

Knopentheorie



Bachelorscriptie
Wesley van Haren
Begeleider: dhr. dr. M. Mürger
11 juli 2012

Extract

De HOMFLY-polynoom is een functie die aan iedere knoop een polynoom toewijst. Wanneer twee knopen verschillende HOMFLY-polynomen hebben, zijn ze verschillend. In deze scriptie zullen we de HOMFLY-polynoom opbouwen aan de hand van het werk van de heer V.F.R. Jones in [3]. Hiervoor behandelen we knopen, schakels en vlechten. Daarna bekijken we de relaties tussen die objecten aan de hand van de stelling van Markov en de stelling van Alexander. Als laatste definiëren we de Ocneanu trace en gebruiken we die om de HOMFLY-polynoom te definiëren. Als laatste behandelen we de homogene versie van de HOMFLY-polynoom.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	7
2	Knopen en schakels	9
3	Vlechten	15
4	Alexander en Markov	23
5	De Iwahori-Hecke Algebras	29
6	De HOMFLY-polynoom	31

Hoofdstuk 1

Inleiding

De geschiedenis van knopentheorie

Knopen zijn niet nieuw in de menselijke geschiedenis, ze worden gebruikt bij klimmen, zeilen en vele andere activiteiten. Desondanks is de wiskundige studie naar knopen niet heel oud. Één van de eerdere pogingen was aan het einde van de 18e eeuw door Alexandre-Theophile Vandermonde, maar die poging duurde niet lang en was niet succesvol. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) heeft er nog even aan gewerkt maar de echte groei van de knopentheorie begon in 1867.

In dat jaar bedacht Sir William Thomson (Lord Kelvin) een natuurkundige theorie met de knopen in de hoofdrol. Tijdens een experiment van de Schot Peter Tait kreeg hij het idee dat atomen kleine knopen waren en dat de verschillende eigenschappen van atomen te verklaren zouden zijn door bepaalde eigenschappen van knopen. Als gevolg hiervan besloot Peter Tait om een lijst te maken van alle unieke knopen, denkende dat dat overeen zou komen met een lijst van alle elementen. Ook had hij interessante vermoedens die pas in 1990 bewezen zouden worden, de Tait vermoedens. Echter nadat er meer experimenten werden gedaan viel het model van William Thomson door de mand en de natuurkundige interesse voor knopen verdween.

Ondertussen ontwikkelde de topologie zich als belangrijke tak van de wiskunde en de knopentheorie werd daarin opgenomen. Vroeg in de 20ste eeuw werd er door verschillende topologen vooruitgang geboekt. Kurt Reidemeister en J.W. Alexander waren er daar twee van, met hun bevindingen de Reidemeister zettingen en de Alexander polynoom. Een groot gedeelte van het onderzoek toen was op het gebied van de knoopgroepen en homologie the-

orie. Later in de 20ste eeuw werd het enthousiasme voor de knopentheorie weer hoger door enkele grote ontdekkingen. Één van de grootste was de ontdekking van de Jones polynoom door Vaughan Jones. Dit werd opgevolgd door andere polynomen, waaronder de Kauffman polynoom en de HOMFLY polynoom, waarvan de laatstgenoemde een grote rol speelt in deze scriptie. Rond deze tijd werden er ook steeds meer toepassingen gevonden van de knopentheorie in de andere wetenschappen. Één hiervan zal ik nu behandelen.
[4]

Een toepassing buiten de wiskunde

Een recente toepassing van de knopentheorie in de biologie heeft te maken met het DNA. Er zijn enzymen genaamd topoisomerasen die ervoor zorgen dat het DNA een knoop vormt als het nodig is en zich ontknoopt als het nodig is. Tijdens het repliceren van het DNA is het nodig dat het DNA ontknoopt wordt, omdat het DNA anders kan breken. Echter als het DNA de celkern in moet, moet het heel klein zijn en hiervoor knoopt de topoisomerase het DNA in een klein bolletje.

Het doel van deze scriptie

In deze scriptie heb ik gekozen om het volgende probleem te behandelen: Als je twee knopen hebt, wanneer zijn ze dan vervormingen van elkaar? Ik heb hiervoor gekozen omdat het een duidelijk probleem is. Mensen die nog nooit van knopentheorie gehoord hebben zullen zelf in zien dat het handig is om te weten of ergens een knoop in zit of dat je de knoop gewoon uit elkaar kan halen. Dit probleem ga ik aanpakken door de HOMFLY polynoom te construeren. Hiervoor moeten we bij het begin beginnen, wat zijn knopen?

Hoofdstuk 2

Knopen en schakels

Knopen

Definitie 2.1. *Een knoop is een inbedding van de cirkel S^1 in \mathbb{R}^3 . Een schakel is een vereniging van knopen die elkaar niet snijden.*



Figuur 2.1: De klaverbladknoop.

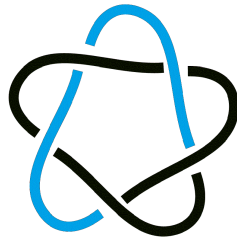
Schakels zijn isotop als er een diffeomorfisme $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is die de ene schakel naar de ander stuurt, waarbij voor F geldt dat hij homotoop moet zijn aan de identiteit. Oftewel er is een continue familie homeomorfismes $\{F_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{s \in I}$ met $F_0 = \text{id}$ en $F_1 = F$. Intuïtief betekent dit dat er een continue vervorming is die de ene knoop in de ander overbrengt.

Definitie 2.2. *Als een schakel of knoop een orientatie heeft noemen we het een georiënteerde schakel of knoop.*

Definitie 2.3. *Een samenhangende deelverzameling van een knoop heet een tak van de knoop.*

Definitie 2.4. *Een schakeldiagram is de orthogonale projectie van de schakel op een vlak, waarbij ieder punt het snijpunt is van maximaal 2 takken en verschillende takken elkaar lokaal maar op 1 punt transversaal snijden. Dit betekent dat kruisingen lokaal homeomorf zijn met de verzameling $\{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. In het diagram geven we de onderliggende tak op een kruising aan door die op de kruising te onderbreken.*

Als een projectie van een schakel niet aan deze eisen voldoet kan je een isotope schakel vinden die wel aan deze eisen voldoet en de projectie daarvan gebruiken. We raken hierdoor geen relevante informatie kwijt.

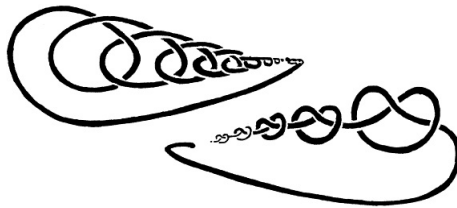


Figuur 2.2: Een tak van een knoop aangegeven op een knoopdiagram.

Definitie 2.5. *Een polygone knoop is een inbedding van een gesloten, stuks-gewijs rechte lijn in \mathbb{R}^3 . Een polygone schakel is een schakel van polygone knopen.*

Definitie 2.6. *Een tamme schakel of knoop is een schakel of knoop die isotop is aan een polygone schakel.*

Voortaan zijn alle knopen en schakels die we bekijken tam. De studie naar niet-tamme (oftewel “wilde”) knopen staat nog in zijn kinderschoenen en die zijn ook minder interessant voor praktische toepassingen.

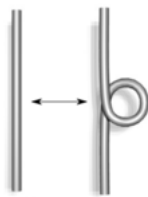


Figuur 2.3: Twee voorbeelden van wilde knopen.

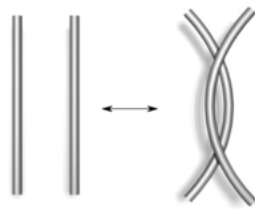
De Reidemeister zetten

Eén van de eerdere pogingen om isotopie aan te tonen tussen 2 schakels waren de Reidemeister zetten.

