van x_0 (waarbij die open omgeving niet alleen maar uit x_0 bestaat). Dat is goed om te weten maar dat zullen we verder niet nodig hebben. Om de stelling van Caristi te formuleren definiëren we eerst nog een ordening die later gebruikt wordt in de formulering.

Definitie 1.3.2. *(Brondsted-ordening voor ϕ halfcontinu van beneden) Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en $\phi : X \to \mathbb{R}$ halfcontinu van beneden. De Brondsted-ordening $\leq_X$ op X wordt dan gedefinieerd als: $x \leq_X y \iff d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y)$. Waarbij $\leq$ de gebruikelijke ordening op $\mathbb{R}$ is.*

Definitie 1.3.3. *(Brondsted-ordening voor ϕ halfcontinu van boven) Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en $\phi : X \to \mathbb{R}$ halfcontinu van boven. De Brondsted-ordening $\leq_X$ wordt dan gedefinieerd als: $x \leq_X y \iff d(x,y) \leq \phi(y) - \phi(x)$. Waarbij $\leq$ de gebruikelijke ordening op $\mathbb{R}$ is.*

We noemen dit dus de Brondsted-ordening (afhankelijk van het feit of ϕ halfcontinu van boven of van beneden is), maar het is nog niet helemaal duidelijk of deze Brondsted-ordening ook echt een partiële ordening is zoals we die in de wiskunde gebruiken. Hier volgt de definitie van een partiële ordening.

Definitie 1.3.4. *(Partiële ordening) Een partiële ordening op een verzameling is een verzameling $P \neq \emptyset$ met een relatie $\leq$ tussen elementen van P zodat aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:*
i) $\forall p \in P$ geldt $p \leq p$. (Reflexief)
ii) $\forall p, q, r \in P$, als $p \leq q$ en $q \leq r$ gelden, dan geldt $p \leq r$. (Transitief)
iii) $\forall p, q \in P$, als zowel $p \leq q$ en $q \leq p$ gelden, dan is $p = q$. (Antisymmetrisch)

Dat de Brondsted-ordening ook daadwerkelijk een partiële ordening is gaan we nu bewijzen voor ϕ halfcontinu van beneden. Voor ϕ halfcontinu van boven gaat dit uiteraard analoog.

Stelling 1.3.5. *De Brondsted-ordening is een partiële ordening.*

Bewijs. Reflexiviteit: Zij $x \in X$, dan geldt: $0 = d(x,x) \leq \phi(x) - \phi(x) = 0$. Dus $x \leq_X x$.
Transitiviteit: Zij $x, y, z \in X$ zodat $x \leq_X y$ en $y \leq_X z$, dan geldt: $d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y)$ en $d(y,z) \leq \phi(y) - \phi(z)$. Optelling van de linkerleden en de rechterleden van deze ongelijkheden geeft: $d(x,y) + d(y,z) \leq \phi(x) - \phi(y) + \phi(y) - \phi(z) =$

$\phi(x) - \phi(z)$. Er geldt per definitie van een metriek: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Er geldt dus: $d(x,z) \leq \phi(x) - \phi(z)$, dus $x \leq_X z$.
Antisymmetrie: Zij $x, y \in X$ zodat $x \leq_X y$ en $y \leq_X x$, dan geldt: $d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y)$ en $d(x,y) \leq \phi(y) - \phi(x)$. Optelling van de linkerleden en de rechterleden van deze ongelijkheden geeft: $2d(x,y) \leq 0$. Hieruit volgt: $d(x,y) = 0$. Dus $x = y$ per definitie van een metriek.
Dus de Brondsted-ordening is een partiële ordening. □

We presenteren twee varianten voor de stelling van Caristi. Deze varianten verschillen er alleen in dat ϕ halfcontinu van boven of juist halfcontinu van beneden is. De equivalentie van de twee is triviaal (neem aan dat de ene variant geldt en neem voor de andere variant $\phi' = -\phi$).

Stelling 1.3.6. *(Caristi, variant 1) Zij (X,d) een volledige metrische ruimte en zij $\phi : X \to \mathbb{R}$ een functie die halfcontinu van boven is en waarvan het beeld begrensd is van boven in $\mathbb{R}$. Zij $(X, \leq_X)$ de Brondsted-ordening:*

$$x \leq_X y \iff d(x,y) \leq \phi(y) - \phi(x)$$

Zij $f : X \to X$ een progressieve functie, dat wil zeggen: $\forall x \in X : \ x \leq_X f(x)$. Dan heeft f een vast punt.

Stelling 1.3.7. *(Caristi, variant 2) Zij (X,d) een volledige metrische ruimte en zij $\phi : X \to \mathbb{R}$ een functie die halfcontinu van beneden is en waarvan het beeld begrensd is van beneden in $\mathbb{R}$. Zij $(X, \leq_X)$ de Brondsted-ordening:*

$$x \leq_X y \iff d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y)$$

Zij $f : X \to X$ een progressieve functie, dat wil zeggen: $\forall x \in X : \ x \leq_X f(x)$. Dan heeft f een vast punt.

We zullen nadat we Banachs contractiestelling gegeneraliseerd hebben de stelling van Caristi bewijzen.

Hoofdstuk 2

Van Banach naar Caristi

2.1 Het contractieprincipe van Banach

In dit hoofdstuk zullen we het verband laten zien tussen de contractiestelling van Banach en de stelling van Caristi door de eerste te generaliseren zodat we de tweede bereiken. We zullen om te beginnen de contractiestelling van Banach bewijzen.

Stelling 2.1.1. *(Banachs Contractie-afbeelding principe) Zij (M, d) een volledige metrische ruimte en zij $T : M \to M$ een contractie-afbeelding. Dan heeft T een uniek vast punt x^* en:*

$$\forall x_0 \in M : \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = x^*.$$

Bovendien:

$$\forall x_0 \in M : d(T^n(x_0), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, T(x_0))$$

Bewijs. Zij k de constante waarvoor T een contractie-afbeelding is. Vanwege de driehoeksongelijkheid voor de metriek geldt:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) \leq d(x, T(x)) + d(T(x), T(y)) + d(T(y), y) \leq$$

$$d(x, T(x)) + kd(x, y) + d(T(y), y)$$

Oplossen voor $d(x, y)$ geeft:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) \leq \frac{d(T(x), x) + d(T(y), y)}{1-k}$$

Dit toont direct aan dat er hoogstens 1 vast punt is, want als x en y vaste punten zijn dan geldt volgens bovenstaande ongelijkheid dat $d(x, y) = 0$, dus

$x = y$. Zij nu $x_0 \in X$ en beschouw de rij $\{T^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ waarbij T^n staat voor de n-de iteratie van T. Met bovenstaande ongelijkheid geldt nu:

$$d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \leq \frac{d(T(T^m(x_0)), T^m(x_0)) + d(T(T^n(x_0)), T^n(x_0))}{1-k} =$$

$$\frac{d(T^m(T(x_0)), T^m(x_0)) + d(T^n(T(x_0)), T^n(x_0))}{1-k} \leq$$

$$\frac{k^m d(T(x_0), x_0) + k^n d(T(x_0), x_0)}{1-k} = \frac{k^m + k^n}{1-k} d(T(x_0), x_0).$$

Aangezien $0 \leq k < 1$ geldt:

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{k^m + k^n}{1-k} d(T(x_0), x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{k^m}{1-k} d(T(x_0), x_0) =$$

$$\frac{0}{1-k} d(T(x_0), x_0) = 0.$$

Dus $\{T^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij. Omdat (M, d) een volledige metrische ruimte is convergeert deze rij naar een $x^* \in M$. Dus: $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = x^*$. Uit de continuïteit van T volgt nu:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) = T(x^*).$$

Dus x^* is een vast punt van T. De gevraagde ongelijkheid volgt nu uit:

$$d(T^m(x_0), x^*) = \lim_{n\to\infty} d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^m + k^n}{1-k} d(T(x_0), x_0) = \frac{k^m}{1-k} d(T(x_0), x_0)$$

□

De nu volgende stelling is een stelling waarvan het bewijs veel raakvlakken toont met het bewijs van Banachs Contractie-afbeelding principe en waarvan de formulering lijkt op de formulering van de stelling van Caristi.

Stelling 2.1.2. *Zij (M, d) een volledige metrische ruimte en zij $T : M \to M$ een continue afbeelding die voor een $\phi : M \to \mathbb{R}^+$ voldoet aan:*

$$\forall x \in M : \; d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x))$$

Dan: $\forall x_0 \in M$ convergeert $\{T^n(x_0)\}$ naar een vast punt x^* van T.

Bewijs. Zij $x_0 \in M$. Uit de eigenschap $\forall x \in M : \; d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x))$ volgt dat de rij $\{\phi(T^n(x_0))\}_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon dalende rij is en aangezien deze rij geen negatieve waarden bevat geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \phi(T^n(x_0)) \geq 0.$$

Er geldt voor $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq n$:

$$d(T^m(x), T^n(x)) \leq \sum_{i=\min(m,n)}^{\max(m,n)-1} d(T^i(x), T^{i+1}(x)) \leq$$

$$\phi(T^{\min(m,n)}(x)) - \phi(T^{\max(m,n)}(x))$$

De eerste ongelijkheid is de uitgebreide driehoeksongelijkheid voor de metriek d en de tweede ongelijkheid volgt uit de eis op ϕ voor elk van de afzonderlijke termen van de sommatie. Dus:

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \leq$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \phi(T^{\min(m,n)}(x)) - \phi(T^{\max(m,n)}(x)) = 0$$

Dus $\{T^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij. Omdat (M, d) een volledige metrische ruimte is convergeert deze rij naar een $x^* \in M$. Dus: $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = x^*$. Uit de continuïteit van T volgt nu:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) = T(x^*).$$

Dus x^* is een vast punt van T. □

2.2 Het Caristi-Ekeland-principe

Bij stelling 2.1.2 was de continuïteit van T essentieel voor de bewijsvoering. Echter, het blijkt dat het resultaat behouden kan blijven als de continuïteit van T niet meer aangenomen wordt en in plaats daarvan geëist wordt dat ϕ halfcontinu van beneden is. Dit komt dan eindelijk neer op de stelling van Caristi.

Stelling 2.2.1. *(Ekeland (E)) Zij (M, d) een volledige metrische ruimte en $\phi : M \to \mathbb{R}^+$ halfcontinu van beneden. Voor $x, y \in M$ definieer:*

$$x \leq y \iff d(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y)$$

Dan heeft $(M, \leq)$ een maximaal element.

Stelling 2.2.2. *(Caristi (C)) Zij (M, d) een volledige metrische ruimte en $\phi : M \to \mathbb{R}^+$ halfcontinu van beneden. Veronderstel dat $g : M \to M$ voldoet aan:*

$$\forall x \in M : \; d(x, g(x)) \leq \phi(x) - \phi(g(x))$$

Dan heeft g een vast punt.

Dat de stellingen equivalent zijn kunnen we aantonen. Hier volgt het bewijs.

Stelling 2.2.3. *In ZF+AC (de Zermelo-Fraenkel axioma's en het keuze-axioma) geldt het volgende: de stelling van Caristi en de stelling van Ekeland zijn equivalent.*

Bewijs. (E) $\Rightarrow$ (C): Met M en ϕ zoals hierboven en g zoals in (C), definieer $\forall x, y : x \leq y \iff d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y)$. Volgens (E) $\exists x_0$ zodat x_0 maximaal is in $(M, \leq)$. Maar $d(x_0, g(x_0)) \leq \phi(x_0) - \phi(g(x_0)) \Rightarrow x_0 \leq g(x_0)$. Dus vanwege de maximaliteit geldt: $x_0 = g(x_0)$. Dus (C) geldt.

