



RADBOUD UNIVERSITEIT NIJMEGEN

BACHELORSRIPTIE

---

# Een Inductief Bewijs van de Borsuk-Ulam-Stelling

---

*Auteur:*  
Valijn Verbart

*Begeleider:*  
dr. Michael Müger

9 juli 2014



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Variëteiten en differentiatie</b>	<b>5</b>
1.1	Variëteiten . . . . .	5
1.2	Raakruimte . . . . .	6
1.3	Deelvariëteiten . . . . .	9
1.4	Raakbundel . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Uitwendig product en differentiaalvormen</b>	<b>12</b>
2.1	Multilineaire algebra en het uitwendig product . . . . .	12
2.2	Differentiaalvormen . . . . .	17
2.3	Pullback van differentiaalvormen . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Integratie op een variëteit</b>	<b>20</b>
3.1	Integreren van differentiaalvormen . . . . .	20
3.2	De Stelling van Stokes . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Stelling van Borsuk-Ulam</b>	<b>24</b>
4.1	De voorbereiding . . . . .	24
4.2	Basisstap voor $n=2$ . . . . .	26
4.3	De Inductiestap . . . . .	28
4.4	Basisstap voor $n=3$ . . . . .	30

## Samenvatting

Deze scriptie zal een inductief bewijs geven van de Stelling van Borsuk-Ulam, een stelling uit de topologie. Dit zal worden gedaan aan de hand van een tekst geschreven door Anthony Carbery. Hiervoor is er kennis van differentiaaltopologie nodig. Dit zal behandeld worden in het eerste deel van de scriptie, waarna de basisstappen en de inductiestap van het bewijs van de Stelling van Borsuk-Ulam volgen.

## Introductie

Gezien de titel zal deze scriptie een bewijs geven van de Borsuk-Ulam-stelling via een inductief argument. Dit is een stelling uit de topologie, de vastepunttheorie om preciezer te zijn. Hoewel de stelling niet het bestaan van een vast punt garandeert, is de uitspraak wel soortgelijk. De dekpuntstelling van Brouwer, waarschijnlijk de bekendste vastepuntstelling, is een gevolg van de stelling van Borsuk en Ulam. De uitspraak van de stelling is: voor elke continue functie  $f$  van de  $n$ -dimensionale bol naar  $\mathbb{R}^n$  is er een tweetal punten tegenover elkaar op de bol met gelijke waarde onder  $f$ .

Tegenstrijdig aan wat de naam van de stelling wellicht suggereert, hebben Borsuk en Ulam niet samen aan deze stelling gewerkt. De stelling is voor het eerst geformuleerd door Stanislaw Ulam rond 1930 en drie jaar later bewezen door Karol Borsuk. Beide zijn Poolse wiskundigen maar studeerden en werkten aan verschillende universiteiten.

In latere jaren zijn meerdere bewijzen van de stelling gegeven. Opmerkelijk is dat vanuit vele deelgebieden van de wiskunde bewijzen worden bedacht. Zo bestaat er een bewijs dat gebruik maakt van combinatoriek, een bewijs met een analytische aanpak en een bewijs vanuit de algebraïsche topologie. Het bewijs dat in deze scriptie gegeven zal worden is gebaseerd op differentiaaltopologie. Dit is een deelgebied van de topologie waarin differentieerbare functies worden bestudeerd in plaats van functies die slechts continu zijn. Het eerste deel van deze tekst zal bestaan uit de noodzakelijke definities en stellingen om het bewijs van de Borsuk-Ulam-stelling te kunnen volgen. In het laatste hoofdstuk zal de stelling stap voor stap worden bewezen aan de hand van een tekst geschreven door de Schotse wiskundige Anthony Carbery. Naast dat de vastepuntstelling van Brouwer een gevolg is van de stelling van Borsuk-Ulam, zijn er meer toepassingen. Zo zijn er veel equivalente formuleringen van de Borsuk-Ulam-stelling waarvan de equivalentie makkelijk te bewijzen is. Nadat de stelling van Borsuk-Ulam is bewezen is geeft dit een scala aan stellingen die waar blijken te zijn. Enkele van deze equivalenties zullen hier bewezen worden, maar vooral omdat dat het bewijs van de Borsuk-Ulam-stelling vereenvoudigt.

Wat het bewijs in deze scriptie bijzonder maakt is het feit dat het via inductie naar de dimensie  $n$  gaat. Op het eerste gezicht lijken de uitspraken voor verschillende  $n$  los te staan van elkaar, maar het zal blijken in de inductiestap dat ze toch te relateren zijn. Ook is de inductiestap inzichtelijk doordat er een expliciete constructie wordt gegeven. Hoewel de bol in  $n$  dimensies niet voor te stellen is, is het bewijs te volgen door de bol in 2 dimensies als referentie te nemen.

# 1 Variëteiten en differentiatie

## 1.1 Variëteiten

Sommige topologische ruimtes hebben een structuur die lokaal lijkt op die van  $\mathbb{R}^m$  en hier valt meer over te zeggen dan over algemene topologische ruimtes. Zo is het mogelijk om differentiatie en integratie te definiëren op een zogenaamde variëteit (Engels: manifold). In de volgende definitie zal precies gemaakt worden wat een variëteit is.

**Definitie 1.1.** *Laat  $M$  een topologische ruimte zijn die Hausdorff is en de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft.  $M$  heet een variëteit van dimensie  $m$  als voor elk punt  $p \in M$  er een open omgeving  $U \subset M$  van  $p$  bestaat zodat  $U$  homeomorf is aan een open  $V \subset \mathbb{R}^m$ .*

We zullen de conventie hanteren dat een variëteit genaamd  $M$  dimensie  $m$  heeft en een variëteit genaamd  $N$  dimensie  $n$  heeft.

**Definitie 1.2.** *De variëteitstructuur wordt gegeven door de topologische Hausdorff ruimte  $M$  met de tweede aftelbaarheidseigenschap en een zogenaamde atlas. Een atlas is een verzameling paren  $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  die voldoet aan de volgende eigenschappen:*

- $U_\alpha$  is een open deelverzameling van  $M$  voor alle  $\alpha \in I$ .
- $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ .
- $\kappa_\alpha$  is een homeomorfisme van  $U_\alpha$  naar  $\kappa_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ .

De eerste twee eisen zeggen precies dat  $U_\alpha$  een open overdekking van  $M$  is. Verder heet een element  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$  uit de atlas een kaart. Met een kaart rond  $p$  wordt een kaart  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$  bedoeld zodat  $p \in U_\alpha$  en  $\kappa_\alpha(p) = 0$ .

**Voorbeeld 1.3.** *Het makkelijkste voorbeeld van een variëteit is  $\mathbb{R}$  met de standaardtopologie. Bekend is dat  $\mathbb{R}$  Hausdorff is. Een atlas hiervoor kan  $\{(\mathbb{R}, id)\}$  zijn. Dit is een atlas met maar één kaart. Een andere atlas is  $\{(\mathbb{R}, \kappa), (\mathbb{R}^m, id)\}$  waarbij  $\kappa(x) = x^3$ , met twee kaarten.*

*Een ander voorbeeld is de  $n$ -dimensionale bol  $S^n$  met de deelruimtetopologie van  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Als open overdekking nemen we  $H_{i,\epsilon} = \{x \in S^n \mid \epsilon x_i > 0\}$  waarbij  $\epsilon \in \{+, -\}$ . De bijbehorende afbeeldingen  $\kappa_{i,\epsilon} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zijn de projecties gegeven door  $\kappa_{i,\epsilon}(x) = \kappa_{i,\epsilon}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ . De continuïteit en surjectiviteit van deze afbeeldingen is duidelijk. Ze zijn ook injectief omdat gegeven  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$  het  $i$ -de coördinaat vastligt omdat moet gelden dat  $\|x\| = 1$ . Dat wil zeggen dat  $x$  op het teken na berekend kan worden, dus op de halve bol ligt  $x$  vast. Verder is het beeld van  $\kappa_{i,\epsilon}$  een open  $n - 1$ -dimensionale bal, welke open is in  $\mathbb{R}^n$ .*

Merk op dat  $\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta^{-1} : \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  een goed gedefiniëerde afbeelding is van een deel van  $\mathbb{R}^m$  naar een deel van  $\mathbb{R}^m$ . We noemen dit een coördinatentransformatie. Verder is deze afbeelding een samenstelling van homeomorfismen en dus zelf ook een homeomorfisme. Dit geeft aanleiding voor de volgende definitie.

**Definitie 1.4.** *Zij  $M$  een variëteit.  $M$  heet  $C^k$  als voor alle  $\alpha, \beta \in I$  de bijbehorende transformatie van coördinaten een  $C^k$  afbeelding is in de zin van (multidimensionale)-Calculus.  $M$  heet glad of  $C^\infty$  als voor alle  $\alpha, \beta \in I$  de bijbehorende coördinatentransformatie een  $C^\infty$  afbeelding is.*

**Voorbeeld 1.5.** De eerste atlas van  $\mathbb{R}^n$  die gegeven is in Voorbeeld 1.3 is  $C^\infty$ . De tweede atlas is niet glad omdat  $(id \circ \kappa^{-1})(x) = \sqrt[3]{x}$  en deze is niet differentieerbaar in 0. Dus hoewel het in beide gevallen over  $\mathbb{R}^n$  gaat, hangt het van de atlas af of de variëteit al dan niet glad is.

Vanaf nu zullen we met een maximale atlas werken. Gegeven is een variëteit met atlas  $A$ . De atlas die alle mogelijke kaarten bevat die compatibel zijn met  $A$  is de maximale atlas. Dus het is niet mogelijk om een nieuwe kaart toe te voegen die compatibel is met de andere kaarten uit de maximale atlas.

**Definitie 1.6.** Een afbeelding  $f : M \rightarrow N$  tussen de gladde variëteiten  $M$  en  $N$  heet  $C^\infty$  (of  $C^k$ ) te  $p \in M$  als voor een kaart  $\kappa$  om  $p$  en een kaart  $\lambda$  om  $f(p)$  de afbeelding  $\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}$  een  $C^\infty$  (of  $C^k$ ) afbeelding is. En  $f$  heet glad als hij glad is te  $p$  voor alle  $p \in M$ .

**Lemma 1.7.** De bovenstaande definitie hangt niet af van de keuze van de kaarten  $\kappa$  en  $\lambda$ .

*Bewijs.* Stel  $\kappa$  en  $\kappa'$  zijn kaarten rond  $p$  en  $\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}$  is glad. Dan geldt dat  $\lambda \circ f \circ \kappa'^{-1} = \lambda \circ f \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \kappa'^{-1} = \lambda \circ f \circ \kappa^{-1} \circ (\kappa \circ \kappa'^{-1})$ . Volgens de aanname is  $\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}$  glad en  $\kappa \circ \kappa'^{-1}$  is glad omdat  $M$  een gladde variëteit is. De samenstelling van twee gladde functies is glad, dus ook  $\lambda \circ f \circ \kappa'^{-1}$  is glad. Voor kaarten  $\lambda$  en  $\lambda'$  rond  $f(p)$  is het bewijs vergelijkbaar.  $\square$

**Gevolg 1.8.** Stel  $M$  is een gladde variëteit met atlas  $A$ . Stel  $B \subset A$  zodat voor alle  $p \in M$  er een kaart  $(U_\alpha, \kappa_\alpha) \in B$  bestaat zodat  $p \in U_\alpha$ . Dan is een functie  $f : M \rightarrow N$  glad ten opzichte van  $A \iff f$  is glad ten opzichte van  $B$ .

## 1.2 Raakruimte

Het doel van deze paragraaf is om net als in  $\mathbb{R}^n$  differentiatie te definiëren. Hiervoor is het nodig om te weten wat de raakruimte in een punt aan een variëteit is. We zullen dit bestuderen aan de hand van gladde krommen.

**Definitie 1.9.** Een gladde kromme rond  $p$  is een afbeelding  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  zodat  $\gamma$  glad is en  $\gamma(0) = p$  voor zekere  $\varepsilon > 0$ .

Hierbij wordt het interval  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  gezien als variëteit van dimensie 1 op een triviale manier. Met behulp van Gevolg 1.8 kan worden ingezien dat  $\gamma$  glad is als  $\lambda \circ \gamma$  glad is door  $\kappa = id$  te kiezen en op te merken dat  $((-\varepsilon, \varepsilon), id)$  het hele interval overdekt.

We definiëren een equivalentierelatie op de verzameling van alle gladde krommen door  $p$  door  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2)(t)|_{t=0}$  voor een kaart  $\kappa$ .

**Lemma 1.10.** Dit is onafhankelijk van de keuze van  $\kappa$ .

*Bewijs.* Stel  $\kappa$  en  $\kappa'$  zijn kaarten rond  $p$  en  $\frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2)(t)|_{t=0}$ . Dan geldt dat  $\frac{d}{dt}(\kappa' \circ \gamma_1)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma_1)(t)|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\kappa' \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i} |_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1)|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\kappa' \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i} |_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma_2)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa' \circ \gamma_2)(t)|_{t=0}$ . Dit volgt uit de kettingregel en uit het feit dat  $(\kappa \circ \gamma_1)(0) = 0 = (\kappa \circ \gamma_2)(0)$ .  $\square$

**Definitie 1.11.** Stel dat  $M$  een gladde variëteit is en dat  $p \in M$ . De raakruimte aan  $M$  te  $p$ , genoteerd met  $T_p M$ , is de verzameling

$$\{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \mid \gamma(0) = p, \gamma \text{ glad}\} / \sim.$$

waarbij  $\sim$  de hierboven gedefiniëerde equivalentierelatie is. Voor het gemak zullen de haakjes om een equivalentieklasse aan te geven vaak worden weggelaten.

Als  $M = \mathbb{R}^n$  dan is de raakruimte  $T_p\mathbb{R}^n$  op te vatten als  $\mathbb{R}^n$ . Stel namelijk dat  $\gamma$  een kromme in  $T_p\mathbb{R}^n$  is, dan is de afbeelding  $\gamma \mapsto \frac{d}{dt}\gamma|_{t=0} \in \mathbb{R}^n$  injectief dankzij de uitdeling naar  $\sim$ . Voor de surjectiviteit stel dat  $v \in \mathbb{R}^n$ . Neem dan de kromme  $\gamma(t) = v \cdot t + p$ . Deze wordt afgebeeld op  $v$ . Verder is  $\gamma \mapsto \frac{d}{dt}\gamma|_{t=0}$  lineair zodat dit een isomorfisme van vectorruimten geeft. In een algemene variëteit blijkt dat raakruimtes ook vectorruimtes zijn, maar er geldt niet noodzakelijk dat  $M \cong T_pM$ .

