Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
1. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 20.10.10

Aufgabe 1.1: Seien $p\colon E \to X$ und $p'\colon E' \to X'$ Überlagerungen. Zeige, dass dann auch die Produkt-Abbildung

$$p \times p'\colon E \times E' \to X \times X'$$

eine Überlagerung ist. Wie hängt die Blätterzahl der Produkt-Überlagerung von den ursprünglichen Blätterzahlen ab?

Aufgabe 1.2: (Zurückziehen von Überlagerungen) Seien $f\colon Y \to X$ und $p\colon E \to X$ stetige Abbildungen. Das *Faserprodukt* $Y \times_X E$ ist definiert als der Unterraum des Produktes $Y \times E$ bestehend aus denjenigen Paaren (y, e) mit der Eigenschaft $f(y) = p(e)$.

Zeige, dass

$$Y \times_X E \to Y \qquad (y, e) \mapsto y$$

eine Überlagerung ist, falls die Abbildung $p\colon E \to X$ eine Überlagerung ist. Wie hängt die Blätterzahl dieser *zurückgezogenen Überlagerung* von der Blätterzahl von p ab?

Aufgabe 1.3: Es sei G eine Gruppe, die stetig von rechts auf einem topologischen Raum E wirkt (d.h. für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $E \to E$, $e \mapsto eg$ stetig). Die Wirkung heißt *eigentlich diskontinuierlich* falls jeder Punkt $e \in E$ eine Umgebung U besitzt, so dass für alle $g \in G \setminus \{1\}$ gilt $Ug \cap U = \emptyset$. Wir bezeichen mit E/G den Quotientenraum von E nach der Äquivalenzrelation $e \sim eg$ für alle $e \in E$ und $g \in G$.

(a) Sei G eine endliche Gruppe, die stetig und *frei* auf einem Hausdorffraum E wirkt (d.h. aus $eg = e$ für $e \in E, g \in G$ folgt schon $g = 1$). Zeige, dass die Wirkung von G auf E eigentlich diskontinuierlich ist.

(b) Finde eine Gruppe G (notwendigerweise unendlich) und eine stetige, freie Wirkung von G auf einem Hausdorffraum, die nicht eigentlich diskontinuierlich ist.

(c) Zeige, dass für jede eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe G auf einem Raum E die Quotientenraumprojektion

$$E \to E/G$$

eine Überlagerung ist. Was ist die Blätterzahl? Welche der bisher betrachteten Überlagerungen lassen sich als Spezialfälle dieser Konstruktion ansehen?

Aufgabe 1.4: Sei $f : X \to X$ eine stetige Selbst-Abbildung eines topologischen Raumes X. Auf dem Produkt $X \times [0, 1]$ von X mit dem Einheitsintervall betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$, die von der Vorschrift $(x, 1) \sim (f(x), 0)$ erzeugt wird. Der *Abbildungstorus* von f ist der Quotientenraum

$$T_f \;=\; X \times [0, 1]/ \sim \;.$$

Es wird also die 'Endkopie' $X \times \{1\}$ vermöge f mit der 'Anfangskopie' $X \times \{0\}$ von X identifiziert.

Sei jetzt f ein Homöomorphismus. Definiere eine stetige und eigentlich diskontinuierliche Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z}$ auf dem Raum $X \times \mathbb{R}$ derart, dass der Quotientenraum $(X \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ (im Sinne der Aufgabe 1.3) homöomorph zum Abbildungstorus T_f ist. Nach Aufgabe 1.3 erhalten wir so eine Überlagerung

$$X \times \mathbb{R} \ \to \ T_f \ .$$

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
2. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 27.10.10

Aufgabe 2.1: Sei X ein Raum und $H\colon X \times [0,1] \to X$ eine Homotopie von der Identität zur Identität. Zeige, dass für jeden Punkt $x \in X$ die Homotopieklasse der Schleife $H(x,-)\colon [0,1] \to X$ im Zentrum der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x)$ liegt.

Aufgabe 2.2: (Projektive Räume) Der *n-dimensionale projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$ ist definiert als die Menge aller Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Topologie des projektiven Raumes ist die Quotienten-Topologie des $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bezüglich der surjektiven Abbildung

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n, \qquad x \mapsto \mathrm{Span}(x) = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

die einen Punkt auf die von ihm aufgespannte Gerade abbildet.

(a) Wie gewöhnlich bezeichne $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$ die n-dimensionale Sphäre. Wir betrachten die Äquivalenzrelation ‚$\sim$' auf S^n, die jeden Punkt x mit seinem Antipodenpunkt $-x$ identifiziert. Zeige, dass der Quotientenraum $S^n/\sim$ topologisch äquivalent zum projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ ist. (Hinweis: Zeige, dass die Inklusion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ eine topologische Äquivalenz auf den Quotientenräumen induziert.)

(b) Zeige mit Hilfe von (a), dass der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ kompakt ist.

(c) Zeige, dass die projektive Gerade $\mathbb{R}P^1$ topologisch äquivalent ist zum Kreis S^1.

(d) Konstruiere mit Hilfe von Aufgabe 1.3 und Teil (a) eine zweiblättrige Überlagerung von $\mathbb{R}P^n$ mit Totalraum S^n.

Aufgabe 2.3: Sei $p\colon E \to X$ eine Überlagerung mit endlicher Blätterzahl, d.h., für jeden Punkt $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ nicht-leer und hat endlich viele Elemente. Zeige, dass E genau dann kompakt ist, wenn X kompakt ist.

Aufgabe 2.4: Sei G eine topologische Gruppe, deren unterliegender Raum wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, und sei $1 \in G$ das neutrale Element der Gruppenstruktur. Sei $p\colon E \to G$ eine Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum.