(C) $\Rightarrow$ (E): Veronderstel dat (E) niet geldt. Dan $\forall x \in M\ \exists g(x) \in M$ zodat $x < g(x)$ (merk op dat hierbij gebruik gemaakt wordt van het keuze-axioma om de functie g te definiëren). Hieruit volgt dat $\forall x \in M : d(x, g(x)) \leq \phi(x) - \phi(g(x))$. Volgens (C) heeft g een vast punt x_0. Maar de veronderstelling was dat $x_0 < g(x_0)$, dit levert een tegenspraak op en dus geldt (E) wel. $\square$

De stellingen zijn equivalent als het keuze-axioma wordt aangenomen. Het keuze-axioma werd gebruikt in het bewijs om met de stelling van Caristi aan te tonen dat de stelling van Ekeland geldt. Dit betekent dat we tot nu toe weten dat in ZF (zonder vorm van keuze-axioma) geldt dat:
Stelling van Caristi + Keuze-axioma $\Rightarrow$ Stelling van Ekeland.
Stelling van Ekeland $\Rightarrow$ Stelling van Caristi.

Hoofdstuk 3

Fundamenten van Caristi en Ekeland

3.1 Keuze-axioma's

Definitie 3.1.1. *(Keuze-axioma (AC)) Het keuze-axioma (Axiom of Choice) luidt als volgt: Zij I een willekeurige verzameling. $\forall i \in I$, zij X_i een verzameling zodat $X_i \neq \emptyset$. Dan geldt: $\Pi_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.*

Intuïtief betekent het keuze-axioma dat we een oneindig aantal keuzes tegelijk kunnen maken, dat wil zeggen: een oneindig aantal keer uit niet-lege verzamelingen een element kiezen met een bepaalde eigenschap. Er zijn ook nog een aantal andere keuze-axioma's die zwakker zijn dan het keuze-axioma. We bespreken hier twee vormen die relevant zijn voor de stellingen van Ekeland en Caristi.

Definitie 3.1.2. *(Aftelbare keuze-axioma (ACC)) Het aftelbare keuze-axioma (Axiom of Countable Choice) luidt als volgt: Zij I een willekeurige aftelbare verzameling. $\forall i \in I$, zij X_i een verzameling zodat $X_i \neq \emptyset$. Dan geldt: $\Pi_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.*

Definitie 3.1.3. *(Axioma van aftelbare afhankelijke keuze (ACDC) versie 1: vast eerste element) Het axioma van afhankelijke keuze (Axiom of Countable Dependent Choice): Zij $X \neq \emptyset$ een verzameling en $R \subset X \times X$ een relatie op X zodat $\forall x \in X \exists y \in X$ met xRy (dus: $(x, y) \in R$). Dan: $\forall x_1 \in X\ \exists x_2, x_3, \cdots$ zodat $\forall i \in \mathbb{N}:\ x_i R x_{i+1}$.*

Definitie 3.1.4. *(Axioma van aftelbare afhankelijke keuze (ACDC) versie 2: willekeurig eerste element) Het axioma van afhankelijke keuze (Axiom of Countable Dependent Choice): Zij $X \neq \emptyset$ een verzameling en $R \subset X \times X$ een relatie op X zodat $\forall x \in X \exists y \in X$ met xRy (dus: $(x, y) \in R$). Dan: $\exists x_1, x_2, x_3, \cdots$ zodat $\forall i \in \mathbb{N}:\ x_i R x_{i+1}$.*

We tonen twee versies van ACDC omdat de eerste de vorm is die in de praktijk het meest gebruikt wordt, die lijkt immers sterker dan de tweede versie. Die laatste gebruiken we later omdat dit het makkelijker maakt om te laten zien dat de stelling van Ekeland impliceert dat ACDC geldt. Het maakt geen verschil voor de correctheid van ons bewijs of we versie 1 of versie 2 gebruiken. Ze zijn namelijk equivalent aan elkaar. De volgende definitie wordt geïntroduceerd om dat aan te tonen:

Definitie 3.1.5. *(Transitieve afsluiting van een relatie) Zij $R \subseteq X \times X$ een relatie op X. De transitieve afsluiting van R op X (notatie: R^+) wordt gedefinieerd door: $R^+ = \bigcap_{i \in I} R^i$, waarbij $\{R^i | i \in I\}$ de verzameling is van alle transitieve relaties op X die R bevatten, dus: $\forall i \in I : R^i$ transitief en $R \subseteq R^i$.*

Met deze definitie laten we nu zien dat de twee versies inderdaad equivalent zijn.

Stelling 3.1.6. *In ZF geldt: ACDC versie 1 $\iff$ ACDC versie 2*

Bewijs. $\Rightarrow$): Volgt direct aangezien versie 1 een sterkere uitspraak lijkt dan versie 2. Als er bij een gegeven element een rij gevormd kan worden, dan kan deze rij direct gebruikt worden om te laten zien dat versie 2 geldt aangezien versie 2 geen vast eerste element vereist.
$\Leftarrow$): Zij R een relatie op X, dus $R \subseteq X \times X$ met $\forall a \in X \exists b \in X : aRb$. Zij $p \in X$. Definieer R^+ als de transitieve afsluiting van R. Definieer $X' = \{y \in X | \, pR^+y\}$. Definieer $R' = R_{|X'}$ (R beperkt tot X'). Er geldt: $\forall x \in X' \exists y \in X$ met xRy. Dus pR^+y, dus $y \in X'$, dus $xR'y$. Dus R' is links-totaal op X'. R was al links-totaal, dus $\exists t \in X$ met pRt, dus pR^+t, dus $t \in X'$. Dus $X' \neq \emptyset$. Gebruik ACDC versie 2 op (X', R'): $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X' zodat $\forall n \in \mathbb{N} y_n R' y_{n+1}$. Dus $\forall n \in \mathbb{N} : \; y_n R y_{n+1}$. Er geldt: pR^+y_0. Vanwege de definitie van de transitieve afsluiting geldt: $\exists x_0, x_1, \ldots, x_m$ met $x_0 R x_1 R \ldots R x_m$ met $p = x_0$ en $y_0 = x_m$. Definieer $\forall n > m : \; x_n = y_{n-m}$. Dan voldoet de rij $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aan ACDC versie 1. $\square$

Nu we hebben we hoofdzakelijk drie soorten keuze-axioma's die we verder gebruiken, te weten:
- Het keuze-axioma (AC)
- Het axioma van aftelbare keuze (ACC)
- Het axioma van aftelbare afhankelijke keuze (ACDC)

Zoals we eerder al lieten doorschemeren zijn de verschillende soorten niet allemaal even sterk. De volgende stelling toont dat aan:

Stelling 3.1.7. *In ZF geldt: AC $\Rightarrow$ ACDC $\Rightarrow$ ACC*

Bewijs. AC$\Rightarrow$ACDC): Zij X een verzameling en $R \subseteq X \times X$ een relatie zodanig dat $\forall x \in X \; \exists y \in X : xRy$. Definieer $R(x) = \{y \in X \mid xRy\}$. Er geldt: $\forall x \in X : \; R(x) \neq \emptyset$. Volgens AC geldt nu: $\exists f : X \to X$ zodat $\forall x \in X :$

$f(x) \in R(x)$, immers: $\Pi_{x \in X} R(x) \neq \emptyset$. Er geldt: $\forall x \in X : \; xRf(x)$. De rij $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ is een rij waarbij geldt dat $\forall n \in \mathbb{N} : \; x_n R x_{n+1}$. Dus ACDC geldt.

ACDC$\Rightarrow$ACC): Zij I aftelbaar en $\forall i \in I : \; X_i \neq \emptyset$. Definieer $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Definieer $R \subset X \times X$ een relatie op X zodat $\forall x \in X \exists y \in X$ met xRy (dus: $(x, y) \in R$). Definieer een relatie S op $X \times \mathbb{N}$ zodat $(x, m)S(y, n) \iff n = m+1$ en xRy. ACDC geeft: $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X zodat $\forall n \in \mathbb{N} : \; y_n R y_{n+1}$. Definieer $\forall n \in \mathbb{N} : \; y_n = (x_n, N_n)$. Volgens R geldt: $N_{n+1} = N_n + 1$. Dus $\exists N \in \mathbb{N} : N_n = n + N$. Dus $\forall n \in \mathbb{N} : \; x_n \in X_{n+N}$. Dus $X_0 \times X_1 \times \ldots \times X_{N-1} \neq \emptyset$. Neem $\forall n \geq N : \; s_n = x_{n-N}$. Dus $\forall n \in \mathbb{N} : \; s_n \in X_n$. Dus ACC geldt. $\square$

3.2 Bewijzen van de stelling van Caristi in de geschiedenis

Author	Method	Axioms
Caristi (1976) [49]	Transfinite Induction	ZFAC
Wong (1976) [217]	Transfinite Induction	ZFAC
Kirk (1976) [113]	Zorn's Lemma	ZFAC
Brøndsted (1976) [38]	Zorn's Lemma	ZFAC
Browder (1976) [39]	Mathematical Induction	ZFDC
Brézis–Browder (1976) [34]	Mathematical Induction	ZFDC
Penot (1976) [169]		ZFDC
Siegel (1977) [202]		ZFDC
Pasicki (1978) [167]		ZFAC
Mańka (1988) [144]		ZF
Goebel–Kirk (1990) [87]		ZFDC

De afbeelding van de tabel hierboven is afkomstig uit het boek 'Fixed Point Theory in Distance Spaces' van William Kirk en Naseer Shahzad. De tabel beschrijft welke wiskundigen in het verleden de stelling van Caristi hebben bewezen, op basis van welke axioma's het bewijs gemaakt is en eventueel welke methode hiervoor is gebruikt.

Een goede opmerking om bij deze tabel te maken is dat de axioma's die in de rechterkolom staan alleen onderscheid maken tussen ZF+AC (ZFAC), ZF+ACDC (ZFDC) en ZF. Daarmee wordt hier bedoeld dat die axioma's voldoende zijn om het bewijs te laten gelden en daardoor de stelling van Caristi te laten gelden. Het aftelbare keuze-axioma ACC wordt buiten beschouwing gelaten in bovenstaande tabel. We zullen later bijvoorbeeld zien dat het aftelbare keuze-axioma voldoende is om Caristi te bewijzen volgens het bewijs van Browder, terwijl in de tabel hier ZFDC staat.

Om de ontwikkeling van de constructiviteit van de stelling van Caristi te beschouwen zullen we achtereenvolgens een aantal van bovenstaande bewijzen nalopen. Het bewijs dat het interessantst is is uiteraard het bewijs van Mańka. Zijn bewijs gebruikt namelijk van alle gegeven bewijzen van de stelling van Caristi de minste axioma's: alleen de axioma's van ZF (zonder welke vorm van keuze-axioma dan ook).

Overigens is het bijzonder om te noemen dat een aantal auteurs in bovenstaande tabel zelf niet bewust waren van welke axioma's hun bewijs gebruik maakte. Zo was het doel van de artikelen van Siegel en van Browder om een bewijs zonder vorm van keuze-axioma te leveren, maar later bleek dat hier respectievelijk ACDC en ACC werden gebruikt.

3.3 Bewijs Caristi met lemma van Zorn

We beginnen met een bewijs dat de meeste axioma's gebruikt. In dit geval het volle keuze-axioma (AC). Het is alom bekend dat in ZF het keuze-axioma equivalent is aan het lemma van Zorn. We zullen het lemma van Zorn gebruiken. Om een bewijs te leveren voor de stelling van Caristi in ZF+AC volgens de methode van Kirk. We zullen eerst de benodigde definities geven.

Definitie 3.3.1. *(Totale ordening) Een partiële ordening op een verzameling P is een totale ordening als $\forall x, y \in P: \ x \leq y$ of $y \leq x$.*

Definitie 3.3.2. *Zij $(P, \leq)$ een partiële ordening op verzameling P.*
i) Een deelverzameling C van P heet een keten als C met de beperking van de ordening op P tot C een totale ordening is.
ii) Als S een deelverzameling van P is, dan heet een element $p \in P$ een bovengrens van S als $\forall s \in S$ geldt dat $s \leq p$.
iii) Een element $p \in P$ heet maximaal als er geen enkel element strikt groter dan p is.