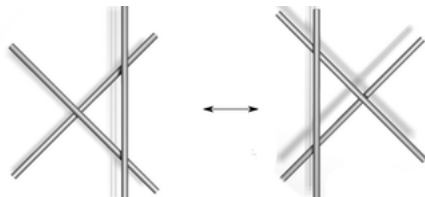
Definitie 2.7. *De Reidemeister zetten zijn de volgende 3 vervormingen op een schakeldiagram, die het diagram op 1 kruising lokaal veranderen:*



Figuur 2.4: De eerste Reidemeister zet $\Omega_1^{\pm 1}$.



Figuur 2.5: De tweede Reidemeister zet $\Omega_2^{\pm 1}$.



Figuur 2.6: De derde Reidemeister zet $\Omega_3^{\pm 1}$.

Stelling 2.8. (*Reidemeister, 1927*)

Twee schakels L en L' zijn isotoop \iff Er is een eindige combinatie van Reidemeister zetten en isotopiën die het knoopdiagram van L naar het knoopdiagram van L' overbrengt. Isotopieën op knoopdiagrammen bewaren de kruisingstructuur, maar houden ze niet verplicht op dezelfde plek. [2, pagina 12]

Om daadwerkelijk een reeks Reidemeister zetten te vinden tussen twee schakels is erg moeilijk. Natuurlijk is dat nog moeilijker als je niet eens zeker weet of de schakels isotoop zijn. Daarom is dit geen geschikte manier uit te vinden of twee ingewikkelde schakels isotoop zijn.

We gaan nu een hele andere manier om het probleem aan te pakken bekijken, de knoopinvarianten.

Knoopinvarianten

Knoopinvarianten zijn functies op schakels die dezelfde functiewaarde geven op isotope schakels. Dit betekent dat als een knoopinvariant verschillende waarden geeft op schakels, je kan concluderen dat de schakels niet isotoop zijn. Echter als een knoopinvariant dezelfde waarde heeft op twee verschillende schakels hoeft dat niet te betekenen dat ze ook isotoop zijn. Als dit wel zo is bij een bepaalde knoopinvariant noemen we het een perfecte knoopinvariant. Een interessante zwakkere versie hiervan is de eigenschap dat de triviale knoop een unieke waarde heeft op die invariant.

Een voorbeeld van een knoopinvariant is het aantal knopen in de schakel. Als twee schakels bestaan uit een verschillend aantal knopen kunnen ze nooit isotoop zijn. Er zijn daarentegen wel heel veel schakels bestaande uit hetzelfde aantal knopen die niet isotoop zijn.

De knoopinvariant die wij gaan bekijken is een knooppolynoom. De knooppolynomen zijn makkelijk te definiëren aan de hand van de Skein relaties.

De Skein Relaties

Definitie 2.9. *Drie georiënteerde schakels, L_+ , L_- , L_0 , zijn een Conway triple als ze op een specifieke manier op precies één kruispunt verschillen. Als je ze zo neerlegt dat de oriëntatie van beide takken op het kruispunt naar boven is, moet L_+ op dat kruispunt zo zijn dat de bovenliggende draad van linksom naar rechtsom gaat, L_- moet deze draad beneden hebben liggen*

en in L_0 mogen ze niet kruisen op dit punt.



Figuur 2.7: De Conway triple.

Definitie 2.10. Een Skein relatie is een relatie die recursief een knooppoly-noom definieert voor alle schakels. Skein relaties zijn lineair en van de vorm $F(P(L_-), P(L_+), P(L_0)) = 0$. Dit werkt aan de hand van de relatie tussen de polynomen van de drie schakels L_+ , L_- , L_0 van een Conway triple. Om deze recursie te laten werken moet $P(\text{triviale knoop})$ bekend zijn, vaak wordt deze gedefinieerd als 1.

We zullen hier aan de hand van een voorbeeld, de Skein relatie $aP(L_-) + bP(L_+) + cP(L_0) = 0$, laten zien waarom je voor iedere schakel een polynoom krijgt.

Stel $P(\text{triviale knoop})$ is gegeven. De Skein relatie is van de vorm

$$F(P(L_-), P(L_+), P(L_0)) = aP(L_-) + bP(L_+) + cP(L_0) = 0.$$

Bekijk een schakel L en geef hem een oriëntatie. De schakel L heeft n snijpunten. Kies een willekeurig snijpunt en begin daar de knoop in de orientatie richting te volgen. Als we dan bij een nieuw snijpunt komen zijn er twee mogelijkheden, het touwtje waar je op zit ligt bij die kruising bovenop of onderop.

Als hij bovenop ligt blijven we het touwtje volgen. Als hij onderop ligt gebruiken we de Skein relatie op die kruising. We draaien de schakel zo dat $L = L_-$ op dat snijpunt. Dan $P(L) = P(L_-) = \frac{c}{a}P(L_0) - \frac{c}{a}P(L_+)$. L_0 heeft een snijpunt minder dan L_- , dus daar gaat de recursie al goed. Dan gaan we verder met $P(L_+)$ berekenen. Het touwtje wat bij L_- onderop lag, ligt nu bovenop en die kunnen we verder volgen.

Omdat L_- eindig veel snijpunten heeft komen we via deze methode uiteindelijk uit op het snijpunt waar we begonnen. Het touwtje ligt dan vanaf

een kruispunt tot weer datzelfde kruispunt helemaal bovenop de schakel, dit is een lus en die kan je met een Reidemeister zet weghalen.

Op dit punt zien we in dat we het berekenen van $P(L)$ voor een polynoom van n snijpunten hebt teruggebracht tot het berekenen van eindig veel polynomen van schakels met $n - 1$ snijpunten. Aangezien de triviale schakels de enige schakels zijn met nul snijpunten, kunnen we dus de berekening van $P(L)$ reduceren tot een berekening van $P(\text{triviale schakels})$ en deze zijn weer om te schrijven naar een berekening van $P(\text{triviale knoop})$.



Figuur 2.8: De relatie om $P(\text{triviale schakel})$ te berekenen.

Dus de recursie loopt af en je kan P berekenen voor willekeurige L .

Hoofdstuk 3

Vlechten

In dit hoofdstuk zullen we vooral de definities en bewijzen uit [1] aanhouden.

Vlechten

Definitie 3.1. *Een geometrische vlecht op n touwtjes is een verzameling $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ die bestaat uit n disjuncte topologische intervallen, de touwtjes van b , zodat de projectie $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ ieder touwtje homeomorf op I projecteert en*

$$\begin{aligned} b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) &= \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}, \\ b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) &= \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\} \end{aligned}$$

De verzameling van alle geometrische vlechten op n touwtjes noemen we GB_n .

Twee van zulke vlechten, b en b' zijn isotoop (genoteerd $b \cong b'$) als er een continue functie $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ zodanig dat $\forall s \in I$ de afbeelding $F_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ die $x \in b$ naar $F(x, s)$ stuurt, een inbedding is, waarvan het beeld een geometrische vlecht op n touwtjes is, $F_0(b) = b$ en $F_1(b) = b'$. Deze functie F , evenals de verzameling $\{F_s(b)\}_{s \in I}$, noemen we een isotopie van b naar b' .

We gaan na dat dit een equivalentierelatie is:

Reflexiviteit: Neem $F_s = \text{id}$ voor alle $s \in I$. Dan i.h.b. $F_0(a) = F_1(a) = a$ dus $a \cong a$.

Symmetrie: Als $a \cong b$ door isotopie F , definieer $G_s = F_{1-s}$ voor alle $s \in I$

dan voldoet G aan alle eisen en dus $b \cong a$.