Zeige, dass es zu jedem $e \in p^{-1}(1)$ genau eine Abbildung $m\colon E \times E \to E$ gibt, die E zu einer topologischen Gruppe mit e als neutralem Element und p zu einem Gruppenhomomorphismus macht. Zeige, dass die Menge $p^{-1}(1)$ eine zentrale Untergruppe von E ist.

Hinweis In der Literatur gibt es keine einheitliche Konvention darüber, ob der Begriff eines *kompakten* Raums notwendig die Hausdorff-Eigenschaft beinhaltet. Um Missverständnissen vorzubeugen: In dieser Vorlesung heißt ein topologischer Raum X *quasi-kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat, und X heißt *kompakt* wenn X quasi-kompakt ist und die Hausdorff-Eigenschaft hat. Mit anderen Worten: Kompaktheit enthält die Hausdorff-Eigenschaft. Insbesondere ist in den Aufgaben 2.2(b) und 2.3 also auch zu zeigen, dass die betreffenden Räume die Hausdorff-Eigenschaft haben.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

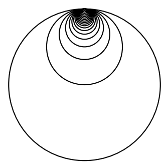
Übungen zur Topologie I WS 2010/11
3. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 03.11.10

Aufgabe 3.1: Sei $H \subset \mathbb{R}^2$ der Unterraum, der gegeben ist durch

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

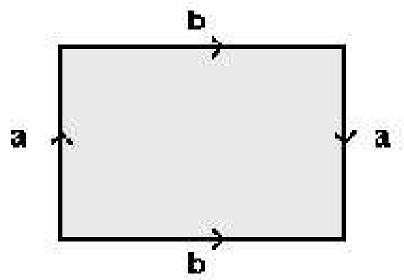
Dabei ist K_n der Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ und Mittelpunkt $(0, -\frac{1}{n})$. (Aufgrund des Bildes

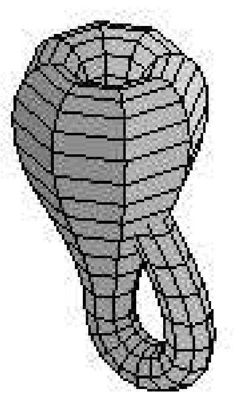


ist H unter dem Namen *Hawaiische Ohrringe* bekannt.)

Zeige, dass H keine universelle Überlagerung hat. (Hinweis: Ein Unterraum $A \subset B$ heißt *Retrakt*, wenn es eine stetige Abbildung $r\colon B \to A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$ gibt. Ein hilfreicher Zwischenschritt im Beweis ist zu zeigen, dass jede Umgebung des problematischen Punktes von H einen zu S^1 homöomorphen Raum als Retrakt enthält.)

Aufgabe 3.2: Die *Klein'sche Flasche* ist der Quotientenraum des Quadrates $[0,1] \times [0,1]$, bei dem man jeden Punkt der Form $(x, 0)$ mit dem Punkt $(x, 1)$ identifiziert und außerdem jeden Punkt der Form $(0, y)$ mit dem Punkt $(1, 1-y)$ (für alle $x, y \in [0,1]$).





(a) Betrachte die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$, die erzeugt wird von den Identifizierungen

$$(x, y) \sim (x, y+1) \quad \text{und} \quad (x, y) \sim (x+1, -y)\ .$$

Zeige, dass der Quotientenraum von $\mathbb{R}^2$ nach dieser Äquivalenzrelation topologisch äquivalent zur Klein'schen Flasche ist.

(b) Zeige, dass die Quotientenraumprojektion

$$\mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2/\sim$$

eine Überlagerung mit unendlich vielen Blättern ist.

Aufgabe 3.3: Sei X ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeige, dass jede stetige Abbildung $X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (Hinweis: verwende die Überlagerung $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1$.)

Aufgabe 3.4: Topologische Räume X und Y heißen *homotopie-äquialent*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ gibt.

Seien nun X und Y zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Räume, und seien $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Y}$ die Totalräume von universellen Überlagerungen $\widetilde{X} \to X$ und $\widetilde{Y} \to Y$. Zeige, dass $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Y}$ homotopie-äquivalent sind, falls X und Y homotopie-äquivalent sind.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
4. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 10.11.10

Aufgabe 4.1: Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung von zusammenhängenden und lokal weg-zusammenhängenden Räumen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gibt ein $x \in X$ so dass die Decktransformationsgruppe $\Delta(p)$ transitiv auf $p^{-1}(x)$ wirkt.

(b) Für alle $x \in X$ wirkt die Decktransformationsgruppe $\Delta(p)$ transitiv auf $p^{-1}(x)$.

(c) Es gibt ein $e \in E$ so dass die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(e)))$ ist.

(d) Für alle $e \in E$ ist die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(e)))$.

(e) Die von p induzierte Abbildung $\Delta(p)\backslash E \to X$ ist ein Homöomorphismus, wobei $\Delta(p)\backslash E$ den Quotientenraum von E nach der Wirkung der Decktransformationsgruppe bezeichnet.

Wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, heißt die Überlagerung *normal* (oder auch *regulär*).

Aufgabe 4.2: (Die Fundamentalgruppe der Klein'schen Flasche)

(a) Zeige, dass die Verknüpfung $(m_1, n_1) \circ (m_2, n_2) = (m_1 + (-1)^{n_1} m_2, n_1 + n_2)$ die Menge $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $(0, 0)$ macht, die nicht abelsch ist.

(b) Zeige, dass die Fundamentalgruppe der in Aufgabe 3.2 eingeführten Klein'schen Flasche isomorph zu G ist. (Hinweis: Identifiziere die universelle Überlagerung von K und zeige, dass G isomorph zur ihrer Decktransformationsgruppe ist.)