Lemma 3.3.3. *(Zorn) Als $(P, \leq)$ een partiële ordening is met de eigenschap dat elke keten in P een bovengrens in P heeft, dan heeft P dan een maximaal element.*

Definitie 3.3.4. *(Gesloten afbeelding) Een afbeelding f van een deelverzameling A van een metrische ruimte M naar een metrische ruimte N heet gesloten als voor een rij $\{x_n\} \subseteq A$ geldt dat:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ en } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y \Rightarrow x \in A \text{ en } f(x) = y$$

Definitie 3.3.5. *(Gerichte verzameling) Een gerichte verzameling is een paar $(I, \leq)$, waarbij I een verzameling is en $\leq$ een binaire relatie op I is die zowel aan reflexiviteit als aan transitiviteit voldoet en ook aan gerichtheid. Dat betekent dat $\forall x, y \in I \exists z \in I$ zodat $x \leq z$ en $y \leq z$.*

Definitie 3.3.6. *(Net) Een net van een ruimte X bestaat uit een gerichte verzameling $(I, \leq)$ en een afbeelding $I \to X, \iota \mapsto x_\iota$.*

Definitie 3.3.7. *(Cauchy-net) Zij $\{x_i\}_{i\in I}$ een net. Dit net is een Cauchy-net als: $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in I$ zodat $\forall i, j \geq N$ geldt: $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$.*

De volgende stelling komt nu neer op de stelling van Caristi als $M = Y$, f de identieke afbeelding is en $c = 1$.

Stelling 3.3.8. *Zij M en Y volledige metrische ruimtes en zij $g : M \to M$ een willekeurige afbeelding. Veronderstel dat er een gesloten afbeelding bestaat $f : M \to Y$, een afbeelding die halfcontinu van beneden is $\phi : f(M) \to \mathbb{R}^+$ en een constante $c > 0$ zodat:*

$$\forall x \in M: \ \max\{d(x, g(x)), c \cdot d(f(x), f(g(x)))\} \leq \phi(f(x)) - \phi(f(g(x)))$$

Dan geldt in ZF+AC dat er een $x \in M$ is zodat $g(x) = x$.

Bewijs. Definieer de partiële ordening $\geq$ op M als volgt:

$$y \geq x \iff \max\{d(x,y), c \cdot d(f(x), f(y))\} \leq \phi(f(x)) - \phi(f(y))$$

Zij $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ een keten in $(M, \geq)$ en $\forall \alpha, \beta \in I$ stel $\beta \geq \alpha \iff x_\beta \geq x_\alpha$. Dan is $\{\phi(f(x_\alpha))\}_{\alpha \in I}$ een niet-stijgend net in $\mathbb{R}^+$ zodat er een $r \geq 0$ bestaat met

$$\lim_\alpha \phi(f(x_\alpha)) = r$$

Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er een $\alpha_0 \in I$ zodat $\alpha \geq \alpha_0$ impliceert dat:

$$r \leq \phi(f(x_\alpha)) \leq r + \epsilon$$

en analoog voor $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$.

$$\max\{d(x_\alpha, x_\beta), c \cdot d(f(x_\alpha), f(x_\beta))\} \leq \phi(f(x_\alpha)) - \phi(f(x_\beta)) \leq \epsilon$$

Dus $\{f(x_\alpha)\}$ is een Cauchy-net in Y terwijl tegelijkertijd $\{x_\alpha\}$ een Cauchy net is in M. Hieruit volgt dat er een $\bar{y} \in Y$ en $\bar{x} \in X$ is zodat $\lim_\alpha f(x_\alpha) = \bar{y}$ en $\lim_\alpha x_\alpha = \bar{x}$. Aangezien f een gesloten afbeelding is, $f(\bar{x}) = \bar{y}$ en ϕ halfcontinu van beneden is geldt $\phi(f(\bar{x})) \leq r$. Bovendien, als $\alpha, \beta \in I$ met $\beta \geq \alpha$, dan geldt:

$$\max\{d(x_\alpha, x_\beta), c \cdot d(f(x_\alpha), f(x_\beta))\} \leq \phi(f(x_\alpha)) - \phi(f(x_\beta)) \leq \phi(f(x_\alpha)) - r$$

Het nemen van de limiet ten opzichte van β geeft:

$$\max\{d(x_\alpha, \bar{x}), c \cdot d(f(x_\alpha), f(\bar{x})\} \leq \phi(f(x_\alpha)) - \phi(f(\bar{x}))$$

Dit toont aan dat $\forall \alpha \in I: \ \bar{x} \geq x_\alpha$. Omdat we nu hebben aangetoond dat elke keten in $(M, \geq)$ een bovengrens heeft kan Zorns Lemma toegepast worden. Daaruit is op te maken dat $(M, \geq)$ een maximaal element heeft, zeg x. Maar uit

$$\forall x \in M: \ \max\{d(x, g(x)), c \cdot d(f(x), f(g(x)))\} \leq \phi(f(x)) - \phi(f(g(x)))$$

volgt dat $g(x) \geq x$. Dus $x = g(x)$. Dus g heeft een vast punt. $\square$

We weten nu dus dat in ZF geldt dat: AC $\Rightarrow$ Caristi.

3.4 Bewijs Caristi volgens Brezis en Browder

In deze paragraaf geven we een bewijs van de stelling van Caristi dat gebruik maakt van het axioma van aftelbaar afhankelijke keuze (ACDC). Voor dit bewijs geldt dat X een partiële geordende verzameling is en dat $S(x) = \{y \in X : y \geq x\}$.

Lemma 3.4.1. *Zij* $\psi : X \to \mathbb{R}$ *een functie die voldoet aan:*
i) $x \leq y$ *en* $x \neq y \Rightarrow \psi(x) < \psi(y)$
ii) Voor elke stijgende rij $\{x_n\}$ *in* X *met* $\forall n \in \mathbb{N}: \ \psi(x_n) \leq C < \infty$ *is er een* $y \in X$ *zodat* $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \leq y$.
iii) $\forall x \in X$ *is* $\psi(S(x))$ *van boven begrensd.*
Dan geldt in ZF+ACDC: $\forall x \in X \ \exists x' \in S(x)$ *zodat* x' *maximaal is. Dus:* $\{x'\} = S(x')$.

Bewijs. Zij $a \in X$ en definieer $\rho(a) = \sup\{\psi(b) : b \in S(a)\}$. Stel dat de conclusie van de stelling niet juist is en dat er dus een $x \in X$ is met $\nexists x' \in S(x)$ zodat x' maximaal is. Definieer een rij $\{x_n\}$ met inductie zodat $x_1 = x$ en dat $x_{n+1} \in S(x_n)$ voldoet aan $\forall n \in \mathbb{N}: \ \rho(x_n) \leq \psi(x_{n+1}) + \frac{1}{n}$. Hiervoor is ACDC vereist. Aangezien $\psi(x_{n+1}) \leq \rho(x) < \infty$ volgt met ii) dat er een $y \in X$ is zodat $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \leq y$. Uit de veronderstelling valt ook op te maken dat y niet maximaal is in $S(x)$. Dus $\exists u \in X$ met $y \leq u$ en $\psi(y) < \psi(u)$. Aangezien $x_n \leq u$, geldt $\forall n \in \mathbb{N}: \ \psi(u) \leq \rho(x_n)$. Bovendien geldt $x_{n+1} \leq y$, dus $\psi(x_{n+1}) \leq \psi(y)$. Dus $\forall n \in \mathbb{N}: \ \psi(u) \leq \rho(x_n) \leq \psi(x_{n+1}) + \frac{1}{n} \leq \psi(y) + \frac{1}{n}$, dus $\psi(u) \leq \psi(y)$ en dit geeft een tegenspraak. Dus de stelling geldt wel. □

Stelling 3.4.2. *(Caristi) Zij* (M, ρ) *een volledige metrische ruimte en* $\phi : M \to \mathbb{R}$ *halfcontinu van beneden en van beneden begrensd. Veronderstel dat* $T : M \to M$ *voldoet aan:*

$$\forall u \in T: \ \rho(u, T(u)) \leq \phi(u) - \phi(T(u))$$

Dan geldt in ZF+ACDC dat T *een vast punt heeft.*

Bewijs. Stel $\phi = -\psi$. Voor $x, y \in M$ zeg $x \leq y$ als $\rho(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y)$. Door de veronderstelling geldt $\forall u \in M: \ u < T(u)$. De condities i), ii) en iii) uit lemma 3.4.1 moeten we controleren. Dat i) geldt is direct duidelijk en voor ii) beschouw dat als $\{x_n\}$ een stijgende rij is, dat $\{\phi(x_n)\}$ dan dalend is en begrensd van beneden. Dus $\{\phi(x_n)\}$ convergeert naar een getal, zeg $r \in \mathbb{R}$. Dit impliceert dat $\{x_n\}$ een Cauchy-rij is. Dus $\{x_n\}$ convergeert naar een punt $y \in M$, en omdat ϕ halfcontinu van beneden is volgt:

$$\rho(x_n, y) \leq \phi(x_n) - r \leq \phi(x_n) - \phi(x)$$

Dus $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \leq y$. Dus ii) geldt. Omdat iii) volgt uit het feit dat ϕ begrensd is van beneden, kunnen we concluderen dat $\forall x \in M \ \exists x' \geq x$ zodat $T(x') = x'$. □

We weten nu dus dat in ZF geldt dat: ACDC $\Rightarrow$ Caristi.

3.5 Ekeland is equivalent aan ACDC

In deze paragraaf zullen we terugkomen op de eerder geïntroduceerde stelling van Ekeland. Eerst zullen we laten zien dat in ZF geldt dat: ACDC $\Rightarrow$ Ekeland.

Daarna zullen we het bewijs van Brunner behandelen dat laat zien dat in ZF geldt dat: Ekeland $\Rightarrow$ ACDC. De conclusie zal straks zijn dat in ZF de stelling van Ekeland en ACDC equivalent aan elkaar zijn.

Om te beginnen introduceren we een lemma dat we later in het bewijs van Ekeland $\Rightarrow$ ACDC gebruiken.

Lemma 3.5.1. *Zij (X, d) een metrische ruimte die discreet en volledig is en $f : X \to \mathbb{R}^+$ een functie, dan heeft de Brondsted-ordening een maximaal element.*

Bewijs. Als de metrische ruimte discreet is, is elke deelverzameling van X open met als gevolg dat f continu is. In het bijzonder is f dan ook halfcontinu, dus de stelling van Ekeland geldt en dus is er een maximaal element in de Brondsted-ordening. $\square$

Stelling 3.5.2. *In ZF geldt: Ekeland $\iff$ ACDC*

Bewijs. $\Leftarrow$): Definieer $\forall x \in X$:

$$\overline{M}(x) = \{y \in X \mid y \geq x\} = \{y \in X | \phi(y) + d(x, y) \leq \phi(x)\}$$

Aangezien ϕ halfcontinu van beneden is en d continu is volgt dat $\phi_x : y \mapsto \phi(y) + d(x, y)$ halfcontinu van beneden is. Dus $\forall a \in \mathbb{R} : \ \phi_x^{-1}((a, \infty))$ open. Dus $\overline{M}(x) = \phi_x^{-1}((-\infty, \phi(x)])$ is gesloten. Zij $x_0 \in X$ willekeurig en definieer inductief de rij x_n als volgt: Gegeven x_n, kies (gebruik ACDC) $x_{n+1} \in \overline{M}(x_n)$ zodat $\phi(x_{n+1}) < \inf(\phi(\overline{M}(x_n))) + \frac{1}{n}$. (Deze mogelijkheid is er omdat het infimum eindig is en ϕ van beneden begrensd is.) Door de constructie geldt $x_{n+1} \geq x_n$ en voor $x \in \overline{M}(x_{n+1}) \subseteq \overline{M}(x_n)$ hebben we:

$$\phi(x) \geq \inf(\phi(\overline{M}(x_n))) > \phi(x_{n+1}) - \frac{1}{n}$$

Dus $\phi(x_{n+1}) - \phi(x) < \frac{1}{n}$. Aangezien $x \geq x_{n+1}$, hebben we $d(x, x_{n+1}) \leq \phi(x_{n+1}) - \phi(x)$ en dus $d(x, x_{n+1}) < \frac{1}{n}$. Dit impliceert dat $\operatorname{diam}(\overline{M}(x_{n+1})) \leq \frac{2}{n}$. Combineer voorgaande met de gesloten verzamelingen $X \supseteq \overline{M}(x_0) \supseteq \overline{M}(x_1) \supseteq \cdots$ en de volledigheid van (X, d). Cantor's Intersection Theorem geeft $z \in X$ zodat $\bigcap_n \overline{M}(x_n) = \{z\}$. Dit betekent dat $\forall n : \ z \geq x_n$, dus $x \geq z$ impliceert $\forall n : \ x \in \overline{M}(x_n)$ en dus $x = z$. Dus z is maximaal ten opzichte van $\leq$.