**Propositie 1.12.** *Zij  $M$  een gladde variëteit en  $p \in M$  een punt. Dan kan aan  $T_pM$  de structuur van een vectorruimte worden gegeven.*

*Bewijs.* We beginnen door een optelling en een scalaire vermenigvuldiging te definiëren in  $T_pM$ :  $\gamma_1 + \gamma_2 := \kappa^{-1}(\kappa \circ \gamma_1 + \kappa \circ \gamma_2)$  waarbij de optelling  $\kappa \circ \gamma_1 + \kappa \circ \gamma_2$  als functies van  $\mathbb{R}^n$  naar  $\mathbb{R}^n$  de standaard puntsgewijze optelling is. Merk op dat dit niet van de keuze van  $\kappa$  afhangt omdat  $\kappa^{-1}(\kappa \circ \gamma_1 + \kappa \circ \gamma_2) \sim \kappa'^{-1}(\kappa' \circ \gamma_1 + \kappa' \circ \gamma_2)$ , wat na het uitschrijven van de definitie direct volgt. De scalaire vermenigvuldiging met  $\lambda \in \mathbb{R}$  is  $\lambda \cdot \gamma := \kappa^{-1}(\lambda \cdot \kappa \gamma)$ . Het is duidelijk dat  $\gamma_1 + \gamma_2$  een gladde kromme door  $p$  is omdat het de samenstelling van gladde afbeeldingen is en  $(\gamma_1 + \gamma_2)(0) := \kappa^{-1}((\kappa \circ \gamma_1)(0) + (\kappa \circ \gamma_2)(0)) = \kappa^{-1}(0 + 0) = p$  en net zo voor de scalaire vermenigvuldiging. Het nulelement is de equivalentieklasse van gladde krommen door  $p$  met  $\frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma)|_{t=0} = 0$ . De additieve inverse van  $\gamma(t)$  is  $\gamma(-t)$  want  $\frac{d}{dt}\kappa \circ (\gamma(t) + \gamma(-t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma(t) + \kappa \circ \gamma(-t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma(t))|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma(-t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma(t))|_{t=0} - \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma(t))|_{t=0} = 0$ . De commutativiteit, associativiteit en distributiviteit volgen direct door de definities uit te schrijven. Als voorbeeld zal de distributiviteit over de optelling van krommen hier worden gedaan. Stel dat  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  gladde krommen door  $p$  zijn en  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dan  $\lambda(\gamma_1 + \gamma_2) = \lambda \cdot \kappa^{-1}(\kappa \circ \gamma_1 + \kappa \circ \gamma_2) = \kappa^{-1}(\lambda(\kappa \circ \gamma_1 + \kappa \circ \gamma_2)) = \kappa^{-1}(\lambda(\kappa \circ \gamma_1) + \lambda(\kappa \circ \gamma_2)) = \kappa^{-1}(\lambda(\kappa \circ \gamma_1)) + \kappa^{-1}(\lambda(\kappa \circ \gamma_2)) = \lambda\gamma_1 + \lambda\gamma_2$ . Dus  $T_pM$  is een vectorruimte.  $\square$

In het bovenstaande bewijs is laten zien dat  $T_pM$  de vectorruimte structuur van  $\mathbb{R}^m$  erft. De dimensie blijkt ook hetzelfde te zijn.

**Propositie 1.13.** *De dimensie van  $T_pM$  is  $m$ .*

*Bewijs.* Bekijk de afbeelding  $T_p\kappa : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeven door  $T_p\kappa(\gamma) = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma)|_{t=0}$ . De claim is dat dit een lineair isomorfisme is. De lineariteit volgt uit het feit dat de afgeleide  $\frac{d}{dt}$  lineair is.  $T_p\kappa$  is injectief dankzij de uitdeling naar  $\sim$  in de definitie van de raakruimte. Stel nu voor de surjectiviteit dat  $v \in \mathbb{R}^m$ . Neem dan de kromme  $\gamma = \kappa^{-1}(\kappa(p) + t \cdot v)$ . Dan  $T_p\kappa(\gamma) = \frac{d}{dt}(\kappa(p) + t \cdot v) = v$ . Dus  $T_p\kappa$  is inderdaad een lineair isomorfisme en dus  $\dim T_pM = \dim \mathbb{R}^m = m$ .  $\square$

Het doel is nu om de afgeleide van een afbeelding tussen twee variëteiten te definiëren. Dit zal een lineaire afbeelding tussen de raakruimten worden.

**Definitie 1.14.** *Stel  $f : M \rightarrow N$  is een gladde afbeelding tussen twee variëteiten  $M$  en  $N$  en stel  $p \in M$ . Dan is de raakafbeelding  $T_p f : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  gedefinieerd door  $T_p f([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ . Voor de duidelijkheid zijn hier wel de haakjes van de equivalentieklassen geschreven.*

**Lemma 1.15.** *De bovenstaande definitie is welgedefinieerd, dat wil zeggen:*

1.  $T_p f(\gamma) \in T_{f(p)}N$ .
2. Dit is onafhankelijk van de keuze van  $\gamma$  uit  $[\gamma]$ .

*Bewijs.* 1.  $T_p f(\gamma)(0) = (f \circ \gamma)(0) = f(p)$  en zowel  $f$  als  $\gamma$  is glad, dus ook  $T_p f$  is glad en dus is  $T_p f$  een gladde kromme door  $f(p)$ .



2. Te bewijzen is dat als  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  dan ook  $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ . Stel ook  $\gamma' \in [\gamma]$  en stel  $\lambda$  is een kaart rond  $f(p)$  in  $N$ . Dan  $\frac{d}{dt}(\lambda \circ f \circ \gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}|_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma)|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}|_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma')|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma'))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\lambda \circ f \circ \gamma')|_{t=0}$ . Dan geldt dat  $f \circ \gamma' \in [f \circ \gamma]$ . Dus deze afbeelding is welgedefinieerd. □

Het is gewenst dat de hierboven gedefinieerde afgeleide tussen variëteiten lineair is net als in  $\mathbb{R}^n$ . Merk op dat niet hoeft te gelden dat  $T_p f(\gamma_1 + \gamma_2) = T_p f(\gamma_1) + T_p f(\gamma_2)$ , maar slechts  $T_p f(\gamma_1 + \gamma_2) \sim T_p f(\gamma_1) + T_p f(\gamma_2)$  want  $T_p f$  is alleen gedefinieerd op equivalentieklassen. De lineariteit volgt uit de volgende berekening:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \lambda \circ T_p f(\gamma_1 + \gamma_2)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \lambda \circ T_p f \circ \kappa^{-1}(\kappa \circ \gamma_1 + \kappa \circ \gamma_2)|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}|_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1 + \kappa \circ \gamma_2)|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}|_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \left( \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1)|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2)|_{t=0} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}|_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1)|_{t=0} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}|_{x_1=\dots=x_n=0} \cdot \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \lambda \circ T_p f \circ \kappa^{-1}(\kappa \circ \gamma_1)|_{t=0} + \frac{d}{dt} \lambda \circ T_p f \circ \kappa^{-1}(\kappa \circ \gamma_2)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \lambda \circ T_p f \circ \gamma_1|_{t=0} + \frac{d}{dt} \lambda \circ T_p f \circ \gamma_2|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Elk element uit  $T_p M$  kan geschreven worden als lineaire combinatie van bepaalde gladde krommen. Zij  $p_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  een afbeelding met  $p_i(t) = (0, 0, \dots, t, \dots, 0)$  waarbij  $t$  op de  $i$ -de plek staat. Voor een kaart  $\kappa_\alpha$  rond een punt  $p \in M$  is  $\kappa_\alpha^{-1} \circ p_i$  een gladde kromme rond  $p$ . De  $p_i$  vormen een basis voor  $T_p M$  want elke equivalentieklasse van krommen in  $T_p M$  wordt gegeven door de afgeleide in  $\mathbb{R}^m$ . Omdat  $\frac{d}{dt}(\kappa_\alpha \circ \kappa_\alpha^{-1} \circ p_i)|_{t=0} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$  met de 1 op de  $i$ -de plek geeft dit een basis voor  $\mathbb{R}^m$  en dus geven de krommen  $p_i$  een basis voor  $T_p M$  dankzij het isomorfisme van Propositie 1.12.

**Definitie 1.16.** Een *derivatie* van de algebra  $C^\infty(M)$  is een lineaire afbeelding  $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  zodat  $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$ .

De elementen van  $T_p M$  kunnen gezien worden als derivaties van  $C^\infty(M)$ . Stel  $v \in T_p M$  en  $\gamma \in v$  is een representant van  $v$ . Dan is  $D_\gamma$  een derivatie door  $D_\gamma(f) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)|_{t=0}$ . Dit is onafhankelijk van de keuze van  $\gamma$  uit  $v$  want stel ook  $\gamma' \in v$  en stel dat  $(x_1, \dots, x_n)$  lokale

coördinaten rond  $p$  zijn, dan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t))|_{t=0} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \frac{d\gamma_i}{dt}|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \frac{d(\pi_i \circ \kappa_\alpha \circ \gamma)}{dt}|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \pi_i \left( \frac{d(\kappa_\alpha \circ \gamma)}{dt}|_{t=0} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \pi_i \left( \frac{d(\kappa_\alpha \circ \gamma')}{dt}|_{t=0} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \frac{d(\pi_i \circ \kappa_\alpha \circ \gamma')}{dt}|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \frac{d\gamma'_i}{dt}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma'(t))|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Als we nu als kromme  $p_j$  bekijken, dan volgt dat

$$\begin{aligned}
D_{p_j}(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \kappa_\alpha^{-1} \circ p_j(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \frac{d((\kappa_\alpha^{-1} \circ p_j)_i)}{dt}|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \frac{d(\pi_i \circ \kappa_\alpha \circ \kappa_\alpha^{-1} \circ p_j)}{dt}|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \frac{d(\pi_i \circ p_j)}{dt}|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \pi_i \circ \frac{d(p_j)}{dt}|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p \cdot \delta_{ij} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}|_p.
\end{aligned}$$

Dus  $D_{p_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ . En dus kunnen we  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \mid 1 \leq i \leq m\}$  als basis voor  $T_p M$  zien.

### 1.3 Deelvariëteiten

**Definitie 1.17.** Zij  $M$  een gladde variëteit en zij  $N \subset M$ . Dan heet  $N$  een gladde deelvariëteit van dimensie  $n \leq m$  van  $M$  als er kaarten  $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  zijn die  $N$  overdekken en zodat  $N \cap U_\alpha = \kappa_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$  met  $\{0\} \subset \mathbb{R}^{m-n}$ .

**Definitie 1.18.** Stel  $M$  en  $N$  zijn twee gladde variëteiten en zij  $f : M \rightarrow N$  glad.

- Dan heet  $f$  een immersie te  $p$  als  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  injectief is.

- Dan heet  $f$  een submersie te  $p$  als  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  surjectief is

Deze twee definities lijken op het eerste gezicht weinig met elkaar te maken te hebben. Toch zijn ze te verbinden door een nuttige stelling. Hiervoor hebben we een versie van de impliciete functiestelling nodig. Deze zal zonder bewijs worden gegeven. Voor een bewijs van de inverse functiestelling, zie [8]. Hoe Propositie 1.19 volgt uit de inverse functiestelling is te lezen in [6].

**Propositie 1.19.** *Zij  $f : U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  een gladde afbeelding met  $U$  een open omgeving van  $p$ . Stel dat  $f$  een submersie te  $p$  is. Dan bestaat er een open omgeving  $V$  van  $p$  en een diffeomorfisme  $h : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  met  $W$  open in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  zodat  $f \circ h^{-1} : f^{-1}(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de beperking van de projectie  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is.*

**Stelling 1.20.** *Zij  $f : M \rightarrow N$  een  $C^\infty$  afbeelding tussen twee gladde variëteiten en zij  $q \in N$ . Stel dat  $f$  een submersie te  $p$  is voor alle  $p \in f^{-1}(q)$ . Dan is  $f^{-1}(q)$  een deelvariëteit van  $M$  van dimensie  $m - n$ .*

*Bewijs.* Zij  $p \in f^{-1}(q)$  en zij  $\kappa$  een kaart rond  $p$  en  $\lambda$  een kaart rond  $f(p) = q$ . Dan is  $f$  een submersie  $\iff T_p f$  is surjectief  $\iff T_0(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})$  surjectief is, want  $\kappa^{-1}$  en  $\lambda$  zijn diffeomorfismen. Nu bevinden we ons in de situatie van Propositie 1.19. Dus er is een diffeomorfisme  $h$  dat op zijn domein  $\lambda \circ f \circ \kappa^{-1} \circ h^{-1}$  gelijk is aan de projectie  $\pi : \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Kies nu de kaart  $\kappa' = h \circ \kappa$ . Dan geldt  $\lambda \circ f \circ \kappa'^{-1} = \pi$ . Dus om elk punt  $p \in f^{-1}(q)$  bestaat een kaart  $(U, h \circ \kappa)$  zodat

$$\begin{aligned} (h \circ \kappa)^{-1}(\mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}) &= (h \circ \kappa)^{-1}(\pi^{-1}(0)) \\ &= (h \circ \kappa)^{-1}(h \circ \kappa \circ f^{-1} \circ \lambda^{-1})(0) \\ &= (f^{-1} \circ \lambda^{-1})(0) \\ &= f^{-1}(q) \cap U. \end{aligned}$$

Dus  $f^{-1}(q)$  is een deelvariëteit van  $M$  van dimensie  $m - n$ . □

Deze stelling geeft soms een makkelijkere manier om te laten zien dat een topologische ruimte een variëteit is dan door het geven van een atlas. Het geven van een atlas en het laten zien dat de coördinaattransformaties glad zijn is vaak veel werk. Het volgende voorbeeld geeft een kortere manier dan Voorbeeld 1.3 om te laten zien dat  $S^n$  een gladde variëteit is.

**Voorbeeld 1.21.** *Neem  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  door  $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ . Deze functie is glad en  $f$  is een submersie te  $p$  voor alle  $p \in f^{-1}(1)$ . Dus  $f^{-1}(1) = S^n$  is een gladde deelvariëteit van  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

## 1.4 Raakbundel

**Definitie 1.22.** *Zij  $M$  een gladde variëteit. Definieer de raakbundel  $TM$  van  $M$  als  $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ .*

Op deze manier is de raakbundel alleen gedefinieerd als verzameling. Het is mogelijk om een topologie toe te kennen aan deze verzameling op een manier zodat de raakbundel een variëteit van dimensie  $2m$  wordt en zodat de projectie  $\pi : TM \rightarrow M$  met voor  $\gamma \in T_p M$ :  $\pi(\gamma) = p$  glad is. We hebben al gezien dat  $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . Voor een open deelverzameling  $U \subset \mathbb{R}^n$  geldt dan dat  $TU \cong U \times \mathbb{R}^n = \{(p, v) | p \in U, v \in T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n\}$ .