Transitiviteit: Als $a \cong b$ door F en $b \cong c$ door G , dan definiëer voor alle $s \in I$, $H(x, s/2) = F(x, s)$ en $H(x, s/2 + (1/2)) = G(x, s)$ dan voldoet H aan alle eisen en dus $a \cong c$.

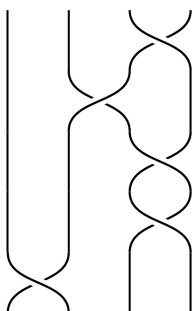
De verzameling van alle equivalentieklassen uit GB_n noemen we \mathcal{B}_n . Een element van \mathcal{B}_n noemen we een vlecht op n touwtjes.

Vlecht diagrammen

Om (geometrische) vlechten makkelijk te kunnen beschrijven gebruiken we vlecht diagrammen.

Definitie 3.2. Een vlecht diagram van n touwtjes is een verzameling $D \subset \mathbb{R} \times I$ die bestaat uit n topologische intervallen, genaamd de touwtjes van D , zodat de volgende 3 eisen gelden:

1. De projectie $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$ beeldt alle touwtjes homeomorph op I af.
2. Ieder punt van $1, 2, \dots, n \times \{0, 1\}$ is het eindpunt van precies één touwtje.
3. Ieder snijpunt is een transversaal snijpunt van maximaal twee touwtjes en er is er één gedefiniëerd als overgaand en de andere als ondergaand. Dit geven we aan door de ondergaande te onderbreken op het kruispunt.



Figuur 3.1: Een vlecht diagram van een vlecht op 4 touwtjes.

We gaan nu bekijken hoe je uit vlecht diagrammen een vlecht kan halen en andersom. Eerst laten we zien hoe je een vlecht haalt uit een vlecht diagram.

Je begint door $\mathbb{R} \times I$ te zien als $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$. Nu gebruiken we de tweede coördinaat om de over en ondergaande touwtjes ook daadwerkelijk afstand van elkaar te geven. De tweede coördinaat van het onderliggende touwtje verhogen we rond de plaats van de kruising, maar wel zodat nog aan alle eisen aan geometrische vlechten voldaan blijft, dus zodat het touwtje homeomorf blijft aan I . Nu is dit een geometrische vlecht.

Andersom neem je de projectie van de vlecht op $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ en je geeft aan welk touwtje er boven of onder lag door te kijken naar de tweede coördinaat van de originelen.

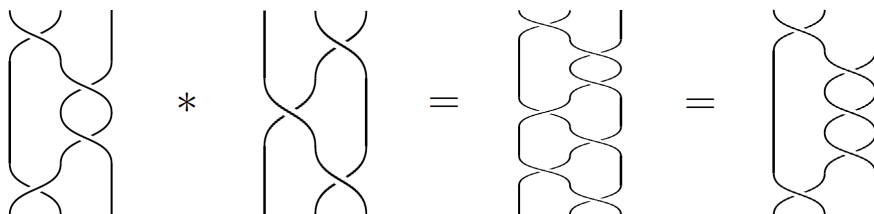
Definitie 3.3. *Twee vlechtdiagrammen heten R -equivalent als er een eindige reeks isotopieën en Reidemeister zetten $\Omega_2^{\pm 1}$ en $\Omega_3^{\pm 1}$ is die de een in de ander overbrengt.*

Stelling 3.4. *Vlechtdiagrammen zijn R -equivalent d.e.s.d.a. de bijbehorende geometrische vlechten isotoop zijn.*

Voor een bewijs zie [1, pagina 9].

Vermenigvuldiging van vlechten

Op deze geometrische vlechten kunnen we een mooi product definiëren. Dit product is simpelweg de twee vlechten onder elkaar plakken en dat zien als een nieuwe vlecht. De formele definitie is: Gegeven $b_1, b_2 \in GB_n$ geldt $b_1 b_2 = (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$ met $(x, y, 2t) \in b_1$ als $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ en $(x, y, 2t - 1) \in b_2$ als $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.



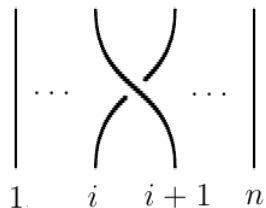
Figuur 3.2: Een product op drie touwtjes.

We zouden graag willen dat dit product ook werkt in \mathcal{B}_n , dus dat gaan we na. Als b_1 isotoop met $b'_1 \in GB_n$ via F en b_2 isotoop met $b'_2 \in GB_n$ via G

dan b_1b_2 isotoop met $b'_1b'_2$ via H , gedefinieerd door $H_s(b_1b_2) = F_s(b_1)G_s(b_2)$. Dan duidelijk $H_0(b_1b_2) = b_1b_2$ en $H_1(b_1b_2) = b'_1b'_2$. Deze vermenigvuldiging behoudt dus isotopieën in GB_n , dus de vermenigvuldiging is ook goed gedefinieerd op \mathcal{B}_n . Dit is dan ook het product wat we hierna gebruiken in \mathcal{B}_n .

Elementaire vlechten

Bekijk de vlechten op n touwtjes met maar 1 kruising. Dan is er voor iedere van die vlechten een i zodat zijn kruising een kruising is van het i -de en het $(i+1)$ -ste touwtje. We noemen deze vlechten σ_i^+ als het i -de touwtje bovenop ligt en σ_i^- als hij onderop ligt.



Figuur 3.3: De vlecht $\sigma_i^+ \in B_n$.

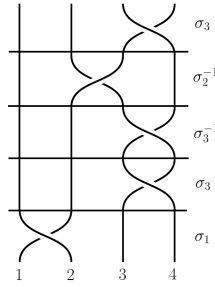
Definitie 3.5. De vlechten σ_i^\pm voor $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ noemen we de elementaire vlechten.

Als je het eerder gedefinieerde product gebruikt en lokaal wat kleine verschuivingen doet kan je zien dat iedere vlecht een product is van de elementaire vlechten.

Dus iedere vlecht $\beta \in B_n$ kan worden geschreven als product van deze vlechten. Dit product noemen we het vlechtwoord van β . Het is duidelijk dat ieder product van elementaire vlechten een vlecht is, dus de elementaire vlechten $\sigma_1^\pm, \dots, \sigma_{n-1}^\pm$ genereren \mathcal{B}_n .

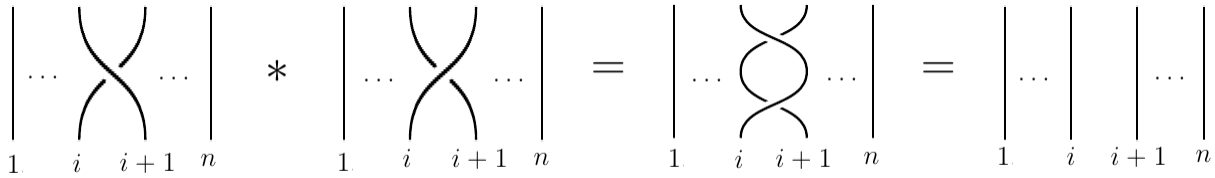
Vlechtgroepen

Nu gaan we laten zien dat \mathcal{B}_n samen met het eerder gedefinieerde product een groep is. Dat de vermenigvuldiging gesloten is in \mathcal{B}_n hebben we al laten zien. We zien in dat de vlecht met n parallelle touwtjes het neutrale



Figuur 3.4: Een vlecht opgedeeld in elementaire vlechten.

element is en de associativiteit is ook duidelijk, dus we moeten alleen nog een inverse vinden. We hebben net laten zien dat iedere vlecht $\beta \in \mathcal{B}_n$ een product is van n elementaire vlechten, dus $\beta = \sigma_{i_1}^{\pm} \dots \sigma_{i_k}^{\pm}$. Het is duidelijk aan onderstaande afbeelding te zien dat $\sigma_i^{\pm} \sigma_i^{\mp} = 1$ voor alle $i = 1, 2, \dots, n-1$.