$\Rightarrow$): Neem Ekeland aan. We weten dan dat lemma 3.5.1 geldt. Dus het is voldoende om te bewijzen dat: Lemma 3.5.1 $\Rightarrow$ ACDC. Dit wordt een vrij uitgebreid bewijs waarbij het overzicht snel verloren kan worden. Vandaar dat we eerst een globale aanpak formuleren en die daarna uitvoeren.

Globale aanpak van dit gedeelte van Lemma 3.5.1 $\Rightarrow$ ACDC:

Definieer een willekeurige verzameling $A \neq \emptyset$ met een relatie R met $\forall a \in A \exists b \in A : \ aRb$. We willen dat het axioma van aftelbare afhankelijke keuze (ACDC) geldt op (A, R). We laten dat zien door een bewijs uit het ongerijmde. Als ACDC niet geldt op (A, R), dan moet dat dus een tegenspraak opleveren. Die tegenspraak gaan we als volgt bereiken:

i) We definiëren een verzameling X bestaande uit eindige rijtjes in A waarbij voor elk paar opeenvolgende elementen $\{x_i, x_{i+1}\}$ in zo'n rij geldt dat $x_i R x_{i+1}$.
ii) We definiëren een ordening op X door de beginstuk-ordening. Dit geeft dus $(X, \subseteq)$.
iii) We definiëren een metriek d op X. Dit geeft dus (X, d).
iv) We laten zien dat X discreet is.
v) We tonen aan dat de beginstuk-ordening $\subseteq$ overeenkomt met de Brondsted-ordening.
vi) We tonen aan dat als ACDC niet geldt op (A, R), dat (X, d) dan volledig is.
vii) Volgens de aanname (Ekeland) zou er nu een maximaal element in $(X, \subseteq)$ moeten zijn, maar dat is er niet. Tegenspraak. Dus ACDC geldt wel op (A, R).

<u>Dan nu het volledige bewijs:</u>

Zij R een relatie op een verzameling A met $\forall a \in A\ \exists b \in A :\ aRb$.

i) Zij X de verzameling van eindige rijtjes x in A met $x : n \to A$, $n \in \mathbb{N}$ en $\forall m$ met $0 \leq m < n - 1 :\ x(m)Rx(m+1)$.

ii) Definieer: $x \subseteq y \iff x$ is een beginstuk van y. Dus $\subseteq$ vormt dan een poset samen met X, want: X is niet leeg: X bestaat uit eindige rijen in A en A was niet leeg. De rij bestaande uit slechts 1 element a van A zit in X.
• $\subseteq$ is reflexief: Elke rij is natuurlijk beginstuk van zichzelf, dus $x \subseteq x$.
• $\subseteq$ is transitief: Als x beginstuk is van y en y beginstuk is van z, dan geldt logischerwijs dat x beginstuk is van z: $x \subseteq y$ en $y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$
• $\subseteq$ is antisymmetrisch: Als x een beginstuk is van y en y beginstuk is van x dan moeten de rijen allebei even groot zijn anders volgt direct een tegenspraak. Als ze allebei even groot zijn en ze zijn elkaars beginstuk dan moeten ze wel gelijk zijn anders zouden ze elkaars beginstuk niet zijn, dus $x \subseteq y$ en $y \subseteq x \Rightarrow x = y$.
Dus $(X, \subseteq)$ is een poset.

iii) Stel dat $n_x = lengte(x)$ de lengte van x is, definieer dan $f(x) = 3^{-n_x}$. Definieer d op X door:

$$d(x,y) = \begin{cases} |f(x) - f(y)| & \text{als } x \subseteq y \text{ of } y \subseteq x \\ 3^{-k} & \text{als } x(k) \neq y(k)\text{, maar } x|k = y|k \end{cases}$$

Waarbij $x|k = \{x(i) \in A :\ 0 \leq i < k\}$. Er geldt: d is een metriek, want:
• $d(x, y) \geq 0$ geldt, want door de absoluutstrepen en door machtsverheffen met een positief grondtal kan er nooit een negatieve waarde ontstaan.

• $d(x,y) = 0 \iff x = 0$ geldt. Stel dat $d(x,y) = 0$, dan is $|f(x) - f(y)| = 0$, want $3^{-k} \neq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dus $x \subseteq y$ of $y \subseteq x$ en $f(x) = f(y)$. Dus de rijen x en y zijn even lang. Met voorgaande volgt dat $x = y$. Stel omgekeerd dat $x = y$, dan geldt: $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ en $|f(x) - f(y)| = 0$ want de rijen zijn even lang. Dus $d(x,y) = 0$.
• $d(x,y) = d(y,x)$ volgt direct, omdat $|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)|$ en omdat x en y verwisselbaar zijn in het tweede geval waarbij de metriek is gedefinieerd.
• $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ geldt. Er geldt namelijk:

$$d(x,y) = \begin{cases} |3^{-lengte(x)} - 3^{-lengte(y)}| & \text{als } x \subseteq y \text{ of } y \subseteq x \\ 3^{-k} & \text{als } x(k) \neq y(k), \text{ maar } x|k = y|k \end{cases}$$

$$d(y,z) = \begin{cases} |3^{-lengte(y)} - 3^{-lengte(z)}| & \text{als } y \subseteq z \text{ of } z \subseteq y \\ 3^{-k} & \text{als } y(k) \neq z(k), \text{ maar } y|k = z|k \end{cases}$$

Dus:

$$d(x,y) + d(y,z) = \begin{cases} |3^{-n_x} - 3^{-n_y}| + |3^{-n_y} - 3^{-n_z}| & \text{als } (x \subseteq y \text{ of } y \subseteq x) \\ & \text{én } (y \subseteq z \text{ of } z \subseteq y) \\ 3^{-k_{xy}} + 3^{-k_{yz}} & \text{als } (x(k_{xy}) \neq y(k_{xy}), \\ & \text{maar } x|k_{xy} = y|k_{xy}) \\ & \text{én } (y(k_{yz}) \neq z(k_{yz}), \\ & \text{maar } y|k_{yz} = z|k_{yz}) \\ |3^{-n_x} - 3^{-n_y}| + 3^{-k_{yz}} & \text{als } (x \subseteq y \text{ of } y \subseteq x) \\ & \text{én } (y(k_{yz}) \neq z(k_{yz}), \\ & \text{maar } y|k_{yz} = z|k_{yz}) \\ 3^{-k_{xy}} + |3^{-n_y} - 3^{-n_z}| & \text{als } (x(k_{xy}) \neq y(k_{xy}), \\ & \text{maar } x|k_{xy} = y|k_{xy}) \\ & \text{én } (y \subseteq z \text{ of } z \subseteq y) \end{cases}$$

Indien $d(x,z)$ gedefinieerd wordt door de eerste manier waarop de metriek is gedefinieerd, dan geldt de ongelijkheid sowieso. In het eerste geval hierboven is het gewoon de reeds bekende triviale driehoeksongelijkheid. In de andere drie gevallen geldt het ook. Stel dat je een rij x en een rij y vergelijkt. Dan geldt: $k_{xy} \leq n_x$ per definitie van k_{xy}. Hieruit volgt dus: $3^{-n_x} \leq 3^{-k_{xy}}$ en $3^{-n_x} \leq 3^{-k_{xz}}$. Veralgemeniseerd geldt: $|3^{-n_i} - 3^{-n_j}| \leq max(3^{-n_i}, 3^{-n_j}) \leq 3^{-k_{ij}}$. Hieruit volgen de andere drie ongelijkheden.

Indien $d(x,z)$ gedefinieerd wordt door de tweede manier waarop de metriek is gedefinieerd, dan geldt dat $x(k_{xz}) \neq z(k_{xz})$, maar $x|k_{xz} = z|k_{xz}$. De eerste mogelijkheid van $d(x,y) + d(y,z)$ is de kleinste van de 4 mogelijkheden, dus als $d(x,z)$ kleiner of gelijk aan die waarde is dan volgt dat de rest ook geldt (zoals in de vorige alinea). Merk op omdat x en z geen beginstuk van elkaar zijn, er maar 1 geval overblijft: $y \subseteq x$ en $y \subseteq z$. Hierdoor geldt: $k_{xz} > n_y$, dus $3^{-k_{xz}} < 3^{-n_y}$.

En omdat $3^{-n_y} \leq |3^{-n_x} - 3^{-n_y}| + |3^{-n_y} - 3^{-n_z}|$ volgt de driehoeksongelijkheid.

iv) Stel $X_n = \{x \in X : n_x \subseteq m\}$. $\forall x \in X_m,\ y \in X :\ d(x,y) < 3^{-(m+1)}$. Dus $x = y$ en omdat $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ is X discreet.

v) Nu laten we zien dat de Brondsted-ordening $\leq$ met de inclusie $\subseteq$ overeenstemt, dus we willen hebben dat: $x \leq y \iff x \subseteq y$. Als $x \subseteq y$, dan $d(x,y) = f(x) - f(y)$ dus $x \leq y$. Als omgekeerd $x \leq y$, maar $x(k) \neq y(k)$ voor een $k \in n = lengte(x)$ dan zou $3^{-n} \leq d(x,y) \leq f(x) - f(y) < 3^{-k}$, oftewel $k < n$.

vi) Zij $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij. We tonen aan dat: $\exists N \in \mathbb{N}$ met $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \in X_N$. Omdat voor n, m groot genoeg geldt dat $d(x_n, x_m) < 3^{-(N+1)}$ waaruit volgt dat de rij uiteindelijk constant is en dus convergeert. Dan zou $(X, \subseteq)$ dus volledig zijn.

Als ACDC niet geldt, dan moeten alle ketens in $(X, \subseteq)$ eindig zijn. Immers, als er een oneindige keten is in $(X, \subseteq)$ dan geldt $x_0 \subseteq x_1 \subseteq x_2 \subseteq \ldots$. Aangezien dit allemaal rijtjes zijn kun je uit deze rijtjes een keten $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ maken van elementen in A die aan ACDC voldoet (dus $a_i R a_{i+1}$), zo zijn de rijtjes immers samengesteld. Dus dan zou ACDC gelden.