**Stelling 1.23.** *De raakbundel  $TM$  van een gladde variëteit  $M$  met atlas  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in I}$  is een gladde variëteit van dimensie  $2m$ .*

*Het bewijs van deze stelling gaat in vier stappen:*

1. Definieer een topologie op  $TM$ .
2. Geef een atlas voor  $TM$ .
3. Laat zien dat  $TM$  Hausdorff is.
4. Laat zien dat  $\pi : TM \rightarrow M$  een gladde afbeelding is.

*Bewijs.* 1. Voor een willekeurige gladde variëteit  $N$  met bijbehorende atlas  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in I}$  geldt dat:  $V \subset N$  is open  $\iff V \cap U_\alpha$  is open in  $N$  voor elke  $\alpha \in I \iff$  Voor elke kaart  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$  is  $\kappa_\alpha(V \cap U_\alpha)$  open in  $\mathbb{R}^n$ .

Dus voor  $TM$  moet gelden dat  $V \subset TM$  is open  $\iff T\kappa_\alpha(V \cap TU_\alpha)$  open is in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  voor alle  $\alpha \in I$ , waarbij  $TU_\alpha = \bigsqcup_{p \in U_\alpha} T_p M$  en  $T\kappa_\alpha(p, v) = (\kappa_\alpha(p), T_p \kappa_\alpha(v))$  voor  $p \in M$  en  $v \in T_p M$ . Het is eenvoudig na te gaan dat dit een topologie geeft op  $TM$ :

- $V = \emptyset$  is open omdat  $T\kappa_\alpha(\emptyset \cap TU_\alpha) = T\kappa_\alpha(\emptyset) = \emptyset$  en deze is open in de standaardtopologie op  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Net zo voor  $V = TM$ :  $T\kappa_\alpha(TM \cap TU_\alpha) = T\kappa_\alpha(TM) = \kappa_\alpha(M) \times \mathbb{R}^n$  en dit is open in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
- Stel  $\{V_i\}_{i=1}^n$  zijn open verzamelingen in  $TM$ . Dan is

$$T\kappa_\alpha\left(\bigcap_{i=1}^n V_i \cap TU_\alpha\right) = T\kappa_\alpha\left(\bigcap_{i=1}^n (V_i \cap TU_\alpha)\right) = \bigcap_{i=1}^n T\kappa_\alpha(V_i \cap TU_\alpha)$$

en dit laatste is open in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  voor elke  $\alpha \in I$ .

- Stel dat  $\{V_i\}_{i \in I}$  een collectie open verzamelingen in  $TM$  is. Dan is

$$T\kappa_\alpha\left(\bigcup_{i \in I} V_i \cap TU_\alpha\right) = T\kappa_\alpha\left(\bigcup_{i \in I} (V_i \cap TU_\alpha)\right) = \bigcup_{i \in I} T\kappa_\alpha(V_i \cap TU_\alpha)$$

en dit laatste is weer open in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  voor elke  $\alpha \in I$ .

2. Een atlas voor  $TM$  wordt gegeven door:  $\{(TU_\alpha, T\kappa_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ . Het is duidelijk dat  $TM$  overdekt wordt door de  $TU_\alpha$ .  $T\kappa_\alpha$  is injectief omdat  $\kappa_\alpha$  dat is, dus  $T\kappa_\alpha$  is bijectief op zijn beeld  $T\kappa_\alpha(TU_\alpha)$ . Een bijectie is continu dan en slechts dan als hij open is, dus het is genoeg om te laten zien dat  $V \subset TU_\alpha$  is open  $\iff T\kappa_\alpha(V) \subset U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  open is.

- $\Rightarrow$ )  $T\kappa_\alpha(V) = T\kappa_\alpha(V \cap TU_\alpha)$  en dit is open volgens de definitie van de topologie.
- $\Leftarrow$ ) Stel  $T\kappa_\alpha(V)$  is open in  $U \times \mathbb{R}^n$  en stel  $(U_\beta, \kappa_\beta)$  is een willekeurige kaart uit de atlas voor  $M$ . Dan  $T\kappa_\beta(V \cap TU_\beta) = T(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})T\kappa_\alpha(V \cap TU_\beta)$  en dit laatste is open omdat  $T\kappa_\alpha(V \cap TU_\beta)$  open is en  $T(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})$  is een diffeomorfisme, dus ook een homeomorfisme.

Dus deze atlas maakt  $TM$  een gladde variëteit.

3. Nu moet nog bewezen worden dat  $TM$  Hausdorff is ten opzichte van de gedefinieerde topologie. Stel dat  $v \in T_p M$  en  $w \in T_q M$  met  $v \neq w$ . Stel  $p \neq q$  dan zijn er open  $U$  en  $V$  in  $M$  zodat  $U \cap V = \emptyset$ , waardoor ook  $TU \cap TV = \emptyset$ . Stel  $p = q$  oftewel dat  $v$  en  $w$  uit dezelfde raakruimte komen. Dan geldt dat  $T\kappa_\alpha(v) \neq T\kappa_\alpha(w)$  als elementen van  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  want anders geldt dat  $v = w$ . Bepaal nu open disjuncte omgevingen  $U$  en  $V$  van  $T\kappa_\alpha(v)$  respectievelijk  $T\kappa_\alpha(w)$ . Dit kan omdat  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  een Hausdorffruimte is. Dan zijn  $T\kappa_\alpha^{-1}(U)$  en  $T\kappa_\alpha^{-1}(V)$  open disjuncte omgevingen van  $v$  en  $w$  in  $TM$ . Dus  $TM$  is Hausdorff.

4. Als laatste moet nog worden laten zien dat de afbeelding  $\pi : TM \rightarrow M$  glad is. Deze is glad te  $(v, p)$  precies als  $\kappa_\beta \circ \pi \circ T\kappa_\alpha^{-1}$  glad is voor  $T\kappa_\alpha^{-1}$  een kaart rond  $(p, v) \in TM$  en  $\kappa_\beta$  een kaart rond  $\pi((p, v)) = p$ . Er geldt dat  $\kappa_\beta \circ \pi \circ T\kappa_\alpha^{-1}(0, T_p\kappa_\alpha(v)) = 0$  en de nulafbeelding is zeker glad, dus de projectie  $\pi : TM \rightarrow M$  is glad.  $\square$

**Definitie 1.24.** *Zij  $M$  een gladde variëteit. Dan heet  $X$  een glad vectorveld op  $M$  als  $X$  een sectie is van  $\pi : TM \rightarrow M$ . Dat wil zeggen dat  $X(p) \in T_pM$  en dat dit glad afhankelijk is van  $p$ . De verzameling van gladde vectorvelden op  $M$  wordt genoteerd met  $\mathfrak{X}(M)$ .*

Op  $U \subset \mathbb{R}^n$  is een vector veld  $X$  intuïtief een toekenning van een pijltje aan elk punt van  $U$  zodat de pijltjes qua grootte en richting glad in elkaar over gaan.

**Propositie 1.25.**  *$\mathfrak{X}(M)$  is een  $C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ glad}\}$ -moduul. Dat wil zeggen dat  $\mathfrak{X}(M)$  een vectorruimte is en dat voor  $X \in \mathfrak{X}(M)$  en  $f \in C^\infty(M)$  geldt dat  $f \cdot X \in \mathfrak{X}(M)$ .*

*Bewijs.* Stel  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  en  $x \in M$ . Dan  $((\lambda \cdot X) + Y)(x) = \lambda \cdot X(x) + Y(x)$  waarbij deze laatste  $+$  de optelling in  $T_xM$  is. En  $(f \cdot X)(x) = f(x) \cdot X(x)$ . Het is duidelijk dat deze operaties welgedefinieerd zijn, dat wil zeggen dat  $(f \cdot X)(x)$  en  $((\lambda \cdot X) + Y)(x)$  in  $T_xM$  liggen en dus secties van  $\pi : TM \rightarrow M$  zijn. De eisen van een moduul volgen direct uit de definitie van de optelling en vermenigvuldiging.  $\square$

Een glad vectorveld kan ook op een functie  $f \in C^\infty(M)$  werken door  $X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$  met  $(X(f))(p) = T_p f(X(p))$ . Bedenk hierbij dat  $T_p\mathbb{R} = \mathbb{R}$ . Omdat  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \mid 1 \leq i \leq m\}$  een basis is

voor de raakruimte te  $p$  aan  $M$ , kan elk glad vectorveld geschreven worden als  $X = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$  met  $X_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  een gladde functie. Dus voor  $p \in M$  en  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  geldt dan dat  $X(f)(x) = \sum_{i=1}^m X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p$ .

## 2 Uitwendig product en differentiaalvormen

### 2.1 Multilineaire algebra en het uitwendig product

Gegeven een vectorruimte  $V$  is het mogelijk om een nieuwe vectorruimte te maken van alle multilineaire en alternerende  $n$ -tupels van  $V \times \dots \times V$ . Deze ruimte speelt een belangrijke rol bij het definiëren van differentiaalvormen. Om deze ruimte te definiëren bekijken we eerst het tensorproduct van een vectorruimte.

**Definitie 2.1.** *Stel  $V$  en  $W$  zijn twee vectorruimten. Dan is  $F(V, W)$  de vectorruimte bestaande uit alle lineaire combinaties van paren  $(v, w)$  met  $v \in V$  en  $w \in W$ . En  $R(V, W)$  is de lineaire deelruimte van  $F(V, W)$  opgespannen door*

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$

$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w)$$

$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w).$$

*Definieer het tensorproduct van  $V$  en  $W$  dan door  $V \otimes W = F(V, W)/R(V, W)$ . De restklasse van  $(v, w)$  in  $V \otimes W$  wordt geschreven als  $v \otimes w$ .*

Dankzij de uitdeling is voldaan aan de volgende rekenregels:

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$$

$$(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$$

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, \lambda w).$$

Het tensorproduct heeft een aantal nuttige eigenschappen, waarvan we er hier een paar zullen bestuderen.

**Propositie 2.2.** *Stel  $f : V \times W \rightarrow Z$  is een bilineaire afbeelding. Dan bestaat er een unieke lineaire  $\tilde{f} : V \otimes W \rightarrow Z$  zodat  $\tilde{f}(v \otimes w) = f(v, w)$ .*

*Bewijs.* Er is maar één manier om  $f$  voort te zetten tot een afbeelding  $F(V, W) \rightarrow Z$ , want er moet gelden dat  $\tilde{f}(\sum_{i=1}^n \lambda_i(v_i, w_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i, w_i)$ . Nog te checken is dat  $R(V, W) \subset \ker(f)$ , maar dit volgt uit de bilineariteit van  $f$ .  $\square$

**Gevolg 2.3.** *De eigenschap in Propositie 2.2 legt het tensorproduct op isomorfie na vast.*

*Bewijs.* Stel dat ook  $V \odot W$  voldoet en zij  $g : V \times W \rightarrow V \odot W$ . Dan bestaat er een unieke  $\tilde{g} : V \otimes W \rightarrow V \odot W$  zodat  $\tilde{g}(v \otimes w) = v \odot w$ . Net zo bestaat er een unieke  $\tilde{f} : V \odot W \rightarrow V \otimes W$  met  $\tilde{f}(v \odot w) = v \otimes w$ . Dus  $\tilde{f} \circ \tilde{g}(v \otimes w) = v \otimes w$ . Deze spannen heel  $V \otimes W$  op dus  $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{V \otimes W}$ . Verder moet gelden dat  $v \odot w$   $V \odot W$  opspannen, anders is  $\tilde{f}$  niet uniek. Dus  $\tilde{f}$  en  $\tilde{g}$  zijn lineair en elkaars inverse, dus  $V \otimes W \cong V \odot W$ .  $\square$

**Gevolg 2.4.**  $V \otimes W \cong W \otimes V$ .

*Bewijs.* Bekijk de bilineaire afbeelding  $f : V \times W \rightarrow W \otimes V$  met  $(v, w) \mapsto w \otimes v$ . Dit geeft met behulp van Propositie 2.2 een lineaire afbeelding  $g : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ . Net zo krijgen we een  $h : W \otimes V \rightarrow V \otimes W$  en deze zijn elkaars inversen.  $\square$

**Lemma 2.5.** *Stel  $V$  en  $W$  zijn eindig dimensionale vectorruimten met  $\{e_i\}_{i=1}^n$  een basis voor  $V$  en  $\{f_j\}_{j=1}^m$  een basis voor  $W$ . Dan is een basis van het tensorproduct  $V \otimes W$  gegeven door  $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1, j=1}^{n, m}$ .*

*Bewijs.*  $\{(e_i, f_j)\}$  spannen  $F(V, W)$  op, dus  $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1, j=1}^{n, m}$  spant  $V \otimes W$  op. Voor de onafhankelijkheid neem aan dat  $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j = 0$  en dat er  $1 \leq k \leq n$  en  $1 \leq l \leq m$  zijn zodat  $\lambda_{k,l} \neq 0$ . Definieer dan voor elke  $1 \leq a \leq n$  en  $1 \leq b \leq m$  een functie  $f_{a,b} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  door  $f_{a,b}$  op de basiselementen te definiëren als:

$$f_{a,b}(e_i, f_j) = \begin{cases} 1 & \text{als } i = a \text{ en } j = b \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dit wordt bilineair voortgezet op elementen van  $V \times W$ . Dan is  $f_{a,b}$  bilineair en dus bestaat er volgens Propositie 2.2 een lineaire afbeelding  $\tilde{f}_{a,b} : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$  zodat  $\tilde{f}_{a,b}(v \otimes w) = f_{a,b}(v, w)$ . Dan geldt dat

$$0 = \tilde{f}_{k,l}(0) = \tilde{f}_{k,l}(\sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \tilde{f}_{k,l}(e_i \otimes f_j) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} f_{k,l}(e_i, f_j) = \lambda_{k,l}.$$

Dit is een tegenspraak met de aanname dat  $\lambda_{k,l} \neq 0$  en daarom is  $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1, j=1}^{n, m}$  lineair onafhankelijk en dus een basis voor  $V \otimes W$ .  $\square$

**Propositie 2.6.** *Het tensorproduct is associatief, dat wil zeggen dat  $(X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z)$  voor eindig-dimensionale vectorruimten  $X, Y$  en  $Z$  met bases  $\{x_i\}$ ,  $\{y_j\}$  en  $\{z_k\}$ .*