Figuur 3.5: $\sigma_i^+ \sigma_i^- = 1$.

Hieruitvolgt dat $\beta^{-1} = (\sigma_{i_1}^{\pm} \dots \sigma_{i_k}^{\pm})^{-1} = (\sigma_{i_m}^{\pm})^{-1} \dots (\sigma_{i_1}^{\pm})^{-1} = \sigma_{i_k}^{\mp} \dots \sigma_{i_1}^{\mp}$. Zo krijgt iedere vlecht $\beta \in \mathcal{B}_n$ een inverse, dus \mathcal{B}_n met de vermenigvuldiging is een groep met als neutrale element de n parallelle touwtjes. We zijn ook benieuwd naar de algebraïsche relaties die gelden voor onze vlechten binnen deze groep.

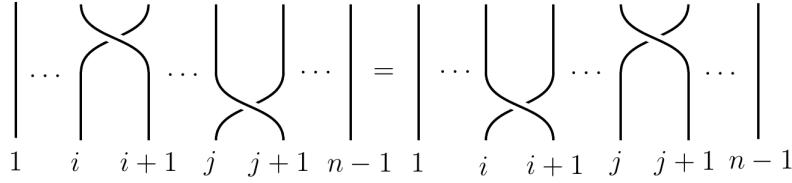
Stelling 3.6. *De groep \mathcal{B}_n voldoet aan de volgende relaties, deze noemen we de vlechtrelaties:*

$$\sigma_i^+ \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \sigma_i^+ \quad \text{als } |i - j| \geq 2$$

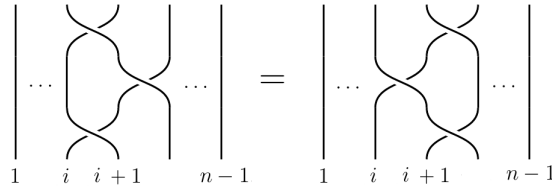
en

$$\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ = \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

In de volgende figuren zien we dit in.



Figuur 3.6: Hier zien we $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ als $|j - i| \geq 2$.



Figuur 3.7: Hier zien we $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ voor $i = 1, 2, \dots, n - 2$. De 2 diagrammen verschillen een Reidemeister zet 3, dus volgens stelling 3.1 zijn de bijbehorende vlechten isotoop.

Artin's vlechtgroep

Het zou handig zijn als we een overzichtelijkere groep vonden die isomorf is met \mathcal{B}_n om de eigenschappen van \mathcal{B}_n verder te onderzoeken. De groep die we vinden is Artin's vlechtgroep voor n touwtjes.

Definitie 3.7. *Artin's vlechtgroep is de groep gegenereerd door $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ die aan de volgende relaties voldoet:*

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{als } |i - j| \geq 2$$

en

$$\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

Deze groep wordt voortaan genoteerd als B_n . We definiëren de natuurlijke functie $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ met $i(\sigma_i) = \sigma_i$ voor $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Het idee achter deze inbedding is dat er een touwtje aan de rechterkant van een vlecht op n touwtjes wordt toegevoegd, zodat het een vlecht op $n + 1$ touwtjes wordt.

Lemma 3.8. *De functie i is een inclusie.*

Bewijs. Zij $\beta, \alpha \in B_n$ en $i(\beta)$ is isotoop met $i(\alpha)$. Het meest rechter touwtje van $i(\beta)$ en $i(\alpha)$ is bij allebei recht en de isotopie doet daar dus niets op. Je kan dan de isotopie restricteren tot de linker n touwtjes en je hebt een isotopie tussen α en β . Dus als de beelden isotoop zijn zijn de originelen isotoop, dus i is injectief en een inclusie. \square

Lemma 3.9. *Zij s_1, s_2, \dots, s_{n-1} elementen uit een groep G die aan de volgende relaties voldoen: $s_i s_j = s_j s_i$ als $|i - j| \geq 2$ en $s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i$ voor alle $i = 1, 2, \dots, n - 2$. Dan is er een uniek groepshomomorfisme $\phi: B_n \rightarrow G$ met $\phi(\sigma_i) = s_i$ voor alle $i = 1, 2, \dots, n - 2$.*

Bewijs. We bekijken F_S , de vrije groep gegenereerd door $S := \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$. Dan is er een uniek homomorfisme $f: F_S \rightarrow G$ zo dat $f(\sigma_i) = s_i$. Dit homomorfisme induceert een homomorfisme $\phi: B_n \rightarrow G$ als het homomorfisme de relaties binnen B_n bewaard, dus $\phi(\sigma_i \sigma_j) = \phi(\sigma_j \sigma_i)$ als $|i - j| \geq 2$ en $\phi(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) = \phi(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i)$ voor $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Dit gaan we na:

$$\phi(\sigma_i \sigma_j) = \phi(\sigma_i) \phi(\sigma_j) = s_i s_j = s_j s_i = \phi(\sigma_j) \phi(\sigma_i) = \phi(\sigma_j \sigma_i).$$

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) &= \phi(\sigma_{i+1}) \phi(\sigma_i) \phi(\sigma_{i+1}) = s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i \\ &= \phi(\sigma_i) \phi(\sigma_{i+1}) \phi(\sigma_i) = \phi(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i). \end{aligned}$$

\square

Stelling 3.10. *Voor $\epsilon = \pm$ is er een uniek homomorfisme $\phi_\epsilon: B_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ zodanig dat $\phi_\epsilon(\sigma_i) = \sigma_i^\epsilon$ voor alle $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Dit homomorfisme is een isomorfisme.*

Bewijs. We doen het bewijs alleen voor $\epsilon = +$, $\epsilon = -$ gaat analoog. Existentie en uniciteit volgt uit stelling 3.2 en lemma 3.1. De vlechten $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+$ genereren \mathcal{B}_n en deze zitten in het beeld van ϕ_+ dus ϕ_+ is surjectief.

We maken nu een functie $\psi: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$ met $\psi \circ \phi_+ = \text{id}$. Daaruit volgt dat ϕ_+ injectief is. We representeren $\beta \in \mathcal{B}_n$ door het vlechtendiagram \mathcal{D} . \mathcal{D} is een product is van de elementaire vlechtendiagrammen, dus zo krijgen we voor β een product van elementaire vlechten $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ met $\epsilon_i \in \{+, -\}$ voor $i = 1, \dots, n$.

We definiëren dan

$$\psi(\mathcal{D}) = (\sigma_{i_1})^{\epsilon_1} \dots (\sigma_{i_k})^{\epsilon_k} \text{ met } (\sigma_i)^+ = \sigma_i \text{ en } (\sigma_i)^- = \sigma_i^{-1}.$$

Nu moeten we laten zien dat $\psi(\mathcal{D})$ alleen van β afhangt, dus dat ψ gelijk is op vlechtdiagrammen van isotope geometrische vlechten. Stelling 3.1. zegt dat dit zo als hij gelijk is onder isotopieën op \mathcal{D} en op de Reidemeister zetten $\Omega_2^{\pm 1}, \Omega_3^{\pm 1}$. Isotopieën op vlechtdiagrammen beelden kruisingen op kruisingen af. Als de volgorde van de kruisingen wordt behouden, verandert de splitsing van \mathcal{D} in kleinere vlechtdiagrammen en dus $\psi(\mathcal{D})$, niet. Als de volgorde van de kruisingen wel verandert is dat te schrijven als $(\sigma_i)^{\epsilon_i}(\sigma_j)^{\epsilon_j} = (\sigma_j)^{\epsilon_j}(\sigma_i)^{\epsilon_i}$ voor $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ met $|i-j| \geq 2$. Deze worden door ψ vanwege de eerste vlechtrelatie op hetzelfde afgebeeld, dus $\psi(\mathcal{D})$ blijft hetzelfde onder isotopieën op \mathcal{D} .