Aufgabe 4.3: Sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, seien $x_0 \in X$ und $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ Basispunkte, sei $p\colon E \to X$ eine universelle Überlagerung, und sei $\Delta(p)$ die Decktransformationsgruppe von p. Wie in der Vorlesung gezeigt ist folgende Abbildung $\Phi\colon \pi_1(X, x_0) \to \Delta(p)$ ein Gruppenisomorphismus: für $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ ist $\Phi(\alpha)$ die eindeutig bestimmte Decktransformation, für die gilt $\Phi(\alpha)(e_0) = e_0 \cdot \alpha$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für $e \in p^{-1}(x_0)$ und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ definiert die Vorschrift $(e, \alpha) \mapsto \Phi(\alpha)(e)$ eine rechte Wirkung der Fundamentalgruppe des Basisraumes auf der Faser über dem Basispunkt.

(b) Für alle $e \in p^{-1}(x_0)$ und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ stimmt $\Phi(\alpha)(e)$ mit der rechten Wirkung $e \cdot \alpha$ von α auf e aus der Vorlesung überein.

(c) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist abelsch.

Aufgabe 4.4: Der Raum X sei gegeben durch die Vereinigung der beiden Räume

$$X_1 = \{x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 | \|x + (1,0,0)\| = 1\} \quad \text{und}$$
$$X_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \|x - (1,0,0)\| = 1\}.$$

Also ist X die Vereinigung einer eindimensionalen Sphäre und einer zweidimensionalen Sphäre, die sich in einem Punkt treffen. Finde eine explizite Beschreibung der universellen Überlagerung $p\colon E \to X$ von X, für die der Totalraum E ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist, und erkläre mit einer Skizze warum man sich E als *unendliche Lampionkette* vorstellen kann.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
5. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 17.11.10

Aufgabe 5.1: Sei $\Delta^3 \subset \mathbb{R}^4$ das 3-Simplex

$$\Delta^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}.$$

Mit einer beliebigen (aber fest gewählten) Anordnung seiner Ecken kann Δ^3 als geordneter Simplizialkomplex aufgefaßt werden. Sei $\partial\Delta^3$ der Rand von Δ^3. Berechne die Homologiegruppen von Δ^3 und $\partial\Delta^3$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5.2: Sei X ein endlicher geordneter Simplizialkomplex und sei $c_i(X)$ die Anzahl der i-Simplizes in X. Die *Euler-Charakteristik* von X ist die ganze Zahl

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i c_i(X).$$

Sei nun K ein Körper, sei $H_i(X, K)$ die Homologie von X mit Koeffizienten in K, sei $d_i(X, K)$ die Dimension des K-Vektorraums $H_i(X, K)$, und sei

$$\chi(X, K) = \sum_i (-1)^i d_i(X, K).$$

Zeige, dass $\chi(X) = \chi(X, K)$ gilt. Insbesondere hängt $\chi(X, K)$ also nicht von K ab.

Aufgabe 5.3: Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie (d.h. die Gesamtheit der Objekte bildet eine Menge). Der *Nerv* der Kategorie $\mathcal{C}$ ist die simpliziale Menge $N\mathcal{C}$ mit

$$\begin{aligned}(N\mathcal{C})_n &= \text{Menge aller komponierbaren } n\text{-Tupel von Morphismen in } \mathcal{C}\\ &= \{(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) \mid \text{Quelle}(\alpha_{i+1}) = \text{Ziel}(\alpha_i) \text{ für } 1 \leq i \leq n-1\}\end{aligned}$$

als Menge der n-Simplizes für $n \geq 1$ und mit der Menge der Objekte von $\mathcal{C}$ als Menge der 0-Simplizes $(N\mathcal{C})_0$. Für $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$ ist die Randabbildung $d_i : (N\mathcal{C})_n \to (N\mathcal{C})_{n-1}$ definiert durch

$$d_i(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \begin{cases} (\alpha_n, \ldots, \alpha_2) & \text{für } i = 0, \\ (\alpha_n, \ldots, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+1} \circ \alpha_i, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_1) & \text{für } 0 < i < n, . \\ (\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1) & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Für $n = 1$ ist $d_0(\alpha)$ (bzw. $d_1(\alpha)$) als Ziel (bzw. Quelle) von α zu interpretieren. Für $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$ ist die Ausartungsabbildung $s_i : (N\mathcal{C})_n \to (N\mathcal{C})_{n+1}$ definiert durch

$$s_i(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = (\alpha_n, \ldots, \alpha_{i+1}, \text{id}, \alpha_i, \ldots, \alpha_1),$$

und s_0 ordnet einem Objekt die Identitätsabbildung auf diesem Objekt zu. Zeige, dass $N\mathcal{C}$ eine simpliziale Menge bildet.

Aufgabe 5.4: Für $n \geq 0$ bezeichnet $[n]$ die geordnete Menge $(0 < 1 < \cdots < n)$ und Δ^n das affine Standard Simplex

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_i \geq 0, \textstyle\sum x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Sei $\alpha\colon [m] \to [n]$ eine nicht notwendig monotone Abbildung. Zeige:

(a) Die Abbildung $\alpha_*\colon \Delta^m \to \Delta^n$ gegeben durch

$$\alpha_*\colon \Delta^m \;\to\; \Delta^n \;, \quad (x_0, \dots, x_m) \;\mapsto\; \left(\sum_{\alpha(i)=0} x_i, \sum_{\alpha(i)=1} x_i, \dots, \sum_{\alpha(i)=n} x_i \right)$$

zwischen Simplizes ist stetig, affin-linear und bildet die i-te Ecke von Δ^m auf die $\alpha(i)$-te Ecke von Δ^n ab.