*Bewijs.* Kies een element  $x \in X$ . Dan is de afbeelding  $f_x : Y \times Z \rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$  gegeven door  $f_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z$  bilineair. Dus dan bestaat er een  $\tilde{f}_x : Y \otimes Z \rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$  met  $\tilde{f}_x(y \otimes z) = f_x(y, z)$  voor alle  $y \in Y$  en  $z \in Z$ . Definieer een afbeelding  $g : X \times (Y \otimes Z) \rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$  door  $g(x, \sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k) = \tilde{f}_x(\sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k)$ . Het is eenvoudig in te zien dat deze afbeelding lineair is in het tweede component. Ook in het eerste component is  $g$  lineair en het is misschien inzichtelijk om dit stap voor stap uit te schrijven:

$$\begin{aligned}
g(x + x', \sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k) &= f_{x+x'}(\sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k) \\
&= \sum_{j,k} \lambda_{j,k} f_{x+x'}(y_j \otimes z_k) \\
&= \sum_{j,k} \lambda_{j,k} f_{x+x'}(y_j, z_k) \\
&= \sum_{j,k} \lambda_{j,k} ((x + x') \otimes y_j) \otimes z_k \\
&= \sum_{j,k} \lambda_{j,k} ((x \otimes y_j) \otimes z_k) + (x' \otimes y_j) \otimes z_k \\
&= \sum_{j,k} \lambda_{j,k} (x \otimes y_j) \otimes z_k + \sum_{j,k} \lambda_{j,k} (x' \otimes y_j) \otimes z_k \\
&= \sum_{j,k} \lambda_{j,k} f_x(y_j, z_k) + \sum_{j,k} \lambda_{j,k} f_{x'}(y_j, z_k) \\
&= \sum_{j,k} \lambda_{j,k} \tilde{f}_x(y_j \otimes z_k) + \sum_{j,k} \lambda_{j,k} \tilde{f}_{x'}(y_j \otimes z_k) \\
&= \tilde{f}_x(\sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k) + \tilde{f}_{x'}(\sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k) \\
&= g(x, \sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k) + g(x', \sum_{j,k} \lambda_{j,k} y_j \otimes z_k).
\end{aligned}$$

Dus Propositie 2.2 geeft een lineaire afbeelding  $\tilde{g} : X \otimes (Y \otimes Z) \rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$ . Net zo kunnen we een afbeelding  $\tilde{h} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$  maken, welke elkaars inversen zijn. Dus  $(X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z)$ .  $\square$

Propositie 2.6 geeft een expliciete afbeelding  $\tilde{h}_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$ . Als deze voldoet aan de vijfhoeksregel van een monoidale categorie, dan is het toegestaan om de haakjes weg te laten in een tensorproduct van willekeurig veel vectorruimten. Dus er moet worden laten zien dat het volgende diagram commuteert.

$$\begin{array}{ccccc}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \xrightarrow{h_{X,Y,Z} \otimes 1_W} & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{h_{X,Y \otimes Z,W}} & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \\
\downarrow \tilde{h}_{X \otimes Y,Z,W} & & & & \downarrow 1_X \otimes \tilde{h}_{Y,Z,W} \\
(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) & \xrightarrow{\tilde{h}_{X,Y,Z \otimes W}} & & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{array}$$

Door de constructie uit Propositie 2.6 van achter naar voren uit te schrijven volgt:

$$\tilde{h}_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = h(x, y \otimes z) = \tilde{f}'_x(y \otimes z) = f'_x(y, z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Het diagram commuteert, want:

$$\begin{aligned} 1_X \otimes \tilde{h}_{Y,Z,W} \circ \tilde{h}_{X,Y \otimes Z,W} \circ \tilde{h}_{X,Y,Z} \otimes 1_W &(((x \otimes y) \otimes z) \otimes w) \\ &= 1_X \otimes \tilde{h}_{Y,Z,W} \circ \tilde{h}_{X,Y \otimes Z,W}((x \otimes (y \otimes z)) \otimes w) \\ &= 1_X \otimes \tilde{h}_{Y,Z,W}(x \otimes ((y \otimes z) \otimes w)) \\ &= x \otimes (y \otimes (z \otimes w)) \\ &= \tilde{h}_{X,Y,Z \otimes W}((x \otimes y) \otimes (z \otimes w)) \\ &= \tilde{h}_{X,Y,Z \otimes W} \circ \tilde{h}_{X \otimes Y,Z,W}(((x \otimes y) \otimes z) \otimes w). \end{aligned}$$

Hierdoor is het gerechtvaardigd om de haakjes weg te laten bij een tensorproduct en dit zal in het vervolg worden gedaan.

**Definitie 2.7.** Zij  $n \geq 1$  een natuurlijk getal en  $V$  een eindig-dimensionale vectorruimte. Definieer het  $n$ -voudig tensorproduct  $V^{\otimes n}$  van  $V$  door  $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ keer}}$ .

**Definitie 2.8.** Zij  $V$  een vectorruimte en  $V^{\otimes n}$  het  $n$ -voudige tensorproduct van  $V$ . Definieer het  $n$ -voudige uitwendige product  $\bigwedge^n V$  van  $V$  door  $\bigwedge^n V = V^{\otimes n}/A(n)$  waarbij

$$A(n) = \{v_1 \otimes \dots \otimes v_n - \text{sgn}(\sigma)v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)} \mid v_i \in V, \sigma \in S_n\}.$$

Een element uit  $\bigwedge^n V$  wordt geschreven als  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ .

Dit betekent dat een element van de vorm  $v_1 \wedge \dots \wedge w \wedge \dots \wedge w \wedge \dots \wedge v_n$  gelijk aan nul is, want door voor  $\sigma$  de verwisseling van de twee  $w$ 's te kiezen geldt

$$v_1 \otimes \dots \otimes w \otimes \dots \otimes w \otimes \dots \otimes v_n + v_1 \otimes \dots \otimes w \otimes \dots \otimes w \otimes \dots \otimes v_n \in A(n).$$

Dus ook  $v_1 \wedge \dots \wedge w \wedge \dots \wedge w \wedge \dots \wedge v_n = 0$ . De haakjes worden weggelaten want het uitwendige product is associatief omdat het tensorproduct dat is. Verder wisselt het teken bij een verwisseling  $v_i$  met  $v_j$  voor  $i \neq j$ .

**Definitie 2.9.** Een afbeelding  $f : V \times \dots \times V \rightarrow W$  heet alternerend als  $f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma)f(v_1, \dots, v_n)$  voor alle  $\sigma \in S_n$ .

Een lineaire afbeelding  $f : \bigwedge^n V \rightarrow \mathbb{R}$  is precies een lineaire alternerende afbeelding  $f : V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{R}$  en dit is precies een alternerende en multilineaire afbeelding  $f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Gegeven een multilineaire afbeelding  $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  is het mogelijk om  $\omega$  alternerend te maken. Er is een canonieke manier om dit te doen:

$$\text{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

De factor  $\frac{1}{n!}$  is niet noodzakelijk, maar zorgt ervoor dat  $\text{Alt}(\omega) = \omega$  voor een alternerende multilineaire afbeelding  $\omega$ .

Voor twee elementen  $\alpha \in (\bigwedge^p V)^*$  en  $\beta \in (\bigwedge^q V)^*$  wordt het uitwendig product  $\alpha \wedge \beta \in (\bigwedge^{p+q} V)^*$  van  $\alpha$  en  $\beta$  gegeven door:

$$(\alpha \wedge \beta) = \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$



Door dit uit te werken volgt dat:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q}) &= \frac{1}{p! \cdot q!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p)}) \otimes \beta(v_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p+q)}) \\ &= \frac{1}{p! \cdot q!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p)}) \cdot \beta(v_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

Uit de associativiteit van het tensorproduct volgt dat het uitwendig product associatief is, dat wil zeggen  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ . Verder is het uitwendig product bilineair en uiteraard alternerend.

**Propositie 2.10.** *Stel  $\omega_1, \dots, \omega_n$  is een basis voor  $V^*$ . Dan is  $B = \{\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$  een basis voor  $(\wedge^p V)^*$ .*

*Bewijs.* Zij  $v_1, \dots, v_n$  de basis van  $V$  dual aan  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Dan geldt dat  $v_i(\omega_j) = \delta_{ij}$ . Stel nu dat  $\omega \in (\wedge^p V)^*$ . Het doel is om  $\omega$  te schrijven als lineaire combinatie van  $\{\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$ . Zij nu  $j_1 < \dots < j_p$ . Dan geldt dat

$$\begin{aligned} \omega(v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_p}) &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}) \cdot \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_p}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}) \cdot \omega_{i_1}(v_{j_1}) \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}(v_{j_p}). \end{aligned}$$

want  $\omega_{i_1}(v_{j_1}) \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}(v_{j_p})$  heeft waarde 1 precies als  $j_k = i_k$  voor alle  $1 \leq k \leq p$  en 0 anders. Dus  $B$  spant  $(\wedge^p V)^*$  op. Voor de onafhankelijkheid stel dat

$$0 = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_p}).$$

Dan geldt dat  $a_{i_1, \dots, i_p} = 0(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}) = 0$  dus de elementen van  $B$  zijn onafhankelijk.  $\square$

**Gevolg 2.11.** *De dimensie van  $(\wedge^p V)^*$  is  $\binom{n}{p}$  als  $\dim(V) = n$ .*

*Bewijs.* De dimensie van  $V$  is gelijk aan de dimensie van  $V^*$ . Er zijn  $\binom{n}{p}$  rijtjes  $i_1 < \dots < i_p$ , dus  $\dim((\wedge^p V)^*) = \binom{n}{p}$ .  $\square$

**Gevolg 2.12.** *Stel  $\alpha \in (\wedge^p V)^*$  en  $\beta \in (\wedge^q V)^*$ . Dan geldt  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{p \cdot q} \beta \wedge \alpha$ .*

*Bewijs.* Schrijf  $\alpha$  en  $\beta$  op de basis van Propositie 2.10. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \right) \wedge \left( \sum_{j_1 < \dots < j_q} a_{j_1, \dots, j_q} \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j_1 < \dots < j_q} a_{i_1, \dots, i_p} a_{j_1, \dots, j_q} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \wedge \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q} \\ &= (-1)^{p \cdot q} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j_1 < \dots < j_q} a_{i_1, \dots, i_p} a_{j_1, \dots, j_q} \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q} \wedge \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \\ &= (-1)^{p \cdot q} \beta \wedge \alpha. \end{aligned}$$

want er zijn  $p \cdot q$  verwisselingen van de basiselementen nodig om  $\beta$  te verplaatsen.  $\square$

**Gevolg 2.13.** *Stel  $p$  is oneven en  $\omega \in (\wedge^p V)^*$ . Dan  $\omega \wedge \omega = 0$ . In het bijzonder geldt dit voor  $p = 1$ .*

## 2.2 Differentiaalvormen

In de vorige paragraaf is voor willekeurige eindig-dimensionale vectorruimten  $V$  gekeken naar het uitwendig product. Als we nu  $V$  vervangen door de raakruimte in een punt aan een variëteit krijgen we een theorie over differentiaalvormen.

**Definitie 2.14.** *Zij  $M$  een gladde variëteit en  $x \in M$ . Een differentiaalvorm van graad  $p$  (ook wel  $p$ -vorm) is een afbeelding  $\omega$  die een punt  $x \in M$  stuurt naar  $\omega_x \in (\bigwedge^p T_x M)^*$ .*

In andere woorden is een differentiaalvorm  $\omega$  van graad  $p$  een multilineaire en alternerende afbeelding  $\omega : \underbrace{TM \times_M \dots \times_M TM}_{p \text{ keer}} \rightarrow \mathbb{R}$  waarbij  $\times_M$  het gevezeld product aangeeft, dat wil zeggen:

$$TM \times_M \dots \times_M TM = \{(a_1, \dots, a_n) \in TM \times \dots \times TM \mid \pi(a_1) = \dots = \pi(a_n)\}$$

waarbij  $\pi : TM \rightarrow M$  de projectie is.

Voor  $p = 1$  is een  $p$ -vorm  $\omega$  een sectie van de coraakbundel  $TM^*$ . Dus  $\omega : M \rightarrow TM^*$ , oftewel  $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$  glad afhankelijk van  $x \in M$  met  $\omega(x, v) = \omega_x(v)$  waarbij  $v \in T_x M$ .

We hebben gezien dat  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \mid 1 \leq i \leq m\}$  lokaal een basis is voor  $T_p M$ . Laat  $\{dx_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  de basis van  $T_p M^*$  dual hieraan zijn. Dan volgt uit Propositie 2.10 dat elke  $p$ -vorm lokaal geschreven kan worden als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

waarbij de  $f_{i_1, \dots, i_p}$  glad zijn. Dus

$$\omega(x)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \omega_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p).$$

De verzameling van alle  $p$ -vormen heet  $\Omega^p(M)$ . Dus  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$  en voor  $k > m = \dim(M)$   $\Omega^k(M) = \{0\}$ . Voor een 0-vorm  $f$  en een  $p$ -vorm  $\omega$  zal vaak  $f\omega$  geschreven worden in plaats van  $f \wedge \omega$ .

**Stelling 2.15.** *Zij  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Dan bestaat er een unieke afbeelding  $d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$  die voldoet aan de volgende eisen:*

1.  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ .
2.  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$  waarbij  $k$  de graad van  $\omega$  is.
3.  $df(X) = X(f)$  voor  $f \in \Omega^0(U)$  en  $X \in \mathfrak{X}(U)$ .
4.  $d(df) = 0$  voor  $f \in \Omega^0(U)$ .

*Bewijs.* Als  $df(X) = X(f)$  dan geldt dat  $df = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$  want

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k(X) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \left( \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_{i=1}^m X_i dx_k \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_{i=1}^m X_i \delta_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} X_k \\ &= X(f). \end{aligned}$$

Stel dat  $\omega \in \Omega^p(M)$ . Schrijf  $\omega$  op de lokale basis:  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ . Dan geldt dat:

$$\begin{aligned} d\omega &= d \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_p} d(f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_p} (df_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} - d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})) \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( df_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} - \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge d(dx_{i_j}) \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &\stackrel{(4)}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{k=1}^m \frac{\partial(f_{i_1, \dots, i_p})}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

Dit laatste is onafhankelijk van  $d$  en dus is deze afbeelding uniek. In het bijzonder is  $d$  uniek gedefinieerd op elk lokaal coördinaatsysteem, en daarom is  $d$  globaal welgedefinieerd als afbeelding  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ .  $\square$

**Definitie 2.16.** De uitwendige afgeleide  $d$  van een  $p$ -vorm is de unieke afbeelding  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$  uit Stelling 2.15.