Ω_2 en Ω_2^{-1} verwijderen een term $(\sigma_i)^+(\sigma_i)^-$ of een term $(\sigma_i)^-(\sigma_i)^+$ uit \mathcal{D} of voegen die juist toe. Dit verandert duidelijk niets.

Ω_3 en vervangt een term $(\sigma_i)^+(\sigma_{i+1})^+(\sigma_i)^+$ in \mathcal{D} door $(\sigma_{i+1})^+(\sigma_i)^+(\sigma_{i+1})^+$ die dankzij de tweede vlechtrelatie op hetzelfde worden afgebeeld. Ω_3^{-1} gaat analoog. Dus $\psi(\mathcal{D})$ blijft hetzelfde onder Reidemeister zetten op \mathcal{D} , dus $\psi : \mathcal{B}_n \rightarrow B_n$ is welgedefinieerd. Per constructie geldt $\psi \circ \phi_+ = \text{id}$, dus ϕ_+ is injectief, dus bijectief, dus een isomorfisme. \square

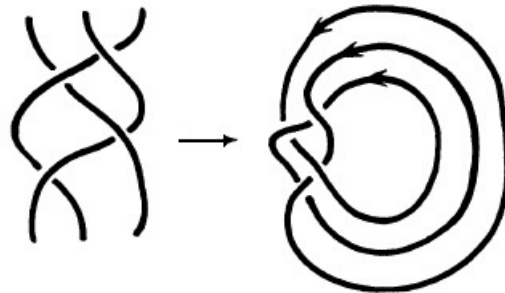
Vanaf nu identificeren we \mathcal{B}_n met B_n via ϕ_+ . Dus voortaan noemen we de elementen van B_n de vlechten op n touwtjes. We noteren σ_i voor σ_i^+ en σ_i^{-1} voor $\sigma_i^- = (\sigma_i^+)^{-1}$.

Hoofdstuk 4

Alexander en Markov

Er zijn sterke banden tussen knopen, schakels en vlechten. In dit hoofdstuk behandelen we een paar van de belangrijkste stellingen in de knopentheorie, die we ook nodig hebben voor onze knooppolynoom.

Definitie 4.1. *De afsluiting van een vlecht $\beta \in B_n$ is de schakel die je krijgt als je het i -de beginpunt van een vlecht verbindt met het i -de eindpunt voor alle i , zoals in onderstaand figuur. We noteren dit ook wel $\widehat{\beta}$.*



Figuur 4.1: Het afsluiten van een vlecht.

De stelling van Alexander

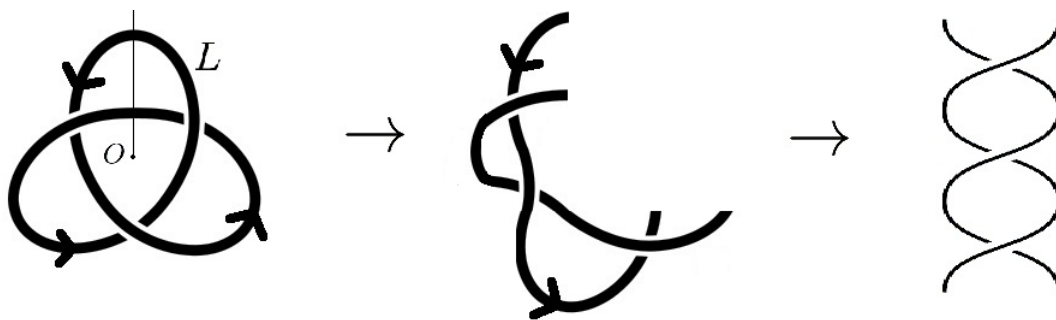
Stelling 4.2. *(Alexander, 1923)*

Iedere georiënteerde schakel is isotoop met een afgesloten vlecht.

Bewijs. Iedere schakel is tam bij ons, dat betekende dat ze isotoop zijn met een polygone schakel. Dus als we het bewijzen voor polygone schakels zijn we klaar. We volgen het bewijs zoals in [2, pagina 121]. Als de schakel nog niet georiënteerd is, geven we hem een orientatie.

Definitie 4.3. We noemen een schakeldiagram $L \subset \mathbb{R}^2$ om een punt $O \in \mathbb{R}^2$, $O \notin L$, heen gevlochten als iedere ribbe van de schakel vanuit O gezien tegen de klok in loopt.

Als er al een punt O bestaat waar L omheen gevlochten is kan je L over een straal vanuit O doorsnijden en dan recht buigen om een vlecht te krijgen.



Figuur 4.2: Van de klaverbladknoop naar de bijbehorende vlecht.

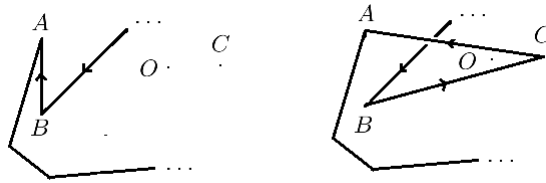
Definitie 4.4. Voor een willekeurige polygone schakel L en punt O noemen we ribben die vanuit O gezien tegen de klok in lopen positief. De rest van de ribben noemen we negatief.

We gaan nu een methode geven om L zo te vervormen dat hij om O heen gevlochten zit. Neem een ribbe AB die negatief is. Nu kies C zó dat O in de driehoek ABC zit. Nu zijn er 2 gevallen:

1. Er ligt geen snijpunt op AB
2. Er ligt één snijpunt op AB

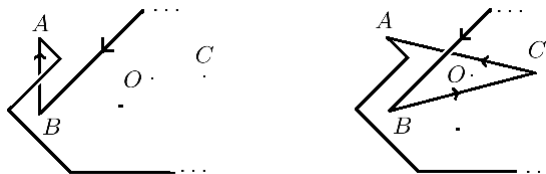
Als er twee of meer snijpunten op een ribbe zouden liggen kan je de ribbe opdelen in kleinere ribben om in bovenstaande gevallen te komen. Dit kan altijd omdat er in tamme knopen maar eindig veel kruisingen zijn.

Geval 1: Als er geen snijpunten op AB liggen dan kan je AB door AC en CB vervangen en die twee ribben zijn positief. Dit kan je doen door met een isotopie de ribbe AB over O heen naar C te "duwen". Het kan zijn dat AC en CB andere ribben kruisen, laat dan AC en CB de bovenliggende ribben zijn bij iedere kruising.



Figuur 4.3: Duw AB over O heen naar C .

Geval 2: Als er wel een kruising op AB ligt en AB is de bovenliggende ribbe dan werkt dezelfde methode nog steeds. Als AB de onderliggende ribbe is dan duw je AB onder O door naar C .



Figuur 4.4: Duw AB onder O door naar C .

Zo maak je alle ribben positief en dan is L om O heen gevlochten. \square

We kunnen dus schakels identificeren met vlechten door ze te oriënteren en de stelling van Alexander te gebruiken. Nu willen we weten aan welke eigenschappen de vlechten moeten voldoen om isotopie afsluitingen te hebben en dan kunnen we vlechten gebruiken om te kijken of schakels isotoop zijn.