(b) Die Zuordnung

$$[n] \mapsto \Delta^n, \qquad (\alpha\colon [m] \to [n]) \mapsto (\alpha_*\colon \Delta^m \to \Delta^n)$$

ist funktoriell für (nicht notwendig monotone) Abbildungen $\alpha\colon [m] \to [n]$, d.h. es gilt $(\alpha\beta)_* = \alpha_*\beta_*$ für komponierbare Abbildungen α und β.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
6. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 24.11.10

Aufgabe 6.1: Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus simplizialer Mengen, so dass $f_n \colon X_n \to Y_n$ für alle $n \geq 0$ bijektiv ist. Zeige, dass f ein Isomorphismus von simplizialen Mengen ist.

Aufgabe 6.2: Es sei X simpliziale Menge, T topologischer Raum und $f : X \to \mathcal{S}(T)$ ein Morphismus von simplizialen Mengen, wobei $\mathcal{S}(-)$ die singuläre simpliziale Menge bezeichnet.

(a) Betrachte die stetige Abbildung

$$\dot{\bigcup_{n\geq 0}} X_n \times \Delta^n \to T, \qquad X_n \times \Delta^n \ni (x,t) \mapsto f_n(x)(t)\,.$$

Zeige, dass diese Vorschrift eine stetige Abbildung $\hat{f} : |X| \to T$ auf der geometrischen Realisierung induziert.

(b) Zeige, dass für jede simpliziale Menge X und jeden topologischen Raum T die Zuordnung

$$\begin{aligned} \kappa_{X,T} \ : \ \mathrm{Hom}_{\text{simpl. Mengen}}(X, \mathcal{S}(T)) &\to \mathrm{Hom}_{\text{top. Räume}}(|X|, T) \\ f &\mapsto \kappa_{X,T}(f) = \hat{f} \end{aligned}$$

bijektiv ist.

(c) Zeige, dass die Bijektion aus Teil (b) *natürlich* in beiden Variablen ist, dass also für jede stetige Abbildung $g : T \to T'$ folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\text{simpl. Mengen}}(X, \mathcal{S}(T)) & \xrightarrow{\kappa_{X,T}} & \mathrm{Hom}_{\text{top. Räume}}(|X|, T) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(X,\mathcal{S}(g))} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(|X|,g)} \\ \mathrm{Hom}_{\text{simpl. Mengen}}(X, \mathcal{S}(T')) & \xrightarrow[\kappa_{X,T'}]{} & \mathrm{Hom}_{\text{top. Räume}}(|X|, T') \end{array}$$

und für jeden Morphismus von simplizialen Mengen $h : X' \to X$ folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\text{simpl. Mengen}}(X, \mathcal{S}(T)) & \xrightarrow{\kappa_{X,T}} & \mathrm{Hom}_{\text{top. Räume}}(|X|, T) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(h,T)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(|h|,T)} \\ \mathrm{Hom}_{\text{simpl. Mengen}}(X', \mathcal{S}(T)) & \xrightarrow[\kappa_{X',T}]{} & \mathrm{Hom}_{\text{top. Räume}}(|X'|, T) \end{array}$$

Hintergrund: Was in dieser Aufgabe bewiesen wird, bedeutet in der Sprache der Kategorien, dass $|-| :$ (simpl. Mengen) $\to$ (top. Räume) und $\mathcal{S} :$ (top. Räume) $\to$ (simpl. Mengen) ein Paar *adjungierter Funktoren* bilden, wobei geometrische Realisierung der *Linksadjungierte* und singulärer Komplex der *Rechtsadjungierte* ist.

Aufgabe 6.3: Wir definieren eine simpliziale Untermenge $\partial\underline{\Delta}^n$ des simplizialen Standardsimplexes $\underline{\Delta}^n$ wie folgt: Für $m \geq 0$ ist $(\partial\underline{\Delta}^n)_m$ die Menge derjenigen Morphismen $\alpha : [m] \to [n]$, die nicht surjektiv sind. Zeige, dass die Mengen $(\partial\underline{\Delta}^n)_m$ tatsächlich eine simpliziale Untermenge von $\underline{\Delta}^n$ bilden. Konstruiere einen Homöomorphismus zwischen der Realisierung $|\partial\underline{\Delta}^n|$ und dem Rand $\partial\Delta^n$ des topologischen n-Simplexes, wobei

$$\partial\Delta^n \;=\; \{(t_0,\ldots,t_n) \in \Delta^n \mid t_i = 0 \text{ für ein } i \in \{0,\ldots,n\}\} \;.$$

Aufgabe 6.4:

(a) Zeige, dass die Homotopierelation für simpliziale Abbildungen $\underline{\Delta}^0 \to \underline{\Delta}^1$ nicht symmetrisch ist.

(b) Es bezeichne $\underline{\Delta}^1 \cup_{\underline{\Delta}^0} \underline{\Delta}^1$ die simpliziale Menge, die aus der disjunkten Vereinigung $\underline{\Delta}^1 \,\dot\cup\, \underline{\Delta}^1$ entsteht, indem die 1-te Ecke der linken Kopie von $\underline{\Delta}^1$ mit der 0-ten Ecke der rechten Kopie von $\underline{\Delta}^1$ identifiziert wird (schematisch ist $\underline{\Delta}^1 \cup_{\underline{\Delta}^0} \underline{\Delta}^1$ gegeben durch das Bild $\cdot \to \cdot \to \cdot$). Zeige, daß die Homotopierelation für simpliziale Abbildungen $\underline{\Delta}^0 \to \underline{\Delta}^1 \cup_{\underline{\Delta}^0} \underline{\Delta}^1$ nicht transitiv ist.

(c) Bezeichne $p : \underline{\Delta}^n \to \underline{\Delta}^0$ die eindeutige simpliziale Abbildung in das simpliziale 0-Simplex. Zeige, dass es genau eine simpliziale Abbildung $j : \underline{\Delta}^0 \to \underline{\Delta}^n$ gibt, so dass die identische Abbildung von $\underline{\Delta}^n$ homotop zur Komposition $j \circ p$ ist.
(Hinweis: Konstruiere die Homotopie $\underline{\Delta}^n \times \underline{\Delta}^1 \to \underline{\Delta}^n$ mit Hilfe einer monotonen Abbildung geordneter Mengen $[n] \times [1] \to [n]$.)