Uit het ongerijmde: stel dat $\forall N :\ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \nsubseteq X_N$, dan kun je een deelrij y_n van $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constueren met de volgende eigenschappen: Als $lengte(y_k) = n_k$ en $k \leq n_k < n_{k+1}$, dan: $\exists h > k$: $d(y_k, y_h) < 3^{-k}$. Omdat alle ketens eindig zijn kun je bovendien bereiken dat $y_k \nsubseteq y_h$ voor $k \neq h$. Hieruit volgt dat $d(y_k, y_h) = 3^{-p}$ voor een zekere $p \geq k$. Dus $y_k|k = y_h|h$ en $\{y_k|k : k \in \mathbb{N}\}$ is een oneindige keten. Tegenspraak. Dus $\exists N \in \mathbb{N}$ met $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \in X_N$. Omdat voor n, m groot genoeg geldt dat $d(x_n, x_m) < 3^{-(N+1)}$, volgt dat de rij uiteindelijk constant is en dus convergeert. Dus $(X, \subseteq)$ is volledig.

vii) (X, d) is volledig en omdat (X, d) discreet is, is elke functie op (X, d) continu. Volgens Ekeland heeft $(X, \subseteq)$ nu een maximaal element. Het is echter duidelijk dat $(X, \subseteq)$ geen maximaal element heeft (volgt uit de aanname dat ACDC niet geldt en voorafgaande stelling). Tegenspraak. Dus ACDC geldt wel. □

We weten nu dus dat in ZF geldt dat: Ekeland $\iff$ ACDC. We zijn nu dus klaar wat betreft de grondslagen van de stelling van Ekeland in ZF. Eerder hebben we gezien dat in ZF geldt dat: Ekeland $\Rightarrow$ Caristi. We zagen eerder al dat in ZF: ACDC $\Rightarrow$ Caristi. Wat betreft de grondslagen van de stelling van Caristi in ZF zijn we dus met deze paragraaf nog niets opgeschoten.

3.6 Caristi volgt uit ACC

In deze paragraaf gaan we weer een stap verder door te laten zien dat de stelling van Caristi geldt in ZF+ACC. Dit zullen we doen aan de hand van de methode die Browder heeft gegeven. Zoals eerder vermeld was de bedoeling van Browder om een bewijs voor Caristi in ZF te geven, maar we zullen zometeen zien dat het bewijs op hele subtiele wijze gebruikt maakt van het aftelbare keuze-axioma. Dit zal echter wel op een voor het bewijs cruciale plaats zijn waardoor het bewijs dus niet (eenvoudig) aan te passen is naar een bewijs voor Caristi in ZF. We beginnen met een definitie voor een speciale partieel geordende verzameling die niet voor de hand ligt.

Definitie 3.6.1. *(Speciale poset $(P^*, \leq)$) Zij M een volledige metrische ruimte met metriek d en zij $g : M \to M$. Veronderstel dat $\xi : M \to \mathbb{R}^+$ halfcontinu van beneden is zodat:*

$$\forall x \in M : \ d(x, g(x)) \leq \xi(x) - \xi(g(x))$$

Zij $x_0 \in M$. Definieer de speciale poset $(P^*, \leq)$ als volgt:

$$P^* = \{(S, f) \mid S \text{ is een aftelbare deelverzameling van het interval } [0, \xi(x_0)]$$

$$\text{en } f : S \to M \text{ voldoet aan onderstaande 4 eisen}\}$$

Eisen op f:
i) $\forall s \in S : \ \xi(f(s)) = s$. Als $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ een stijgende rij in S is die naar s convergeert, dan: $s \in S$. Het punt $s_0 = \xi(x_0) \in S$ en $f(s_0) = x_0$.
ii) $\forall s \in S$: Als $x = f(s)$, dan $s_1 = \xi(g(s)) \in S$ en $f(s_1) = g(s)$. Bovendien: $\forall t \in (s_1, s) : \ t \notin S$.
iii) Als $s_2 \in S$ en s_2 is geen opvolger van een s zoals in eis 2, dan:

$$f(s_2) = \lim_{s > s_2, s \in S} f(x) = \lim_{s \to s_2^+} f(s)$$

waarbij $s_2^+ = \inf\{s \mid s \in S, s > s_2\}$.
iv) $\forall s_3, s_4 \in S$ met $s_3 < s_4$: $d(f(s_3), f(s_4)) \leq s_4 - s_3$.

Definieer de ordening op P^* als volgt:

$$(S_1, f_1) \leq (S_2, f_2) \iff S_1 \subseteq S_2 \text{ en } f_1 = f_{2|S_1}$$

Stelling 3.6.2. *P^* is met de gedefinieerde ordening een poset.*

Bewijs. P^* is niet leeg: (S_0, f_0) ligt in P^* met $S_0 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\xi(g^j(x_0))\}$ en $f_0 : S_0 \to M$ met $f_0(\xi(g^j(x_0))) = g^j(x_0)$.
$\leq$ is reflexief: $(S, f) \leq (S, f) \iff S \subseteq S$ en $f = f_{|S}$. Dat de rechterkant van de equivalentie geldt is zeer triviaal aangezien S het domein is van f. Dus $\leq$ is reflexief.

$\leq$ is transitief: Stel $(S_1, f_1) \leq (S_2, f_2)$ en $(S_2, f_2) \leq (S_3, f_3)$. Dan $S_1 \subseteq S_2$ en $f_1 = f_{2|S_1}$ en $S_2 \subseteq S_3$ en $f_2 = f_{3|S_2}$. Dus $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3$ en $f_1 = f_{3|S_2|S_1}$. Dus $S_1 \subseteq S_3$ en $f_1 = f_{3|S_1}$. Dus $(S_1, f_1) \leq (S_3, f_3)$. Dus $\leq$ is transitief.
$\leq$ is antisymmetrisch: zij $(S_1, f_1) \leq (S_2, f_2)$ en $(S_2, f_2) \leq (S_1, f_1)$. Dan $S_1 \subseteq S_2$ en $S_2 \subseteq S_1$ en $f_1 = f_{2|S_1}$ en $f_2 = f_{1|S_2}$. Hieruit volgt $S_1 = S_2$ en daaruit volgt dat f_1 en f_2 op hetzelfde domein gedefinieerd zijn en zojuist bleek dat ze op dat domein gelijk aan elkaar zijn. Dus $f_1 = f_2$. Dus $(S_1, f_1) = (S_2, f_2)$. Dus $\leq$ is antisymmetrisch.

□

Lemma 3.6.3. *De ordening op $(P^*, \leq)$ is totaal.*

Bewijs. Zij (S, f) en (S_1, f_1) twee elementen van P^*. Beschouw de famile half-open intervallen $I = (s, \xi(x_0)]$ zodat $S \cap I = S_1 \cap I$ en $f_{|s \cap I} = f_{1|S_1 \cap I}$. Zulke intervallen bestaan aangezien $(\xi(g(x_0)), \xi(x_0)]$ zo'n interval is. Aangezien de vereniging van de hele familie van zulke intervallen een interval is van de familie, bestaat er een grootste interval $(s, \xi(x_0)]$. Als er geen punt $s_1 \in S_1$ buiten I ligt, dan volgt dat $(S, f) \geq (S_1, f_1)$.
In het andere geval, zij $s_1 \in S_1$ het grootste punt van S_1 buiten I. (Zulke grootste punten bestaan vanwege de geslotenheidsvoorwaarde op S en S_1 in voowaarde 4 van de eisen op functies in het tweede argument in de elementen van P^*.) Volgens eis 3 geldt:

$$f_1(s_1) = \lim_{t > s_1, t \in S_1} f_1(t) = \lim_{t > s, t \in S_1} f_1(t) = \lim_{t > s, t \in S} f(t) = \lim_{t > s_2, t \in S} f(t) = f(s_2)$$

Dus: $s_1 = \xi(f_1(s_1)) = \xi(f(s_2)) = s_2$. Dus er volgt meteen dat S en S_1 overeenkomen op het half-open interval $(\xi(g(f(s))), \xi(x_0)]$ en f en f_1 komen daar overeen. Dit is in tegenspraak met dat I het grootste interval is. Dus dit geval bestaat niet. Dus de ordening op P^* is totaal. □

Lemma 3.6.4. *Zij $(P^*, \leq)$ de speciale poset zoals eerder gedefinieerd. Zij $S' = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$ en $f' : S' \to M$ met $f'_{|S_j} = f_j$. Zij $s' = inf\{s \mid s \in S\}$. Dan geldt het volgende:*
i) $s' \notin S'$.
ii) $\lim_{s > s', s \in S'} f'(s) = x'$ bestaat.
iii) Als $s'' = \xi(x')$, dan $s'' \leq s'$. Stel $S'' = S' \cup (\bigcup_{j=0}^{\infty} \{\xi(g^j(x'))\})$ en breidt f' uit naar $f'' : S'' \to M$ met $s'' \mapsto x'$. Dan krijgen we $(S'', f'') \in P^*$.

Bewijs. Bewijs i): Als s' in S' ligt, dan zou $\xi(g(f'(s'))) < s'$ ook in S' moeten liggen, wat in tegenspraak met de definitie van s' is.
Bewijs ii): Volgens eis 4 op de functies in het tweede argument van de elementen van P^* geldt voor $s_3, s_4 \in S'$ met $s_3 < s_4$ dat:

$$d(f'(s_4), f'(s_3)) \leq s_4 - s_3$$

Dus $\{f'(s_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij voor iedere s_j die naar s' convergeert en de limiet geven we aan met x'. Dus $x' = \lim_{s > s', s \in S'} f'(s)$.

Bewijs iii): Het paar (S'', f'') is welgedefinieerd. We moeten laten zien dat f'' aan de 4 eisen die op het tweede argument van elementen in P^* gesteld worden voldoet. Dat aan eisen 1 en 2 wordt voldaan is triviaal, we weten immers al dat deze eigenschappen gelden voor de elementen die deel uitmaken van de vereniging waar ze van afkomstig zijn. Voor eis 3 hoeven we alleen maar te controleren dat de limieteigenschap voor $s_2 = s''$ geldt. Vervolgens volgt de rest uit de definitie van s'' en $f(s'')$. Voor eis 4 merken we op dat voor $s_3, s_4 \in S'$ met $s_3 < s_4$ geldt dat $d(f(s_3), f(s_4)) \leq s_4 - s_3$. Naarmate s_3 dichterbij s' komt gaat $f'(s_3)$ naar $f''(s'')$ waarbij $s'' \leq s'$. Dus:

$$d(f''(s''), f''(s_4)) \leq s_4 - s' \leq s_4 - s''$$

□

Stelling 3.6.5. *(Caristi met ACC) Zij M een volledige metrische ruimte met metriek d en zij $g : M \to M$. Veronderstel dat $\xi : M \to \mathbb{R}^+$ halfcontinu van beneden is zodat:*

$$d(x, g(x)) \leq \xi(x) - \xi(g(x))$$

Dan geldt in ZF+ACC dat g een vast punt heeft in M.

Bewijs. Zij $x_0 \in M$. Veronderstel dat g geen vaste punten op M heeft. Dan geldt en volgt dat:

$$(\forall x \in M : \ d(x, g(x)) > 0) \ \Rightarrow \ \xi(g(x)) < \xi(x)$$

Zij $(P^*, \leq)$ de speciale poset zoals eerder gedefinieerd. We weten inmiddels dat $(P^*, \leq)$ daadwerkelijk een poset is en dat de ordening totaal is (Lemma 1). Hieruit kunnen we afleiden dat elk element $(S, f) \in P^*$ uniek aangeduid wordt door het eerste element s en door het bewijs dat de ordening op P^* totaal is kunnen we zien dat S uniek bepaald is door het kleinste half-open interval $(s, \xi(x)]$ dat het bevat. Daardoor kan de familie elementen van P^* geschreven worden als een rij $\{(S_j, f_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ en kunnen we definiëren:

$$S' = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$$

$$f' : S' \to M \text{ met } \forall j \in \mathbb{N} : \ f'_{|S_j} = f_j$$

We gaan nu gebruik maken van het axioma van aftelbare keuze: aangezien elke S_j aftelbaar is, is S' aftelbaar. Het axioma van aftelbare keuze is nodig om te stellen dat een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen aftelbaar is. Er geldt: (S', f') voldoet aan de eisen op P^* (Lemma 2). Dus $(S', f') \in P^*$ en het is overduidelijk het maximale element. Met voorafgaande stelling is duidelijk dat (S'', f'') een propere uitbreiding van (S', f') is en dat terwijl de laatste maximaal is in P^*. Dit is een contradictie en betekent dus dat g wel een vast punt heeft. Dus g moet een vast punt in M hebben. □

We weten nu dus dat in ZF geldt dat: ACC $\Rightarrow$ Caristi.