**Propositie 2.17.** Voor een willekeurige  $p$ -vorm  $\omega$  geldt dat  $d(d\omega) = 0$ .

*Bewijs.* Omdat  $d$  lineair is, is het genoeg om dit te checken voor  $\omega$  van de vorm  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ . Uit het bewijs van Stelling 2.15 volgt dat  $d\omega = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ . Als

we hier  $d$  op toepassen volgt dat:

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p\right) \\
&= \sum_{k=1}^m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p\right) \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_i \wedge dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \\
&= \sum_{i < k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_i \wedge dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p + \sum_{k < i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \\
&= \sum_{i < k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_i \wedge dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p - \sum_{k < i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_i \wedge dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

### 2.3 Pullback van differentiaalvormen

Gegeven een gladde afbeelding  $f : M \rightarrow N$  en een differentiaalvorm  $\omega$  van graad  $p$  op  $N$  is het mogelijk een differentiaalvorm  $f^*(\omega)$  te maken op  $M$ . Dit kan gedaan worden op een canonieke manier door  $\omega$  terug te trekken langs  $f$ .  $f^*(\omega)$  wordt de pullback van  $\omega$  langs  $f$  genoemd.

**Definitie 2.18.** *Zij  $f : M \rightarrow N$  een gladde afbeelding en  $\omega$  een  $p$ -vorm op  $N$ . Stel verder dat  $x \in M$  en  $v_1, \dots, v_p \in T_x M$ . Dan is de pullback van  $\omega$  langs  $f$  gedefinieerd door*

$$f^*(\omega)_x(v_1, \dots, v_p) = \omega_{f(x)}(df(v_1), \dots, df(v_p)).$$

Stel  $\omega \in \Omega^0(N)$  dan  $f^*(\omega)(x) = \omega(f(x))$ . Dus  $f^*(\omega) = \omega \circ f$ . Een mooie eigenschap van de pullback is dat hij commuteert met het de uitwendige afgeleide. Dit is te zien in deel 4 van de volgende propositie.

**Propositie 2.19.** *Stel  $\varphi : M \rightarrow N$  en  $\psi : N \rightarrow P$  zijn twee gladde afbeeldingen tussen gladde variëteiten en  $\omega \in \Omega^p(N)$  en  $\eta \in \Omega^q(N)$ . Dan geldt:*

1.  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$
2.  $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$
3.  $\varphi^*(f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p) = (f \circ \varphi)d(y_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ \varphi)$
4.  $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$

*Bewijs.* 1. Stel  $\alpha \in \Omega^p(P)$ , dan

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)^*(\alpha)_p(v_1, \dots, v_p) &= \alpha_{(\varphi \circ \psi)(p)}(d(\varphi \circ \psi)(v_1), \dots, d(\varphi \circ \psi)(v_p)) \\
&= \alpha_{(\varphi \circ \psi)(p)}(d(\varphi) \circ d(\psi)(v_1), \dots, d(\varphi) \circ d(\psi)(v_p)) \\
&= \varphi^*(\alpha_{\psi(p)}(d(\psi)(v_1), \dots, d(\psi)(v_p))) \\
&= \psi^* \varphi^*(\alpha_p(v_1, \dots, v_p)).
\end{aligned}$$

2. Voor een  $p$ -vorm  $\omega$  en een  $q$ -vorm  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\omega \wedge \eta)_p(v_1, \dots, v_p) &= (\omega \wedge \eta)_{\varphi(p)}(d\varphi(v_1), \dots, d\varphi(v_p)) \\
&= \frac{1}{p! \cdot q!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\varphi(p)}(d\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, d\varphi(v_{\sigma(p)})) \\
&\quad \cdot \eta_{\varphi(p)}(d\varphi(v_{\sigma(p+1)}), \dots, d\varphi(v_{\sigma(p+q)})) \\
&= \frac{1}{p! \cdot q!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \varphi^*(\omega)_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \cdot \varphi^*(\eta)_p(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= (\varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta))_p(v_1, \dots, v_p).
\end{aligned}$$

3. Hier wordt inductief gebruikt gemaakt van 2:

$$\begin{aligned}
\varphi^*(f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p) &= \varphi^*(f) \wedge \varphi^*(dy_1) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dy_p) \\
&= (f \circ \varphi)(dy_1 \circ d\varphi) \wedge \dots \wedge (dy_p \circ d\varphi) \\
&= (f \circ \varphi)d(y_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ \varphi).
\end{aligned}$$

4. Omdat direct uit de definitie van een pullback volgt dat  $\varphi^*(\omega + \eta) = \varphi^*(\omega) + \varphi^*(\eta)$  is het genoeg om dit te checken op  $\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p$ .

$$\begin{aligned}
\varphi^*(d\omega) &= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p) \\
&= d(f \circ \varphi) \wedge d(y_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ \varphi) \\
&= d(f \circ \varphi d(y_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ \varphi)) \\
&= d(\varphi^*(\omega)).
\end{aligned}$$

□

Uit deel 3 van de Propositie 2.19 volgt dat de pullback  $\varphi^*(\omega)$  van een gladde  $p$ -vorm weer glad is, omdat  $f \circ \varphi$  glad is.

## 3 Integratie op een variëteit

### 3.1 Integreren van differentiaalvormen

Het is mogelijk om een  $m$ -vorm te integreren op een variëteit  $M$ . Dit zal in een aantal stappen worden gedaan. Er zal een aantal aannames gemaakt moeten worden om te zorgen dat de integraal van een differentiaalvorm daadwerkelijk bestaat. Net zo als bij integratie over  $\mathbb{R}$  is het mogelijk dat de integraal van een vorm niet eindig is. Verder is het noodzakelijk om een oriëntatie op  $M$  te kiezen.

**Definitie 3.1.** *Zij  $M$  een gladde variëteit. Een oriëntatie op  $M$  is een maximale atlas met de volgende eigenschap: voor elke twee kaarten  $\kappa_\alpha$  en  $\kappa_\beta$  heeft de Jacobimatrix van de coördinaat-transformatie  $\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta^{-1}$  een positieve determinant in elk punt in het domein van  $\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta^{-1}$ .  $M$  heet oriënteerbaar als er zo een atlas bestaat.*

Omdat  $\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta^{-1}$  een afbeelding tussen open delen van  $\mathbb{R}^m$  is, is het eenvoudig na te gaan wat de determinant van de Jacobimatrix is. Verder is  $\mathbb{R}^m$  een oriënteerbare variëteit omdat de kaart  $(\mathbb{R}^m, \operatorname{id})$  al een atlas vormt. Deze wordt uitgebreid tot een oriëntatie door alle kaarten toe te voegen zodat de coördinaattransformaties positieve determinant hebben.

**Definitie 3.2.** Stel  $U \subset \mathbb{R}^m$  en zij  $\omega$  een  $m$ -vorm met compacte drager, dat wil zeggen: er is een compacte verzameling  $K \subset \mathbb{R}^m$  zodat  $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \omega_x \neq 0\} \subset K$ . Omdat  $\omega$  een  $m$ -vorm is, is hij te schrijven als  $\omega = f(x_1, \dots, x_m)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ . Definieer de integraal van  $\omega$  over  $U$  door

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \omega = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Vanuit calculus is bekend hoe deze laatste integraal uit te rekenen is.

**Lemma 3.3.** Zij  $\omega$  een differentiaalvorm van graad  $m$  op  $M$ , en stel dat  $M$  oriënteerbaar is. Zij  $\varphi : V \rightarrow U$  een diffeomorfisme tussen open delen van  $\mathbb{R}^m$ . Dan

$$\int_V \varphi^*(\omega) = \int_U \omega.$$

*Bewijs.* Dankzij Propositie 2.19 is bekend dat  $\varphi^*(\omega) = (f \circ \varphi)d(x_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(x_m \circ \varphi)$ . Verder geldt dat

$$d(x_i \circ \varphi) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(x_i \circ \varphi)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^m J_{ij}(\varphi) dx_j.$$

waarbij  $J_{ij}(\varphi)$  notatie is voor de  $i, j$ -de plek in de Jacobimatrix van de coördinaattransformatie  $\varphi$ . Dan geldt

$$\begin{aligned} d(x_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(x_m \circ \varphi) &= \left( \sum_{j_1=1}^m J_{1j_1}(\varphi) dx_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j_m=1}^m J_{mj_m}(\varphi) dx_{j_m} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} J_{1\sigma(1)}(\varphi) \cdot \dots \cdot J_{m\sigma(m)}(\varphi) dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(m)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) J_{1\sigma(1)}(\varphi) \cdot \dots \cdot J_{m\sigma(m)}(\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \\ &= \det(J_{ij}(\varphi)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

Dit invullen in de integraal geeft

$$\begin{aligned} \int_V \varphi^*(\omega) &= \int_V (f \circ \varphi) \det(J_{ij}(\varphi)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x_1, \dots, x_m)) \det(J_{ij}(\varphi)) dx_1 \dots dx_m. \end{aligned}$$

Omdat de determinant van de Jacobiaan positief is, staat hier volgens de substitutieregel precies

$$\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_U \omega.$$

□

**Definitie 3.4.** Stel nu dat  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$  een kaart is uit de atlas van  $M$  en stel dat  $\omega$  een  $m$ -vorm op  $\mathbb{R}^m$  met drager binnen  $\kappa_\alpha(U_\alpha)$  is. Definieer dan de integraal van  $\omega$  op  $M$  als:

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^m} (\kappa_\alpha^{-1})^* \omega.$$

Er moet nog gecheckt worden dat dit welgedefinieerd is, dus er moet nog nagegaan worden dat de definitie niet afhangt van de keuze van de kaart  $\kappa_\alpha$ . Stel dat  $(U_\beta, \kappa_\beta)$  een andere kaart is zodat de drager van  $\omega$  bevat is in  $U_\beta$ . Dan geldt dat  $\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta^{-1}$  een diffeomorfisme is tussen open delen van  $\mathbb{R}^m$ . Dan geldt dat

$$\int (\kappa_\alpha^{-1})^* \omega = \int (\kappa_\beta^{-1} \circ \kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})^* \omega = \int (\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})^* \circ (\kappa_\beta^{-1})^* \omega = \int (\kappa_\beta^{-1})^* \omega.$$

De laatste gelijkheid volgt uit Lemma 3.3 met  $\varphi = \kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}$ .

Het doel is nu om voor algemene  $m$ -vormen de integraal over  $M$  te definiëren. Hiervoor zijn er partities van de eenheid nodig. Hierbij komt de tweede aftelbaarheidseigenschap van  $M$  van pas.

**Definitie 3.5.** *Zij  $M$  een gladde variëteit en zij  $\{U_i\}_{i \in I}$  een open overdekking van  $M$ . Dan heet  $\{V_j\}_{j \in J}$  een verfijning van  $\{U_i\}_{i \in I}$  als  $\{V_j\}_{j \in J}$  een open overdekking is van  $M$  en als voor elke  $j \in J$  er een  $i \in I$  bestaat zodat  $V_j \subset U_i$ .*

**Definitie 3.6.** *Zij  $M$  een gladde variëteit en zij  $\{U_i\}_{i \in I}$  een open overdekking van  $M$ . Dan is  $\{\rho_j : U_j \rightarrow [0, 1]\}_{j \in J}$  een gladde partitie van de eenheid ten opzichte van  $\{U_i\}_{i \in I}$  als aan de volgende eigenschappen is voldaan:*

- *Er bestaat een verfijning  $\{V_j\}_{j \in J}$  van  $\{U_i\}_{i \in I}$  waarvoor geldt dat de drager van  $\rho_j$  bevat is in  $V_j$  voor elke  $j \in J$ .*
- *Voor elk punt  $p \in M$  geldt  $\sum_{j \in J} \rho_j(p) = 1$ .*
- *Elk punt  $p \in M$  heeft een open omgeving die slechts eindig veel  $V_j \neq \emptyset$  snijdt.*

**Stelling 3.7.** *Zij  $M$  een gladde variëteit en zij  $\{U_i\}_{i \in I}$  een open overdekking van  $M$ . Dan bestaat er een partitie van de eenheid ten opzichte van  $\{U_i\}_{i \in I}$ .*

Voor een bewijs van Stelling 3.7 zie [1]. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het feit dat een variëteit de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft.

Stel nu dat  $\omega$  een  $m$ -vorm op  $M$  is met compacte drager. Zij  $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  een maximale atlas van  $M$ . Bepaal een gladde partitie van de eenheid  $\rho_i$  ten opzichte van  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

**Definitie 3.8.** *De integraal van  $\omega$  over de oriënteerbare variëteit  $M$  wordt gedefinieerd als*

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^m} \rho_i \omega.$$

Omdat  $\rho_i \omega$  drager heeft binnen een kaartomgeving bevinden we ons in het geval van Definitie 3.4.

Er moet worden laten zien dat dit onafhankelijk is van de keuze van de partitie van de eenheid. Stel nu dat  $\psi_j$  ook een partitie van de eenheid ten opzichte van  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  is. Dan geldt er:

$$\sum_i \int \rho_i \omega = \sum_i \int \sum_j \psi_j \rho_i \omega = \sum_i \sum_j \int \rho_i \psi_j \omega = \sum_j \int \sum_i \rho_i \psi_j \omega = \sum_j \int \psi_j \omega.$$

De sommen kunnen over oneindig veel  $i$ 's en  $j$ 's lopen, maar omdat elk punt  $p \in M$  een omgeving heeft zodat slechts eindig veel  $\rho_i$  en  $\psi_j$  niet nul zijn, sommeren we hier over eindig veel niet-nul termen. Verder is de integraal eindig omdat de drager van  $\omega$  binnen een compacte verzameling ligt. Dit rechtvaardigt de verwisseling van de integraal en de sommen.

### 3.2 De Stelling van Stokes

De Stelling van Stokes legt een connectie tussen de uitwendige afgeleide van een differentiaalvorm en de rand van een variëteit. Variëteiten met rand zijn een generalisatie van algemene variëteiten.

**Definitie 3.9.** *Zij  $M$  een topologische ruimte die Hausdorff is en de tweede aftelbaarheidseigenschap heeft.  $M$  heet een variëteit met rand (van dimensie  $m$ ) als voor elk punt  $p \in M$  er een open omgeving  $U \subset M$  van  $p$  bestaat zodat  $U$  homeomorf is aan een open  $V \subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ . De rand  $\partial M$  van  $M$  wordt gegeven door  $\bigcup_{\alpha \in I} \kappa_\alpha^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1})$ .*

Gegeven een atlas  $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  voor  $M$  is er een canonieke atlas voor  $\partial M$ , namelijk  $\{(U_\alpha \cap \partial M, \kappa_\alpha \upharpoonright_{\partial M \cap U_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ . Dus  $\partial M$  is een deelvariëteit van  $M$  van dimensie  $m - 1$ . Het blijkt dat als  $M$  oriënteerbaar is, dat  $\partial M$  dat dan ook is.