De stelling van Markov

Definitie 4.5. Twee vlechten zijn *M-equivalent* als er een eindige reeks Markov-zetten bestaat die de een in de ander overbrengt. De Markov-zetten op een $\beta \in B_n$ zijn:

$$M_1^\gamma : B_n \rightarrow B_n \quad \text{voor } \gamma \in B_n$$

$$\beta \mapsto \gamma\beta\gamma^{-1}$$

en

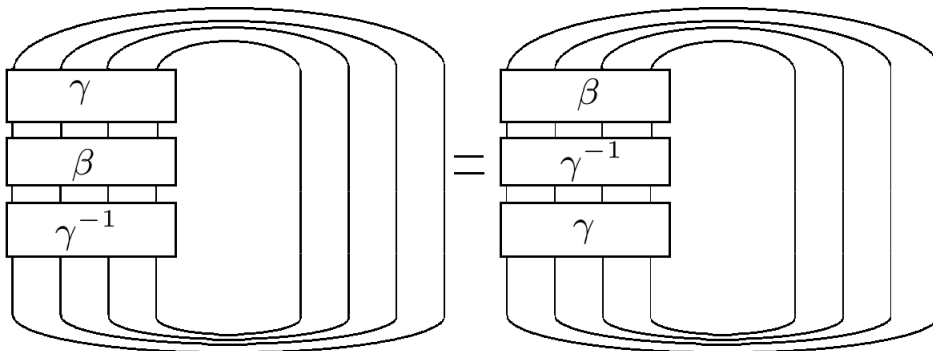
$$M_2^\epsilon : B_n \rightarrow B_{n+1} \quad \text{met } \epsilon = \pm 1$$

$$\beta \mapsto (\sigma_n^\pm \beta)^\epsilon.$$

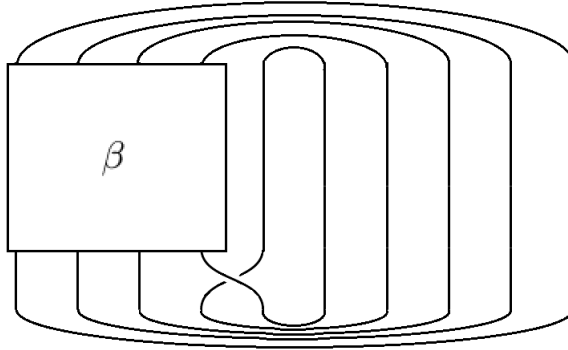
Zoals de naam M-equivalentie al insinueert is dit een equivalentierelatie, wat gemakkelijk in te zien is.

Stelling 4.6. (Markov, 1935) Twee vlechten zijn *M-equivalent* d.e.s.d.a. hun afsluitingen isotoop zijn in \mathbb{R}^3 .

We laten hier zien dat M-equivalente vlechten isotope schakels hebben door te laten zien dat de Markovzetten vlechten met isotope afsluitingen opleveren. Voor een bewijs de andere kant op, zie [1, pagina 68].



Figuur 4.5: Na M_2^γ zien we dat $\widehat{\gamma\beta\gamma^{-1}} = \widehat{\beta\gamma^{-1}\gamma} = \widehat{\beta}$.



Figuur 4.6: Na M_2 zien we dat $(\widehat{\sigma_n^\pm \beta})^\epsilon$ slechts een Ω_1 verschilt van $\widehat{\beta}$.

Gevolg 4.7. *Stel \mathcal{L} is de verzameling van alle isotopieklassen van niet-lege georiënteerde schakels in \mathbb{R}^3 . De afbeelding $\coprod_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathcal{L}$ die aan iedere vlecht de klasse van zijn afsluiting toevoegt, induceert een bijectie van $(\coprod_{n \geq 1} B_n) / \cong$ naar \mathcal{L} .*

Hoofdstuk 5

De Iwahori-Hecke Algebras

Een logisch vervolg van het bekijken van de groep B_n is het kijken naar de \mathbb{C} -algebra voortgebracht door deze groep, $\mathbb{C}B_n$. Echter is deze oneindig dimensionaal en is hierdoor ongeschikt voor het doel wat wij voor ogen hebben. Hierom kijken we naar de Iwahori-Hecke algebra, die er op lijkt maar een extra relatie heeft.

Iwahori-Hecke Algebra

Definitie 5.1. *Zij $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ en R een commutatieve ring met eenheid. Neem $q \in R^*$ en $z \in R$, dan is de Iwahori-Hecke algebra $H_n = H_n^R(q, z)$ de associatieve R -algebra met 1, gegenereerd door T_1, \dots, T_{n-1} met de relaties*

$$\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i && \text{als } |i - j| \geq 2 \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} && \text{voor } i = 1, 2, \dots, n - 2 \end{aligned}$$

en

$$T_i^2 = zT_i + q1.$$

Om praktische redenen bekijken we vaak $z = q - 1$ dus $H_n(q, q - 1)$ ook genoteerd $H_n(q)$. Hierbij verliezen we bijna geen informatie want het blijkt dat $H_n(q, z)$ isomorf is met een $H_n(q')$ voor een zekere q' . Hiervoor moet je soms de bijbehorende ring R uitbreiden.

Lemma 5.2. *Ieder product van T_i is inverteerbaar in $H_n(q)$.*

Bewijs. Vanwege de relatie $T_i^2 = zT_i + q$ geldt dat T_i inverteerbaar is voor alle i , namelijk $T_i^{-1} = q^{-1}(T_i - z1)$. Hieruit volgt dat een product $T_{i_1} \dots T_{i_m}$ met $i_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ voor $k = 1, 2, \dots, m$ inverteerbaar is. \square

Definitie 5.3. *We definiëren het groepshomomorfisme $\pi : B_n \rightarrow H_n^*(q)$, waarbij $H_n^*(q)$ de inverteerbare elementen van $H_n(q)$ zijn, door $\pi(\sigma_i) = T_i$ en $\pi(\sigma_i^{-1}) = T_i^{-1}$.*

Definitie 5.4. *Het tensorproduct van een R -algebra M met zichzelf over een deelalgebra $N \subset M$, genoteerd $M \otimes_N M$, is gedefinieerd als het opspannel van de elementen $m \otimes m'$ met $m, m' \in M$ die zich aan de volgende relaties houden:*

$$(ac) \otimes b = a \otimes (cb) \quad \text{met } a, b \in M \text{ en } c \in N$$

en

$$(\lambda a) \otimes b = a \otimes (b\lambda) \quad \text{met } a, b \in M \text{ en } \lambda \in R.$$

Stelling 5.5. *De functie $\phi_n : H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n \mapsto H_{n+1}$ gedefinieerd als $\phi_n(x_1 \oplus x_2 \otimes x_3) = x_1 \oplus x_2 T_n x_3$ is een isomorfisme. Dit betekent dat ϕ een bijectief moduul-homomorfisme is, dus het is een bijectieve R -lineaire afbeelding.*

Voor het bewijs van deze stelling zie [1, pagina 168].

Hoofdstuk 6

De HOMFLY-polynoom

In dit hoofdstuk gaan we de twee vormen van de HOMFLY-polynoom construeren en bekijken. De HOMFLY-polynoom werd als eerste beschreven in [5]. Om hem te construeren houden we hier de methode aan van Jones in [3].

Stelling 6.1. (*Ocneanu*)

Er is een trace $\tau : \bigcup_{n \geq 1} H_n(q) \rightarrow \mathbb{C}[z]$ uniek gedefinieerd door:

1. $\tau(ab) = \tau(ba)$ voor $a, b \in \bigcup_{n \geq 1} H_n(q)$
2. $\tau(1) = 1$
3. $\tau(aT_n) = z \cdot \tau(a)$ voor $a \in H_n(q)$.