3.7 Bewijs Caristi zonder vorm van keuze-axioma

In deze sectie zullen we een bewijs leveren voor de stelling van Caristi dat geen gebruik maakt van een vorm van keuze-axioma en dus te bewijzen is in ZF. Alle stellingen en lemma's in deze sectie zullen dus vanuit de basis-axioma's van ZF bewezen worden.

Als aanknopingspunt voor het bewijs van de stelling van Caristi gebruiken we de publicaties van Manka. Hij is een van de weinige personen (zo niet: de enige) die de stelling van Caristi heeft bewezen in ZF. De volgende twee artikelen van Manka zijn relevant voor de stelling van Caristi:

i) Some forms of the axiom of choice.
ii) Turinici's fixed point theorem and the axiom of choice.

In i) geeft Manka het bewijs van de stelling van Caristi door een aantal beweringen te claimen en vervolgens met behulp daarvan een lemma toe te passen uit ii).

Manka's bewijs maakt meermaals gebruik van welgeordende ketens (ook wel welordeningen genoemd), daarom introduceren we nu een definitie voor een notatie die we de rest van deze sectie gaan gebruiken.

Definitie 3.7.1. *(Verzameling welordeningen) Zij $(X, \leq)$ een partieel geordende verzameling. Dan is de verzameling welordeningen van $(X, \leq)$ gedefinieerd door: $C(X, \leq) := \{C \subseteq X \mid C \neq \emptyset,\ (C, \leq) \text{ is keten en welordening}\}$.*

Hierin staat een welordening zoals gebruikelijk voor een verzameling waarvan elke niet-lege verzameling een kleinste element heeft. Merk op dat de singletons zelf een welordening zijn. Dus $C(X, \leq) = \emptyset \iff X = \emptyset$. Deze verzameling gaat ons aardig op weg helpen om een bewijs zonder vorm van keuze te maken, we kunnen immers voor elke keten altijd het kleinste element 'kiezen' zonder gebruik te maken van een axioma buiten ZF.

We schetsen het idee van Manka's originele bewijs. Laten we ten eerste de situatie nemen die de voorwaarden voor de stelling van Caristi beschrijft:

Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en zij $\phi : X \to \mathbb{R}$ een functie die halfcontinu van boven is en waarvan het beeld begrensd is van boven in $\mathbb{R}$. Zij $(X, \leq_X)$ de Brondsted-ordening:

$$x \leq_X y \iff d(x, y) \leq \phi(y) - \phi(x)$$

Manka beweert nu dat de volgende 4 dingen gelden:
i) $\phi : X \to \mathbb{R}$ is monotoon stijgend en ϕ beperkt tot een totaal geordende verzameling van $(X, \leq_X)$ is injectief.
ii) Elke welgeordende keten $C \in C(X, \leq_X)$ is aftelbaar.
iii) Als ϕ begrensd van boven is, dan convergeert elke $C \in C(X, \leq)$ als Cauchy-rij.
iv) Als ϕ halfcontinu van boven is, dan zijn de verzamelingen $(\uparrow x) = \{y \in X | x \leq_X y\}$ gesloten in X.

Manka beschreef bovenstaande 4 beweringen als makkelijk en technisch om te bewijzen in 'Some forms of the axiom of choice'. Hij koos er daarom voor om het bewijs geheel weg te laten. Dit maakt het verifiëren van zijn bewijs stukken lastiger omdat we precies moeten weten welke argumenten hij gebruikt om te zien of er zeker geen vorm van keuze-axioma wordt gebruikt.

We zullen later laten zien dat beweringen i) en iv) in ZF te bewijzen zijn. Eigenschappen ii) en iii) hangen nauw samen: door aan te tonen dat elke welgeordende keten aftelbaar is kan deze als rij geïnterpreteerd worden en het is niet moeilijk om daarna te laten zien dat dit een Cauchy-rij is en vanwege de volledigheid van de metriek convergeert.

Een mogelijk bewijs van ii) zou als volgt zijn: Zij $C \in C(X, \leq)$. Met i) volgt dat $|C| = |\phi(C)|$ en dat $\phi(C)$ een welordening in $\mathbb{R}$ is. We laten zien dat $\phi(C)$ aftelbaar is.

Definieer vervolgens voor alle $a \in \phi(C)$ dat $s(a) = \min(\{b \in \phi(C)|a \leq b\} \setminus \{a\})$. Definieer $A = \{(x, s(x))|x \in \phi(C)\}$ als collectie niet-lege disjuncte intervallen in $\mathbb{R}$. Het is dan duideklijk dat er een injectie is van $\phi(C)$ naar A. Aangezien er een stelling is die zegt dat elk interval van A een rationaal element bevat zou er dan een injectie gemaakt kunnen worden van A naar $\mathbb{Q}$ en we weten dat er een injectie van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{N}$ bestaat. Dus dan zou er een injectie van $\phi(C)$ naar $\mathbb{N}$ is. Dus dan is $\phi(C)$ aftelbaar, dus C ook.

Er is echter een groot probleem met bovenstaande redenering: de injectie van A naar $\mathbb{Q}$ vereist een vorm van keuze-axioma! Echter, doordat Manka zijn bewijs niet heeft uitgewerkt kunnen we niet zonder meer stellen dat zijn bewering onbewijsbaar is in ZF: wellicht heeft hij een hele andere methode gebruikt zonder vorm van keuze. De auteur van deze scriptie ziet geen methode om in ZF zonder vorm van keuze te bewijzen dat elke welgeordende keten aftelbaar is in deze situatie.

Gelukkig is het niet vereist voor het verdere verloop van het bewijs van Manka dat elke keten aftelbaar is, maar het gaat het geheel wel een stuk ingewikkelder maken. We kunnen nu C niet interpreteren als rij en daarom zullen we C als net gaan interpreteren. We moeten laten zien dat C dan als net convergeert. Hiervoor hebben we het begrip Cauchy-net weer nodig zoals eerder gedefinieerd in definitie 3.3.7.

We zullen in de komende stelling aantonen dat elke welgeordende keten een Cauchy-net is en daarom convergeert. We kunnen daarbij niet zomaar zeggen dat vanwege de volledigheid van de metrische ruimte elk Cauchy-net convergeert. De bewijzen die dat in zijn algemeenheid aantonen maken namelijk gebruik van een vorm van keuze-axioma om een Cauchy-rij uit het Cauchy-net te kiezen, vervolgens te zeggen dat de Cauchy-rij naar een limiet convergeert en vervolgens aantonen dat het Cauchy-net naar dezelfde limiet convergeert. Gelukkig geldt in ons specifieke geval wel dat de Cauchy-netten convergeren in ZF omdat we werken met de welgeordende ketens die hier het gebruik van keuze omzeilen.

Stelling 3.7.2. *Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en zij $\phi : X \to \mathbb{R}$ een functie die halfcontinu van boven is en waarvan het beeld begrensd is van boven* *in* $\mathbb{R}$. *Zij* $(X, \leq_X)$ *de Brondsted-ordening:*

$$x \leq_X y \iff d(x,y) \leq \phi(y) - \phi(x)$$

Zij $C \in C(X, \leq_X)$ *een welgeordende keten in* X. *Dan gelden:*
i) ϕ *is monotoon stijgend:* $\forall x, y \in X: \ x \leq_X y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$.
ii) ϕ *beperkt tot een totaal geordende deelverzameling van* X *is injectief.*
iii) $\phi(C) \subseteq \mathbb{R}$ *is een welgeordende keten in* $\mathbb{R}$.
iv) $\forall \epsilon > 0: \ \phi(C) \cap B(\sup(\phi(C)), \epsilon) \neq \emptyset$.
v) $\phi(C)$ *convergeert als net in* $\mathbb{R}$ *naar* $\sup(\phi(C))$.
vi) De rij $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\min\{c \in C | \phi(c) \in B(\sup(\phi(C)), 2^{-n})\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is een Cauchyrij en convergeert naar een zekere limiet* $L \in X$.
vii) C *is een Cauchy-net.*
viii) C *convergeert als net.*

Bewijs. i) Zij $x, y \in X$ zodat $x \leq_X y$. Per definitie van $\leq_X$ geldt: $d(x,y) \leq \phi(y) - \phi(x)$. Aangezien $0 \leq d(x,y)$ per definitie van een metriek, geldt: $0 \leq \phi(y) - \phi(x)$. Dus $\phi(x) \leq \phi(y)$.

ii) Zij $T \subseteq X$ een totaal geordende deelverzameling van X en $\phi_{|T}$ de beperking van ϕ tot T. Dan geldt: $\forall x, y \in T: \ x \leq_X y$ of $y \leq_X x$. Hieruit volgt: $\forall x, y \in T: \ d(x,y) \leq \phi_{|T}(y) - \phi_{|T}(x)$ of $d(y,x) \leq \phi_{|T}(x) - \phi_{|T}(y)$. Zij nu $x, y \in T$ met $\phi_{|T}(x) = \phi_{|T}(y)$. Met het voorgaande volgt nu: $d(x,y) \leq 0$, dus $d(x,y) = 0$, dus $x = y$. Dus $\phi_{|T}$ is injectief.

iii) Zij $\emptyset \neq S \subseteq \phi(C)$. Beschouw $\phi^{-1}(S) \cap C$. We weten dan dat $\forall s \in S \ \exists c \in C: \ \phi(c) = s$. Dus $\phi^{-1}(S) \cap C \neq \emptyset$. Dus $\min(\phi^{-1}(S) \cap C)$ bestaat. Beschouw nu $a = \phi(\min(\phi^{-1}(S) \cap C)) \in S$. We beweren nu dat dit het minimale element is van S. Stel namelijk dat $b \in S$ met $b < a$. We weten dan dat er een $c \in C$ is zodat $\phi(c) = b$. Met ii) volgt dat $\phi_{|\phi^{-1}(S)\cap C}$ injectief is. Omdat met i) geldt dat ϕ monotoon stijgend is volgt nu uit $\phi(c) < \phi(\min(\phi^{-1}(S) \cap C))$ dat $c < \min(\phi^{-1}(S) \cap C)$ terwijl $c \in \phi^{-1}(S) \cap C$. Tegenspraak. Dus a is het minimale element van S. Dus $\phi(C) \subseteq \mathbb{R}$ is een welgeordende keten in $\mathbb{R}$.

iv) We weten dat $\phi(C)$ begrensd is van boven in $\mathbb{R}$, dus $\sup(\phi(C)) \in \mathbb{R}$ bestaat. Zij $\epsilon > 0$. Stel $\phi(C) \cap B(\sup(\phi(C)), \epsilon) = \emptyset$. Dan geldt: $\forall c \in C: \ \phi(c) \leq \sup(\phi(C)) - \frac{\epsilon}{2}$. Maar dan is $\sup(\phi(C)) - \frac{\epsilon}{2}$ ook bovengrens van $\phi(C)$ die strikt kleiner is dan $\sup(\phi(C))$ en dit is in tegenspraak met de definitie van $\sup(\phi(C))$. Dus $\phi(C) \cap B(\sup(\phi(C)), \epsilon) \neq \emptyset$.

v) We interpreteren $\phi(C)$ als net door de ordening op $\mathbb{R}$ te gebruiken voor de gerichte verzameling die nodig is voor netten. Zij $\epsilon > 0$. Met iv) volgt dat: $\phi(C) \cap B(\sup(\phi(C)), \epsilon) \neq \emptyset$. Met iii) kunnen we zeggen: neem $N = \min(\phi(C) \cap B(\sup(\phi(C)), \epsilon))$. Zij $N \leq n \in \phi(C)$. Stel $n \notin B(\sup(\phi(C)), \epsilon)$. Dan $n \leq \sup(\phi(C)) - \epsilon$. Per definitie van N geldt: $N \geq \sup(\phi(C)) - \epsilon$. Dus dan zou $n < N$ en dit geeft een tegenspraak. Dus $\forall n \geq N$ met $n \in \phi(C)$ geldt: $n \in B(\sup(\phi(C)), \epsilon)$. Dus $\phi(C)$ convergeert als net in $\mathbb{R}$ naar $\sup(\phi(C))$.