**Propositie 3.10.** *Zij  $M$  een gladde oriënteerbare variëteit. Dan is er een canonieke oriëntatie op  $\partial M$ .*

*Bewijs.* Kies een geöriënteerde atlas op  $M$ . Dan is de hierboven gegeven atlas voor  $\partial M$  geöriënteerd, want de Jacobimatrix behorende bij de coördinaattransformatie  $\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1} : \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$  wordt gegeven door een matrix van de vorm

$$J' = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})_1}{\partial x_1} & 0 \\ * & J(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Dit is zo omdat het beeld van een element op de rand van  $M$  weer op de rand van  $M$  ligt. Dit geeft nullen op de eerste rij. Nu geldt dat

$$\det(J') = \det \left( J(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}) \cdot \frac{\partial(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})_1}{\partial x_1} \cdot \det(J(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})).$$

Dit laatste is positief, want  $\frac{\partial(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})_1}{\partial x_1} > 0$  en per aanname is de determinant van  $J(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})$  positief. Dus deze atlas is inderdaad geöriënteerd en dus is  $\partial M$  oriënteerbaar.  $\square$

**Stelling 3.11** (Stelling van Stokes). *Zij  $M$  een oriënteerbare variëteit met rand,  $\omega$  een  $n - 1$ -vorm op  $M$  met compacte drager en  $i : \partial M \rightarrow M$  de inclusie. Dan geldt:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*(\omega).$$

*Bewijs.* Eerst nemen we aan dat de drager van  $\omega$  binnen een coördinaatomgeving  $U$  ligt, met bijbehorende kaart  $\kappa$ . Daarna kan dit uitgebreid worden naar het algemene geval. Het is nuttig om op te merken dat de drager van  $d\omega$  gelijk is aan de drager van  $\omega$ , waardoor duidelijk is dat de integraal aan de linkerkant welgedefinieerd is. Het is genoeg om de stelling te bewijzen voor  $\omega = f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$  omdat beide kanten de gelijkheid lineair zijn in  $\omega$ . Hierbij geeft  $\hat{dx}_i$  aan dat deze niet in het uitwendig product voorkomt, waardoor deze schrijfwijze van  $\omega$  inderdaad nog een  $n - 1$ -vorm is. Voor  $d\omega$  geldt dan:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

We onderscheiden twee gevallen. Geval 1:  $U \cap \kappa(\partial M) = \emptyset$  en geval 2:  $U \cap \kappa(\partial M) \neq \emptyset$ .



Geval 1. Stel  $U \cap \kappa(\partial M) = \emptyset$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^m} (-1)^{i-1} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_i \dots dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \hat{d}x_i \dots dx_n. \end{aligned}$$

Voor  $a$  en  $b$  groot genoeg geldt dat  $f(a) = f(b) = 0$ , dus  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} dx_j \right) = 0$  en dus ook  $\int_{\mathbb{R}^m} d\omega = 0$ . De rechterkant in de stelling is ook gelijk aan 0 omdat er geïntegreerd wordt over  $U \cap \kappa(\partial M) = \emptyset$  en dit geeft natuurlijk de waarde 0.

Geval 2. Stel  $U \cap \kappa(\partial M) \neq \emptyset$ .

$$\int_{\mathbb{R}^m} d\omega = (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{-\infty}^x \left( \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \hat{d}x_i \dots dx_n.$$

Voor  $i \neq 1$  heeft  $x$  waarde  $\infty$  en is de waarde van de integraal weer 0. Ook  $\int_{U \cap \kappa(\partial M)} i^*(\omega)$  is dan nul omdat  $i^*(\omega) = 0$  omdat de eerste coördinaat 0 is op de rand van  $M$ . Dit laat nog één geval over:  $U \cap \kappa(\partial M) \neq \emptyset$  en  $i = 1$ . Dan geldt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} [f(x_1, \dots, x_n)]_{x_1=-\infty}^{x_1=0} dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(x_1, \dots, x_n)|_{x_1=0} dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f \upharpoonright_{(U \cap \kappa(\partial M))} dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \omega \upharpoonright_{(U \cap \kappa(\partial M))} \\ &= \int_{(U \cap \kappa(\partial M))} i^*(\omega). \end{aligned}$$

Het is nu dus bewezen dat de stelling waar is voor differentiaalvormen op  $\mathbb{R}^m$  met drager binnen een coördinaatgeving. Voor het algemene geval is er een partitie van de eenheid  $\{\rho_i\}$  ten opzichte van de overdekking van  $M$  met kaarten  $\{(U_i, \kappa_i)\}$  nodig. De drager van  $\rho_i$  ligt nu binnen  $U_i$ . Uiteindelijk geldt dan:

$$\int_M d\omega = \int_M d\left(\sum_i \rho_i \omega\right) = \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) = \sum_i \int_{\partial M} i^*(\rho_i \omega) = \int_{\partial M} i^*\left(\sum_i \rho_i \omega\right) = \int_{\partial M} i^*(\omega).$$

□

## 4 Stelling van Borsuk-Ulam

### 4.1 De voorbereiding

Dit hoofdstuk is gebaseerd op een artikel van Anthony Carbery [2]. Er zijn veel equivalente formuleringen van deze stelling, voor een aantal hiervan zie [3]. De formulering zoals bedacht door Ulam is als volgt:

**Stelling 4.1** (Borsuk-Ulam). *Zij  $n \geq 1$  een natuurlijk getal en  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  een continue functie. Dan bestaat er een  $x \in S^n$  zodat  $f(x) = f(-x)$ .*

In andere woorden staat hier dat er twee punten tegenover elkaar op de  $n$ -dimensionale bol zijn, die gelijke waarde onder  $f$  hebben. De bedoeling is om dit met inductie naar  $n$  te bewijzen. Voor  $n = 1$  is het bewijs makkelijk.

**Propositie 4.2** ( $n = 1$ ). *De Borsuk-Ulam-stelling is waar voor  $n = 1$ .*

*Bewijs.* Stel  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  is continu. Definieer  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  door  $g(x) = f(x) - f(-x)$ . Voor alle  $x \in S^1$  geldt dan  $g(-x) = -g(x)$ . Neem  $(0, 1)$  en  $(0, -1)$  op de cirkel. Dan  $g((0, 1)) = -g((0, -1))$ . Door de gesloten bovenste helft van de cirkel te identificeren met  $[-1, 1]$  kunnen we de tussenwaardstelling toepassen. Voor een bewijs van de tussenwaardstelling, zie [9]. Hieruit volgt dat er een  $x_0 \in S^1$  bestaat zodat  $g(x_0) = 0$ . Uit de definitie van  $g$  volgt dat  $f(x_0) = f(-x_0)$ .  $\square$

De inductiestap van het bewijs zal aannemen dat  $n \geq 4$  waardoor de gevallen  $n = 2$  en  $n = 3$  ook moeten worden bewezen. Het volgende lemma geeft de mogelijkheid om een sterkere aanname te maken in de stelling van Borsuk-Ulam.

**Lemma 4.3.** *Stel dat de stelling van Borsuk-Ulam waar is voor gladde functies  $f$ . Dan is de stelling ook waar voor continue functies.*

*Bewijs.* Zij  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  een continue functie. Met behulp van de stelling van Stone-Weierstraß is het mogelijk  $f$  uniform te benaderen met een rij gladde functies  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , voor een bewijs zie [7]. Voor alle  $m$  is het nu mogelijk een  $x_m$  te bepalen zodat  $f_m(x_m) = f_m(-x_m)$ . Omdat  $S^n$  een compacte deelverzameling van  $\mathbb{R}^{n+1}$  is, bestaat er een deelrij van  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  die convergeert naar een zekere waarde  $x$ . Dan  $f_m(x_m) = (f_m(x_m) - f(x_m)) + f(x_m)$  waarbij de eerste term aan de rechterkant van het gelijkteken willekeurig klein is voor grote  $m$ . Door aan beide kanten de limiet  $m \rightarrow \infty$  te nemen volgt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = f(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m) = f(x).$$

Hierbij is de continuïteit van  $f$  gebruikt in de tweede gelijkheid. Op analoge wijze:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(-x_m) = f(-x).$$

En dus voldoet het punt  $x$  aan  $f(x) = f(-x)$ .  $\square$

Vanaf nu zal er een andere formulering van de Borsuk-Ulam-stelling gebruikt worden. De volgende propositie zal laten zien dat de twee formuleringen equivalent zijn, maar nu volgt eerst een definitie.

**Definitie 4.4.** *Een functie  $f : S^n \rightarrow S^m$  heet equivariant als  $f(x) = f(-x)$  voor alle  $x \in S^n$ .*

**Propositie 4.5.** *De stelling van Borsuk-Ulam is waar dan en slechts dan als er geen gladde equivariante  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  bestaat.*

*Bewijs.*  $\Rightarrow$  Stel dat de Borsuk-Ulam-stelling waar is. Bepaal een  $x$  zodat  $f(x) = f(-x)$ . Maar dit is vanwege de equivariantie-eis gelijk aan  $-f(x)$  en dus is  $f(x)$  gelijk aan nul. Daarom heeft elke gladde equivariante afbeelding  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  een nulpunt. Omdat  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  moet elke gladde equivariante  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  een nulpunt hebben, maar  $0 \notin S^{n-1}$ . Dus zo een afbeelding kan niet bestaan.

⇐ Stel dat de stelling van Borsuk-Ulam niet waar is. Vanwege Lemma 4.3 mogen we aannemen dat er dan een gladde  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bestaat zodat  $f(x) \neq f(-x)$  voor alle  $x \in S^n$ . Definieer  $h : S^n \rightarrow S^{n-1}$  door:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Deze functie is welgedefinieerd omdat  $f(x) \neq f(-x)$ , glad en omdat er gedeeld wordt door de norm ligt  $h(x) \in S^{n-1}$ . Ook is  $h$  equivariant want:

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{|f(-x) - f(x)|} = \frac{-(f(x) - f(-x))}{|-1| \cdot |f(x) - f(-x)|} = -h(x).$$

Dit spreekt de aanname tegen en dus moet de Borsuk-Ulam-stelling waar zijn. □

Definieer de  $n$ -dimensionale schijf door  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ . Er geldt dat  $\partial\mathbb{D}^n = S^{n-1}$  en  $\mathbb{D}^n \cong S_+^n = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Er is nog een nuttige formulering die equivalent is aan de Borsuk-Ulam-stelling. Deze zegt dat er geen gladde afbeelding  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$  bestaat die equivariant is op  $\partial\mathbb{D}^n = S^{n-1}$ .

**Propositie 4.6.** *Er bestaat geen gladde afbeelding  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$  die equivariant is op  $\partial\mathbb{D}^n = S^{n-1}$  dan en slechts dan als er geen gladde equivariante  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  bestaat.*

*Bewijs.* ⇒ Stel  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  is een gladde equivariante afbeelding. Dan is  $f|_{S_+^n}$  glad en equivariant op  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_1 = 0\}$ . Identificeren we  $S_+^n$  met  $\mathbb{D}^n$ , dan geeft dit een gladde equivariante afbeelding  $g : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$ . Dus zo een  $f$  kan niet bestaan.

⇐ Stel er bestaat een gladde afbeelding  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$  die equivariant is op  $\partial\mathbb{D}^n = S^{n-1}$ . Dan is deze uniek voort te zetten tot een gladde equivariante afbeelding op  $S^n$  door voor  $x \in S_-^n$  te definiëren dat  $f(x) = -f(-x)$ . Dit geeft een gladde equivariante afbeelding  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ . □

## 4.2 Basisstap voor n=2

**Propositie 4.7.** *Er bestaat geen gladde  $g : \mathbb{D}^2 \rightarrow S^1$  waarvoor geldt dat  $g|_{S^1}$  equivariant is.*

*Bewijs.* Stel dat er wel zo een  $g$  bestaat en beschouw

$$\int_{\mathbb{D}^2} \det(Jg) = \int_{\mathbb{D}^2} dg_1 \wedge dg_2.$$

Omdat  $Jg$  de  $2 \times 2$ -Jacobimatrix is van  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  geldt dat  $\det(Dg) = 0$  omdat de rang van  $Dg$  hoogstens 1 kan zijn doordat het beeld van  $g$  1-dimensionaal is. Passen we aan de rechterkant de Stelling van Stokes toe, dan volgt dat:

$$\int_{\mathbb{D}^2} dg_1 \wedge dg_2 = \int_{S^1} g_1 dg_2 = - \int_{S^1} g_2 dg_1.$$

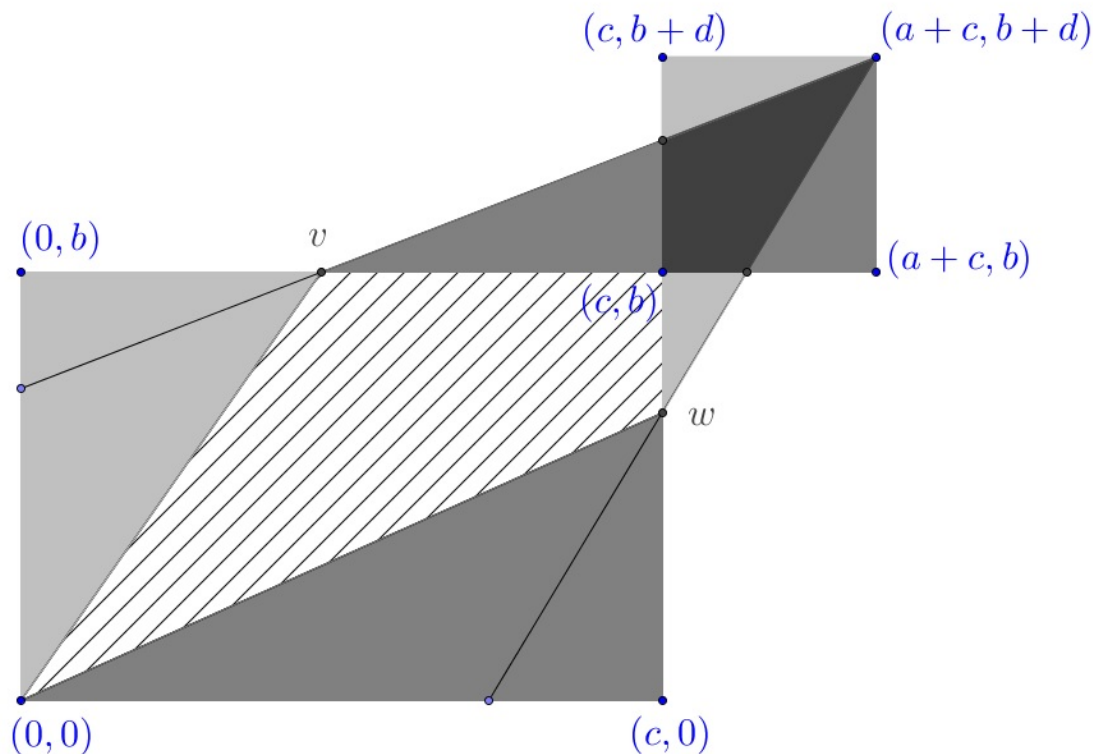
Het is dus genoeg om te laten zien dat:

$$\int_{S^1} g_1 dg_2 - g_2 dg_1 \neq 0.$$

Oftewel dat voor  $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$  met de eigenschap  $g(t + \frac{1}{2}) = -g(t)$  voor alle  $t \in [0, 1]$  geldt dat

$$\int_0^1 (g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t))dt \neq 0.$$

Omdat  $|g(t)|^2 = 1$  voor alle  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  geldt dat  $2\langle g(t), g'(t) \rangle = 2\langle g(t), \frac{d}{dt}g(t) \rangle = \langle g(t), \frac{d}{dt}g(t) \rangle + \langle \frac{d}{dt}g(t), g(t) \rangle = \frac{d}{dt}\langle g(t), g(t) \rangle = \frac{d}{dt}|g(t)|^2 = 0$ . Dus  $\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$  staat loodrecht op  $\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix}$  voor alle  $t \in [0, 1]$ .