Bewijs. Het isomorfisme ϕ_n uit stelling 5.2 stelt ons in staat om de trace inductief te definiëren, hiervoor kijken we naar de restricties van τ op de Iwahori-Hecke algebras die we noteren als $\tau|_{H_n} = \tau_n$.

$H_1 = \{1\}$ en $H_2 = \{1, T_1\}$, deze zijn commutatief dus τ_1 en τ_2 voldoen aan vergelijking 1. τ_1 moet de identiteit zijn om te voldoen aan vergelijking 2 en τ_2 moet 1 naar 1 sturen en T_n naar z om aan vergelijkingen 2 en 3 te voldoen. We nemen nu aan dat τ_k bestaat en aan de eisen voldoet voor alle k met $2 < k \leq n$ en we definiëren

$$\tau_{n+1}(\phi_n(a \oplus b \otimes c)) := \tau_n(a) + z\tau_n(bc).$$

Uit deze definitie volgt dat τ_{n+1} voldoet aan de vergelijkingen 2 en 3, nu moeten we nog eigenschap 1 laten zien.

Omdat H_{n+1} gegenereerd wordt door $H_n \cup T_n$ hoeven we slechts te laten

zien dat $\tau_{n+1}(xs) = \tau_{n+1}(sx)$ voor $s \in H_n \cup T_n$ en $x \in H_{n+1}$. Via ϕ_n bekijken we de originelen van $x \in H_{n+1}$, d.w.z. voor $x \in H_{n+1}$ bekijken we $y \in H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ met $\phi_n(y) = x$. Zo zien we dat we alleen de volgende twee gevallen hoeven te behandelen om het voor heel τ_{n+1} te bewijzen. Deze twee gevallen zijn $y \in H_n$, dus $x \in H_n$ en $y \in H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$, dus $x = aT_nb$.
 Geval 1: Als $y \in H_n$ dan $x \in H_n$ dus als $s \in H_n$ dan

$$\tau_{n+1}(xs) = \tau_n(xs) = \tau_n(sx) = \tau_{n+1}(sx)$$

volgens de inductie-aanname. Als $s \notin H_n$ dan $s = T_n$. Daaruit, samen met de definitie van τ_{n+1} , volgt dat

$$\tau_{n+1}(xs) = \tau_{n+1}(xT_n) = z\tau_n(x) = \tau_{n+1}(T_nx) = \tau_{n+1}(sx).$$

Geval 2: Als $y \in H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$, dus $y = a \otimes b$ met $a, b \in H_n$, dan $x = aT_nb$. Dan geldt weer $s \in H_n$ of $s = T_n$. Stel $s \in H_n$ dan $\tau_{n+1}(saT_nb) = z\tau_n(sab) = z\tau_n(abs) = \tau_{n+1}(aT_nbs)$. Er is maar één geval die niet snel uit de definitie van τ_{n+1} volgt en dat is het geval met $y = a \otimes b$ en $s = T_n$, dus het geval $\tau(T_naT_nb) = \tau(aT_nbT_n)$ met $a, b \in H_n$. Ook hierbij zijn er weer verschillende gevallen die we hier gaan uitwerken.

1. $a, b \in H_{n-1}$. Vanwege de vlechtrelaties commuteren a en b met T_n dus in dit geval zijn we meteen klaar.
2. $a = xT_{n-1}y$ met $x, y \in H_{n-1}$ en $b \in H_{n-1}$. We werken dit uit:

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(T_naT_nb) &= \tau_{n+1}(T_nxT_{n-1}yT_nb) \\ &= \tau_{n+1}(xT_nT_{n-1}T_nyb) \\ &= \tau_{n+1}(xT_{n-1}T_nT_{n-1}yb) \\ &= z\tau_n(xT_{n-1}^2yb) \\ &= z(q-1)\tau_n(xT_{n-1}yb) + qz\tau_{n-1}(xyb) \\ &= (q-1)\tau_{n+1}(xT_{n-1}yT_nb) + q\tau_n(xT_{n-1}yb) \\ &= \tau_{n+1}(xT_{n-1}yT_n^2b) \\ &= \tau_{n+1}(xT_{n-1}yT_nbT_n) \\ &= \tau_{n+1}(aT_nbT_n). \end{aligned}$$

3. $b = xT_{n-1}y$ met $x, y \in H_{n-1}$ en $a \in H_{n-1}$, gaat hetzelfde als de vorige alleen met a en b omgedraaid.

4. $a = xT_{n-1}y$ en $b = x'T_{n-1}y'$ met $x, y, x', y' \in H_{n-1}$. Wederom werken we dit uit:

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}(T_n a T_n b) &= \tau_{n+1}(T_n x T_{n-1} y T_n x' T_{n-1} y') \\
&= \tau_{n+1}(x T_n T_{n-1} T_n y x' T_{n-1} y') \\
&= z \tau_n(x T_{n-1}^2 y x' T_{n-1} y') \\
&= z(q-1) \tau_n(x T_{n-1} y x' T_{n-1} y') + qz^2 \tau_{n-1}(x y x' y') \\
&= z(q-1) \tau_n(x T_{n-1} y x' T_{n-1} y') + qz \tau_n(x T_{n-1} y x' y') \\
&= z \tau_n(x T_{n-1} y x' T_{n-1}^2 y') \\
&= \tau_{n+1}(x T_{n-1} y T_n x' T_{n-1} y' T_n) \\
&= \tau_{n+1}(a T_n b T_n).
\end{aligned}$$

Dus τ_{n+1} voldoet aan de eisen en uit de inductie volgt dat τ overal aan de eisen voldoet. \square

Je ziet al snel de gelijkenis tussen eigenschap 3 en Markov zet 2. Om nu van de trace een invariant te maken moeten we de σ_i verder normaliseren door de inverse Markov zet 2 hetzelfde effect te laten hebben op de trace. We willen een θ zodanig dat $\tau(\theta \sigma_i) = \tau((\theta \sigma)^{-1})$. Die vinden we met

$$\theta^2 = \tau(T_i^{-1})/\tau(T_i) = \tau(T_i/q - (1 - (1/q)))/z = (1 - q + z)/qz$$

Dit laatste noemen we λ . Dan $\tau(\sqrt{\lambda} T_i) = \tau(\sqrt{\lambda} T_i^{-1})$ en $\tau(\sqrt{\lambda} T_i) = z\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}(1 - q)/(1 - \lambda q)$.

Hieruit volgt dat als we voor B_n de representatie π_λ , $\pi_\lambda(\sigma_i) = \sqrt{\lambda} T_i$, in $H_n(q)$ gebruiken, dat de functie $(-(1 - \lambda q)/(\sqrt{\lambda}(1 - q)))^{n-1} \tau(\pi_\lambda(b))$ voor alle $b \in B_n$ alleen van de afsluiting van b afhangt. Daarom definiëren we:

Definitie 6.2. De 2-variabele invariant $X_L(q, \lambda)$ bij een geörienteerde schakel L is gedefinieerd als

$$X_L(q, \lambda) = \left(-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^e \tau(\pi(\alpha)),$$

waarbij $\alpha \in B_n$ een vlecht is waarvan de afsluiting isotoop is met L . De e is de som van de exponenten van de generatoren σ_i waar α uit bestaat.

Nu gaan we laten zien dat deze invariant een polynoom is in de twee variabelen $t = \sqrt{\lambda q}$ en $x = (\sqrt{q} - 1/\sqrt{q})$.