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
7. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 01.12.10

Aufgabe 7.1: (Homologie einer disjunkten Vereinigung)

(a) Für eine Familie $\{C^i\}_{i\in I}$ von Kettenkomplexen abelscher Gruppen definiert man die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} C^i$ dimensionsweise, also $\left(\bigoplus_{i\in I} C^i\right)_n = \bigoplus_{i\in I} (C^i)_n$ mit komponentenweisem Differential. Zeige, dass für jedes $n \geq 0$ die kanonische Abbildung

$$\bigoplus_{i\in I} H_n(C^i) \;\to\; H_n\left(\bigoplus_{i\in I}(C^i)\right)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist.

(b) Ist $\{Y_i\}_{i\in I}$ eine Familie von simplizialen Mengen und A eine abelsche Koeffizientengruppe, so erhält man eine Abbildung von Kettenkomplexen

$$\bigoplus_{i\in I} C(Y_i;A) \;\to\; C(\bigcup_{i\in I} Y_i;A)$$

als Summe der von den Inklusionen induzierten Abbildungen $C(Y_i;A) \to C(\bigcup_{i\in I} Y_i;A)$. Zeige, dass obige Abbildung ein Isomorphismus von Kettenkomplexen ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum, welcher die disjunkte Vereinigung einer Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ von offenen Teilmengen ist. Zeige, daß die kanonische Abbildung

$$\bigcup_{i\in I} \mathrm{Sing}(U_i) \;\to\; \mathrm{Sing}(X)$$

(induziert von den Inklusionsabbildungen $U_i \to X$) ein Isomorphismus von simplizialen Mengen ist.

(d) Zeige zusammenfassend, dass für jedes $n \geq 0$ die Abbildung

$$\bigoplus_{i\in I} H_n(U_i) \;\to\; H_n(X)$$

(induziert von den Inklusionsabbildungen) ein Isomorphismus von abelschen Gruppen ist.

Aufgabe 7.2: (Fünfer-Lemma) Sei

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Außerdem seien beide Reihen exakt. Zeige:

(a) Sind f_2 und f_4 injektiv und f_1 surjektiv, dann ist f_3 injektiv.

(b) Sind f_2 und f_4 surjektiv und f_5 injektiv, dann ist f_3 surjektiv.

(c) Sind f_2 und f_4 Isomorphismen, f_1 surjektiv und f_5 injektiv, dann ist auch f_3 ein Isomorphismus.

(Die Beweismethode für eine Aussage wie das Fünfer-Lemma nennt man *Diagramm-Jagd*. Solche Dinge muß man unbedingt selber durchrechnen, man lernt nichts, wenn sie einem nur vorgeführt werden.)

Aufgabe 7.3: (Schlangenlemma) Sei

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_B"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"'] & B' \arrow[r, "p'"'] & C' & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Die beiden Zeilen seien exakt. Zeige:

(a) Die Abbildung $\delta : \mathrm{Kern}(f_C) \to \mathrm{Cokern}(f_A)$ gegeben durch

$$\delta(c) \;=\; \text{Klasse von } \;(i')^{-1}(f_B(p^{-1}(c))) \;\in\; A'/\mathrm{Bild}(f_A) = \mathrm{Cokern}(f_A)$$

ist wohldefiniert und ein Homomorphismus.

(b) Die Folge

$$\mathrm{Kern}(f_A) \xrightarrow{i} \mathrm{Kern}(f_B) \xrightarrow{p} \mathrm{Kern}(f_C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Cokern}(f_A) \xrightarrow{i'} \mathrm{Cokern}(f_B) \xrightarrow{p'} \mathrm{Cokern}(f_C)$$

ist exakt (die letzten zwei Abbildungen sind auf Repräsentanten durch i' bzw. p' definiert).

(Siehe auch die Szene `http://www.youtube.com/watch?v=etbcKWEKnvg` aus `http://www.imdb.com/title/tt0080936/`.)

Aufgabe 7.4: Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $N\mathcal{C}$ ihr Nerv (vgl. Aufgabe 5.3). Für jedes Objekt x aus $\mathcal{C}$ bezeichne $i(x) = [x, 1] \in |N\mathcal{C}|$ denjenigen Punkt in der geometrischen Realisierung von $N\mathcal{C}$, der durch $(x, 1) \in (N\mathcal{C})_0 \times \Delta^0$ repräsentiert wird.

(a) Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge der Objekte von $\mathcal{C}$, die erzeugt wird von

$$x \sim y \quad \text{falls es einen Morphimus } x \to y \text{ gibt.}$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})/\sim\; \to \pi_0|N\mathcal{C}|, \qquad [x] \mapsto [i(x)]$$

wohldefiniert und surjektiv ist. (Diese Abbildung ist sogar bijektiv, aber das ist mit unseren bisherigen Hilfsmitteln schwer zu zeigen.)