Figuur 1: Een intuïtieve voorstelling van de determinant.

De oppervlakte van het parallellogram  $(0,0), v, w, (v_2, w_1)$  opgespannen door twee vectoren  $v$  en  $w$  uit  $\mathbb{R}^2$  wordt gegeven door  $\pm \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . Een informeel maar inzichtelijk bewijs hiervan is te zien in Figuur 1, zie ook [5]. In het geval van  $\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix}$  weten we dat deze loodrecht op elkaar staan, en dat de oppervlakte van het parallellogram dus gegeven wordt door  $\pm |g(t)| \cdot |g'(t)| = \pm |g'(t)|$ . Het nut van deze berekening wordt duidelijk uit de volgende integraal:

$$\pm \int_0^1 |g'(t)|dt = \int_0^1 \det(g(t), g'(t)) = \int_0^1 (g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t))dt.$$

Dus de gezochte integraal is gelijk aan de lengte van de kromme  $g$  op een teken na. Uit de equivariantieconditie van  $g$  volgt dat:

$$\int_0^1 (g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t))dt = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} (g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t))dt.$$

De afgelegde afstand van  $(g_1(0), g_2(0))$  naar  $(g_1(\frac{1}{2}), g_2(\frac{1}{2}))$  is een oneven veelvoud van  $\pi$ , dus in het bijzonder is de integraal aan de rechterzijde ongelijk aan nul. Dus er bestaat geen gladde  $g : \mathbb{D}^2 \rightarrow S^1$  waarvoor geldt dat  $g \upharpoonright_{S^1}$  equivariant is.  $\square$

### 4.3 De Inductiestap

Omdat het bewijs van  $n = 3$  gebruik maakt van een deel van het bewijs van de inductiestap, zal eerst de inductiestap worden bewezen. Hiervoor is het nodig om de terminologie duidelijk te krijgen.

**Definitie 4.8.** Een punt  $y \in S^n$  wordt de tegenpool van  $x$  genoemd als  $y = -x$ . Een evenaar van  $S^n$  is de doorsnijding van  $S^n$  met een  $n$ -dimensionaal vlak dat door de oorsprong gaat (en dus door het middelpunt van de bol). Een evenaar is dus een  $n - 1$ -dimensionale bol. Een grootcirkel is de doorsnijding van  $S^n$  met een 2-dimensionaal vlak door de oorsprong. Een meridiaan is de doorsnijding van  $S^n$  met een 2-dimensionaal halfvlak  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ , ook wel een halve grootcirkel.

Verder zal er gebruik gemaakt worden van de Stelling van Sard. Deze zal hier niet worden bewezen omdat het bewijs weinig toevoeging heeft aan deze tekst. Voor een bewijs zie [4].

**Definitie 4.9.** Zij  $A \subset M$  een deelverzameling van een gladde variëteit. Dan heeft  $A$  maat nul binnen  $M$  als voor elke kaart  $(U, \kappa)$  geldt dat  $\kappa(U \cap A)$  maat nul heeft in  $\mathbb{R}^m$ .

Omdat diffeomorfismen verzamelingen van maat nul afbeelden op verzamelingen van maat nul, is dit een welgedefinieerde definitie. Zonder in detail te gaan volgt dit uit het feit dat een diffeomorfisme lokaal Lipschitz continu is en dat lokaal Lipschitz continue functies maat nul verzamelingen bewaren.

**Stelling 4.10** (Stelling van Sard). Zij  $f : M \rightarrow N$  een gladde afbeelding tussen twee gladde variëteiten. Dan heeft het beeld onder  $f$  van de verzameling  $\{x \in M \mid \text{rang}(Jf(x)) < n\}$  Lebesgue-maat nul in  $N$ .

**Stelling 4.11** (De Inductiestap). Stel dat  $n \geq 4$  en dat er een gladde equivariante afbeelding  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  bestaat. Dan bestaat er een gladde equivariante afbeelding  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-2}$ .

*Bewijs.* Het doel is om geschikte evenaren van  $S^n$  en  $S^{n-1}$  te vinden om een gladde equivariante functie  $\tilde{f}$  tussen te maken. Pas de Stelling van Sard toe op  $f$ . Dan volgt dat het beeld onder  $f$  van  $\{x \in S^n \mid \text{rang}(Jf(x)) < n - 1\}$  maat nul heeft in  $S^{n-1}$ . Dus er bestaan veel punten in  $S^{n-1}$  waarvan elk punt in het oerbeeld volle rang  $n - 1$  heeft. Kies twee punten  $A$  en  $-A$  die hieraan voldoen. De Jacobimatrix van  $f$  heeft volle rang in  $A$  en  $-A$ , dus is  $Jf(x)$  surjectief voor alle  $x \in f^{-1}(\pm A)$ . Dan volgt uit Stelling 1.20 dat  $f^{-1}(\pm A)$  een deelvariëteit van  $S^n$  van dimensie 1 vormt.

Voor elke  $x \in f^{-1}(A)$  en  $y \in f^{-1}(-A) = -f^{-1}(A)$  is er een unieke grootcirkel door  $x$  en  $y$  precies als  $x \neq -y$ . De vereniging van al deze grootcirkels kan geen deelvariëteit vormen van dimensie hoger dan drie, omdat elk punt op zo een cirkel gegeven kan worden door een drietal  $(x, y, \theta)$ . Nu is de aanname  $n \geq 4$  nodig, want omdat  $n \geq 4$  is het zeker dat er een punt  $B \in S^n$  bestaat buiten deze vereniging. Bepaal  $\pm B$  buiten deze vereniging van grootcirkels.

Dan bestaat er geen grootcirkel door  $B$  en  $-B$  die  $f^{-1}(A)$  en  $-f^{-1}(A)$  snijdt, behalve mogelijk in tegenpolen. Hieruit volgt direct dat er geen meridiaan door  $B$  en  $-B$  is die zowel  $f^{-1}(A)$  als  $-f^{-1}(A)$  snijdt. Definieer nu  $E_{n-1}$  als de evenaar van  $S^n$  die loodrecht staat op de lijn door  $B$  en  $-B$ , en definieer  $E_{n-2}$  als de evenaar van  $S^{n-1}$  die loodrecht staat op de lijn door  $A$  en  $-A$ .

**Lemma 4.12.** *Stel  $B$  is de noordpool van  $S^n$  en stel dat  $X$  een gesloten deelverzameling van  $S^n$  is waarvoor geldt dat er geen meridiaan van  $B$  naar  $-B$  is die zowel  $X$  als  $-X$  snijdt. Dan bestaat er een equivariant diffeomorfisme  $\psi : S^n \rightarrow S^n$  zodat  $X \subset \psi(S_+^n)$  waarbij  $S_+^n = \{x \in S^n \mid x_{n+1} > 0\}$ .*

*Bewijs.* Als er inderdaad zo een  $\psi$  bestaat, dan geldt vanwege de equivariantie-eis dat  $-X \subset \psi(S_-^n)$ . Omdat  $X$  en  $-X$  gesloten zijn, bestaan er open omgevingen rond  $\pm B$  die disjunct zijn met  $X$  en  $-X$ . Neem hiervoor kappen met midden  $\pm B$  met hoek  $2\varepsilon$  vanuit het middelpunt van de bol. Projecteer  $X$  en  $-X$  op  $E = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$  langs de meridianen van  $B$  naar  $-B$ . Noem de verzamelingen verkregen door te projecteren  $\pm\Pi(X)$ . Deze zijn gesloten en disjunct, vanwege de eis dat er geen meridiaan van  $B$  naar  $-B$  is die zowel  $X$  als  $-X$  snijdt. Dus  $\Pi(X)$  en  $-\Pi(X)$  hebben positieve afstand van elkaar. Voor elk punt  $x \in E$  definieer de afstand tot  $\pm\Pi(X)$  langs de evenaar  $E$  (in tegenstelling tot de Euclidische afstand) met  $d_\pm(x)$ . Definieer een functie  $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}$  door:

$$\theta(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \frac{d_+(x) - d_-(x)}{d_+(x) + d_-(x)}.$$

Deze functie is welgedefinieerd op  $E$  omdat de noemer nooit nul kan zijn doordat  $\Pi(X)$  en  $-\Pi(X)$  disjunct zijn. Verder is  $\theta$  equivariant omdat  $d_+(-x) = d_-(x)$ . Voor  $x \in \Pi(X)$  heeft  $\theta$  de waarde  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  en voor  $x \in -\Pi(X)$  heeft  $\theta$  de waarde  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ . Dus  $\theta : E \rightarrow [-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ . Het hoeft zeker niet het geval te zijn dat  $\theta$  glad is, maar  $\theta$  is wel continu. Door  $\theta$  te convolveren in de punten  $y$  waar hij niet glad is met de gladde functie  $\frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\int \varphi_\varepsilon(z) dz}$  waarbij

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-|\frac{x-y}{\varepsilon}|^2)} & \text{als } |x-y| < 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

wordt  $\theta$  benaderd door gladde functies, want de convolutie van een gladde functie met  $\theta$  is glad. Voor kleine  $\varepsilon$  geeft dit een goede benadering  $\tilde{\theta}$  voor  $\theta$ , dat wil zeggen:  $\tilde{\theta} : E \rightarrow [-\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}]$ . Omdat in elk punt  $x$  waarin  $\theta$  niet glad was  $\theta$  hetzelfde wordt geconvolveerd als in  $-x$  blijft de equivariantie-eigenschap behouden, dus  $\tilde{\theta}$  is equivariant. Definieer nu een functie  $\psi : E \rightarrow S^n$  door:

$$\psi(x) = \text{het punt op de meridiaan van } B \text{ naar } -B \text{ door } x \text{ met breedtegraad } \tilde{\theta}(x).$$

Deze functie is uit te breiden naar een diffeomorfisme  $\psi : S^n \rightarrow S^n$  door het gebied boven  $\psi(E)$  naar  $S_+^n$  te sturen en net zo het gebied onder  $\psi(E)$  naar  $S_-^n$ .  $X$  ligt boven  $\psi(E)$  omdat de breedtegraad in  $\Pi(X)$  tussen  $-\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$  en  $-\frac{\pi}{2} + \frac{3\varepsilon}{2}$  ligt. Dus  $X \subset \psi(S_+^n)$ .  $\square$

Het is duidelijk dat Lemma 4.12 toegepast gaat worden op  $f^{-1}(A)$ . Dit is inderdaad een gesloten verzameling omdat  $f$  continu is en  $\{A\}$  gesloten is in  $S^{n-1}$ . We mogen aannemen dat  $B$  de noordpool is omdat de bol rotatie-invariant is. Dus uit Lemma 4.12 volgt dat er een gladde equivariante  $\psi$  bestaat zodat  $f^{-1}(A) \subset \psi(S_+^n)$ . Laat  $\phi = \psi \upharpoonright_{E_{n-1}}$ . Dan geldt dat  $A \notin f(\psi(E_{n-1}))$ , want  $f^{-1}(A) \cap \psi(E_{n-1}) = \emptyset$ . Net zo geldt dat  $-A \notin f(\psi(E_{n-1}))$ . Dus  $f \circ \phi : S^n \rightarrow S^{n-1} \setminus \{A, -A\}$ . Maar dan is het mogelijk  $S^n$  samen te trekken naar zijn evenaar  $E_{n-2}$  want de projectie langs de meridiaan van  $A$  naar  $-A$  door  $x$  levert een uniek punt op  $E_{n-2}$  voor alle  $x \in S^{n-1} \setminus \{A, -A\}$ . Noem deze retractie  $r$ . Deze is duidelijk glad en equivariant. Neem dan  $\tilde{f} = r \circ f \circ \phi : E_{n-1} \rightarrow E_{n-2}$ . Deze is de samenstelling van gladde equivariante functies en dus glad en equivariant.  $\square$

#### 4.4 Basisstap voor n=3

Omdat het bewijs voor  $n = 3$  gebruik maakt van het bewijs van  $n = 2$  en van Lemma 4.12 is deze basisstap tot het eind uitgesteld. Om te beginnen zal eerst een technisch lemma worden bewezen waarvan het nut later pas duidelijk zal worden.

**Lemma 4.13.** *Stel dat  $g : S^2 \rightarrow S^2$  een gladde equivariante afbeelding is. Dan bestaat er een gladde equivariante  $g^\dagger : S^2 \rightarrow S^2$  zodat  $g^\dagger(S_\pm^2) = S_\pm^2$  en een collectie diffeomorfismen  $\psi_t : S^2 \rightarrow S^2$  zodat  $\psi_0 = I$  en  $\psi_1 = \psi$  waarvoor geldt dat  $g^\dagger(x) \neq -g \circ \psi(x)$  voor alle  $x \in S^2$ .*

*Bewijs.* Volgens de Stelling van Sard heeft het beeld onder  $g$  van  $\{x \in S^2 \mid \text{rang } Jg(x) < 2\}$  maat nul in  $S^2$ . Dus er zijn punten  $\pm A$  in  $S^2$  waarvoor geldt dat  $g^{-1}(\pm A)$  een deelvariëteit van dimensie 0 vormt in  $S^2$  volgens Stelling 1.20. Dat wil zeggen dat  $g^{-1}(\pm A)$  eindig is. Neem nu aan dat  $A$  de noordpool is. Dit kan want de bol is rotatie-invariant. Bepaal nu  $\pm B$  in het domein  $S^2$  zodat de projecties langs de meridianen van  $B$  naar  $-B$  door de punten in  $g^{-1}(\pm A)$  verschillend zijn. Dit is mogelijk dankzij het feit dat  $g^{-1}(\pm A)$  eindig is. Neem weer aan dat  $B$  de noordpool is. Nu bevinden we ons in de situatie van Lemma 4.12 en geeft dit lemma een equivariant diffeomorfisme  $\psi : S^2 \rightarrow S^2$  zodat  $g^{-1}(\pm A) \subset \psi(S_\pm^2)$ . Vanuit de constructie van  $\psi$  in het bewijs van Lemma 4.12 is het duidelijk dat er een collectie equivariante diffeomorfismen  $\psi_t$  van  $S^2$  met  $t \in [0, 1]$  bestaat zodat  $\psi_0 = I$  en  $\psi_1 = \psi$ . Neem namelijk in het bewijs van Lemma 4.12

$$\psi_t(x) = \text{het punt op de meridiaan van } B \text{ naar } -B \text{ door } x \text{ met breedtegraad } t \cdot \tilde{\theta}(x).$$

Zij nu  $g_*(x) = g \circ \psi$ . Dit is weer een gladde equivariante afbeelding en er geldt  $g_*^{-1}(A) \subset S_+^2$ . Zij nu  $E$  de evenaar van  $S^2$  loodrecht op de lijn van de noordpool naar de zuidpool. Laat  $\bar{x}$  (als  $x$  niet de noord- of zuidpool is) de projectie op  $E$  langs de meridiaan van de noordpool naar de zuidpool door  $x$  zijn. Definieer  $\tilde{g} : E \rightarrow E$  door  $\tilde{g}(x) = \overline{g_*(x)}$ . Omdat  $g^{-1}(\pm A) \cap E = \emptyset$  is dit welgedefinieerd.