Stelling 6.3. *Voor alle georiënteerde schakels L is er een Laurent polynoom $P_L(t, x)$ in de variabelen t en x met $P_{triviale\ knoop}(t, x) = 1$ en als voor q en λ geldt $t = \sqrt{\lambda q}$ en $x = (\sqrt{q} - 1)/\sqrt{q}$ dan definiëren we:*

$$P_L(t, x) = X_L(q, \lambda).$$

Deze polynoom is uniek gedefinieerd door de volgende Skein relatie

$$t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}$$

en $P_{triviale\ knoop} = 1$.

Bewijs. We controleren eerst of X_L aan de Skein relatie voldoet. Merk op dat wanneer je een georiënteerde schakel L als afgesloten vlecht schrijft en een kruising kiest, je de bijbehorende vlecht zo kan schrijven dat de gekozen kruising correspondeert met een σ_i of σ_i^{-1} . Dus voor de Conway triple L_-, L_+ en L_0 van dat kruispunt geldt $L_- = \widehat{\alpha\sigma_i^{-1}\beta}$, $L_+ = \widehat{\alpha\sigma_i\beta}$ en $L_0 = \widehat{\alpha\beta}$.

Dan doen we een Markov zet van type 1 op deze vlechten ($M_1 : b \rightarrow \gamma b \gamma^{-1}$) met $\gamma = \sigma_i^{-1}\beta$. Noem $\beta' = \sigma_i^{-1}\beta\alpha$, dan $L_+ = \widehat{\beta'\sigma_i^2}$, $L_- = \widehat{\beta'}$ en $L_0 = \widehat{\beta'\sigma_i}$.

We weten $\tau(\pi(\beta'\sigma_i^2)) - q(\tau(\pi(\beta')))) = (q-1)\tau(\pi(\beta'\sigma_i))$. Vermenigvuldig deze vergelijking met $T((\sqrt{\lambda})^{e+1}/\sqrt{q})$ waarbij $T = (-(1-\lambda q)/\sqrt{\lambda(1-q)})^{n-1}$ en e is de som van de exponenten van de σ_i waar β' uit bestaat. Dan wordt de vergelijking:

$$\frac{T}{\sqrt{q\lambda}}(\sqrt{\lambda})^{e+2}\tau(\pi(\beta'\sigma_i^2)) - \sqrt{q\lambda}T(\sqrt{\lambda})^e\tau(\pi(\beta')) = \frac{\sqrt{q}-1}{\sqrt{q}}T(\sqrt{\lambda})^{e+1}\tau(\pi(\beta'\sigma_i))$$

Dan volgt uit de definitie van X dat $t^{-1}X_{L_+} - tX_{L_-} = xX_{L_0}$. Dat een Skein relatie recursie ophoud hebben we al laten zien, dus $P_L(t, x)$ is goed gedefinieerd voor alle L . Deze polynoom noemen we de (inhomogene) HOMFLY-polynoom. \square

Nu hebben we bewezen dat de (inhomogene) HOMFLY-polynoom bestaat en voldoet aan de Skein relatie

$$t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}.$$

Er is echter ook een Skein relatie die een homogene versie van de HOMFLY-polynoom definieert. Dit gaan we nu bewijzen.

Stelling 6.4. *De homogene HOMFLY-polynoom is gedefinieerd als 1 op de triviale knoop en voldoet aan de volgende relatie:*

$$a\tilde{P}_{L_+} + b\tilde{P}_{L_-} + c\tilde{P}_{L_0} = 0.$$

Deze Laurent polynoom is homogeen van graad 0. [5]

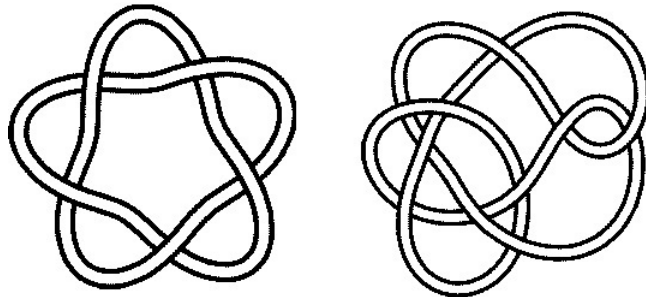
Bewijs. Je ziet snel in dat de polynoom gedefinieerd door die Skein relatie homogeen is van graad 0. Als je de vergelijking omschrijft krijg je namelijk $\tilde{P}_{L_+} = \frac{b}{-a}\tilde{P}_{L_-} + \frac{c}{-a}\tilde{P}_{L_0}$, $\tilde{P}_{L_-} = \frac{a}{-b}\tilde{P}_{L_+} + \frac{c}{-b}\tilde{P}_{L_0}$ en $\tilde{P}_{L_0} = \frac{a}{-c}\tilde{P}_{L_+} + \frac{b}{-c}\tilde{P}_{L_-}$. Iedere stap van de recursie komt er dus een factor $\frac{x}{y}$ bij, met x en y twee verschillende variabelen, dus de som van de machten van de variabelen blijft gelijk. Uiteindelijk kom je bij $\tilde{P}(\text{triviale knoop}) = 1$ en daarvan is de graad 0, dus alle polynomen die zo recursief gevonden worden zijn ook homogeen van graad 0.

Nu laten we zien dat je uit de polynoom verkregen met de ene Skein relatie de polynoom verkregen uit de andere kan krijgen. Om van de homogene polynoom van de schakel L , $\tilde{P}_L(a, b, c) = \sum_{q+r+s=0} c_{(q,r,s)} a^q b^r c^s$ met $q, r, s \in \mathbb{Z}$, naar de polynoom $P_L(t, x)$ te komen, stuur je simpelweg de variabelen a, b en c naar $-\frac{1}{t}, t$ en x respectievelijk. Dit kan je goed inzien bij de Skein relaties. De polynomen zien er dan zo uit:

$$\tilde{P}_L(-\frac{1}{t}, t, x) = \sum_{q+r+s=0} c_{(q,r,s)} (-\frac{1}{t})^q t^r x^s = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} d_{(n,m)} t^n x^m = P_L(t, x).$$

We zien nu ook dat $s = m$ en dat t^n eigenlijk $(\frac{1}{t})^q t^r$ is, dus $n = r - q$. De andere kant op is ook niet moeilijk. Je hebt de polynoom $P_L(t, x) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} d_{(n,m)} t^n x^m$. We weten dat $s = m$, $n = r - q$ en $q + r + s = 0$. Uit deze vergelijkingen vinden we q en r . Dan sturen we $t^n = (\frac{1}{t})^q t^r$ naar $(-1)^q a^q b^r$ door $-\frac{1}{t}$ naar a en t naar b te sturen en krijgen we de homogene polynoom terug. \square

We herinneren ons dat een belangrijke eigenschap van invarianten is dat er meestal meerdere objecten zijn die dezelfde waarde hebben op die invariant. Dit is ook het geval met de HOMFLY-polynoom, dus als twee schakels dezelfde HOMFLY-polynoom hebben hoeven ze niet isotoop te zijn. Een voorbeeld van twee knopen die dezelfde HOMFLY-polynoom hebben, maar niet isotoop zijn, is:



Figuur 6.1: Twee niet-isotope knopen met dezelfde HOMFLY-polynoom. [3]

Bibliografie

- [1] Christian Kassel and Vladimir Turaev, *Braid Groups*, Springer, New York, 2008
- [2] V.O. Manturov, *Knot Theory*, Chapman & Hall, New York, 2004
- [3] V.F.R. Jones, Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials, *The Annals of Mathematics* Vol. 126,335-388 (1987)
- [4] D.S. Silver, Scottish Physics and Knot Theory's Odd Origins, *American Scientist* Vol.94, 158 (2005)
- [5] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu "A New Polynomial Invariant of Knots and Links". *Bulletin of the American Mathematical Society* 12, 239-246 (1985)