Opgave 1 *Zij $f, g \in A(S^1)$. (Dus: $f \in C(S^1)$ en $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$, en hetzelfde voor g.)*

(a) *Bewijs dat*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)c_{n-k}(g) \tag{1}$$

voor elk $n \in \mathbb{Z}$ absoluut convergeert.

(b) *Defineer $d_n = (c(f) * c(g))_n$ door (1) en bewijs dat*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_n| < \infty.$$

(c) *Dankzij (b) convergeert*

$$h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

absoluut en uniform. Bewijs dat $h(x) = f(x)g(x)$ voor alle $x \in S^1$.

Opmerking: We hebben dus bewezen dat $f, g \in A(S^1) \Rightarrow f \cdot g \in A(T)$ (dus: "$A(T)$ is een algebra t.o.v. puntsgewijze vermenigvuldiging") en

$$c_n(f \cdot g) = (c(f) * c(g))_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dit resultaat is het "duale" van $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

Opgave 2 *De Fejér kern $F_N(x)$ is gedefineerd door*

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_N(x)}{N+1},$$

waar

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(a) *Laat zien dat*

$$F_N(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx}.$$

(b) *Gebruik (a), de substitutie $z = e^{ix}$ en*

$$\sum_{k=0}^{n} kz^k = z\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)'$$

om te bewijzen dat

$$F_N(x) = \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2})x}{(N+1)\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 *Defineer een 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door $f(x) = x$ op $(-\pi, \pi)$.*

(a) *Bereken de Fouriercoëfficienten $c_n(f)$.*

(b) *Gebruik de formule van Plancherel*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ te berekenen.

(c) *Analoog met $f(x) = x^2$ op $(-\pi, \pi)$.*

(d) **Bonus**: *Hetzelfde met $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.*