Het doel is om  $\tilde{g}$  te definiëren voor alle punten  $x \in S^2$ . Hiervoor breiden we  $\tilde{g}$  eerst uit tot een klein gebied rond de evenaar  $E$ . Laat  $l(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  de breedtegraad van het punt  $x$  zijn ten opzichte van  $E$ . Definieer  $E_r$  voor  $0 < r < \frac{\pi}{2}$  door

$$E_r = \{x \in S^2 \mid |l(x)| \leq r\}.$$

Bekijk alleen  $r$  klein genoeg zodat  $E_r \cap g_*^{-1}(\pm A) = \emptyset$  en zij  $d = \text{dist}(\pm A, g_*(E))$ . Omdat  $g_*$  uniform continu is geldt voor  $x \in E_{r_0}$  dat  $d(g_*(x), g_*(\bar{x})) < \frac{d}{10}$  voor  $r$  klein genoeg. Definieer nu  $\tilde{g}$  op  $E_{r_0}$  door

$$\tilde{g}(x) = \text{het punt op dezelfde meridiaan als } \tilde{g}(\bar{x}) \text{ met breedtegraad } \frac{\pi l(x)}{2r}.$$

Dan is  $\tilde{g}$  equivariant en glad. Voor  $x \in S^2$  definieer  $\tilde{g}(x) = A$  als  $l(x) > r$  en  $\tilde{g}(x) = -A$  als  $l(x) < -r$ . Dan is  $\tilde{g}$  equivariant en continu op heel  $S^2$  omdat voor  $l(x) = r$  de waarde van  $\tilde{g}(x)$  gelijk is aan  $A$  en gelijk is aan  $-A$  voor  $l(x) = -r$ . Verder volgt uit de constructie dat  $\tilde{g}(S_\pm^2) = S_\pm^2$ . Nu moet alleen nog gekeken worden naar de gladheid en of  $\tilde{g} \neq -g \circ \psi(x)$ . Voor  $x \in E_{r_0}$  bekijk de drie punten  $g_*(x)$ ,  $g_*(\bar{x})$  en  $\tilde{g}(x)$ . De afstand van  $g_*(\bar{x})$  tot  $\pm A$  is minstens  $d$  en  $g_*(\bar{x})$  en  $\tilde{g}(x)$  liggen op dezelfde meridiaan. Omdat  $d(g_*(x), g_*(\bar{x})) < \frac{d}{10}$  moet gelden dat  $d(g_*(x), \pm A) \geq \frac{9d}{10}$ . In het bijzonder geldt dat de afstand van de meridiaan waarop  $g_*(\bar{x})$  en  $\tilde{g}(x)$  liggen tot  $g_*(x)$  kleiner is dan  $\frac{d}{10}$ . Dus voor  $x \in E_{r_0}$  geldt dat  $g_*(x) \neq -\tilde{g}(x)$ . Als  $l(x) > r$  dan  $\tilde{g}(x) = A$  en omdat  $g_*^{-1}(-A) \subset S_-^2$  geldt dat  $g_*(x) \neq -A$ . Net zo  $g_*(x) \neq A$  voor  $l(x) < -r$ . Dus voor alle  $x \in S^2$  geldt:

$$\tilde{g}(x) \neq -g_*(x) = -g \circ \psi(x).$$

Omdat  $\tilde{g}$  niet glad hoeft te zijn in de punten  $x$  met  $l(x) = \pm r$ , convolueren we  $\tilde{g}$  met de functie  $\varphi_\varepsilon$  uit het bewijs van Lemma 4.12. Hierdoor blijft  $\tilde{g}$  equivariant en de bovenstaande ongelijkheid blijft waar omdat  $\tilde{g}$  en  $g_*$  continu zijn en dus heeft een erg kleine verstoring geen effect op de ongelijkheid. Laat  $g^\dagger$  de geconvolueerde en genormaliseerde versie van  $\tilde{g}$  zijn. Deze is glad, equivariant, bewaart  $S_+^2$  en  $S_-^2$  en  $g^\dagger(x) \neq -g \circ \psi(x)$  voor alle  $x \in S^2$ .  $\square$

**Propositie 4.14.** *Stel dat  $f : S^3 \rightarrow S^2$  een gladde equivariante afbeelding is. Dan bestaat er een gladde  $f^\dagger : \mathbb{D}^3 \rightarrow S^2$  die equivariant is op  $\partial\mathbb{D}^3 = S^2$  en voldoet aan  $f^\dagger(S_\pm^2) = S_\pm^2$ .*

*Bewijs.* Door  $S_+^3$  (in dit geval de gesloten bovenste helft van de bol) te identificeren met  $\mathbb{D}^3$  geeft dit een gladde equivariante afbeelding  $\hat{f} : \mathbb{D}^3 \rightarrow S^2$  die equivariant is op  $S^2$ . De beperking van  $\hat{f}$  tot  $\partial\mathbb{D}^3 = S^2$  is een gladde equivariante afbeelding  $g : S^2 \rightarrow S^2$ . Pas Lemma 4.13 toe op  $g$ .

Laat nu  $tx$  een punt in  $\mathbb{D}^3$  representeren met  $x \in S^2$  en  $t \in [0, 1]$ . Definieer  $f^\dagger$  als volgt:

$$f^\dagger(tx) = \begin{cases} \hat{f}(3tx) & \text{als } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ g \circ \psi_{3t-1}(x) & \text{als } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{(3t-2)g^\dagger(x) + (3-3t)(g \circ \psi)(x)}{|(3t-2)g^\dagger(x) + (3-3t)(g \circ \psi)(x)|} & \text{als } t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Omdat  $g^\dagger(x) \neq -g \circ \psi(x)$  is  $f^\dagger$  goed gedefinieerd voor  $t \in [\frac{2}{3}, 1]$ . Elk van de delen is continu en  $\hat{f}(3 \cdot \frac{1}{3}x) = \hat{f}(x) = g(x) = g(x) \circ \psi_{3 \cdot \frac{1}{3}-1}(x)$  en  $\frac{(3 \cdot \frac{2}{3}-2)g^\dagger(x) + (3-3 \cdot \frac{2}{3})(g \circ \psi)(x)}{|(3 \cdot \frac{2}{3}-2)g^\dagger(x) + (3-3 \cdot \frac{2}{3})(g \circ \psi)(x)|} = \frac{g \circ \psi(x)}{|g \circ \psi(x)|} = g \circ \psi(x) = g \circ \psi_1(x)$ . Dus  $f^\dagger$  is continu op heel  $\mathbb{D}^3$  en overal glad behalve voor  $t = \frac{1}{3}$  en  $t = \frac{2}{3}$ . Bovendien voldoet deze afbeelding aan  $f^\dagger(S_\pm^2) = S_\pm^2$  want  $tx \in S^2$  precies als  $t = 1$  en dan  $f^\dagger = g^\dagger$  en  $g^\dagger$  bewaart de open halve bollen. Vanwege ditzelfde argument is  $f^\dagger$  equivariant op  $\partial\mathbb{D}^3 = S^2$ . Door  $f^\dagger$  te convolueren in een kleine omgeving van  $t = \frac{1}{3}$  en  $t = \frac{2}{3}$  en daarna te normaliseren krijgen we een gladde functie met de gewenste eigenschappen.  $\square$

Het doel is nu om te laten zien dat zo een functie niet kan bestaan om een tegenspraak te krijgen met de aanname dat een gladde equivariante  $f : S^3 \rightarrow S^2$  bestaat. Hiervoor is het handig om een cilinder te bekijken in plaats van een bol. Zij  $C = \mathbb{D}^2 \times [-1, 1]$  een cilinder. Laat  $\mathbb{D}_+$  het bovenvlak en  $\mathbb{D}_-$  het ondervlak zijn. Laat verder  $V = S^1 \times [-1, 1]$  zodat  $\partial C = V \cup \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_-$ . Laat  $S_\pm$  de open onderste en bovenste helft van  $\partial C$  zijn. Zij  $E$  de evenaar van  $\partial C$ .

De cilinder  $C$  is diffeomorf aan  $\mathbb{D}^3$  als we de punten op verticale lijnen in  $V$  identificeren. En  $\partial C$  is dan diffeomorf aan  $S^2$ . Dus onder dezelfde aannamen als in Propositie 4.14 bestaat er een gladde  $f : C \rightarrow \partial C$  die equivariant is op  $\partial C$ , constant is op verticale lijnen in  $V$  en  $\mathbb{D}_\pm$  afbeeldt op  $S_\pm$ .

**Stelling 4.15.** *Er bestaat geen gladde afbeelding  $f : C \rightarrow \partial C$  die equivariant is op  $\partial C$ , constant is op verticale lijnen in  $V$  en  $\mathbb{D}_\pm$  afbeeldt op  $S_\pm$ .*

*Bewijs.* Stel dat zo een  $f$  wel bestaat. Dan

$$\int_C \det Jf = \int_C df_1 \wedge df_2 \wedge df_3.$$

De linkerkant van deze gelijkheid is nul omdat  $f$  een afbeelding is van een 3-dimensionale variëteit (met rand) naar een twee dimensionale variëteit, dus heeft  $Jf$  bijna overal geen volle rang. Passen we de Stelling van Stokes toe op het rechterlid, dan geeft dit

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} f_1 df_2 \wedge df_3 &= \int_{\partial C} f_3 df_1 \wedge df_2 = \int_V f_3 df_1 \wedge df_2 + \int_{\mathbb{D}_+} f_3 df_1 \wedge df_2 + \int_{\mathbb{D}_-} f_3 df_1 \wedge df_2 \\ &= \int_V f_3 df_1 \wedge df_2 + 2 \int_{\mathbb{D}_+} f_3 df_1 \wedge df_2. \end{aligned}$$



De laatste gelijkheid volgt uit de equivariantie-eis. De eerste term hiervan is gelijk aan nul, want  $f$  beeldt  $V$  af op  $E$  vanwege het feit dat  $f(\mathbb{D}_\pm) = S_\pm$ . Op  $E$  heeft  $f_3$  waarde nul, dus de eerste term valt inderdaad weg. Er moet dus nog worden laten zien dat  $\int_{\mathbb{D}_+} f_3 df_1 \wedge df_2 \neq 0$ . Er geldt:

$$\int_{\mathbb{D}_+} f_3 df_1 \wedge df_2 = \int_{\mathbb{D}_+ \cap \{x \in C \mid f_3(x) = 1\}} f_3 df_1 \wedge df_2 + \int_{\mathbb{D}_+ \cap \{x \in C \mid f_3(x) < 1\}} f_3 df_1 \wedge df_2.$$

Het deel van  $\mathbb{D}_+$  waarop  $f_3(x) < 1$  bestaat uit cirkels gegeven door  $f_1(x)^2 + f_2(x)^2 = 1$ . Als we dit afleiden krijgen we  $2f_1 df_1 + 2f_2 df_2 = 0$ . Neem nu het uitwendig product met  $df_1$  en met  $df_2$ , dan staat er  $2f_1 df_1 \wedge df_2 = 0 = 2f_2 df_1 \wedge df_2$ . Vermenigvuldig nu de linkerkant met  $f_1$  en de rechterkant met  $f_2$  en tel beide kanten bij elkaar op. Dit geeft  $2(f_1^2 + f_2^2) df_1 \wedge df_2 = 2 df_1 \wedge df_2 = 0$ . Dus voor elke functie  $h$  geeft dit  $h df_1 \wedge df_2 = 0$ . Dus

$$\int_{\mathbb{D}_+} f_3 df_1 \wedge df_2 = \int_{\mathbb{D}_+ \cap \{x \in C \mid f_3(x) = 1\}} f_3 df_1 \wedge df_2 = \int_{\mathbb{D}_+} df_1 \wedge df_2.$$

Pas nu weer de Stelling van Stokes toe, dan geeft dit:

$$\int_{\mathbb{D}_+} df_1 \wedge df_2 = \int_{\partial \mathbb{D}_+} f_1 df_2 = - \int_{\partial \mathbb{D}_+} f_2 df_1.$$

Omdat  $\partial \mathbb{D}_+$  diffeomorf is aan  $S^1$  bevinden we ons nu in de situatie van de basisstap voor  $n = 2$ . Daar is al laten zien dat deze laatste integraal niet nul is. Dus dit bewijst de basisstap voor  $n = 3$  en voltooit het bewijs van de Borsuk-Ulam-Stelling.  $\square$

## Referenties

- [1] Bredon, G. E. (2000). *Topology and Geometry* (blz 89-90).
- [2] Carbery, A. (2012). *The Brouwer Fixed Point Theorem and the Borsuk-Ulam Theorem*. Beschikbaar via <http://arxiv.org/pdf/1205.4540v1.pdf>.
- [3] Granas, A., & Dugundji, J. (2003). *Fixed Point Theory* (blz. 93).
- [4] Guillemin, V., & Pollack, A. (1974). *Differential Topology* (blz. 205-207).
- [5] Larson, R., & Hostetler, R. & Edwards, I. (2008). *Precalculus Functions and Graphs: A Graphing Approach* (blz. 758).
- [6] Looijenga, E. (2010). *Smooth Manifolds* (blz. 3-4).
- [7] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (blz. 162-164).
- [8] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (blz. 221-223).
- [9] Tao, T. (2009). *Analysis I* (blz. 237-238).
- [10] Warner, F. W. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*.