(b) Sei $f \colon x \to x$ ein Endomorphismus eines Objektes x von $\mathcal{C}$. Betrachte die stetige Abbildung

$$j(f) \colon [0, 1] \to |N\mathcal{C}|, \qquad t \mapsto [f, (1 - t, t)],$$

wobei $[f, (1 - t, t)]$ die Klasse von $(f, (1 - t, t)) \in (N\mathcal{C})_1 \times \Delta^1$ bezeichnet. Zeige, dass $j(f)$ ein geschlossener Weg am Punkt $i(x)$ in $|N\mathcal{C}|$ ist. Sei nun $g \colon x \to x$ ein weiterer Endomorphismus von x. Beweise die Relation

$$[j(f)] * [j(g)] \;=\; [j(g \circ f)]$$

in der Fundamentalgruppe $\pi_1(|N\mathcal{C}|, i(x))$. Hierbei bezeichnet $[\omega]$ die Homotopieklasse eines geschlossenen Weges ω und $*$ das Produkt in der Fundamentalgruppe.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
8. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 08.12.10

Aufgabe 8.1: Sei X ein Raum und $X = U \cup V$ eine Überdeckung von X durch zwei offene Teilmengen. Definiere Homomorphismen $\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(U \cap V, A)$ so dass die lange Folge der Homologiegruppen

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V, A) \xrightarrow{(i^U_*, i^V_*)} H_n(U,A) \oplus H_n(V,A) \xrightarrow{\binom{j^U_*}{-j^V_*}} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(U \cap V, A) \longrightarrow \cdots$$

exakt ist. Hierbei sind $i^U : U \cap V \to U$, $i^V : U \cap V \to V$, $j^U : U \to X$ und $j^V : V \to X$ die Inklusionsabbildungen. Die Folge heißt die *Mayer-Vietoris-Folge* der Überdeckung.

Aufgabe 8.2: In der Vorlesung hatten wir $H_n(S^0, A)$ für $n \geq 0$ und $H_0(S^m, A)$ für $m \geq 0$ bestimmt. Benutze diese Information und die Mayer-Vietoris-Folge aus Aufgabe 8.1, um einen alternativen Beweis für die aus der Vorlesung bekannte Berechnung von $H_n(S^m, A)$ für alle $m \geq 0$ und $n \geq 0$ zu geben.

Aufgabe 8.3: Sei $m \geq 1$ und X ein Raum mit folgender Eigenschaft: jeder Punkt aus X hat eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist. Zeige: für jeden Punkt $x \in X$, jede Koeffizientengruppe A und alle $n \geq 0$ erfüllen die 'lokalen Homologiegruppen' an x die Relation

$$H_n(X, X - \{x\}; A) \cong \begin{cases} A & \text{für } n = m \text{ und} \\ 0 & \text{für } n \neq m. \end{cases}$$

Aufgabe 8.4: In dieser Aufgabe stellen wir Beziehungen zwischen den Homologiegruppen eines Raumes X in Dimension 0 und 1 und der Menge $\pi_0 X$ der Wegekomponenten bzw. der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x)$ her.

(a) Für einen Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit $\tilde{x} : \Delta^0 \to X$ die Abbildung, die den einzigen Punkt von Δ^0 auf x abbildet. Zeige, dass für jede Koeffizientengruppe A die Abbildung

$$A[X] \to H_0(X,A) \qquad \sum a_i x_i \mapsto \left[\sum a_i \tilde{x}_i\right]$$

über einen Gruppenisomorphismus $A[\pi_0 X] \xrightarrow{\cong} H_0(X,A)$ faktorisiert.

(b) Wir bezeichnen mit $i : \Delta^1 \to [0,1]$ den Homöomorphismus mit $i(t, 1-t) = t$. Zeige, dass die Abbildung

$$\pi_1(X,x) \to H_1(X,\mathbb{Z}) \qquad [\omega] \mapsto [\omega \circ i]$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus ist, wobei $\omega : [0,1] \to X$ ein geschlossener Weg an x ist.

(Man kann zeigen, dass der Gruppenhomomorphismus aus Teil (b) für wegzusammenhängendes X einen Isomorphismus $\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}} \to H_1(X,\mathbb{Z})$ induziert. Dabei ist $\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$ die „abelsch gemachte“ Fundamentalgruppe, d.h. der Quotient von $\pi_1(X,x)$ nach seiner Kommutatoruntergruppe. Insbesondere ist also für wegzusammenhängende Räume X mit abelscher Fundamentalgruppe $H_1(X,\mathbb{Z})$ isomorph zur Fundamentalgruppe.)

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
9. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 15.12.10

Aufgabe 9.1: Der Raum Y entstehe aus X durch Ankleben von n-Zellen,

$$Y = X \cup_f J \times D^n$$

für eine Anklebeabbildung $f : J \times \partial D^n \to X$. Zeige, dass X ein Umgebungsdeformationsretrakt von Y ist. Genauer heißt dies: es gibt

(i) eine offene Umgebung V von X in Y,

(ii) eine Retraktion $r : V \to X$ (also $r(x) = x$ für alle $x \in X$) und

(iii) eine Homotopie $H : V \times [0,1] \to V$

so dass gilt:

$$\begin{array}{ll} H(y,0) = r(y) \quad \text{und} \quad H(y,1) = y & \text{für alle } y \in V, \\ r(H(y,t)) = r(y) & \text{für alle } y \in V \text{ und } t \in [0,1] \text{ und} \\ H(x,t) = x & \text{für alle } x \in X \text{ und } t \in [0,1]. \end{array}$$

Insbesondere ist also die Inklusion $X \to V$ eine Homotopieäquivalenz.

Aufgabe 9.2: Sei Y ein Raum und X ein abgeschlossener Unterraum, der ein Umgebungsdeformationsretrakt ist.

(a) Zeige, dass die Quotientenprojektion $Y \to Y/X$ einen Isomorphimus der relativen Homologiegruppen
$$H_n(Y, X; A) \;\to\; H_n(Y/X, X/X; A)$$
für alle $n \geq 0$ und alle Koeffizientengruppen A induziert.

(b) Zeige, dass für alle $n \geq 1$ die relative Homologiegruppe $H_n(Y, X; A)$ des Paares (Y, X) isomorph zur absoluten Homologiegruppe $H_n(Y/X, A)$ des Quotientenraumes ist.