vi) De rij $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bestaat vanwege iv). Zij $\epsilon > 0$. Omdat $\{2^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ een strikt dalende rij is die naar 0 convergeert geldt: $\exists a \in \mathbb{N}$ zodat $2^{-a} < \epsilon$. Neem $N = a + 1$. Dan $2 \cdot 2^{-N} = 2^{-a}$ en $2^{-N} = 2^{-(a+1)}$. Zij $m, n \geq N$. Dan geldt: $d(\min\{c \in C|\phi(c) \in B(\sup(\phi(C)), 2^{-m})\}, \min\{c \in C|\phi(c) \in B(\sup(\phi(C)), 2^{-n})\}) = d(y_m, y_n) \leq |\phi(y_m) - \phi(y_n)| < 2 \cdot 2^{-\min(m,n)} \leq 2 \cdot 2^{-N} = 2^{-a} < \epsilon$. Dus $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij en omdat hier sprake is van een volledige metrische ruimte convergeert deze rij dus ook naar een zekere limiet L.

vii) We interpreteren C als net door de ordening op X te gebruiken voor de gerichte verzameling die nodig is voor netten. Omdat $\phi(C)$ convergeert in $\mathbb{R}$ is $\phi(C)$ een Cauchy-net in $\mathbb{R}$. Zij $\epsilon > 0$. We weten dat vanaf een zekere $\phi(c) \in \phi(C)$ geldt dat $\forall \phi(a), \phi(b) \geq \phi(c) : \ |\phi(a) - \phi(b)| \leq \epsilon$. Per definitie van $\leq_X$ geldt dan ook $\forall a, b \geq_X c$ met $a, b, c \in C$ geldt dat $d(a, b) \leq |\phi(a) - \phi(b)| \leq \epsilon$. Dus C is een Cauchy-net.

viii) We weten door vi) en vii) nu dat:
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n \geq N : \ d(y_n, L) \leq \epsilon$ en
$\forall \epsilon > 0 \ \exists c \in C$ zodat $\forall a, b \geq_X c : \ d(a, b) \leq \epsilon$.
Zij nu $\epsilon > 0$ en neem $N \in \mathbb{N}$ en $c \in C$ waarvoor bovenstaande voorwaarden gelden. We maken onderscheid tussen twee situaties. Stel dat $\forall n \in \mathbb{N}$ met $y_n \geq_X y_N$ geldt dat $c \geq_X y_n$. Dus: $\forall n \in \mathbb{N}$ met $y_n \geq_X y_N$ geldt dat $c \geq_X \min\{c \in C|\phi(c) \in B(\sup(\phi(C)), 2^{-n})\}$. Dan geldt dat $\phi(c) = \sup(\phi(C))$, dus $c = \max(C)$ bestaat en is in dit geval meteen limiet van C als net. Stel dat $\exists n^* \in \mathbb{N}$ met $y_{n^*} \geq_X y_N$ zodat $c \leq_X y_{n^*}$. Dan geldt $\forall a \geq_X c$ dat $d(a, L) \leq d(a, y_{n^*}) + d(y_{n^*}, L) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Dus ook dan convergeert C als net. $\square$

Bovenstaand bewijs is dus genoeg om het doel dat de beweringen i) t/m iii) hadden te bewijzen (waarbij we ii) en iii) eigenlijk vervangen door de stelling dat elke welgeordende keten convergeert als net, wat later genoeg blijkt te zijn). We zullen nu nog bewering iv) bewijzen met het volgende lemma.

Lemma 3.7.3. *Zij (X, d) een metrische ruimte en zij $\phi : X \to \mathbb{R}$ een functie die halfcontinu van boven is en waarvan het beeld begrensd is van boven in $\mathbb{R}$. Zij $(X, \leq_X)$ de Brondsted-ordening:*

$$x \leq_X y \iff d(x, y) \leq \phi(y) - \phi(x)$$

Dan geldt dat de verzamelingen $(\uparrow x) = \{y \in X | x \leq_X y\}$ gesloten zijn in X.

Bewijs. Zij $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $(\uparrow x)$ die convergeert. Er geldt dan: $\forall n \in \mathbb{N} : \ d(x, y_n) \leq \phi(y_n) - \phi(x)$. Dus $\phi(y_n) \geq d(x, y_n) + \phi(x)$. Dan geldt dus ook: $\lim_{n\to\infty} \phi(y_n) \geq \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) + \phi(x)$. Wegens halfcontinuïteit geldt:

$\phi(\lim_{n\to\infty} y_n) \geq \lim_{n\to\infty} \phi(y_n)$. Dus: $\phi(\lim_{n\to\infty} y_n) \geq \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) + \phi(x)$. Voor een metriek geldt: $\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = d(x, \lim_{n\to\infty} y_n)$. Dus:

$$d(x, \lim_{n\to\infty} y_n) \leq \phi(\lim_{n\to\infty} y_n) - \phi(x)$$

Dus $x \leq \lim_{n\to\infty} y_n$. Dus $(\uparrow x)$ is gesloten. $\square$

Resultaat op dit moment is dat we de doelen die de beweringen die Manka eiste voor het vervolg van het bewijs van de stelling van Caristi bewezen hebben. Voordat we verder gaan zullen we eerst een nieuw begrip moeten introduceren.

Definitie 3.7.4. *(Sup-functie op $C(X, \leq)$) $\sigma : C(X, \leq) \to X$ heet een sup-functie als:*
i) $\sigma(C) = \{\max(C)\}$ als C een maximaal element heeft.
ii) $\forall y \in \sigma(C)$ is y een bovengrens van C.

Het nu volgende lemma is het lemma uit het artikel 'Turinici's fixed point theorem and the axiom of choice' van Manka en de eigenschappen die wij bewezen hebben komen overeen met de voorwaarden van dit lemma. Merk op dat dit lemma algemener is dan we uiteindelijk nodig hebben omdat het over een T_1-topologie gaat, terwijl we in de Caristi-situatie een metriek en dus een T_2-topologie hebben.

Lemma 3.7.5. *Als voor een partieel geordende verzameling $(X, \leq)$ met een T_1-topologie op X de verzamelingen $(\uparrow x) = \{y \in X \mid x \leq y\}$ gesloten zijn en elke keten convergeert als net, dan is de functie $\lim(C) : C(X, \leq) \to P(X)$ (waarbij $P(X)$ staat voor de verzameling deelverzamelingen van X) met $C \mapsto \{x \in X \mid x$ is een limiet van C als net$\}$ een sup-functie op $C(X, \leq)$.*

Bewijs. i) Als $\max(C) \in C$, dan $\max(C) \in \lim(C)$ per definitie van $\lim(C)$. Omdat we werken met een T_1-topologie op X geldt dat $\{\max(C)\}$ gesloten is en dus dat $X \setminus \{\max(C)\}$ open is en dus in het bijzonder een open omgeving is voor elk punt daarin. Aangezien $\forall x \in C : C \cap (\uparrow x) \nsubseteq X \setminus \{\max(C)\}$ geldt $\lim(C) = \{\max(C)\}$.
ii) Zij $y \in \lim(C)$. Dan geldt: $\forall x \in C : y \in \lim(C \cap (\uparrow x))$. Er geldt dat $\lim(C \cap (\uparrow x)) \subseteq (\uparrow x)$ per definitie van lim. Dus $y \in (\uparrow x)$. Dus $x \leq y$. $\square$

We weten nu dat lim een sup-functie op $C(X, \leq)$ is en vanwege de T_2-topologie in het geval van Caristi weten we dat we limieten van netten uniek zijn dus het beeld van $C \in C(X, \leq)$ is een singleton.

We zijn nu bijna klaar om eindelijk het bewijs van Caristi in ZF te geven, maar we hebben eerst nog een dekpuntstelling nodig. Om die dekpuntstelling te kunnen formuleren hebben we eerst een nieuwe definitie nodig.

Definitie 3.7.6. *($\preceq$-relatie) Zij $(X, \leq)$ een partieel geordende verzameling. Zij $Y \subseteq X$ en $Z \subseteq X$. We definiëren de $\preceq$-relatie als volgt: $Y \preceq Z \iff (Y \subseteq Z$ en $\forall z \in Z, y \in Y$ geldt: $z \leq y \Rightarrow z \in Y)$.*

Het volgende lemma zal ons helpen bij de dekpuntstelling van Zermelo die zometeen volgt.

Lemma 3.7.7. *Zij* $(X, \leq)$ *een partieel geordende verzameling en* $F \subseteq C(X, \leq)$ *met de eigenschap dat* $\forall C, D \in F: \ C \preceq D$ *of* $D \preceq C$. *Neem* $E = \bigcup_{C \in F} C$. *Dan geldt:* $E \in C(X, \leq)$ *en* $\forall C \in F: \ C \preceq E$.

Bewijs. Zij $\emptyset \neq T \subseteq E$. We moeten laten zien dat T een kleinste element heeft. We bewijzen dit uit het ongerijmde: stel dat T geen kleinste element heeft. Dan geldt $\forall t \in T \ \exists t' \in T$ zodat $t' < t$. Zij nu $t \in T$, omdat $T \subseteq E$ geldt dat $\exists C \in F$ zodat $t \in C$. Volgens de aanname $\exists t' \in T$ zodat $t' < t$. Er geldt ook: $\exists D \in F$ zodat $t' \in D$. Voor C en D geldt: $C \preceq D$ of $D \preceq C$. In het eerste geval geldt dat $t' \in C$ per definitie van $\preceq$ en in het tweede geval geldt ook dat $t' \in C$ omdat dan $D \subseteq C$. Dus hoe dan ook geldt dat $t' \in C$. Nu geldt dat $t, t' \in C \cap T$ met $t' < t$. Dus $C \cap T$ heeft geen minimaal element. Dit is een tegenspraak met dat C een welordening is. Dus T heeft wel een kleinste element. Dus E is een welordening: $E \in C(X, \leq)$.
Verder moet nog bewezen worden dat $\forall C \in F: \ C \preceq E$. Zij $C \in F$. Het is duidelijk dat $C \subseteq E$ per definitie van E. Zij $c \in C$ en $e \in E$ met $e \leq c$. Dan $\exists D \in F$ zodat $e \in D$. Voor C en D geldt: $C \preceq D$ of $D \preceq C$. In het eerste geval geldt dat $e \in C$ per definitie van $\preceq$ en in het tweede geval geldt ook dat $e \in C$ omdat dan $D \subseteq C$. Dus hoe dan ook geldt dat $e \in C$. Dus $C \preceq E$. □

De nu volgende definitie zullen we zometeen hanteren bij de dekpunstelling van Zermelo.

Definitie 3.7.8. *(g-verzameling) Zij* $(X, \leq)$ *een partieel geordende verzameling waarin elke welgeordende deelverzameling van* X *een kleinste bovengrens heeft. Zij* $f: X \to X$ *met* $\forall x \in X: \ x \leq f(x)$. *Zij* $g: C(X, \leq) \to X$ *met* $C \mapsto f(\sup(C))$. *Dan noemen we* $D \in C(X, \leq)$ *een g-verzameling als* $\forall d \in D: \{d\} = g(\{d' \in D | d' < d\})$.

Dan nu eindelijk de dekpuntstelling van Zermelo.