Aufgabe 9.3: Der *n-dimensionale reell-projektive (bzw. komplex-projektive) Raum* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (bzw. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$) ist die Menge aller 1-dimensionalen reellen (bzw. komplexen) Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n+1}$). Die Topologie ist die Quotientenraum-Topologie bezüglich der Abbildung

$$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n \qquad x \mapsto \mathbb{R} \cdot x = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

bzw. des komplexen Analogons. Wir fassen $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ als Unterraum von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ auf, nämlich als den Unterraum derjenigen Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$, deren letzte Koordinate gleich 0 sind; analog für $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ aus $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ durch Ankleben einer n-dimensionalen Zelle entsteht.

(b) Zeige, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ aus $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ durch Ankleben einer $2n$-dimensionalen Zelle entsteht.

Aufgabe 9.4: Sei X ein Raum und seien $f, g : S^{n-1} \to X$ stetige Abbildungen. Zeige: wenn f und g homotop sind, dann sind die verklebten Räume

$$X \cup_f D^n \qquad \text{und} \qquad X \cup_g D^n$$

homotopieäquivalent.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
10. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 22.12.10

Aufgabe 10.1: Ein Raum X heißt *lokal zusammenziehbar* wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U hat, so dass $\{x\}$ ein Deformations-Retrakt von U ist.

Zeige: Jeder Raum, der die Struktur eines absoluten CW-Komplexes zulässt, ist lokal zusammenziehbar.

Aufgabe 10.2: (Alternative Definition von CW-Komplexen) Eine *Zellenzerlegung* eines Raumes X ist eine Menge $\mathcal{E}$ von Unterräumen von X mit den Eigenschaften

(i) jedes $e \in \mathcal{E}$ ist eine offene Zelle, also topologisch äquivalent zu $\overset{\circ}{D}{}^n$ für ein $n \geq 0$;

(ii) als Menge ist X die disjunkte Vereinigung der Zellen, d. h. $X = \dot{\bigcup}_{e \in \mathcal{E}} e$.

Wegen des Satzes von der topologischen Invarianz der Dimension sind $\overset{\circ}{D}{}^n$ und $\overset{\circ}{D}{}^m$ nur dann homöomorph, wenn $n = m$ gilt; die Dimension einer Zelle e ist also eindeutig bestimmt.

Es sei nun $\mathcal{E}$ eine Zellenzerlegung eines Hausdorff-Raumes X, für die gilt:

(a) Zu jeder n-Zelle $e \in \mathcal{E}$ gibt es eine charakteristische Abbildung, also eine stetige Abbildung $\chi_e : D^n \to X$, welche das Innere von D^n homöomorph auf e abbildet und welche ∂D^n in die Vereinigung aller Zellen von Dimension kleiner als n abbildet.

(b) Die abgeschlossene Hülle $\bar{e}$ jeder Zelle $e \in \mathcal{E}$ trifft nur endlich viele andere Zellen.

(c) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$ der Durchschnitt $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen in X ist.

Zeige, dass X mit der Struktur eines CW-Komplexes versehen werden kann. (In der Vorlesung beweisen wir umgekehrt, dass die Zellenzerlegung eines CW-Komplexes die Eigenschaften (a), (b) und (c) hat.)

Aufgabe 10.3: Sei X ein CW-Komplex mit n-Skelett X_n und sei $p\colon E \to X$ eine Überlagerung. Zeige, dass E ein CW-Komplex mit n-Skelett $E_n = p^{-1}(X_n)$ ist.

Aufgabe 10.4: Die *Einhängung* ΣX eines Raumes X ist der Quotientenraum des Produktes $X \times [0,1]$ bei dem die zwei 'Endkopien' $X \times \{0\}$ und $X \times \{1\}$ zu jeweils einem Punkt identifiziert werden. Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus

$$\tilde{H}_n(X, A) \;\cong\; \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X, A)$$

der reduzierten Homologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten A für $n \geq 0$. Was ist ΣS^n? (Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Einhängung ΣX als Vereinigung zweier Kegel auf X darzustellen und die zugehörige Mayer-Vietoris-Folge zu betrachten.)

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
11. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 12.01.10

Aufgabe 11.1: Gib eine Zellenzerlegung (durch Skizze) für folgende Räume an und berechne ihre Euler-Charakteristik: Möbius-Band, Voll-Torus, Brezel-Oberfläche, Klein'sche Flasche

Aufgabe 11.2: Wir zeigen jetzt, dass es für 'vernünftige' Räume bis auf Homotopie keinen Unterschied zwischen reduzierter und unreduzierter Einhängung gibt.

(a) Sei (X, A) ein Raumpaar mit der Homotopie-Erweiterungseigenschaft. Zeige: Wenn A zusammenziehbar ist, dann ist die Quotientenraum-Projektion $X \to X/A$ eine Homotopie-Äquivalenz.

(b) Für einen Raum X ist die *(unreduzierte) Einhängung* ΣX definiert als Quotientenraum

$$\Sigma X \;=\; X \times [0,1]/\sim$$

wobei die Äquivalenzrelation den Unterraum $X \times 0$ zu einem Punkt identifiziert und den Unterraum $X \times 1$ zu einem weiteren Punkt identifiziert. Wenn X einen Basispunkt $*$ hat, dann kann $\Sigma\{*\}$ als Unterraum von ΣX aufgefasst werden. Die *reduzierte Einhängung* $\Sigma_{\mathrm{red}} X$ ist definiert als Quotientenraum

$$\Sigma_{\mathrm{red}} X = \Sigma X/\Sigma\{*\} = X \times [0,1]/(X \times \{0,1\} \cup \{*\} \times [0,1]).$$

Zeige, dass für einen CW-Komplex X mit einer 0-Zelle als Basispunkt die Quotientenraum-Projektion

$$\Sigma X \to \Sigma_{\mathrm{red}} X$$

eine Homotopie-Äquivalenz ist.

Aufgabe 11.3: Es sei (X, A) ein Raumpaar mit der Homotopie-Erweiterungseigenschaft. Zeige: Wenn die Inklusion $A \to X$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist, dann ist X ein Homotopie-Retrakt des Quotientenraumes X/A, d.h. es gibt eine stetige Abbbildung $r\colon X/A \to X$ so dass die Komposition $r \circ p$ von r mit der Quotientenraum-Projektion $p\colon X \to X/A$ homotop zur Identität von X ist.

Aufgabe 11.4: Es sei $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \mathbb{R}^2$ wie in Aufgabe 3.1 der Unterraum der Hawaiianischen Ohrringe.

(a) Zeige, dass für kein n die Inklusion $K_n \to H$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (Hinweis: Konstruiere eine Retraktion und benutze die Berechnung von $\pi_1(S^1)$.)

(b) Zeige: Für jede stetige Selbst-Abbildung $f : H \to H$, welche homotop zu identischen Abbildung ist, gilt $f(0) = 0$. (Hinweis: Wenn $f(0) \neq 0$ wäre, so ließe sich ein Widerspruch zu Teil (a) konstruieren.)

(c) Zeige, dass das Paar $(H, \{0\})$ nicht die Homotopie-Erweiterungseigenschaft hat (und deswegen insbesondere nicht mit der Struktur eines relativen CW-Komplexes versehen werden kann).

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie I WS 2010/11
12. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 19.01.10

Aufgabe 12.1: (Punktierte versus freie Homotopieklassen) Seien X und Y punktierte Räume. Ignorieren der Basispunkte gibt eine Abbildung

$$[X, Y]_* \;\to\; [X, Y]$$

wobei links die Menge der Homotopieklassen, relativ Basispunkt, von punktierten Abbildungen steht und rechts die Menge der 'freien' Homotopieklassen von beliebigen stetigen Abbildungen (d.h. weder Abbildung noch Homotopie nehmen Notiz von den Basispunkten).

(a) Sei X ein absoluter CW-Komplex und der Basispunkt eine der 0-Zellen. Zeige, dass für jeden einfach-zusammenhängenden Raum Y die Abbildung $[X, Y]_* \to [X, Y]$ bijektiv ist. (Hinweis: Benutze die Homotopie-Erweiterungseigenschaft für die Raumpaare $(X, \{*\})$ und $(X \times [0, 1], X \times \{0, 1\} \cup \{*\} \times [0, 1])$. Ein Raum Y heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn er weg-zusammenhängend ist und für einen (und damit jeden) Basispunkt $y_0 \in Y$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y, y_0)$ trivial ist.)

(b) Zeige durch Beispiele, dass die Abbildung von punktierten zu freien Homotopieklassen im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 12.2: Seien M_1, M_2 und M_3 punktierte Mengen (d.h. es ist jeweils ein Basispunkt ausgewählt). Eine Folge von Basispunkt erhaltenden Abbildungen

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

heißt *exakt* falls gilt:

(i) die Komposition $g \circ f : M_1 \to M_3$ ist konstant und

(ii) für jedes $x \in M_2$, so dass $g(x)$ der Basispunkt von M_3 ist, gibt es ein $y \in M_1$ mit $f(y) = x$.

Sei nun X ein Raum, A ein Unterraum und $a \in A$ ein Basispunkt für A und X. In dem Quotientenraum X/A wählen wir A/A als Basispunkt.

Zeige: Wenn das Paar (X, A) die Homotopie-Erweiterungseigenschaft hat, dann ist für einen beliebigen punktierten Raum Z die Folge

$$[X/A, Z]_* \to [X, Z]_* \to [A, Z]_*$$

exakt. (Hierbei bezeichnet $[-, -]_*$ die Menge der Homotopieklassen, relativ Basispunkt, von punktierten Abbildungen. Als Basispunkt der Menge $[-, -]_*$ ist dabei die Klasse der konstanten Abbildung zu nehmen. Die Abbildungen von Homotopieklassen sind induziert durch die Projektion $X \to X/A$ und die Inklusion $A \to X$.)

Aufgabe 12.3: (Skelettfiltrierung simplizialer Mengen) Sei X eine simpliziale Menge und $m \geq 0$. Es sei J_m die Menge der nicht-ausgearteten m-Simplizes und

$$\mathrm{Sk}_m(X)_n = \{x \in X_n \,|\, \text{Es gibt } \alpha\colon [n] \to [m] \text{ und } y \in X_m \text{ mit } \alpha^*(y) = x\}$$

Zeige:

(a) Die Mengen $\mathrm{Sk}_m(X)_n$ bilden eine Unter-simpliziale Menge $\mathrm{Sk}_m(X)$ von X, und ein n-Simplex $x \in X_n$ liegt genau dann in $\mathrm{Sk}_m(X)$ wenn es die Ausartung eines nicht ausgearteten Simplizes von X in Dimension höchstens m ist.

(b) Die Inklusion $\mathrm{Sk}_{m-1}(X) \subseteq \mathrm{Sk}_m(X)$ und die charakteristischen Abbildungen $\underline{\Delta}^m \to X$ der nicht-ausgearteten m-Simplizes induzieren einen Isomorphismus

$$\mathrm{Sk}_{m-1}X \cup_{J_m \times \partial\underline{\Delta}^m} J_m \times \underline{\Delta}^m \cong \mathrm{Sk}_m X$$

von simplizialen Mengen.

Aufgabe 12.4: Sei X eine simpliziale Menge. Zeige: Die geometrische Realisierung $|X|$ ist ein CW-Komplex mit m-Skelett $|\mathrm{Sk}_m(X)|$, dessen m-Zellen den nicht-ausgearteten m-Simplizes von X entsprechen. (Hinweis: Benutze Aufgabe 12.3.)