Stelling 3.7.9. *(Dekpuntsstelling van Zermelo) Zij* $(X, \leq)$ *een partieel geordende verzameling. Als elke welgeordende deelverzameling van* X *een kleinste bovengrens heeft, dan heeft elke* $f: X \to X$ *met* $\forall x \in X: \ x \leq f(x)$ *een vast punt.*

Bewijs. We bewijzen dit uit het ongerijmde: Stel f heeft geen vast punt. Dan geldt $\forall x \in X: \ x < f(x)$. Zij $g: C(X, \leq) \to X$ met $C \mapsto f(\sup(C))$. Zij $C \in C(X, \leq)$. Er geldt nu dat $f(\sup(C)) = g(C) \notin C$. Zij nu C en D g-verzamelingen. We beweren nu dat het volgende geldt: $C \preceq D$ of $D \preceq C$. Neem $W = \bigcup_{B \subseteq X, B \preceq C, B \preceq D} B$. Dan geldt: $W \preceq C$ (want $W \subseteq C$ en als $c \in C$ en $w \in W$ met $c \leq w$ dan $c \in W$ per definitie van $\preceq$ en W) en $W \preceq D$ (analoog) en W is de grootste deelverzameling van X die hieraan voldoet (geldt per definitie van W). We maken onderscheid tussen twee gevallen. Ten eerste:

als $W = C$ of $W = D$ dan zijn we direct klaar want dan geldt $C \preceq D$ of $D \preceq C$. Stel nu dat $W \prec C$ en $W \prec D$. Zij $c \in C, d \in D$ zodat $W = \{c' \in C | c' < c\} = \{d' \in D | d' < d\}$. Omdat C en D g-verzamelingen zijn, geldt: $c = g(W) = d$. Zij $W' = W \cup \{g(W)\}$. Dan is W' ook een g-verzameling en groter dan W met $W' \preceq C$ en $W' \preceq D$. Dat is in tegenspraak met de maximaliteit van W. Dus er geldt hoe dan ook dat $C \preceq D$ of $D \preceq C$. Zij nu $W = \bigcup_{A \text{ is een } g\text{-verzameling}} A$. Dan is dit ook een g-verzameling en het is de grootste g-verzameling, maar $W' = W \cup \{g(W)\}$ is een grotere g-verzameling. Tegenspraak. Dus f heeft wel een vast punt. □

Hiermee is onze voorbereiding rond en kan nu eindelijk het bewijs van Caristi in ZF afgerond worden.

Stelling 3.7.10. *(Caristi) Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en zij $\phi : X \to \mathbb{R}$ een functie die halfcontinu van boven is en waarvan het beeld begrensd is van boven in $\mathbb{R}$. Zij $(X, \leq_X)$ de Brondsted-ordening:*

$$x \leq_X y \iff d(x, y) \leq \phi(y) - \phi(x)$$

Dan heeft elke progressieve $(\forall x \in X : \ x \leq f(x))$ functie $f : X \to X$ een vast punt.

Bewijs. We kunnen nu alles toepassen dat we weten door de voorafgaande stellingen en lemma's in deze sectie. Vanwege stelling 3.7.2 weten we dat elke welgeordende keten $C \in C(X, \leq_X)$ convergeert als net. Omdat hier sprake is van een metrische ruimte, dus een T_2-ruimte, is de limiet van elk convergent net uniek. Bovendien weten we met lemma 3.7.3 dat de verzamelingen $(\uparrow x)$ gesloten zijn. Hierdoor weten we nu ook dat lim een sup-functie is op $C(X, \leq_X)$.

Zij nu $F : C(X, \leq_X) \to C(X, \leq_X)$ een functie met: $C \mapsto C \cup \{f(\lim(C))\}$. Definieer een partiële ordening $\leq_C$ op $C(X, \leq_X)$ door: $A \leq_C B \iff A$ is initieel segment van B. Dan geldt dat F progressief is op $(C(X, \leq_X), \leq_C)$ want $\forall A \in C(X, \leq) : \ A \leq_C A \cup \{f(\lim(A))\}$. Van elke keten in $(C(X, \leq_X), \leq_C)$, die dus weer uit ketens in X bestaat, is de vereniging van deze ketens de kleinste bovengrens ervan in $(C(X, \leq_X), \leq_C)$. Met de dekpuntstelling van Zermelo volgt nu: $\exists C \in C(X, \leq_X) : \ F(C) = C$. Per definitie van F betekent dit dat moet gelden dat: $f(\lim(C)) \in C$ voor C vast punt van F.

Met het feit dat lim een sup-functie op $C(X, \leq_X)$ is volgt: $f(\lim(C)) \leq_X \lim(C)$. Omdat f progressief is geldt: $\lim(C) \leq_X f(\lim(C))$. Dus $f(\lim(C)) = \lim(C)$. Dus f heeft een vast punt.

□

Hoofdstuk 4

Toepassing Caristi-Ekeland-principe

4.1 Dropstelling

Definitie 4.1.1. *(Norm) Zij X een vectorruimte. Een functie $||.|| : X \to \mathbb{R}^+$ is een norm als aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:*
i): $||x|| = 0 \iff x = \mathbf{0}$
ii): $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \; ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$
iii): $\forall x, y \in X : \; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definitie 4.1.2. *(Banach-ruimte) Een Banach-ruimte X is een volledige metrische ruimte met een norm $||.||$ op elementen in X.*

Definitie 4.1.3. *(Afstand van een punt tot een verzameling) Zij (X, d) een metrische ruimte. Zij F een gesloten deelverzameling van X en $x \in X$. De afstand van x tot F (notatie: $dist(x, F)$) is:*

$$dist(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$$

Definitie 4.1.4. *(Drop) Zij X een Banach-ruimte. Zij $z \in X$, $r > 0$ en $y \in X$ zodanig dat $y \notin B(z, r)$ (de open bol met middelpunt z en straal r). Dan is de drop van z, r, y (notatie $D(z, r, y)$) als volgt gedefinieerd:*

$$D(z, r, y) = \{x \in X \mid x = (1 - t)y + tv \text{ voor } t \in [0, 1] \text{ en } v \in B(z, r)\}$$

Lemma 4.1.5. *Zij X een Banach-ruimte. Zij $x_1 \in X$, $r > 0$ en $\mathbf{0} \in X$ zodanig dat $\mathbf{0} \notin B(x_1, r)$. Er geldt: $x_2 \in D(\mathbf{0}, r, x_1) \Rightarrow D(\mathbf{0}, r, x_2) \subseteq D(\mathbf{0}, r, x_1)$.*

Bewijs. Zij $x_2 \in D(\mathbf{0}, r, x_1)$. Dan geldt: er zijn $t \in [0, 1]$ en $v \in B(\mathbf{0}, r)$ zodat $x_2 = (1 - t)x_1 + tv$. Zij nu $a \in D(\mathbf{0}, r, x_2)$. Dan geldt: er zijn $t' \in [0, 1]$

en $v' \in B(\mathbf{0}, r)$ zodat $a = (1-t')x_2 + t'v'$. Het substitueren van x_2 geeft: $a = (1-t')((1-t)x_1 + tv) + t'v' = (1-t')((1-t)x_1 + tv) + t'v' = (1-t')(1-t)x_1 + (1-t')tv + t'v' = (1-t'-t+tt')x_1 + (1-t')tv + t'v'$. Er geldt: $(1-t'-t+tt') \in [0,1]$ en $(1-t')tv + t'v' \in B(\mathbf{0}, r)$ (want $tv \in B(\mathbf{0}, r)$ en de convexe combinatie van tv en v' ligt ook in $B(\mathbf{0}, r)$ omdat die verzameling convex is). Dus $a \in D(\mathbf{0}, r, x_1)$. Dus $D(\mathbf{0}, r, x_2) \subseteq D(\mathbf{0}, r, x_1)$. □

Stelling 4.1.6. *Zij F een gesloten deelverzameling van een Banach-ruimte X en zij z een punt in $X \backslash F$. Zij $0 < r < R < \rho$, waarbij $R = dist(z, F)$. Dan is er een punt $x_0 \in \partial F$ (waarbij ∂F staat voor de rand van F) zodat $||x_0 - z|| \leq \rho$ en $D(z, r, x_0) \cap F = \{x_0\}$.*

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $z = \mathbf{0}$. We definiëren een relatie $\leq$ op de verzameling $E = F \cap B(\mathbf{0}, \rho)$ door: $x_1 \leq x_2 \iff x_2 \in D(\mathbf{0}, r, z)$. Er geldt $\leq$ is een ordening, want:
$E \neq \emptyset$: Aangezien $dist(\mathbf{0}, F) < \rho$ moet er een $x \in F \cap B(\mathbf{0}, \rho)$ zijn.
$\leq$ is reflexief: Er geldt $x_1 \in D(\mathbf{0}, r, x_1)$ per definitie, dus $x_1 \leq x_1$.
$\leq$ is transitief: Er geldt als $x_2 \in D(\mathbf{0}, r, x_1)$ en $x_3 \in D(\mathbf{0}, r, x_2)$ dan geldt $x_3 \in D(\mathbf{0}, r, x_1)$ (volgt uit voorafgaande lemma). Dus $x_1 \leq x_3$.
$\leq$ is antisymmetrisch: Er geldt als $x_2 \in D(\mathbf{0}, r, x_1)$ en $x_! \in D(\mathbf{0}, r, x_2)$ dan geldt $x_1 = x_2$ (volgt uit voorafgaande lemma).

Definieer nu de functie $\phi : E \to \mathbb{R}$ door $x \mapsto \frac{\rho + r}{R - r}||x||$.
Er geldt: $\leq$ is fijner dan $\leq_{d,\phi}$ met $d(x,y) = ||x - y||$.
Zij $x_1 < x_2$. Vanuit de definitie van een drop volgt:

$$\text{Er zijn } t \in [0,1] \text{ en } v \in B(\mathbf{0}, r) \text{ zodat } x_2 = (1-t)x_1 + tv. \tag{4.1}$$

Vanwege bovenstaande hebben we $||x_2|| \leq (1-t)||x_1|| + t||v||$ waardoor $t(||x_1|| - ||v||) \leq ||x_1|| - ||x_2||$. Bovendien geldt: $R - r \leq ||x_1|| - ||v||$. Hieruit volgt dat:

$$t \leq (||x_1|| - ||x_2||)(R - r)^{-1} \tag{4.2}$$

Uit (4.1) volgt dat: $x_2 - x_1 = t(v - x_1)$. Uit voorgaande en (4.2) volgt dat:

$$||x_2 - x_1|| = t||v - x_1|| \leq t(||v|| + ||x_1||) \leq t(r + \rho) \leq (\rho + r)(R - r)^{-1}(||x_1|| - ||x_2||)$$

Volgens de stelling van Ekeland geldt nu dat er een maximaal element x_0 is in $(E, \leq_{d,\phi})$. Er geldt dat ook: $x_0 \in (E, \leq)$. Dus $||x_0|| \leq \rho$ en $\{x_0\} = D(\mathbf{0}, r, x_0) \cap E$, maar dan $\{x_0\} = D(\mathbf{0}, r, x_0) \cap F$ want in $F \backslash E$ geldt dat de norm van de elementen $> \rho$ is.

□

Bibliografie

[1] Roman Mańka, *Some forms of the axiom of choice*, Jahrbuch der Kurt-Gdel-Gesellschaft 1988, pagina's 24 t/m 34.

[2] Roman Mańka, *Turinici's fixed point theorem and the axiom of choice*, Reports on mathematical logic 22, 1988.

[3] Jerrold Siegel, *A new proof of Caristi's fixed point theorem*, Proceedings of the american mathematical society volume 66, nummer 1, september 1977.

[4] Arne Brondsted, *On a lemma of bishop and phelps*, Pacific journal of mathematics volume 55, nummer 2, 1974

[5] Michael Müger, *Topology for the working mathematician*, Nog te verschijnen.

[6] Mohamed A. Khamsi en William A. Kirk, *An introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[7] Norbert Brunner, *Topologische maximalprinzipien*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen d. Mathematik volume 33, pagina's 135 t/m 139, 1987.

[8] Felix E. Browder, *On a theorem of Caristi and Kirk*, Proceedings of the Seminar on Fixed Point Theory and Its Applications, pagina's 23 t/m 27, juni 1975.